

**ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
**VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC**



**CÁC PHƯƠNG PHÁP**  
**TÌM GẦN ĐÚNG MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO**

**NHÓM SINH VIÊN THỰC HIỆN**

Nguyễn Hoa Phương Thảo - 20195920

Phạm Việt Hà - 20195869

Nguyễn Thị Kim Hoa - 20195873

Vũ Thị Ánh Nguyệt - 20195905

Vũ Thị Thu Hoài - 20195875

**GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN**

TS. Hà Thị Ngọc Yến

Hà Nội, tháng 6, 2021

## *Lời mở đầu*

Theo yêu cầu của môn học Giải tích số, chúng em đã cùng nhau tìm hiểu về chủ đề "Các phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo" dưới sự hướng dẫn của GV. Hà Thị Ngọc Yến. Báo cáo này trình bày toàn bộ những kiến thức chúng em tìm hiểu và tổng kết được sau quá trình học.

Nhóm 1 chúng em gồm:

1. Nguyễn Hoa Phương Thảo - 20195920
2. Phạm Việt Hà - 20195869
3. Nguyễn Thị Kim Hoa - 20195873
4. Vũ Thị Ánh Nguyệt - 20195905
5. Vũ Thị Thu Hoài - 20195875

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Giới thiệu chung về các phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo</b>	<b>4</b>
1.1	Bài toán . . . . .	4
1.2	Tại sao phải giải gần đúng . . . . .	4
1.3	Các phương pháp giải gần đúng . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Phương pháp Newton</b>	<b>5</b>
2.1	Ý tưởng . . . . .	5
2.2	Công thức lặp . . . . .	5
2.3	Điều kiện hội tụ . . . . .	5
2.4	Công thức sai số . . . . .	6
2.5	Thuật toán và chương trình . . . . .	6
2.6	Sơ đồ khối . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Giới thiệu các phương pháp tìm nghịch đảo ma trận chéo trội</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Phương pháp Jacobi</b>	<b>9</b>
4.1	Công thức lặp . . . . .	9
4.2	Điều kiện hội tụ . . . . .	9
4.3	Công thức sai số . . . . .	9
4.3.1	<i>Trường hợp chéo trội hàng</i> . . . . .	9
4.3.2	<i>Trường hợp chéo trội cột</i> . . . . .	10
4.4	Thuật toán và chương trình . . . . .	10
4.5	Sơ đồ khối . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Phương pháp lặp Gauss - Seidel</b>	<b>14</b>
5.1	Công thức lặp . . . . .	14
5.2	Điều kiện hội tụ . . . . .	14
5.3	Công thức sai số . . . . .	14
5.3.1	<i>Trường hợp chéo trội hàng</i> . . . . .	14
5.3.2	<i>Trường hợp chéo trội cột</i> . . . . .	15
5.4	Thuật toán và chương trình . . . . .	15
5.5	Sơ đồ khối . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Hệ thống ví dụ</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Tổng kết</b>	<b>28</b>
7.1	Nhận xét chung các phương pháp . . . . .	28
7.2	Nhận xét riêng từng phương pháp . . . . .	28
7.2.1	<i>Phương pháp Newton</i> . . . . .	28
7.2.2	<i>Phương pháp lặp Jacobi và Gauss - Seidel</i> . . . . .	28

# Chương 1

## Giới thiệu chung về các phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo

### 1.1 Bài toán

Ma trận nghịch đảo của ma trận  $A$  vuông cấp  $n$  là ma trận  $A^{-1}$  thỏa mãn điều kiện  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , trong đó  $E$  là ma trận đơn vị.

**Điều kiện tồn tại của ma trận nghịch đảo:**  $A^{-1}$  tồn tại khi và chỉ khi  $A$  phải là ma trận vuông cấp  $n$ , có định thức  $\det(A) \neq 0$  hay nói cách khác:

$$A \in M_{n \times n}(R)$$

$$\det(A) \neq 0$$

### 1.2 Tại sao phải giải gần đúng

1. Độ phức tạp của thuật toán tính ma trận nghịch đảo là  $O(n^3)$  nên khi tính toán ở mức độ cao hơn (ví dụ như yêu cầu môn học là ma trận  $10 \times 10$ ) thì việc tính toán sẽ khó khăn hơn, cũng như mất nhiều thời gian hơn. Trên thực tế, có rất nhiều ma trận với kích cỡ cực kì lớn, như vậy, cần tìm cách giải nhanh - gọn - ổn định để ứng dụng vào việc tính toán.

2. Do sai số trong quá trình tính toán, của thiết bị tính toán nên cần tìm cách giải phù hợp để có được sai số ổn định.

### 1.3 Các phương pháp giải gần đúng

Trong chủ đề lần này, dưới sự hướng dẫn của giáo viên, nhóm em xin phép được đề cập đến 3 phương pháp để tìm gần đúng ma trận nghịch đảo.

1. Phương pháp Newton.
2. Phương pháp lặp Jacobi.
3. Phương pháp lặp Gauss - Seidel.

## Chương 2

# Phương pháp Newton

### 2.1 Ý tưởng

Cho số thực  $a$  khác 0, tìm  $x$  để  $ax = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{x}$  với  $a \neq 0$ .

Ta đặt:  $f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$

Theo công thức Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{a - \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{(x_k)^2}}$$

hay:

$$x_{k+1} = x_k + x_k \times (1 - a \times x_k), \quad k \in N$$

### 2.2 Công thức lặp

Vận dụng ý tưởng trên, xem  $a$  là ma trận  $A$ ,  $x$  là ma trận  $X$ , cần tìm  $X$  sao cho  $AX = XA = E$ .

Ta có công thức lặp như sau:

$$X_{k+1} = X_k + X_k \times (E - A \times X_k), \quad k \in N$$

trong đó  $E$  là ma trận đơn vị cùng cấp và  $X_0$  là xấp xỉ đầu.

### 2.3 Điều kiện hội tụ

Ta cần tìm điều kiện để:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A^{-1}$$

Ta đặt  $G_k = E - A \times X_k$ . Theo công thức lặp, ta được:

$$G_k = E - A(X_{k-1} + X_{k-1}(E - AX_{k-1}))$$

$$G_k = E - 2AX_{k-1} + (AX_{k-1})^2$$

$$G_k = (E - AX_{k-1})^2 = G_{k-1}^2$$

Theo công thức truy hồi, ta có:  $G_k = G_{k-1}^2 = \dots = G_0^{2^k}$

Mặt khác:  $A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}G_0^{2^k}$  nên

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|G_0\|^{2^k} \quad (2.1)$$

ở đó  $G_0 = E - AX_0$ . Cũng từ đây, ta thấy nếu  $\|G_0\| < 1$  thì:

$$\|A^{-1} - X_k\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

hay

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A^{-1} \quad (2.3)$$

Vậy  $\|G_0\| < 1$  là điều kiện để quá trình lặp hội tụ. Tuy nhiên, trên máy tính ta không thể cho  $k$  lặp đến vô cùng mà chỉ lặp đến một khoảng sai số nhất định nên vì vậy, cần phải xây dựng công thức sai số.

## 2.4 Công thức sai số

Giả sử  $\|G_0\| < q < 1$ . Ta lại có:

$$G_0 = E - AX_0 \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0) \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1} \quad (2.6)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + G_0^2 + \dots) \quad (2.7)$$

Suy ra:  $\Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|X_0\| (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{\|X_0\|}{1-q}$

Thay vào (2.1) ta được:

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \frac{\|X_0\|}{1-q} \cdot \|G_0\|^{2^k} \quad (2.8)$$

Từ đó ta có công thức đánh giá sai số như sau:

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \frac{\|X_0\|}{1-q} \cdot q^{2^k} \quad (2.9)$$

## 2.5 Thuật toán và chương trình

**Input:** Ma trận  $A$ , xấp xỉ đầu  $X_0$  sai số  $\varepsilon$ . Giả thiết coi như các công thức ở phần 3 và 4 thỏa mãn.

