Giải tích số

Các phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo

Nhóm 1

Vũ Thị Thu Hoài
Nguyễn Thị Kim Hoa
Nguyễn Hoa Phương Thảo
Phạm Việt Hà
Vũ Thị Ánh Nguyệt

Thứ sáu 21.05.2021

Mục lục

Giới thiệu chung

Bài toán

Cho ma trận A vuông cấp n khả nghịch.
Tìm ma trận nghịch đảo của A.

$$A \in M_{n\times n}(R)$$

$$det(A) \neq 0$$

Bài toán

Cho ma trận A vuông cấp n khả nghịch.
Tìm ma trận nghịch đảo của A.

$$A \in M_{n\times n}(R)$$

$$det(A) \neq 0$$

Bài toán

Cho ma trận A vuông cấp n khả nghịch.
Tìm ma trận nghịch đảo của A.

$$A \in M_{n\times n}(R)$$

$$det(A) \neq 0$$

Tại sao phải giải gần đúng?

1. Khi giải đúng, thời gian tính toán lớn.
2. Sai số trong tính toán.

Các phương pháp giải gần đúng

1. Phương pháp Newton
2. Phương pháp lặp Jacobi
3. Phương pháp lặp Gauss - Seidel

Các phương pháp giải gần đúng

1. Phương pháp Newton
2. Phương pháp lặp Jacobi
3. Phương pháp lặp Gauss - Seidel

Các phương pháp giải gần đúng

1. Phương pháp Newton
2. Phương pháp lặp Jacobi
3. Phương pháp lặp Gauss - Seidel

Phương pháp Newton
Ý tưởng

Bài toán

Giả sử cho số thực a khác 0, tìm x để $a \times x = 1$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x}, \quad a \neq 0.$$

Ta đặt:

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

Bài toán

Giả sử cho số thực a khác 0, tìm x để $a \times x = 1$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x}, \quad a \neq 0.$$

Ta đặt:

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

Bài toán

Giả sử cho số thực a khác 0, tìm x để $a \times x = 1$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x}, \quad a \neq 0.$$

Ta đặt:

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

Bài toán

Giả sử cho số thực a khác 0, tìm x để $a \times x = 1$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x}, \quad a \neq 0.$$

Ta đặt:

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

Theo công thức Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{a - \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{(x_k)^2}}$$

hay

$$x_{k+1} = x_k + x_k \times (1 - a \times x_k), \quad k \in N$$

Theo công thức Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{a - \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{(x_k)^2}}$$

hay

$$x_{k+1} = x_k + x_k \times (1 - a \times x_k), \quad k \in N$$

Theo công thức Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{a - \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{(x_k)^2}}$$

hay

$$x_{k+1} = x_k + x_k \times (1 - a \times x_k), \quad k \in N$$

Công thức lặp

Áp dụng với ma trận

$$X_{k+1} = X_k + X_k \times (E - A \times X_k), \quad k \in N$$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = \ldots = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = \ldots = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = \dots = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = ... = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = ... = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = ... = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = ... = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k \to \infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt $G_k = E - A \times X_k$. Theo công thức lặp:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = {G_{k-1}}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có: $G_k = {G_{k-1}}^2 = ... = {G_0}^{2^k}$

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \quad (1)$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \quad (2)$$

hay

$$\lim_{k \to \infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \qquad (1)$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \qquad (2)$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \tag{1}$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \tag{2}$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \tag{1}$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \tag{2}$$

hay

$$\lim_{k \to \infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \qquad (1)$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \qquad (2)$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \qquad (1)$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \qquad (2)$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \quad (1)$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \quad (2)$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \tag{1}$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \tag{2}$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Điều kiện hội tụ

Mặt khác

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}({G_0}^{2^k})$$

nên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leqslant \| A^{-1} \| . \| G_0 \|^{2^k} \quad (1)$$

Nếu $\| G_0 \| < 1$ thì:

$$\| A^{-1} - X_k \| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \quad (2)$$

hay

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Kết luận

$\| G_0 \| < 1$ là điều kiện để quá trình lặp hội tụ.

