KHAI TRIỂN KỲ DỊ CỦA MA TRẬN VÀ ỨNG DỤNG

Nhóm 11

Bùi Đức Tài	20185475
Đào Thị Thu Hà	20185444
Đặng Thị Ánh	20185433
Vũ Minh Nguyệt	20185469
Nguyễn Văn Hiệp	20185448

Nội dung chính

Phần 1: Kiến thức cơ bản

Phần 2: Khai triển giá trị kỳ dị của ma trận

Phần 3: Ứng dụng

1.Kiến thức cơ bản

Hệ thống lại một số khái niệm của đại số tuyến tính

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Hạng của ma trận

Cho A là ma trận thực cỡ mx$n$. Giả sử $m \geq n$.

Định nghĩa 1.1. *Tập ảnh của ma trận A* được *định nghĩa bởi*:

$$\mathrm{Im}A = \{y \in R^m, \exists x \in R^n : y = Ax\}$$

Nếu $A = (a_1 \dots a_n)$ (với $a_1, \dots, a_n$ là các cột của A) thì

$$\mathrm{Im}A = span\{a_1, \dots, a_n\},$$

Với $span\{a_1, \dots, a_n\}$ là không gian con của R^m sinh bởi n vector $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Định nghĩa 1.2. Không gian hạt nhân của ma trận A được định nghĩa bởi :

$$\mathrm{Ker}A = \{x \in R^n : Ax = 0\}$$

Định nghĩa 1.3. Hạng của một ma trận A được xác định bởi số chiều của Im(A) tức là

$$rank(A) = \dim(\mathrm{Im}A)$$

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Hạng của ma trận

Chú ý

- Hạng của một ma trận A được có thể được định nghĩa bởi số lớn nhất các cột (hay hàng của A) độc lập tuyến tính .

- Nếu $A \in R^{mxn}$, thì dim(KerA) + $rank(A)) = n$

1. Kiến thức cơ bản

1.2. Trị riêng, vector riêng

Cho một ma trận vuông **A** $\in R^{nxn}$, nếu số vô hướng λ và vector x $\neq 0 \in R^n$ thoả mãn:

$$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$$

Thì λ được gọi là một trị riêng của **A** và x được gọi là vector riêng tương ứng với trị riêng đó.

Một số tính chất:

- Nếu x là một vector riêng của **A** ứng λ với thì kx, k≠0 cũng là vector riêng ứng với trị riêng đó.
- Mọi ma trận vuông bậc n đều có n trị riêng (kể cả lặp) và có thể là các số phức.
- Với ma trận đối xứng xác định riêng, tất cả các trị riêng đều là các số thực.
- Với *ma trận xác định dương*, tất cả các trị riêng của nó đều là các số thực dương. Với *ma trận đối xứng nửa xác định dương*, tất cả các trị riêng của nó đều là các số thực không âm.

1. Kiến thức cơ bản

1.3. Hệ trực giao và trực chuẩn

Một hệ cơ sơ $u_1, u_2, \ldots, u_m \in R^m$ được gọi là trực giao nếu mỗi vector đều khác 0 và tích 2 vector bất kỳ bằng 0.

$$\mathbf{u_{i,j} \neq 0; \ \ u_i u_j = 0 \ \forall\, 1 \leq i \neq j \leq m}$$

Một hệ cơ sơ $u_1, u_2, \ldots, u_m \in R^m$ được gọi là trực chuẩn nếu nó là một hệ trực giao và độ dài mỗi vector bằng 1.

$$\mathbf{u_i u_j = 0 \ \forall\, 1 \leq i \neq j \leq m}$$

$$\mathbf{||u_i|| = 1 \ \forall\, i = 1 \ldots m}$$

Goi $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$ với $u_1, u_2, \ldots, u_m \in R^m$ là trực chuẩn, ta có:

$$\mathbf{UU^T = U^TU = I}$$

trong đó I là ma trận đơn vị bậc m. Ta gọi U là *ma trận trực giao*

1. Kiến thức cơ bản

1.3. Hệ trực giao và trực chuẩn

Một vài tính chất:

1. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$: nghịch đảo của một ma trận trực giao chính là chuyển vị của nó.
2. Nếu **U** là ma trận trực giao thì chuyển vị của nó U^T cũng là một ma trận trực giao.

3. Định thức của ma trận trực giao bằng 1 hoặc -1.