**Output:** Ma trận xấp xỉ  $A^{-1}$ .

**Mã giả:** Thuật toán: Phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo.

**begin**

Nhập  $A, X_0, \varepsilon$ ;

$q \leftarrow \|E - AX_0\|$ ;

$k \leftarrow 0$ ;

$X \leftarrow X_0$ ;

**while**  $\frac{\|X_0\|q^{2^k}}{1-q} > \varepsilon$  **do**

$X \leftarrow X + X(E - AX)$ ;

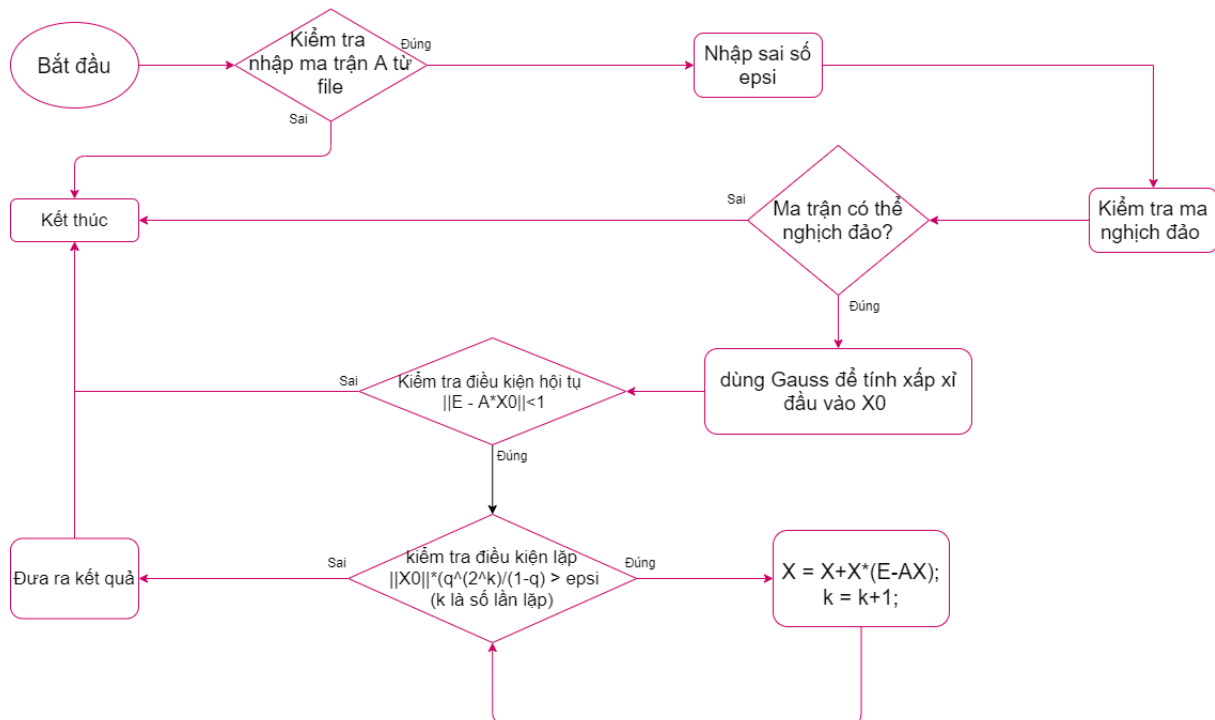
$k \leftarrow k+1$ ;

**end**

Đưa ra  $X$  chính là ma trận nghịch đảo.

**Giải thích các biến trong thuật toán:**

- A: Ma trận cần nghịch đảo
- $X_0$ : Xấp xỉ đầu vào
- $\varepsilon$ : Sai số cho phép
- E: Ma trận đơn vị cùng cấp với A
- X: Dãy ma trận  $X_k$ , tuy nhiên phần tử  $X_k$  được tính theo  $X_{k-1}$  nên ta chỉ cần 1 ma trận X
- q: Giá trị q trong công thức sai số

**2.6 Sơ đồ khối**

## Chương 3

# Giới thiệu các phương pháp tìm nghịch đảo ma trận chéo trội

*Mục tiêu:*

Giải phương trình  $Ax = b$  với  $A$  là ma trận chéo trội

*Ý tưởng:*

1. Đưa phương trình về dạng

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + d \quad (3.1)$$

2. Lập được dãy số

$$x_n = Bx_{n-1} + d, \quad x_0 \in R^m \quad (3.2)$$

Nếu dãy trên hội tụ thì giới hạn của dãy chính là nghiệm của phương trình.

**Nhắc lại: Định lý về sự hội tụ:**

Cho ma trận vuông  $B \in R^{m \times m}$ .

■ **Định lý:** Với mỗi  $\varepsilon > 0$  tồn tại một chuẩn trên  $R^m$  sao cho  $\rho(B) \leq \|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon$

■ **Hệ quả:** Nếu  $\|B\| < 1$  với một chuẩn nào đó thì dãy lặp  $x_n$  sẽ hội tụ về nghiệm  $x$  của hệ phương trình.

Vì vậy chứng minh sự hội tụ của một dãy vector:

→ chỉ ra ánh xạ co

→ chỉ ra  $\|B\| < 1$

→  $\rho(B) = \max |\lambda_i| < 1$

**Vậy làm thế nào để chứng minh  $\rho(B) < 1$ ?**

Hai phương pháp được cải tiến từ phương pháp lặp đơn sử dụng trong trường hợp  $A$  là ma trận chéo trội:

1. Phương pháp Jacobi
2. Phương pháp Gauss - Seidel



## Chương 4

# Phương pháp Jacobi

Lưu ý: Các công thức trong bài chỉ nêu ra và áp dụng mà không chứng minh.

### 4.1 Công thức lặp

Như trong phần Jacobi đã được các nhóm trước trình bày, với  $D = \text{diag}\{\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \frac{1}{A_{33}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}}\}$  là ma trận đường chéo cấp  $n$ , có:

$$X_{k+1} = (E - DA)X_k + D \quad (4.1)$$

### 4.2 Điều kiện hội tụ

Điều kiện hội tụ của phương pháp lặp Jacobi là:  $\|E - DA\| < 1$ , hay ma trận  $A$  phải chéo trội.

Chéo trội hàng:  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| < |A_{ii}| \quad (4.2)$$

Hoặc chéo trội cột:  $\forall j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n |A_{ij}| < |A_{jj}| \quad (4.3)$$

### 4.3 Công thức sai số

Với  $D = \text{diag}\{\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \frac{1}{A_{33}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}}\}$ . Ta xét hai trường hợp:

#### 4.3.1 Trường hợp chéo trội hàng

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| < |A_{ii}|, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

Đặt  $C = E - DA$ , tồn tại một số  $q$  để  $\|C\|_{\infty} \leq q < 1$

Khi đó ta có công thức sai số như sau:

$$\|X_k - X^*\|_{\infty} \leq \frac{q}{1-q} \|X_k - X_{k-1}\|_{\infty} \quad (4.5)$$

$$\|X_k - X^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_\infty \quad (4.6)$$

### 4.3.2 Trường hợp chéo trội cột

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n |A_{ij}| < |A_{jj}|, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

Đặt  $C_1 = E - AD$  và  $\lambda = \frac{\max |A_{ii}|}{\min |A_{ii}|}$ , khi đó tồn tại một số  $q$  để  $\|C_1\|_1 \leq q < 1$

Khi đó ta có công thức sai số như sau:

$$\|X_k - X^*\|_1 \leq \lambda \frac{q}{1-q} \|X_k - X_{k-1}\|_1 \quad (4.8)$$

$$\|X_k - X^*\|_1 \leq \lambda \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_1 \quad (4.9)$$

## 4.4 Thuật toán và chương trình

### 1. Mã giả thuật toán chính

**Thuật toán:** Phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo

**Input:** Ma trận  $A$  chéo trội, sai số  $\varepsilon$

**Output:** Ma trận nghịch đảo  $X^* = A^{-1}$

**int main()**

Nhập  $A, m, n, eps$ ;

$B \leftarrow \text{diag}(1; 1; \dots; 1)$ ;

$A1 \leftarrow A$ ;

$\text{check}(A, B, eps)$ ;

$X^* \leftarrow \text{Jacobi}(A, B, A1)$ ;

Trả về  $X^*$  là ma trận nghịch đảo;

### 2. Gói chọn chuẩn

**Function:** Norm( $A$ )

**Input:** Ma trận  $A$

**Output:**  $\|A\|_\infty$  nếu NormType =  $\infty$ , nếu không thì trả về  $\|A\|_1$

**long double Norm(A)**

if NormType =  $\infty$  return  $\|A\|_\infty$ ;

else return  $\|A\|_1$

**3. Gói kiểm tra chéo trội hàng****Function:** Checkrow(A)**Input:** Ma trận A**Output:** Trả về True nếu ma trận A chéo trội hàng, False nếu ma trận A không chéo trội hàng**bool Checkrow(A)**

for (i=1; i ≤ n; i++)

if  $\sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| \leq |A_{ii}|$  return true;

else return false;

**4. Gói kiểm tra ma trận chéo trội****Function:** Normalize(A)**Input:** Ma trận A**Output:** Trả về True nếu ma trận A có chéo trội, False nếu ma trận A không chéo trội.