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + \ldots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \quad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + \ldots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \qquad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + G_0{}^2 + \ldots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \qquad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + \dots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \quad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + \ldots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \quad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + \ldots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \quad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + ...)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + ...) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \quad (3)$$

Công thức sai số

Giả sử $\| G_0 \| < q < 1$. Ta có:

$$G_0 = E - AX_0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + {G_0}^2 + \dots)$$

Suy ra:

$$\| A^{-1} \| \leq \| X_0 \| (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{\| X_0 \|}{1 - q} \qquad (3)$$

Công thức sai số

Thay vào công thức trên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leq \frac{\| X_0 \|}{1-q} . \| G_0 \|^{2^k}$$

Công thức đánh giá sai số:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leq \frac{\| X_0 \|}{1-q} . q^{2^k}$$

Công thức sai số

Thay vào công thức trên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leq \frac{\| X_0 \|}{1-q} . \| G_0 \|^{2^k}$$

Công thức đánh giá sai số:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leq \frac{\| X_0 \|}{1-q} . q^{2^k}$$

Công thức sai số

Thay vào công thức trên:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leq \frac{\| X_0 \|}{1-q} . \| G_0 \|^{2^k}$$

Công thức đánh giá sai số:

$$\| A^{-1} - X_k \| \leq \frac{\| X_0 \|}{1-q} . q^{2^k}$$

Input, Output

Input: Ma trận A, xấp xỉ đầu X_0 sai số ε . Giả thiết coi như các điều kiện hội tụ thỏa mãn

Output: Ma trận xấp xỉ A^{-1}

Input, Output

Input: Ma trận A, xấp xỉ đầu X_0 sai số ε . Giả thiết coi như các điều kiện hội tụ thỏa mãn
Output: Ma trận xấp xỉ A^{-1}

Mã giả

Thuật toán 1: Tìm xấp xỉ đầu X_0 bằng Gauss

Thuật toán 2: Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Mã giả

Thuật toán 1: Tìm xấp xỉ đầu X_0 bằng Gauss

Thuật toán 2: Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Input: A, X_0, ε .

Output: Ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo

begin

Nhập A, X_0, ε ;

$q \longleftarrow \| E - AX_0 \|$;

$k \longleftarrow 0$;

$X \longleftarrow X_0$;

while $\frac{\|X_0\| q^{2^k}}{1-q} > \varepsilon$ **do**

$X \longleftarrow X + X(E - AX)$;

$k \longleftarrow k+1$;

end

Đưa ra X chính là ma trận nghịch đảo;

end

Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Input: A, X_0, ε .
Output: Ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo
begin

Nhập A, X_0, ε ;
$q \longleftarrow \| E - AX_0 \|$;
$k \longleftarrow 0$;
$X \longleftarrow X_0$;
while $\frac{\|X_0\| q^{2^k}}{1-q} > \varepsilon$ **do**
$X \longleftarrow X + X(E - AX)$;
$k \longleftarrow k+1$;
end

Đưa ra X chính là ma trận nghịch đảo;
end

Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Input: A, X_0, ε .
Output: Ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo
begin

Nhập A, X_0, ε ;
q $\longleftarrow \| E - AX_0 \|$;
k $\longleftarrow$ *0*;
$X \longleftarrow X_0$;
while $\frac{\|X_0\| q^{2^k}}{1-q} > \varepsilon$ **do**
$X \longleftarrow X + X(E - AX)$;
k $\longleftarrow$ *k+1*;
end

Đưa ra X chính là ma trận nghịch đảo;
end

Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Input: A, X_0, ε .
Output: Ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo
begin

Nhập A, X_0, ε ;
q $\longleftarrow \| E - AX_0 \|$;
k $\longleftarrow$ *0;*
$X \longleftarrow X_0$;
while $\frac{\|X_0\|q^{2^k}}{1-q} > \varepsilon$ **do**
$X \longleftarrow X + X(E - AX)$;
k $\longleftarrow$ *k+1;*
end