4. Dưới dạng biến đổi tuyến tính, một ma trận trực giao bảo toàn các yếu tố hình học: tích vô hướng, độ dài, góc, …

5. Giả sử $\mathbf{U}^* \in R^{mxr}$, $r < m$ là một ma trận trực giao của U được tạo bởi r cột của U ta sẽ có $\mathbf{U}^{*T}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_r$

1. Kiến thức cơ bản

1.4. Chuẩn vector

Định nghĩa 1.4. Chuẩn vectơ trên R^n là một hàm $f: R^n \longrightarrow R$ thỏa mãn các tính chất sau:

$$(i) f(x) \geq 0, \forall x \in R^n$$

$$f(x) = 0 <=> x = 0$$

$$(ii) f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in R^n$$

$$(iii) f(\alpha x) = |\alpha|\, f(x), \forall \alpha \in R, \forall x \in R^n$$

Kí hiệu: $f(x) = \|x\|$.

1. Kiến thức cơ bản

1.4. Chuẩn vector

Cho Vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, các chuẩn vector thông dụng là :

Chuẩn 2 ($p = 2$)

$$\|x\|_2 == (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$$

Bổ đề: Nếu $Q \in R^n$ là ma trận trực giao và $x \in R^n$ thì

$$\| Qx \|_2^2 = \| x \|_2^2$$

Chứng minh. Ta có theo định nghĩa chuẩn 2 của vector, ta có

$$\begin{aligned}
\| Qx \|_2^2 &= \langle Qx, Qx \rangle = (Qx)^T(Qx) \\
&= x^T Q^T Q x \ (\textit{do tính chất của ma trận chuyển vị}) \\
&= x^T x \ (\textit{do } Q \textit{ là ma trận trực giao nên } Q^T Q = I) \\
&= \| x \|_2^2
\end{aligned}$$

1. Kiến thức cơ bản

1.5. Chuẩn ma trận

Định nghĩa 1.5. Chuẩn ma trận trên R^{mxn} là hàm số f: $R^{mxn} \longrightarrow R$ thỏa mãn các tính chất sau:

$$(i) f(A) \geq 0, \forall A \in R^{mxn}$$

$$f(A) = 0 <=> A = 0$$

$$(ii) f(A+B) \leq f(A) + f(B), \forall A, B \in R^{mxn}$$

$$(iii) f(\alpha A) = |\alpha|\, f(A), \forall \alpha \in R, \forall A \in R^{mxn}$$

$Kí\ hiệu: f(A) = \|A\|$

1. Kiến thức cơ bản

1.5. Chuẩn ma trận

“ Cho ma trận $(A) = (a_{ij})_{mx} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, các chuẩn thông dụng là:

- Chuẩn F (Frobeneous):

Cho $A = (a_{ij})_{mxn}$ ta định nghĩa chuẩn F của ma trận A là

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Chuẩn 2 của ma trận:

Chuẩn 2 của ma trận A là căn bậc 2 của giá trị riêng lớn nhất của ma trận $A^T.A$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}.$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVDs)

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

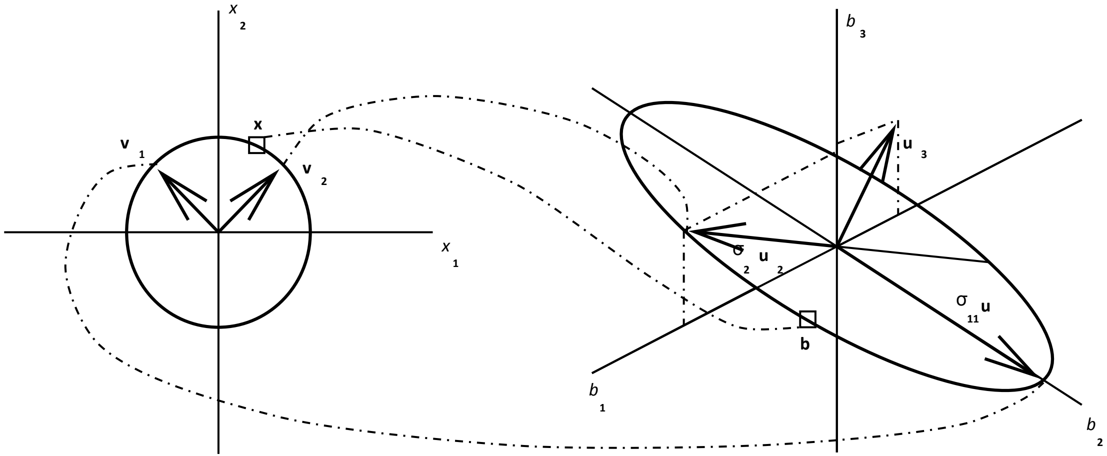
2.1. Giới thiệu

- Phương pháp *phân tích suy biến* (singular value decomposition) được viết tắt là SVDs
- Thuộc nhóm matrix factorization
- Được phát triển dựa trên những tính chất của ma trận trực giao và ma trận đường chéo để tìm ra một ma trận xấp xỉ với ma trận gốc.
- Ứng dụng: xử lý hình ảnh, clustering, nén và giảm chiều dữ liệu, bài toán recommendation
- Mục tiêu: Tìm ra một lớp các ma trận xấp xỉ tốt nhất với một ma trận cho trước dựa trên khoảng cách norm Frobenios giữa 2 ma trận.