■ Giá trị kiểm tra NormType = ∞, giá trị lambda L = 1 nếu ma trận A chéo trội hàng

■ Giá trị kiểm tra NormType = 1, giá trị lambda  $L = \frac{\max |A_{ii}|}{\min |A_{ii}|}$  nếu ma trận A chéo trội cột**bool Normalize(A)**

if(!Checkrow(A))

if(Check(!A) Normtype = 1;

$$L = \frac{\max |A_{ii}|}{\min |A_{ii}|};$$

else return false;

else Normtype = ∞;

L = 1;

return true;

**5. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm****Function:** SingleLoop(A, A1, &Alpha, &Beta, D)**Input:** Ma trận xấp xỉ đầu A, A1, D, Alpha, Beta**Output:** X1 là ma trận nghịch đảo theo đánh giá tiên nghiệm**void SingleLoop(A, A1, &Alpha, &Beta, D)**

X0(Alpha.col, Beta.col);

X1 = Beta;

cnt = 1;

```

q = Norm(Alpha);
while  $\left( \frac{Norm(X1 - X0) \times L \times q}{1 - q} > \varepsilon \right)$ 
    X0  $\leftarrow$  X1;
    X1  $\leftarrow$  Alpha  $\times$  X1 + Beta;
    cnt++;
return D  $\times$  X1;

```

## 6. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm

**Function:** SingleLoop(A, A1, &Alpha, &Beta, D)

**Input:** Ma trận xấp xỉ đầu A, A1, D, Alpha, Beta

**Output:** X1 là ma trận nghịch đảo theo đánh giá hậu nghiệm

```

void SingleLoop(A, A1, &Alpha, &Beta, D)
    _X0  $\leftarrow$  X0;
    _X1  $\leftarrow$  X1;
    q = Norm(Alpha);
    _cnt = ceil  $\left( \frac{\log_2 eps \times \frac{1 - q}{\|_X1 - _X0\| \times L}}{\log_2 q} \right)$ ;
    for(i=2; i  $\leq$  _cnt; i++)
        _X0  $\leftarrow$  _X1;
        _X1  $\leftarrow$  Alpha  $\times$  _X1 + Beta;
    return D  $\times$  _X1;

```

## 7. Gói lặp - Lặp Jacobi

**Function:** Jacobi(A, A1, B)

**Input:** Ma trận A, A1, ma trận đơn vị B

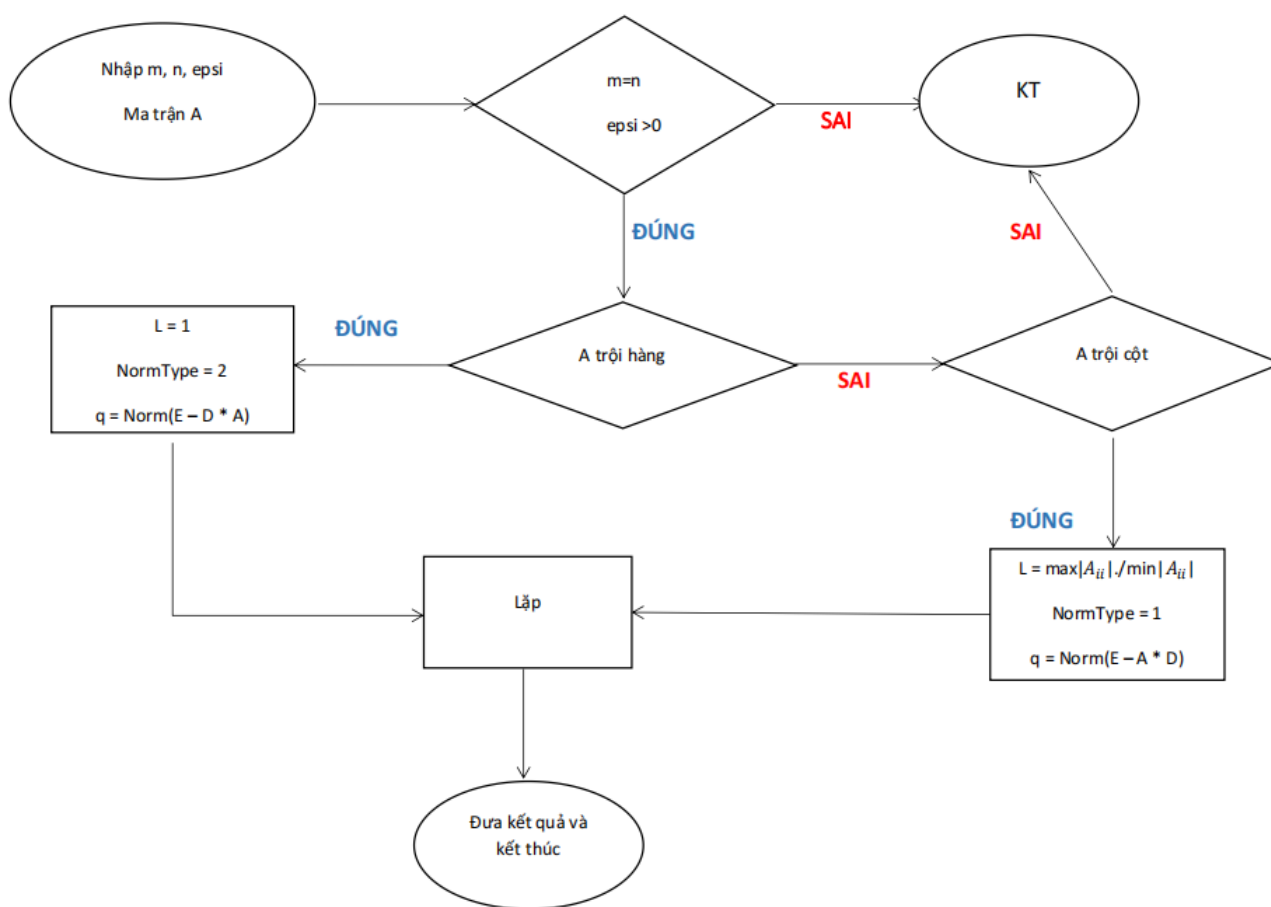
**Output:** Ma trận X1 là ma trận nghịch đảo

```

void Jacobi(A, A1, B)
    D  $\leftarrow diag\{\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \frac{1}{A_{33}}, ..., \frac{1}{A_{nn}}\}$ ;
    if NormType ==  $\infty$ 
        SingleLoop(A, A1, B - D  $\times$  A, D, B);
    if NormType == 1
        SingleLoop(A, A1, B - A  $\times$  D, B, D);

```

## 4.5 Sơ đồ khối



## Chương 5

# Phương pháp lặp Gauss - Seidel

Lưu ý: Các công thức trong bài chỉ nêu ra và áp dụng mà không chứng minh.

### 5.1 Công thức lặp

Như trong phần lặp Jacobi, đặt  $B = E - TA$  với  $T = \text{diag}\{\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \frac{1}{A_{33}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}}\}$  là ma trận đường chéo cấp  $n$ , có:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n B_{ij}x_j^{(k)} + T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

### 5.2 Điều kiện hội tụ

Điều kiện hội tụ của phương pháp lặp Gauss - Seidel là ma trận  $A$  phải chéo trội.