Đưa ra X chính là ma trận nghịch đảo;
end

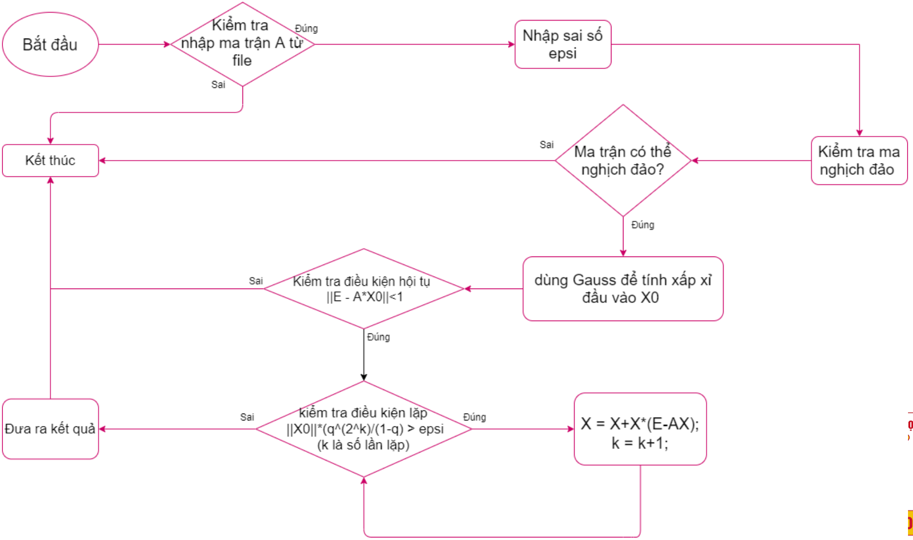
Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

Input: A, X_0, ε .
Output: Ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo
begin

Nhập A, X_0, ε ;
$q \longleftarrow \| E - AX_0 \|$;
$k \longleftarrow 0$;
$X \longleftarrow X_0$;
while $\frac{\|X_0\|q^{2^k}}{1-q} > \varepsilon$ **do**
$X \longleftarrow X + X(E - AX)$;
$k \longleftarrow k+1$;
end

Đưa ra X chính là ma trận nghịch đảo;
end

Sơ đồ khối


Bắt đầu
Kiểm tra nhập ma trận A từ file
Đúng
Sai
Nhập sai số epsi
Kết thúc
Sai
Ma trận có thể nghịch đảo?
Kiểm tra ma nghịch đảo
Đúng
Sai
Kiểm tra điều kiện hội tụ ||E - A*X0||<1
dùng Gauss để tính xấp xỉ đầu vào X0
Đúng
Sai
kiểm tra điều kiện lặp ||X0||*(q^(2^k)/(1-q) > epsi (k là số lần lặp)
Đúng
Đưa ra kết quả
X = X+X*(E-AX);
k = k+1;

Các phương pháp tìm gần đúng nghịch đảo của ma trận chéo trội

Mục tiêu

Giải phương trình $AX = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng

$$AX = b \Leftrightarrow X = BX + d$$

Lập được dãy số

$$X_n = BX_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m$$

Mục tiêu

Giải phương trình $AX = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng

$$AX = b \Leftrightarrow X = BX + d$$

Lập được dãy số

$$X_n = BX_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m$$

Mục tiêu

Giải phương trình $AX = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng

$$AX = b \Leftrightarrow X = BX + d$$

Lập được dãy số

$$X_n = BX_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m$$

Mục tiêu

Giải phương trình $AX = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng

$$AX = b \Leftrightarrow X = BX + d$$

Lập được dãy số

$$X_n = BX_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m$$

Mục tiêu

Giải phương trình $AX = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng

$$AX = b \Leftrightarrow X = BX + d$$

Lập được dãy số

$$X_n = BX_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m$$

Mục tiêu

Giải phương trình $AX = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng

$$AX = b \Leftrightarrow X = BX + d$$

Lập được dãy số

$$X_n = BX_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m$$

Định lý về sự hội tụ

Cho ma trận vuông $B \in R^{m \times m}$

Định lý

Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một chuẩn trên $R^{m \times m}$ sao cho $\rho(B) \leq \| B \| \leq \rho(B) + \varepsilon$

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì dãy lặp x_n sẽ hội tụ về nghiệm x của hệ phương trình.

Vậy làm thế nào để chứng minh $\rho(B) < 1$?

Định lý về sự hội tụ

Cho ma trận vuông $B \in R^{m \times m}$

Định lý

Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một chuẩn trên $R^{m \times m}$ sao cho
$\rho(B) \leq \| B \| \leq \rho(B) + \varepsilon$

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì dãy lặp x_n sẽ hội tụ về nghiệm x của hệ phương trình.