Người ta đã chứng minh được rằng ma trận xấp xỉ tốt nhất được biểu diễn dưới dạng tích của 3 ma trận rất đặc biệt bao gồm 2 ma trận trực giao (orthogonal matrix) và 1 ma trận đường chéo (diagonal matrix).

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.2. Định nghĩa về về giá trị kỳ dị, các vector kỳ dị trái và phải



$$S = \left\{ x \in R^n \mid \|x\| \leq 1 \right\} \rightarrow A \in R^{m \times n} \rightarrow AS = \left\{ Ax \mid x \in S \right\}$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.2. Định nghĩa về về giá trị kỳ dị, các vector kỳ dị trái và phải

Có 1 ánh xạ tuyến tính từ không gian $R^{m\times n}$ vào $R^{m\times n}$ ta được ma trận cỡ mxn. A có thể coi như 1 phép biến hình cầu từ trong không n chiều thành 1 hình khác trong không gian m chiều.

Vector $(v_1, v_2) \rightarrow (u_1, u_2, u_3)$. Trong đó các u là các vector đơn vị và các σ_i chỉ về độ lớn.

Kết hợp của phép co dãn và phép quay các bán trục cũng bị co dãn, trục dài ra, trục co lại. Từ hình tròn trở thành 1 hình elip.

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.2. Định nghĩa về về giá trị kỳ dị, các vector kỳ dị trái và phải

Giả sử $A \in R^{m \times n}, m > n, rankA = n$. Tức A là 1 ma trận gầy, số hàng lớn hơn số cột.

Xét trên hình, **Giá trị kỳ dị của ma trận A** là các giá trị σ_i đang làm co dãn các bán trục hay độ dài của các vector bán trục chính các giá trị kỳ dị

Các u sinh ra các trục của elip được gọi là các **vector kỳ dị trái.**

Các $v_i \to u_i \sigma_i$ thì $\bar{v}_i$ gọi là **vector kỳ di phải** ứng với giá trị kỳ dị $\bar{\sigma}_i$ hay $\bar{v}_i$ là các vector trực chuẩn thoả mãn $A\bar{v}_i = \bar{u}_i \bar{\sigma}_i$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.3. Khai triển kỳ dị của ma trận hạng đủ

Đặt:

$$U = \left[u_1, u_2, \ldots, u_n\right]$$

$$\sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

$$V = \left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right]$$

Với $\sum$ là ma trận đường chéo, gồm các phần tử trên đường chéo là các giá trị kỳ dị.

Khi đó:

$$Av_i = \sigma_i u_i, \forall i = \overline{1,n} \Leftrightarrow AV = U\sum \Leftrightarrow A = U\sum V^T$$

$$\Leftrightarrow A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots + \sigma_n u_n v_n^T$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.3. Khai triển kỳ dị của ma trận hạng đủ

Cụ thể:

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 & \dots & \sigma_n u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Khi có 1 ma trận đường chéo, ta nhân vào bên trái, ta được các hàng tương ứng nhân với các phần trử trên đường chéo tương ứng

Ta được 1 khai triển kỳ dị:

$$A = U \sum V^T$$ (Cách viết thứ nhất)

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.3. Khai triển kỳ dị của ma trận hạng đủ

Dễ thấy:

A: $R^{m\times n} \to R^{m\times n}$, số chiều m < số chiều n

Hệ vector $v_1, v_2, ..., v_n$ trực chuẩn cũng là ma trận cơ sở của $R^{m\times n}$

$V = [v_1, v_2, ..., v_n]$ là một ma trận trực giao

U cũng là một ma trận không vuông các cột cũng tảo thành một ma trậntrực chuẩn cỡ mxn

Tích trên sẽ là một ma trận A cỡ mxn.

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.3. Khai triển kỳ dị của ma trận hạng đủ

Cách viết thứ 2:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 \, \sigma_2 u_2 & \dots & \sigma_n u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.3. Khai triển kỳ dị của ma trận hạng không đủ

Xét $A \in R^{m \times n}, m > n, rank = r < n$

- Các giá trị kỳ dị: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$
- Các vector kỳ dị trái: $u_1, u_2, ..., u_r$
- Các vector kỳ dị phải: $v_1, v_2, ..., v_r$

Khai triển kỳ dị của ma trận:

$$U = [u_1, u_2, ..., u_r] \in R^{m \times n}, \sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r) \in R^{m \times n}, V = [v_1, v_2, ..., v_r]$$

$$A = U \sum V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + ... + \sigma_n u_n v_n^T$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.3. Khai triển kỳ dị của ma trận hạng không đủ

$$U = \left[u_1, u_2, \ldots, u_r\right] \in R^{m\times n}, \sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \in R^{m\times n}, V = \left[v_1, v_2, \ldots, v_r\right]$$

$$A = U \sum V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots + \sigma_n u_n v_n^T$$