Chéo trội hàng:  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| < |A_{ii}| \quad (5.2)$$

Hoặc chéo trội cột:  $\forall j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n |A_{ij}| < |A_{jj}| \quad (5.3)$$

### 5.3 Công thức sai số

Với  $T = \text{diag}\{\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \frac{1}{A_{33}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}}\}$ . Ta xét hai trường hợp:

#### 5.3.1 Trường hợp chéo trội hàng

Đặt  $B = E - TA$ . Ta có:

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=i}^n |B_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{ij}|} < \|B\|_{\infty} < 1 \quad (5.4)$$

$$S = 0 \quad (5.5)$$

Khi đó ta có công thức sai số như sau:

■ Công thức hậu nghiệm:

$$\|X_k - X^*\|_\infty \leq \frac{q}{(1-S)(1-q)} \|X_k - X_{k-1}\|_\infty \quad (5.6)$$

■ Công thức tiên nghiệm:

$$\|X_k - X^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{(1-S)(1-q)} \|X_{(1)} - X_{(0)}\|_\infty \quad (5.7)$$

### 5.3.2 Trường hợp chéo trội cột

Đặt  $B_1 = E - AT$ . Ta có:

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^i |B_{1_{ji}}|}{1 - \sum_{j=i+1}^n |B_{1_{ji}}|} < \|B_1\|_1 < 1 \quad (5.8)$$

$$S = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=i+1}^n |B_{1_{ji}}| \quad (5.9)$$

Khi đó ta có công thức sai số như sau:

■ Công thức hậu nghiệm:

$$\|X_k - X^*\|_1 \leq \frac{q}{(1-S)(1-q)} \|X_k - X_{k-1}\|_1 \quad (5.10)$$

■ Công thức tiên nghiệm:

$$\|X_k - X^*\|_1 \leq \frac{q^k}{(1-q)(1-S)} \|X_{(1)} - X_{(0)}\|_1 \quad (5.11)$$

## 5.4 Thuật toán và chương trình

### 1. Mã giả thuật toán chính

**Thuật toán:** Phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo

**Input:** Ma trận A chéo trội, sai số  $\varepsilon$

**Output:** Ma trận nghịch đảo  $X^* = A^{-1}$ , số lần lặp và ma trận nhân ngược;

**int main()**

Nhập  $A, m, n, \varepsilon$ ;

$B \leftarrow \text{diag}(1; 1; \dots; 1)$ ;

$A1 \leftarrow A$ ;

$\text{check}(A, B, \text{eps})$ ;

$X^* \leftarrow \text{Gauss} - \text{Seidel}(A, B, A1)$ ;

Trả về  $X^*$  là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược;

**2. Gói chọn chuẩn****Function:** Norm(A)**Input:** Ma trận A**Output:**  $\|A\|_{\infty}$  nếu NormType =  $\infty$ , nếu không thì trả về  $\|A\|_1$ **long double Norm(A)**if NormType =  $\infty$  return  $\|A\|_{\infty}$ ;else return  $\|A\|_1$ **3. Gói kiểm tra chéo trội hàng****Function:** Checkrow(A)**Input:** Ma trận A**Output:** Trả về True nếu ma trận A chéo trội hàng, False nếu ma trận A không chéo trội hàng**bool Checkrow(A)**for (i=1; i  $\leq$  n; i++)if  $\sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| \leq |A_{ii}|$  return true;

else return false;

**4. Gói kiểm tra ma trận chéo trội****Function:** Normalize(A)**Input:** Ma trận A**Output:** Trả về True nếu ma trận A có chéo trội, False nếu ma trận A không chéo trội.■ Giá trị kiểm tra NormType =  $\infty$  nếu ma trận A chéo trội hàng

■ Giá trị kiểm tra NormType = 1 nếu ma trận A chéo trội cột

**bool Normalize(A)**

if(!Checkrow(A))

if(Check(!A) Normtype = 1;

else return false;

else Normtype =  $\infty$ ;

L = 1;

return true;

**5. Gói đưa ra ma trận X1 mới từ ma trận X0 ban đầu bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel**



**Function:** Calc(&A, &B, &X)

**Input:** Ma trận xấp xỉ đầu A, B, X

**Output:** Ma trận X1 mới qua phương pháp lặp Gauss-Seidel

```
void Calc(&A, &B, &X)
    for(int i=0; i<A.row; i++)
        X[i]=B[i];
        for(int j=0; j<A.col; j++)
            if(i ≠ j) X[i] = X[i] + X[j] × A[i][j];
```

## 6. Gói lặp - Đánh giá hậu nghiệm

**Function:** Loop1(&Alpha, &Beta, &\_D, A1, q, S)

**Input:** Ma trận xấp xỉ đầu Alpha, Beta, \_D, A1, và hệ số q, S

**Output:** X1 là ma trận nghịch đảo theo đánh giá hậu nghiệm, số lần lặp và ma trận nhân ngược

```
void Loop1(&Alpha, &Beta, &_D, A1, q, S)
    X0 = 0;
    X1 = Beta;
    cnt = 1;
    while (  $\frac{Norm(X1 - X0) \times q}{(1 - q)(1 - S)} > \varepsilon$  )
        X0 = X1;
        Calc(Alpha, Beta, X1);
        cnt++;
    return _cnt;
    return _D × X1;
    return _D × X1 × A1;
```

## 7. Gói lặp - Đánh giá tiên nghiệm

**Function:** Loop2(&Alpha, &Beta, &\_D, A1, q, S)

**Input:** Ma trận xấp xỉ đầu Alpha, Beta, \_D, A1, và hệ số q, S

**Output:** X1 là ma trận nghịch đảo theo đánh giá tiên nghiệm, số lần lặp và ma trận nhân ngược

```
void Loop2(&Alpha, &Beta, &_D, A1, q, S)
    X0 = 0;
    X1 = Beta;
    _cnt = ceil (  $\frac{\log_2 eps \times \frac{(1 - q)(1 - S)}{\|_X1 - _X0\|}}{\log_2 q}$  );
    for(i=2; i ≤ _cnt; i++)
```

```

X0 = X1;
Calc(Alpha, Beta, X1);
return _cnt;
return _D × X1;
return _D × X1 × A1;

```

## 8. Gói tính hệ số co

**Function:** Hesoco(&Alpha)

**Input:** Ma trận Alpha

**Output:** Hệ số co q

```

void Hesoco(&Alpha)
{
    int n = Alpha.row;
    double P, Q, lambda = 0;
    matrix<double> Sum(n+1, n+1);
    for(int i = 1; i < n+1; i++)
        for(int j = 1; j < n+1; j++)
            Sum[i][j] = Sum[i-1][j] + Sum[i][j-1] - Sum[i-1][j-1] + abs(Alpha[i-1][j-1]);
    if NormType = ∞
        for (int i = 1; i < n+1; i++)
        {
            P = Sum[i][i-1] - Sum[i-1][i-1];
            Q = Sum[i][n] - Sum[i-1][n] - P;
            lambda = max(lambda,  $\frac{Q}{1-P}$ );
        }
    return lambda;
    else
        for (int j = 1; j < n+1; j++)
        {
            Q = Sum[j][j] - Sum[j][j-1];
            P = Sum[n][j] - Sum[n][j-1] - Q;
            lambda = max(lambda,  $\frac{Q}{1-P}$ );
        }
    return lambda;
}

```

## 9. Gói tính ma trận Lower

**Function:** Matrix Lower(&A)

**Input:** Ma trận A

**Output:** Ma trận C là ma trận Lower của A

```

void Lower(&)

```

```

matrix<T> C(A.row, A.col);
for(int i = 0; i < A.row; i++)
    for (int j = 0; j <= i; j++)
        C[i][j] = A[i][j];
return C;