Vậy làm thế nào để chứng minh $\rho(B) < 1$?

Định lý về sự hội tụ

Cho ma trận vuông $B \in R^{m \times m}$

Định lý

Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một chuẩn trên $R^{m \times m}$ sao cho
$\rho(B) \leq \| B \| \leq \rho(B) + \varepsilon$

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì dãy lặp x_n sẽ hội tụ về nghiệm x của hệ phương trình.

Vậy làm thế nào để chứng minh $\rho(B) < 1$?

Định lý về sự hội tụ

Cho ma trận vuông $B \in R^{m \times m}$

Định lý

Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một chuẩn trên $R^{m \times m}$ sao cho $\rho(B) \leq \| B \| \leq \rho(B) + \varepsilon$

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì dãy lặp x_n sẽ hội tụ về nghiệm x của hệ phương trình.

Vậy làm thế nào để chứng minh $\rho(B) < 1$?

Các phương pháp

1. Phương pháp Jacobi
2. Phương pháp Gauss - Seidel

Các phương pháp

1. Phương pháp Jacobi
2. Phương pháp Gauss - Seidel

Phương pháp lặp Jacobi
Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Như trong phần lặp Jacobi đã được trình bày trong tuần trước, với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$ là ma trận đường chéo cấp n

Phương pháp lặp Jacobi

$$X_{k+1} = (E - DA)X_k + D \tag{4}$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp: $\| E - DA \| < 1$, hay ma trận A phải chéo trội.

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Như trong phần lặp Jacobi đã được trình bày trong tuần trước, với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$ là ma trận đường chéo cấp n

Phương pháp lặp Jacobi

$$X_{k+1} = (E - DA)X_k + D \quad (4)$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp: $\| E - DA \| < 1$, hay ma trận A phải chéo trội.

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Như trong phần lặp Jacobi đã được trình bày trong tuần trước, với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$ là ma trận đường chéo cấp n

Phương pháp lặp Jacobi

$$X_{k+1} = (E - DA)X_k + D \tag{4}$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp: $\| E - DA \| < 1$, hay ma trận A phải chéo trội.

Công thức sai số

Với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$. Ta xét 2 trường hợp:

1. Ma trận chéo trội hàng

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{ii} \mid, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

Đặt $C = E - DA$, tồn tại một số q để $\parallel C \parallel_\infty \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\parallel X_k - X^* \parallel_\infty \leq \frac{q}{1-q} \parallel X_k - X_{k-1} \parallel_\infty \tag{6}$$

$$\parallel X_k - X^* \parallel_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \parallel X_1 - X_0 \parallel_\infty \tag{7}$$

Công thức sai số

Với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$. Ta xét 2 trường hợp:

1. Ma trận chéo trội hàng

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} | A_{ij} | < | A_{ii} |, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

Đặt $C = E - DA$, tồn tại một số q để $\| C \|_\infty \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\| X_k - X^* \|_\infty \leq \frac{q}{1-q} \| X_k - X_{k-1} \|_\infty \tag{6}$$

$$\| X_k - X^* \|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \| X_1 - X_0 \|_\infty \tag{7}$$

Công thức sai số

Với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$. Ta xét 2 trường hợp:

1. Ma trận chéo trội hàng

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{ii} \mid, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

Đặt $C = E - DA$, tồn tại một số q để $\| C \|_\infty \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\| X_k - X^* \|_\infty \leq \frac{q}{1-q} \| X_k - X_{k-1} \|_\infty \tag{6}$$

$$\| X_k - X^* \|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \| X_1 - X_0 \|_\infty \tag{7}$$

Công thức sai số

Với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$. Ta xét 2 trường hợp:

1. Ma trận chéo trội hàng

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{ii} \mid, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

Đặt $C = E - DA$, tồn tại một số q để $\parallel C \parallel_\infty \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\parallel X_k - X^* \parallel_\infty \leq \frac{q}{1-q} \parallel X_k - X_{k-1} \parallel_\infty \tag{6}$$

$$\parallel X_k - X^* \parallel_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \parallel X_1 - X_0 \parallel_\infty \tag{7}$$