Bản thân các vector *vi* là các vector trực chuẩn với nhau.

$$v_j^T v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$AV = U \sum (V^T V) = (U \sum V^T) V$$

Bổ sung: $\{v_1, \ldots, v_r\} \xrightarrow{bs} \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i \\ 0 \quad i > r \end{cases}$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.4. Phương pháp xác định giá trị kỳ dị và các vector kỳ dị

Giả sử tồn tại: $A^T A = \left(U \Sigma V^T\right)^T \left(U \Sigma V^T\right) = V \Sigma^2 V^T$ (*)

Từ (*):

- Thấy được v_i là các vector riêng ưng với các giá trị riêng khác 0 của $A^T A$
- σ_i^2 là các giá trị riêng của $A^T A$
- $\{v_i\}_{i=\overline{1,r}}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian vector $\ker A^{\perp}$
- $\|A\| = \sigma_1$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.5. Thực hiện

Bước 1: Tính A^T, A^TA và AA^T

Bước 2: Xác định trị riêng của ma trận A^TA => Các giá trị kì dị ma trận A

Với mỗi giá trị riêng λi của ma trận ta tìm được giá trị kì dị của ma trận

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ với i = min(m,n)

Bước 3: Xây dựng ma trận Σ , tùy thuộc vào vào kích thước của A mà Σ sẽ có 2 dạng khác nhau

Bước 4: Tính giá trị ma trận V => V^T

Ứng với mỗi trị riêng của A^TA ta tìm được một vector riêng vi, từ đó ta được

$V = [v1v2 \ldots vn]$ => V^T

Bước 5: Tính giá trị ma trận U.

Ứng với mỗi trị riêng của AA^T ta tìm được một vector riêng ui, từ đó ta được

$U = [u_1u_2 \ldots um]$

Bước 6: Từ đó ta có :$A = U.\Sigma.V^T$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.5. Thực hiện

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}$$

- Giá trị riêng $\lambda_1 = 32$, $\lambda_2 = 18$
- Giá trị kỳ dị $\sigma_1 = \sqrt{32}$, $\sigma_2 = \sqrt{18}$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.5. Thực hiện

Vector riêng của ma trận $A^T A$ là $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $và$ $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

-> $v_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

-> $V^T = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Tương tự, ta tìm được $U = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

-> $\Sigma = \begin{bmatrix}4\sqrt{2} & 0\\0 & 3\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Cuối cùng, ta được:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\sqrt{2} & 0\\0 & 3\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.5. Thực hiện

Code

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.6. Nghịch đảo suy rộng

- Giả sử A là ma trận khác 0 với khai triển kỳ dị là $A = \left(U\Sigma V^T\right)$. Khi đó $A^{\dagger} = V\Sigma^{-1}U^T$ được gọi là ma trận nghịch đảo suy rộng của A

- Trường hợp m>n, rankA=n

$$A^{\dagger} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

$$x = A^{\dagger}y \in X_{ls} = \left\{z \mid \|Az - y\| = \min_{\omega} \|A\omega - y\|\right\}$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.7. Số điều kiện của ma trận

(Pseudo-inverse or Moore-penrose inverse)

Giả sử A là ma trận khả nghịch

$y = Ax \qquad y + \delta y = A(x + \delta x)$

$$\delta x = A^{-1}\delta y \rightarrow \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta y\|$$

$$\|y\| \le \|A\|\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|y\|} \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta y\|}{\|y\|}$$

$$condA = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

2. Khai triển kỳ dị của ma trận

2.7. Số điều kiện của ma trận (Pseudo-inverse or Moore-penrose inverse)

Số điều kiện của ma trận có các tính chất:

i) $cond(A) \geq 1;$

ii) Nếu A là ma trận trực giao (tức là $A' = A^{-1}$) thì $con(A) = 1;$

iii) Với mọi $c \neq 0 \in R$: ta đều có $cond(cA) = cond(A);$

iv) Nếu $D = diag(d_i)_1^n$ thì $cond(D) = \dfrac{\max|d_i|}{\min|d_i|}$.

3.

Ứng dụng

3. Ứng dụng

3.1. Phân tích suy biến của một ma trận

3.2. Giải phương trình tuyến tính

3.3. Nén ảnh

3.4. Một số ứng dụng khác: Phân tích quang phổ, nén âm thanh bằng hình ảnh,...

Thanks

Your listening is our honor

Giải tích số

Giảng viên
Hà Thị Ngọc Yến

Nhóm 11

04/06/2021