```

## 10. Gói lặp - Lặp Gauss - Seidel

**Function:** GaussSeidel(&A, &B, A1)

**Input:** Ma trận A, A1, ma trận đơn vị B

**Output:** Ma trận X1 là ma trận nghịch đảo, số lần lặp và ma trận nhân ngược

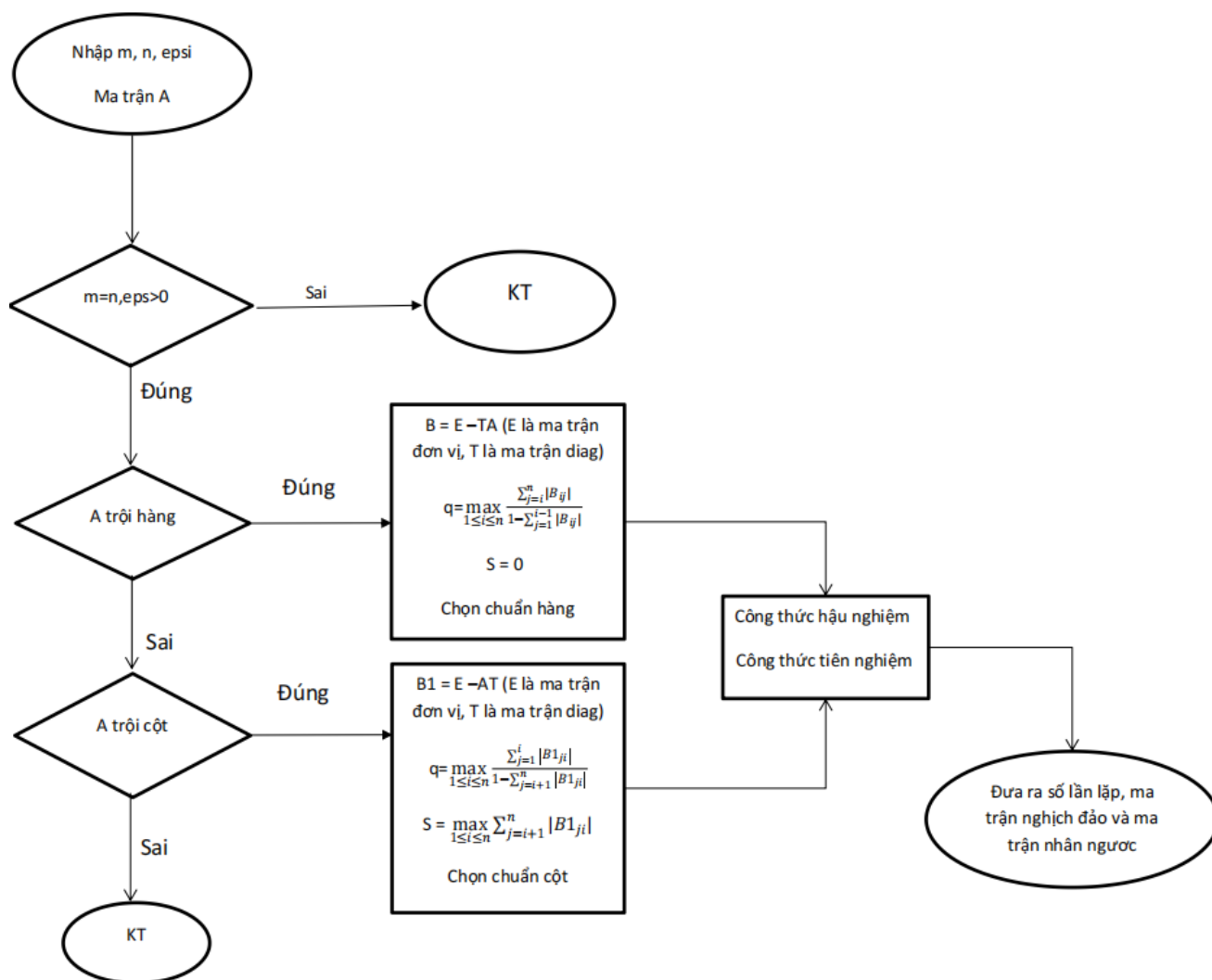
**void GaussSeidel(&A, &B, A1)**

```

D ← diag{ $\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \frac{1}{A_{33}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}}$ };
long double q, S;
if NormType == ∞
    Alpha = I - D × A;
    Beta = D × B;
    q = Hesoco(Alpha);
    Loop1(Alpha, Beta, I, A1, q, 0);
    Loop2(Alpha, Beta, I, A1, q, 0);
if NormType == 1
    Alpha = I - A × D;
    Beta = B;
    q = Hesoco(Alpha);
    S = Norm1(Lower(Alpha));
    Loop1(Alpha, Beta, I, A1, q, S);
    Loop2(Alpha, Beta, D, A1, q, S);

```

## 5.5 Sơ đồ khối



## Chương 6

# Hệ thống ví dụ

**Ví dụ 1:** Nghịch đảo ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Đây là ma trận không chéo trội nên phải dùng phương pháp Newton, không thể sử dụng các phương pháp Jacobi cũng như Gauss - Seidel. Khi chạy thuật toán Newton với sai số 0.00001, ta được kết quả thu được ma trận nghịch đảo như sau:

```
Nhap sai so : 0.00001
Ma tran ban dau:
1          3.000000000000000000  2.000000000000000000
4.000000000000000000  5.000000000000000000  6.000000000000000000
7.000000000000000000  8.000000000000000000  9.000000000000000000

Ma tran ket thuc sau 0 lan lap
Ma tran nghich dao la:
-0.33333333333333298176 -1.2222222222222232091 0.8888888888888895057
0.6666666666666674068 -0.5555555555555558023 0.2222222222222226540
-0.3333333333333353687 1.4444444444444464182 -0.7777777777777790114

-----
Process exited after 32.42 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Hình 6.1: Phương pháp Newton

**Ví dụ 2:** Nghịch đảo ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 11 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 27 & 8 \\ 9 & 100 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 56 \end{bmatrix}$$

Đây là ma trận chéo trội sắp xếp lẫn lộn, nhìn thấy được tại vị trí  $a_{23}$  và  $a_{32}$ . Ở đây, sử dụng hai phương pháp là Jacobi và Gauss - Seidel để tìm nghịch đảo ma trận này với sai số 0.0000000000000001.

```

So buoc lap theo Hau Nghiem: 76
Ma tran nghich dao la:
0.1021459227467811 , -0.0076946658491723 , -0.0007357449417535 , -0.0060392397302269
-0.0055793991416309 , -0.0028510116492949 , 0.0104843654199877 , -0.0014408338442673
-0.0120171673819743 , 0.0416615573267934 , -0.0015941140404660 , -0.0047516860821582
-0.0190987124463520 , -0.0086603310852238 , -0.0020232985898222 , 0.0208920907418761

Kiem tra nhan nguoc lai:
0.9999999999999993 , -0.0000000000000008 , -0.0000000000000008 , -0.0000000000000009
-0.0000000000000003 , 0.9999999999999996 , -0.0000000000000004 , -0.0000000000000004
-0.0000000000000006 , -0.0000000000000007 , 0.9999999999999993 , -0.0000000000000008
-0.0000000000000006 , -0.0000000000000007 , -0.0000000000000007 , 0.9999999999999992

So buoc lap theo Tien Nghiem: 169
Ma tran nghich dao la:
0.1021459227467811 , -0.0076946658491723 , -0.0007357449417535 , -0.0060392397302269
-0.0055793991416309 , -0.0028510116492949 , 0.0104843654199877 , -0.0014408338442673
-0.0120171673819742 , 0.0416615573267934 , -0.0015941140404660 , -0.0047516860821582
-0.0190987124463519 , -0.0086603310852238 , -0.0020232985898222 , 0.0208920907418761

Kiem tra nhan nguoc lai:
1.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , -0.0000000000000000 , -0.0000000000000000
0.0000000000000000 , 1.0000000000000000 , -0.0000000000000000 , 0.0000000000000000
-0.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , 1.0000000000000000 , 0.0000000000000000
0.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , 1.0000000000000000

```

Hình 6.2: Phương pháp Jacobi

```

So buoc lap theo Hau Nghiem: 20
Ma tran nghich dao la :
0.1021459227467811 , -0.0076946658491723 , -0.0007357449417535 , -0.0060392397302269
-0.0055793991416309 , -0.0028510116492949 , 0.0104843654199877 , -0.0014408338442673
-0.0120171673819742 , 0.0416615573267934 , -0.0015941140404660 , -0.0047516860821582
-0.0190987124463519 , -0.0086603310852238 , -0.0020232985898222 , 0.0208920907418761

Kiem tra nhan nguoc lai :
1.0000000000000001 , 0.0000000000000001 , 0.0000000000000001 , 0.0000000000000001
0.0000000000000001 , 1.0000000000000001 , 0.0000000000000001 , 0.0000000000000001
0.0000000000000001 , 0.0000000000000001 , 1.0000000000000001 , -0.0000000000000000
-0.0000000000000001 , -0.0000000000000001 , -0.0000000000000001 , 1.0000000000000000

So buoc lap theo Tien Nghiem: 169
Ma tran nghich dao la
0.1021459227467811 , -0.0076946658491723 , -0.0007357449417535 , -0.0060392397302269
-0.0055793991416309 , -0.0028510116492949 , 0.0104843654199877 , -0.0014408338442673
-0.0120171673819742 , 0.0416615573267934 , -0.0015941140404660 , -0.0047516860821582
-0.0190987124463519 , -0.0086603310852238 , -0.0020232985898222 , 0.0208920907418761