Công thức sai số

Với $D = diag\frac{1}{A_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$. Ta xét 2 trường hợp:

1. Ma trận chéo trội hàng

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{ii} \mid, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

Đặt $C = E - DA$, tồn tại một số q để $\parallel C \parallel_\infty \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\parallel X_k - X^* \parallel_\infty \leq \frac{q}{1-q} \parallel X_k - X_{k-1} \parallel_\infty \tag{6}$$

$$\parallel X_k - X^* \parallel_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \parallel X_1 - X_0 \parallel_\infty \tag{7}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} | A_{ij} | < | A_{jj} |, \quad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

Đặt $C_1 = E - AD$ và $\lambda = \frac{max|A_{ii}|}{min|A_{ii}|}$, khi đó tồn tại một số q để $\| C_1 \|_1 \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q}{1-q} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \tag{9}$$

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q^k}{1-q} \| X_1 - X_0 \|_1 \tag{10}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{jj} \mid, \quad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

Đặt $C_1 = E - AD$ và $\lambda = \frac{max|A_{ii}|}{min|A_{ii}|}$, khi đó tồn tại một số q để $\| C_1 \|_1 \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q}{1-q} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \tag{9}$$

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q^k}{1-q} \| X_1 - X_0 \|_1 \tag{10}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{jj} \mid, \quad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

Đặt $C_1 = E - AD$ và $\lambda = \frac{max|A_{ii}|}{min|A_{ii}|}$, khi đó tồn tại một số q để $\| C_1 \|_1 \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q}{1-q} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \tag{9}$$

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q^k}{1-q} \| X_1 - X_0 \|_1 \tag{10}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \mid A_{ij} \mid < \mid A_{jj} \mid, \quad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

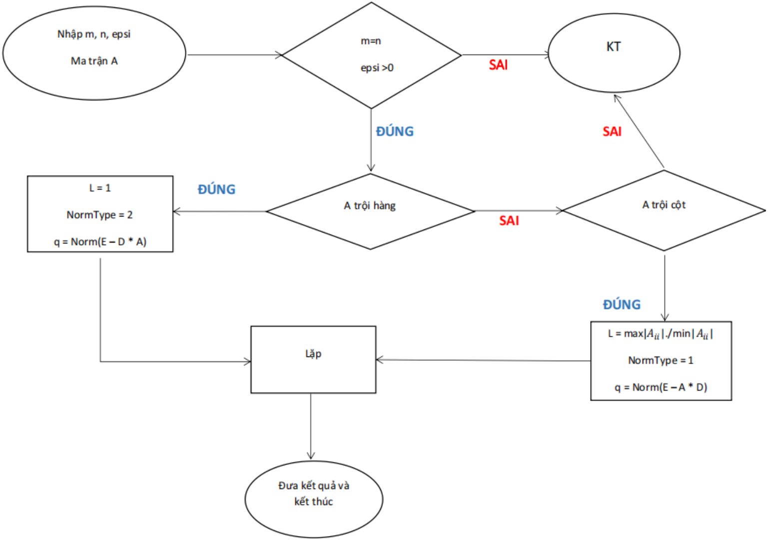
Đặt $C_1 = E - AD$ và $\lambda = \frac{max|A_{ii}|}{min|A_{ii}|}$, khi đó tồn tại một số q để $\| C_1 \|_1 \leq q < 1$

Công thức sai số

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q}{1-q} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \tag{9}$$

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \lambda \frac{q^k}{1-q} \| X_1 - X_0 \|_1 \tag{10}$$

Sơ đồ khối


Nhập m, n, epsi
Ma trận A
m=n
epsi >0
SAI
KT
ĐÚNG
SAI
L = 1
NormType = 2
q = Norm(E – D * A)
ĐÚNG
A trội hàng
SAI
A trội cột
ĐÚNG
L = max|A_{ii}|./min|A_{ii}|
NormType = 1
q = Norm(E – A * D)
Lặp
Đưa kết quả và
kết thúc

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε .

Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$

begin

> *Nhập* A, m, n, ε ;
>
> $B \longleftarrow diag(1; 1; ...; 1);$
>
> $A1 \longleftarrow A;$
>
> $check(A, B, eps);$
>
> $X^* \longleftarrow Jacobi(A, B, A1);$

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo;

end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε .
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1;1;...;1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Jacobi(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε .
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1;1;...;1);$
$A1 \longleftarrow A;$
$check(A, B, eps);$
$X^* \longleftarrow Jacobi(A, B, A1);$

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε .
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...; 1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Jacobi(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε .
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...; 1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Jacobi(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo;
end

Mã giả các thuật toán khác

1. Gói chọn chuẩn: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra ma trận chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra ma trận chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $singleloop1(A, A1, Alpha, Beta, D)$
5. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm: function $singleloop2(A, A1, Alpha, Beta, D)$
6. Gói lặp - Lặp Jacobi: function $Jacobi(A, A1, B)$

Mã giả các thuật toán khác

1. Gói chọn chuẩn: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra ma trận chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra ma trận chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $singleloop1(A, A1, Alpha, Beta, D)$
5. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm: function $singleloop2(A, A1, Alpha, Beta, D)$
6. Gói lặp - Lặp Jacobi: function $Jacobi(A, A1, B)$

Mã giả các thuật toán khác

1. Gói chọn chuẩn: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra ma trận chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra ma trận chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $singleloop1(A, A1, Alpha, Beta, D)$
5. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm: function $singleloop2(A, A1, Alpha, Beta, D)$
6. Gói lặp - Lặp Jacobi: function $Jacobi(A, A1, B)$

Mã giả các thuật toán khác

1. Gói chọn chuẩn: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra ma trận chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra ma trận chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $singleloop1(A, A1, Alpha, Beta, D)$
5. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm: function $singleloop2(A, A1, Alpha, Beta, D)$
6. Gói lặp - Lặp Jacobi: function $Jacobi(A, A1, B)$

Mã giả các thuật toán khác

1. Gói chọn chuẩn: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra ma trận chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra ma trận chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $singleloop1(A, A1, Alpha, Beta, D)$
5. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm: function $singleloop2(A, A1, Alpha, Beta, D)$
6. Gói lặp - Lặp Jacobi: function $Jacobi(A, A1, B)$

Mã giả các thuật toán khác

1. Gói chọn chuẩn: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra ma trận chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra ma trận chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $singleloop1(A, A1, Alpha, Beta, D)$
5. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm: function $singleloop2(A, A1, Alpha, Beta, D)$
6. Gói lặp - Lặp Jacobi: function $Jacobi(A, A1, B)$

Phương pháp lặp Gauss - Seidel

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Như trong phần lặp Jacobi với $T = diag\frac{1}{A_{nn}}, n = 1, 2, ..., n$ và đặt $B = E - TA$

Phương pháp lặp Gauss - Seidel

$$X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} B_{ij} X_j^{(k)} + T_i, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (11)$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp: Ma trận A phải chéo trội.

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Như trong phần lặp Jacobi với $T = diag\frac{1}{A_{nn}}, n = 1, 2, ..., n$ và đặt $B = E - TA$

Phương pháp lặp Gauss - Seidel

$$X_i{}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} X_j{}^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} B_{ij} X_j{}^{(k)} + T_i, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (11)$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp: Ma trận A phải chéo trội.

Công thức lặp và điều kiện hội tụ

Như trong phần lặp Jacobi với $T = diag\frac{1}{A_{nn}}, n = 1, 2, ..., n$ và đặt $B = E - TA$

Phương pháp lặp Gauss - Seidel

$$X_i{}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} X_j{}^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} B_{ij} X_j{}^{(k)} + T_i, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (11)$$

Điều kiện hội tụ của phương pháp: Ma trận A phải chéo trội.