Kiem tra nhan nguoc :
1.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , -0.0000000000000000 , 0.0000000000000000
-0.0000000000000000 , 1.0000000000000000 , -0.0000000000000000 , -0.0000000000000000
0.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , 1.0000000000000000 , 0.0000000000000000
-0.0000000000000000 , 0.0000000000000000 , -0.0000000000000000 , 1.0000000000000000

```

Hình 6.3: Phương pháp Gauss - Seidel

Nhận thấy, số lần lặp theo hậu nghiệm của Jacobi nhiều hơn so với Gauss - Seidel. Tuy nhiên trong trường hợp này, số lần lặp theo tiên nghiệm của cả hai là như nhau.



**Ví dụ 3:** Nghịch đảo ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 7.27 & -0.26 & -0.02 & -0.14 & -0.03 & -0.03 & 0.1 & 0.14 & 0.02 & -0.11 \\ 0.64 & -5.41 & -0.02 & -0.32 & -0.2 & -0.13 & 0.24 & 0.07 & 0.19 & -0.28 \\ -0.09 & 0.03 & -9.12 & 0.16 & 0.08 & 0.27 & -0.3 & -0.49 & 0.32 & 0.24 \\ 0.23 & -0.18 & 0.01 & -7.00 & -0.09 & 0.06 & -0.14 & -0.31 & 0.35 & 0.14 \\ -0.13 & 0.22 & 0.02 & 0.07 & 4.01 & -0.01 & -0.11 & 0.03 & -0.07 & 0.07 \\ 0.06 & -0.06 & 0.02 & 0.08 & -0.01 & -3.11 & 0.07 & 0.03 & -0.01 & -0.07 \\ -0.35 & 0.36 & 0.14 & 0.1 & 0.09 & -0.14 & 11.22 & 0.56 & -0.65 & -0.14 \\ -0.18 & 0.13 & 0.04 & 0.08 & 0.01 & -0.23 & 0.27 & -3.34 & -0.31 & -0.09 \\ 0.23 & -0.26 & -0.02 & -0.11 & -0.16 & 0.01 & 0.17 & 0.03 & 8.18 & -0.14 \\ -0.67 & 0.43 & -0.02 & 0.3 & 0.32 & 0.34 & -0.51 & -0.44 & 0.1 & 9.4 \end{bmatrix}$$

Đây là ma trận chéo trội hàng. Ở đây, tiếp tục sử dụng hai phương pháp là Jacobi và Gauss - Seidel để tìm nghịch đảo ma trận này với sai số 0.0000001. Kết quả hiển thị như sau:

So buoc lap theo Hau Nghiem: 9  
Ma tran nghich dao la:  
0.13842163, -0.00636548, -0.00029120, -0.00238379, 0.00056156, -0.00133433, -0.00118673, 0.00553006, 0.00002298, 0.00149465  
0.01546473, -0.18672165, 0.00042762, 0.00796337, -0.00849472, 0.00734784, 0.00360019, -0.00273789, 0.00412523, -0.00530365  
-0.00080330, -0.00012971, -0.10966573, -0.00240027, 0.00208501, -0.01021921, -0.00317628, 0.01532958, 0.00469623, 0.00290024  
0.00434775, 0.00453236, -0.00018738, -0.14310098, -0.00289004, -0.00355828, -0.00222371, 0.01288266, 0.00626620, 0.00250054  
0.00352404, 0.00994650, 0.00056084, 0.00193595, 0.25007533, -0.00163181, 0.00208796, 0.00289088, 0.00208728, -0.00149019  
0.00230860, 0.00348115, -0.00069929, -0.00399145, -0.00055715, -0.32204261, 0.00178412, -0.00167038, -0.00018173, -0.00217816  
0.00404391, 0.00580674, 0.00137030, 0.00100434, -0.00156832, -0.00500067, 0.08864604, 0.01464066, 0.00731701, 0.00171420  
-0.00652516, -0.00625376, -0.00109391, -0.00262521, 0.00005882, 0.02151841, 0.00718362, -0.29770979, -0.01033258, -0.00293312  
-0.00318803, -0.00547338, -0.00026554, -0.00150919, 0.00446636, 0.00079197, -0.00163695, 0.00059112, 0.12237117, 0.00160538  
0.00876274, 0.00755891, -0.00023550, 0.00405389, -0.00809762, 0.01209200, 0.00484251, -0.01304443, -0.00183003, 0.10672664

Kiem tra nhan nguoc lai:  
1.00000001, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000  
-0.00000002, 1.00000001, 0.00000000, 0.00000001, 0.00000001, 0.00000000, -0.00000001, -0.00000000, -0.00000001, 0.00000001  
0.00000001, -0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000  
-0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
0.00000001, 0.00000001, 0.00000000, 0.00000001, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
-0.00000001, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
-0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
0.00000001, -0.00000001, -0.00000000, -0.00000001, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, -0.00000000  
0.00000001, -0.00000001, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000  
-0.00000001, 0.00000001, 0.00000000, 0.00000001, 0.00000001, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000001, 1.00000000

Hình 6.4: Phương pháp Jacobi với số lần lặp hậu nghiệm

So buoc lap theo Tien Nghiem: 17  
Ma tran nghich dao la:  
0.13842163, -0.00636548, -0.00029120, -0.00238379, 0.00056156, -0.00133433, -0.00118673, 0.00553006, 0.00002298, 0.00149465  
0.01546473, -0.18672165, 0.00042762, 0.00796337, -0.00849472, 0.00734784, 0.00360019, -0.00273789, 0.00412523, -0.00530365  
-0.00080330, -0.00012971, -0.10966573, -0.00240027, 0.00208501, -0.01021921, -0.00317628, 0.01532958, 0.00469623, 0.00290024  
0.00434775, 0.00453236, -0.00018738, -0.14310098, -0.00289004, -0.00355828, -0.00222371, 0.01288266, 0.00626620, 0.00250054  
0.00352404, 0.00994650, 0.00056084, 0.00193595, 0.25007533, -0.00163181, 0.00208796, 0.00289088, 0.00208728, -0.00149019  
0.00230860, 0.00348115, -0.00069929, -0.00399145, -0.00055715, -0.32204261, 0.00178412, -0.00167038, -0.00018173, -0.00217816  
0.00404391, 0.00580674, 0.00137030, 0.00100434, -0.00156832, -0.00500067, 0.08864604, 0.01464066, 0.00731701, 0.00171420  
-0.00652516, -0.00625376, -0.00109391, -0.00262521, 0.00005882, 0.02151841, 0.00718362, -0.29770979, -0.01033258, -0.00293312  
-0.00318803, -0.00547338, -0.00026554, -0.00150919, 0.00446636, 0.00079197, -0.00163695, 0.00059112, 0.12237117, 0.00160538  
0.00876274, 0.00755891, -0.00023550, 0.00405389, -0.00809762, 0.01209200, 0.00484251, -0.01304443, -0.00183003, 0.10672664

Kiem tra nhan nguoc lai:  
1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000  
-0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
0.00000000, -0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000  
-0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
-0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000  
0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, -0.00000000  
0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000  
-0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000  
-0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 1.00000000

Hình 6.5: Phương pháp Jacobi với số lần lặp tiên nghiệm

Số bước lặp theo Hậu Nghiệm: 6  
Ma trận nghịch đảo là:

```

0.13842163, -0.00636548, -0.00029120, -0.00238379, 0.00056156, -0.00133433, -0.00118673, 0.00553006, 0.00002298, 0.00149465
0.01546473, -0.18672165, 0.00042762, 0.00796337, -0.00849473, 0.00734784, 0.00360020, -0.00273789, 0.00412523, -0.00530365
-0.00080330, -0.00012971, -0.10966573, -0.00240027, 0.00208501, -0.01021921, -0.00317628, 0.01532958, 0.00469623, 0.00290024
0.00434775, 0.00453236, -0.00018738, -0.14310098, -0.00289004, -0.00355828, -0.00222371, 0.01288266, 0.00626620, 0.00250054
0.00352404, 0.00994650, 0.00056084, 0.00193595, 0.25007533, -0.00163181, 0.00208796, 0.00289088, 0.00208728, -0.00149019
0.00230860, 0.00348115, -0.00069929, -0.00399145, -0.00055715, -0.32204261, 0.00178412, -0.00167038, -0.00018173, -0.00217816
0.00404391, 0.00580674, 0.00137030, 0.00100434, -0.00156832, -0.00500067, 0.08864604, 0.01464066, 0.00731701, 0.00171420
-0.00652516, -0.00625376, -0.00109391, -0.00262521, 0.00005882, 0.02151841, 0.00718362, -0.29770979, -0.01033258, -0.00293312
-0.00318803, -0.00547338, -0.00026554, -0.00150919, 0.00446636, 0.00079197, -0.00163695, 0.00059112, 0.12237117, 0.00160538
0.00876274, 0.00755891, -0.00023550, 0.00405389, -0.00809762, 0.01209200, 0.00484251, -0.01304443, -0.00183003, 0.10672664

```

Kiểm tra nhân ngược lại:

```

1.00000000, -0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000001, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000
0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000
0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 1.00000000, 0.00000000
0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 1.00000000

```

Hình 6.6: Phương pháp Gauss - Seidel với số lần lặp hậu nghiệm

Số bước lặp theo Tiên Nghiệm: 13  
Ma trận nghịch đảo là:

```

0.13842163, -0.00636548, -0.00029120, -0.00238379, 0.00056156, -0.00133433, -0.00118673, 0.00553006, 0.00002298, 0.00149465
0.01546473, -0.18672165, 0.00042762, 0.00796337, -0.00849473, 0.00734784, 0.00360020, -0.00273789, 0.00412523, -0.00530365
-0.00080330, -0.00012971, -0.10966573, -0.00240027, 0.00208501, -0.01021921, -0.00317628, 0.01532958, 0.00469623, 0.00290024
0.00434775, 0.00453236, -0.00018738, -0.14310098, -0.00289004, -0.00355828, -0.00222371, 0.01288266, 0.00626620, 0.00250054
0.00352404, 0.00994650, 0.00056084, 0.00193595, 0.25007533, -0.00163181, 0.00208796, 0.00289088, 0.00208728, -0.00149019
0.00230860, 0.00348115, -0.00069929, -0.00399145, -0.00055715, -0.32204261, 0.00178412, -0.00167038, -0.00018173, -0.00217816
0.00404391, 0.00580674, 0.00137030, 0.00100434, -0.00156832, -0.00500067, 0.08864604, 0.01464066, 0.00731701, 0.00171420
-0.00652516, -0.00625376, -0.00109391, -0.00262521, 0.00005882, 0.02151841, 0.00718362, -0.29770979, -0.01033258, -0.00293312
-0.00318803, -0.00547338, -0.00026554, -0.00150919, 0.00446636, 0.00079197, -0.00163695, 0.00059112, 0.12237117, 0.00160538
0.00876274, 0.00755891, -0.00023550, 0.00405389, -0.00809762, 0.01209200, 0.00484251, -0.01304443, -0.00183003, 0.10672664

```

Kiểm tra nhân ngược:

```

1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000
0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000
0.00000000, -0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000
0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 1.00000000, -0.00000000, -0.00000000
-0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 1.00000000, 0.00000000
0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, -0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, -0.00000000, 1.00000000

```

Hình 6.7: Phương pháp Gauss - Seidel với số lần lặp tiên nghiệm

Nhận thấy, số lần lặp theo hậu nghiệm và tiên nghiệm của Gauss - Seidel đã dần cho thấy sự hội tụ nhanh hơn của phương pháp này so với Jacobi.

**Ví dụ 4:** Nghịch đảo ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 50 & 6 & 9 & 5 & 6 & 4 & 7 & 40 & 1 & 2 \\ 2 & 90 & 6 & 3 & 8 & 1 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 60 & 9 & 1 & 9 & 9 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 80 & 4 & 7 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 4 & 3 & 50 & 4 & 4 & 7 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & 2 & 70 & 7 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 9 & 6 & 1 & 1 & 80 & 9 & 4 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 2 & 9 & 2 & 2 & 90 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 9 & 4 & 2 & 7 & 120 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 4 & 0 & 5 & 7 & 1 & 130 \end{bmatrix}$$

Đây là ma trận chéo trội cột. Ở đây, nhóm sử dụng cả ba phương pháp bao gồm Newton, Jacobi và Gauss - Seidel để tìm nghịch đảo ma trận này với sai số 0.001. Kết quả hiển thị như sau:



Số bước lặp theo Hậu Nghiệm: 23

Mã trận nghịch đảo là:

```
0.0221 , -0.0010 , -0.0026 , -0.0007 , -0.0007 , -0.0005 , -0.0012 , -0.0096 , 0.0004 , 0.0001
0.0000 , 0.0114 , -0.0009 , -0.0002 , -0.0016 , 0.0001 , -0.0005 , -0.0005 , -0.0002 , -0.0003
-0.0002 , -0.0003 , 0.0174 , -0.0017 , 0.0000 , -0.0020 , -0.0016 , 0.0004 , -0.0005 , -0.0004
-0.0008 , 0.0003 , -0.0010 , 0.0127 , -0.0009 , -0.0010 , -0.0003 , 0.0003 , -0.0002 , 0.0001
-0.0025 , -0.0018 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0208 , -0.0009 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0002 , -0.0011
-0.0010 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0002 , -0.0003 , 0.0146 , -0.0010 , 0.0005 , -0.0005 , -0.0001
-0.0004 , -0.0009 , -0.0017 , -0.0007 , 0.0003 , 0.0002 , 0.0128 , -0.0010 , -0.0003 , -0.0003
-0.0018 , 0.0001 , 0.0001 , -0.0001 , -0.0019 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0121 , -0.0005 , -0.0002
-0.0007 , -0.0005 , 0.0001 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0003 , 0.0000 , -0.0002 , 0.0084 , -0.0004
-0.0011 , 0.0002 , -0.0008 , -0.0006 , -0.0004 , 0.0003 , -0.0003 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0078
```

Kiểm tra nhân ngược lại:

```
1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000
```

Hình 6.8: Phương pháp Jacobi với số lần lặp hậu nghiệm

Số bước lặp theo Tiên Nghiệm: 97

Mã trận nghịch đảo là:

```
0.0221 , -0.0010 , -0.0026 , -0.0007 , -0.0007 , -0.0005 , -0.0012 , -0.0096 , 0.0004 , 0.0001
0.0000 , 0.0114 , -0.0009 , -0.0002 , -0.0016 , 0.0001 , -0.0005 , -0.0005 , -0.0002 , -0.0003
-0.0002 , -0.0003 , 0.0174 , -0.0017 , 0.0000 , -0.0020 , -0.0016 , 0.0004 , -0.0005 , -0.0004
-0.0008 , 0.0003 , -0.0010 , 0.0127 , -0.0009 , -0.0010 , -0.0003 , 0.0003 , -0.0002 , 0.0001
-0.0025 , -0.0018 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0208 , -0.0009 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0002 , -0.0011
-0.0010 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0002 , -0.0003 , 0.0146 , -0.0010 , 0.0005 , -0.0005 , -0.0001
-0.0004 , -0.0009 , -0.0017 , -0.0007 , 0.0003 , 0.0002 , 0.0128 , -0.0010 , -0.0003 , -0.0003
-0.0018 , 0.0001 , 0.0001 , -0.0001 , -0.0019 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0121 , -0.0005 , -0.0002
-0.0007 , -0.0005 , 0.0001 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0003 , 0.0000 , -0.0002 , 0.0084 , -0.0004
-0.0011 , 0.0002 , -0.0008 , -0.0006 , -0.0004 , 0.0003 , -0.0003 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0078
```

Kiểm tra nhân ngược lại:

```
1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000
-0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000
0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000
-0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000
0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000
-0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , -0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000
```

Hình 6.9: Phương pháp Jacobi với số lần lặp tiên nghiệm