Công thức sai số

1. Ma trận chéo trội hàng

Đặt $B = E - TA$. Ta có: $q = \max\limits_{1\le i\le n} \dfrac{\sum\limits_{j=i}^{n}|B_{ij}|}{1-\sum\limits_{j=1}^{i-1}|B_{ij}|} < \| B \|_\infty < 1, \quad S = 0$

Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \le \frac{q}{(1-q)(1-S)} \| X_k - X_{k-1} \|_\infty \quad (12)$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \le \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_\infty \quad (13)$$

Công thức sai số

1. Ma trận chéo trội hàng

Đặt $B = E - TA$. Ta có: $q = \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{\sum\limits_{j=i}^{n} |B_{ij}|}{1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} |B_{ij}|} < \| B \|_\infty < 1, \quad S = 0$

Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \le \frac{q}{(1-q)(1-S)} \| X_k - X_{k-1} \|_\infty \tag{12}$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \le \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_\infty \tag{13}$$

Công thức sai số

1. Ma trận chéo trội hàng

Đặt $B = E - TA$. Ta có: $q = \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{\sum\limits_{j=i}^{n} |B_{ij}|}{1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} |B_{ij}|} < \| B \|_\infty < 1, \quad S = 0$

Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \le \frac{q}{(1-q)(1-S)} \| X_k - X_{k-1} \|_\infty \tag{12}$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \le \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_\infty \tag{13}$$

Công thức sai số

1. Ma trận chéo trội hàng

Đặt $B = E - TA$. Ta có: $q = \max\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\sum\limits_{j=i}^{n}|B_{ij}|}{1-\sum\limits_{j=1}^{i-1}|B_{ij}|} < \| B \|_\infty < 1, \quad S = 0$

Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \leq \frac{q}{(1-q)(1-S)} \| X_k - X_{k-1} \|_\infty \tag{12}$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_\infty \leq \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_\infty \tag{13}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

Đặt $B_1 = E - AT$. Ta có:

$$q = \max_{1 \le i \le n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} \mid B_{1_{ji}} \mid}{1 - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mid B_{1_{ji}} \mid} < \| B_1 \|_1 < 1 \tag{14}$$

$$S = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=i+1}^{n} \mid B_{1_{ji}} \mid \tag{15}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

Đặt $B_1 = E - AT$. Ta có:

$$q = \max_{1 \le i \le n} \frac{\sum_{j=1}^{i} \mid B_{1_{ji}} \mid}{1 - \sum_{j=i+1}^{n} \mid B_{1_{ji}} \mid} < \parallel B_1 \parallel_1 < 1 \tag{14}$$

$$S = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=i+1}^{n} \mid B_{1_{ji}} \mid \tag{15}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

Đặt $B_1 = E - AT$. Ta có:

$$q = \max_{1 \le i \le n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} \mid B_{1_{ji}} \mid}{1 - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mid B_{1_{ji}} \mid} < \parallel B_1 \parallel_1 < 1 \tag{14}$$

$$S = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=i+1}^{n} \mid B_{1_{ji}} \mid \tag{15}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

Đặt $B_1 = E - AT$. Ta có:

$$q = \max_{1\le i\le n} \frac{\sum_{j=1}^{i} \mid {B_1}_{ji} \mid}{1 - \sum_{j=i+1}^{n} \mid {B_1}_{ji} \mid} < \parallel B_1 \parallel_1 < 1 \tag{14}$$

$$S = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=i+1}^{n} \mid {B_1}_{ji} \mid \tag{15}$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \frac{q}{(1-S)(1-q)} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \qquad (16)$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_1 \qquad (17)$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \frac{q}{(1-S)(1-q)} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \quad (16)$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_1 \quad (17)$$

Công thức sai số

2. Ma trận chéo trội cột

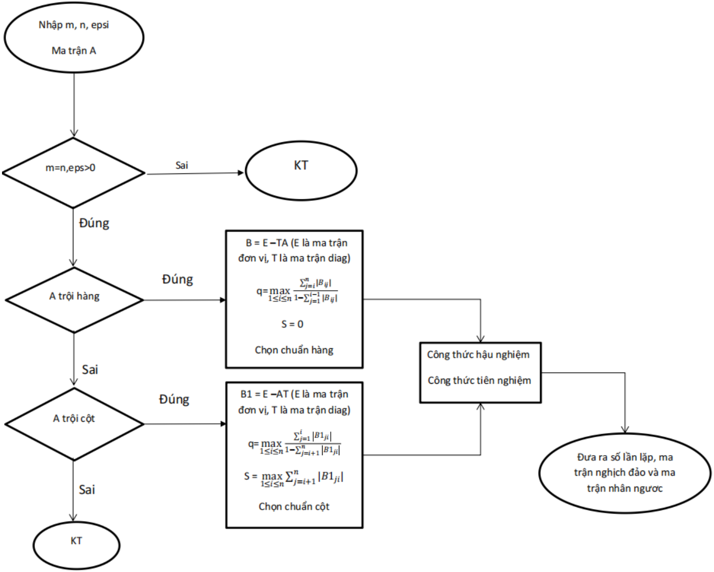
Công thức hậu nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \frac{q}{(1-S)(1-q)} \| X_k - X_{k-1} \|_1 \tag{16}$$