```

So buoc lap theo Hau Nghiem: 8
Ma tran nghich dao la :
0.0221 , -0.0010 , -0.0026 , -0.0007 , -0.0007 , -0.0005 , -0.0012 , -0.0096 , 0.0004 , 0.0001
0.0000 , 0.0114 , -0.0009 , -0.0002 , -0.0016 , 0.0001 , -0.0005 , -0.0005 , -0.0002 , -0.0003
-0.0002 , -0.0003 , 0.0174 , -0.0017 , 0.0000 , -0.0020 , -0.0016 , 0.0004 , -0.0005 , -0.0004
-0.0008 , 0.0003 , -0.0010 , 0.0127 , -0.0009 , -0.0010 , -0.0003 , 0.0003 , -0.0002 , 0.0001
-0.0025 , -0.0018 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0208 , -0.0009 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0002 , -0.0011
-0.0010 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0002 , -0.0003 , 0.0146 , -0.0010 , 0.0005 , -0.0005 , -0.0001
-0.0004 , -0.0009 , -0.0017 , -0.0007 , 0.0003 , 0.0002 , 0.0128 , -0.0010 , -0.0003 , -0.0003
-0.0018 , 0.0001 , 0.0001 , -0.0001 , -0.0019 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0121 , -0.0005 , -0.0002
-0.0007 , -0.0005 , 0.0001 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0003 , 0.0000 , -0.0002 , 0.0084 , -0.0004
-0.0011 , 0.0002 , -0.0008 , -0.0006 , -0.0004 , 0.0003 , -0.0003 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0078

Kiem tra nhan nguoc lai :
1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , -0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000

```

Hình 6.10: Phương pháp Gauss - Seidel với số lần lặp hậu nghiệm

```

So buoc lap theo Tien Nghiem: 65
Ma tran nghich dao la
0.0221 , -0.0010 , -0.0026 , -0.0007 , -0.0007 , -0.0005 , -0.0012 , -0.0096 , 0.0004 , 0.0001
0.0000 , 0.0114 , -0.0009 , -0.0002 , -0.0016 , 0.0001 , -0.0005 , -0.0005 , -0.0002 , -0.0003
-0.0002 , -0.0003 , 0.0174 , -0.0017 , 0.0000 , -0.0020 , -0.0016 , 0.0004 , -0.0005 , -0.0004
-0.0008 , 0.0003 , -0.0010 , 0.0127 , -0.0009 , -0.0010 , -0.0003 , 0.0003 , -0.0002 , 0.0001
-0.0025 , -0.0018 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0208 , -0.0009 , -0.0005 , -0.0003 , 0.0002 , -0.0011
-0.0010 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0002 , -0.0003 , 0.0146 , -0.0010 , 0.0005 , -0.0005 , -0.0001
-0.0004 , -0.0009 , -0.0017 , -0.0007 , 0.0003 , 0.0002 , 0.0128 , -0.0010 , -0.0003 , -0.0003
-0.0018 , 0.0001 , 0.0001 , -0.0001 , -0.0019 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0121 , -0.0005 , -0.0002
-0.0007 , -0.0005 , 0.0001 , -0.0002 , -0.0013 , -0.0003 , 0.0000 , -0.0002 , 0.0084 , -0.0004
-0.0011 , 0.0002 , -0.0008 , -0.0006 , -0.0004 , 0.0003 , -0.0003 , -0.0001 , -0.0000 , 0.0078

Kiem tra nhan nguoc :
1.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000
-0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000
0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000
-0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , 0.0000 , -0.0000 , 0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000 , -0.0000 , 0.0000
0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 0.0000 , 1.0000 , 0.0000
-0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , -0.0000 , 1.0000

```

Hình 6.11: Phương pháp Gauss - Seidel với số lần lặp tiên nghiệm

```

Nhap sai so : 0.001
Ma tran ban dau:
50      6.0000  9.0000  5.0000  6.0000  4.0000  7.0000  40.0000  1.0000  2.0000
2.0000  90.0000 6.0000  3.0000  8.0000  1.0000  5.0000  6.0000  3.0000  5.0000
2.0000  3.0000 60.0000 9.0000  1.0000  9.0000  9.0000  0.0000  5.0000  4.0000
4.0000  0.0000  6.0000 80.0000 4.0000  7.0000  4.0000  1.0000  3.0000  0.0000
7.0000  9.0000  4.0000  3.0000 50.0000 4.0000  4.0000  7.0000  0.0000  8.0000
4.0000  3.0000  7.0000  3.0000  2.0000 70.0000 7.0000  1.0000  5.0000  2.0000
3.0000  7.0000  9.0000  6.0000  1.0000  1.0000 80.0000 9.0000  4.0000  4.0000
9.0000  2.0000  2.0000  2.0000  9.0000  2.0000  2.0000 90.0000 5.0000  4.0000
6.0000  7.0000  2.0000  3.0000  9.0000  4.0000  2.0000  7.0000 120.0000  8.0000
8.0000  0.0000  8.0000  8.0000  4.0000  0.0000  5.0000  7.0000  1.0000 130.0000

Ma tran ket thuc sau 0 lan lap
Ma tran nghich dao la:
0.0221 -0.0010 -0.0026 -0.0007 -0.0007 -0.0005 -0.0012 -0.0096 0.0004 0.0001
0.0000 0.0114 -0.0009 -0.0002 -0.0016 0.0001 -0.0005 -0.0005 -0.0002 -0.0003
-0.0002 -0.0003 0.0174 -0.0017 0.0000 -0.0020 -0.0016 0.0004 -0.0005 -0.0004
-0.0008 0.0003 -0.0010 0.0127 -0.0009 -0.0010 -0.0003 0.0003 -0.0002 0.0001
-0.0025 -0.0018 -0.0005 -0.0003 0.0208 -0.0009 -0.0005 -0.0003 0.0002 -0.0011
-0.0010 -0.0002 -0.0013 -0.0002 -0.0003 0.0146 -0.0010 0.0005 -0.0005 -0.0001
-0.0004 -0.0009 -0.0017 -0.0007 0.0003 0.0002 0.0128 -0.0010 -0.0003 -0.0003
-0.0018 0.0001 0.0001 -0.0001 -0.0019 -0.0001 -0.0000 0.0121 -0.0005 -0.0002
-0.0007 -0.0005 0.0001 -0.0002 -0.0013 -0.0003 0.0000 -0.0002 0.0084 -0.0004
-0.0011 0.0002 -0.0008 -0.0006 -0.0004 0.0003 -0.0003 -0.0001 -0.0000 0.0078

```

Hình 6.12: Phương pháp Newton

Nhận thấy, cả ba phương pháp đều ra cùng một kết quả. Nhìn vào số lần lặp, ta thấy sự vượt trội về tốc độ hội tụ của phương pháp Newton so với hai phương pháp còn lại. Ngoài ra, giữa Jacobi và Gauss - Seidel, phương pháp Gauss - Seidel cũng đưa ra số bước lặp về hậu nghiệm và tiên nghiệm (lần lượt là 8 và 65) ít hơn nhiều so với Jacobi (tương ứng là 23 và 97).

## Chương 7

# Tổng kết

### 7.1 Nhận xét chung các phương pháp

- Các phương pháp này giúp giảm thời gian tính toán so với các phương pháp tính đúng do độ phức tạp của thuật toán tìm ma trận nghịch đảo là rất lớn, để tính toán đúng sẽ mất nhiều thời gian hơn nhất là trong một số trường hợp với ma trận cỡ cực lớn.
- Các phương pháp này đều giúp cải thiện sai số sau mỗi bước lặp, từ đó sai số của bài toán sẽ ổn định hơn so với tính toán đúng.

### 7.2 Nhận xét riêng từng phương pháp

#### 7.2.1 Phương pháp Newton

##### Ưu điểm

- Có tốc độ hội tụ nhanh nhất trong ba phương pháp.
- Thuật toán đơn giản, dễ nhớ, dễ sử dụng.

##### Nhược điểm

- Khó tìm được xấp xỉ đầu. *(Trong bài này sử dụng phương pháp Gauss để tìm gần đúng xấp xỉ đầu. Ngoài ra còn một số cách khác.)*

#### 7.2.2 Phương pháp lặp Jacobi và Gauss - Seidel

##### Ưu điểm

- Có thể chọn xấp xỉ đầu bất kỳ, cải thiện được thời gian chạy nếu chọn được xấp xỉ đầu "tốt".

##### Nhược điểm

- Thuật toán phức tạp, cài đặt và sử dụng khó hơn.
- Yêu cầu ma trận đầu vào phải chéo trội.
- Tốc độ hội tụ nhìn chung chậm hơn phương pháp Newton. Tuy nhiên, phương pháp Gauss - Seidel vẫn có tốc độ hội tụ nhanh hơn Jacobi.

# Tài liệu tham khảo

1. Richard L. Burden J. Douglas Faires. Numerical Methods, 4th Edition. Brooks / Cole, Cengage Learning, 2013, 2003, 1998.
2. Lê Trọng Vinh. Giáo trình Giải tích số. NXB Khoa học và kỹ thuật, 2007.