Công thức tiên nghiệm

$$\| X_k - X^* \|_1 \leq \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \| X_{(1)} - X_{(0)} \|_1 \tag{17}$$

Sơ đồ khối


Nhập m, n, epsi
Ma trận A
m=n,eps>0
Sai
KT
Đúng
A trội hàng
Đúng
B = E –TA (E là ma trận đơn vị, T là ma trận diag)
$q=\max\limits_{1\le i\le n}\frac{\sum_{j=i}^{n}|B_{ij}|}{1-\sum_{j=1}^{i-1}|B_{ij}|}$
S = 0
Chọn chuẩn hàng
Sai
A trội cột
Đúng
B1 = E –AT (E là ma trận đơn vị, T là ma trận diag)
$q=\max\limits_{1\le i\le n}\frac{\sum_{j=1}^{i}|B1_{ji}|}{1-\sum_{j=i+1}^{n}|B1_{ji}|}$
$S=\max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=i+1}^{n}|B1_{ji}|$
Chọn chuẩn cột
Sai
KT
Công thức hậu nghiệm
Công thức tiên nghiệm
Đưa ra số lần lặp, ma trận nghịch đảo và ma trận nhân ngược

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε.
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$, số lần lặp và ma trận nhân ngược.
begin

> *Nhập* A, m, n, ε ;
> $B \longleftarrow diag(1;1;...1)$;
> $A1 \longleftarrow A$;
> $check(A, B, eps)$;
> $X^* \longleftarrow Gauss - Seidel(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε.
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$, số lần lặp và ma trận nhân ngược.

begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...1);$
$A1 \longleftarrow A;$
$check(A, B, eps);$
$X^* \longleftarrow Gauss - Seidel(A, B, A1);$

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε.
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$, số lần lặp và ma trận nhân ngược.
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Gauss - Seidel(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε.
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$, số lần lặp và ma trận nhân ngược.
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Gauss - Seidel(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε.
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$, số lần lặp và ma trận nhân ngược.
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Gauss - Seidel(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;
end

Mã giả thuật toán chính

Input: Ma trận A chéo trội và sai số ε.
Output: Ma trận nghịch đảo $X^* = A^{-1}$, số lần lặp và ma trận nhân ngược.
begin

Nhập A, m, n, ε ;
$B \longleftarrow diag(1; 1; ...1)$;
$A1 \longleftarrow A$;
$check(A, B, eps)$;
$X^* \longleftarrow Gauss - Seidel(A, B, A1)$;

Đưa ra X^* chính là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;
end

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Các gói trong mã giả

1. Gói chọn chuẩn của A: function $norm(A)$
2. Gói kiểm tra A chéo trội hàng: function $checkrow(A)$
3. Gói kiểm tra A chéo trội: function $normalize(A)$
4. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel: function $calc(A, B, X)$
5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm: function $loop1(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm : function $loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S)$
7. Gói tính hệ số co: function $hesoco(alpha)$
8. Gói tính ma trận Lower: function $matrix - lower(A)$
9. Gói lặp - Lặp Gauss-Seidel: function $Gauss - Seidel(A, B, A1)$

Tổng kết

Nhận xét chung

1. Giảm thời gian tính toán so với tính đúng.
2. Sai số ổn định hơn vì được cải thiện sau mỗi bước lặp

Nhận xét riêng

1.Phương pháp Newton khó tìm được xấp xỉ đầu nhưng lại có thuật toán đơn giản hơn, tốc độ hội tụ nhanh nhất.

2. Phương pháp lặp Jacobi có tốc độ hội tụ chậm hơn Gauss - Seidel. Tuy nhiên, cả hai phương pháp đều yêu cầu ma trận phải chéo trội.

The End