TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

Chủ đề: Các phương pháp tìm gần đúng ma trận nghịch đảo.

Giáo viên hướng dẫn : **TS. Hà Thị Ngọc Yến**

Lớp : **Hệ thống thông tin quản lý - K64**

Nhóm sinh viên thực hiện : **Nguyễn Thị Vân Anh** **20195949**
Nguyễn Phương Khánh Linh **20195977**
Đào Thị Phương Nga **20195983**
Nguyễn Thị Thu Thủy **20195996**
Lê Thị Hồng Trang **20196000**

Hà Nội, 2021

MỤC LỤC

Mở đầu

Bài toán tìm ma trận nghịch đảo là một trong những bài toán quan trọng của giải tích số. Ta đã được biết đến một số phương pháp tìm đúng ma trận nghịch đảo như Gauss-Jordan, Cholevsky, phương pháp viền quanh, nghĩa là nếu các phép tính sơ cấp được thực hiện một cách chính xác thì cuối cùng ta sẽ thu được ma trận kết quả đúng. Tuy nhiên trong thực tế, các phương pháp giải trực tiếp trên thường không kiểm soát được sai số làm tròn và dẫn tới sai lệch, đồng thời khối lượng tính toán và yêu cầu về bộ nhớ là rất lớn nên thiếu hiệu quả đối với ma trận cỡ lớn. Do vậy, phương pháp lặp ra đời để phần nào giải quyết những vấn đề mà phương pháp tìm đúng gặp phải.

Phương pháp lặp thực hiện việc xấp xỉ ma trận cho đến khi ma trận này gần đúng với ma trận nghịch đảo đúng với sai số rất nhỏ. Phương pháp này được sử dụng rộng rãi, đặc biệt cho những hệ thống lớn bởi phương pháp này đơn giản và mạnh mẽ hơn các phương pháp số học khác, đồng thời yêu cầu ít bộ nhớ hơn các phương pháp giải trực tiếp. Tốc độ hội tụ của phương pháp phụ thuộc vào xấp xỉ ban đầu của ma trận nghịch đảo. Do đó, việc chọn ma trận xấp xỉ ban đầu có ý nghĩa rất lớn để phương pháp đạt hiệu quả cao. Xấp xỉ ma trận khởi đầu không hợp lí có thể dẫn tới phương pháp không hội tụ.

Trong phạm vi bài báo cáo này, nhóm sẽ đề cập đến ba phương pháp lặp để tìm gần đúng ma trận nghịch đảo, đó là: phương pháp lặp Newton, phương pháp lặp Jacobi và phương pháp lặp Gauss – Seidel.

Nhóm xin được gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến TS. Hà Thị Ngọc Yến đã giúp nhóm chỉnh sửa và hoàn thành bài báo cáo này.

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Chuẩn ma trận và sự hội tụ của dãy ma trận

1.1.1. Chuẩn ma trận

Xét $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận vuông cấp n.

Ta gọi chuẩn của ma trận A ký hiệu là $\|A\|$ là số không âm thỏa mãn:

$$\|A\|\geq 0, \text{ dấu "="xảy ra } \Leftrightarrow A=0$$

$$\|kA\|=|k|\|A\|, \ k=const$$

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$$

Các chuẩn của ma trận thường dùng:

$$\|A\|_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

$$\|A\|_{1}=\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

$$\|A\|_{2}=\sqrt{\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}|a_{ij}|^{2}}$$

Ta có bất đẳng thức:

$$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$$

$$\left\|A^{m}\right\|\leq\|A\|^{m}$$

1.1.2. Sự hội tụ của dãy ma trận

Dãy ma trận $\left\{A^{(k)}\right\}=\left\{a_{ij}^{(k)}\right\}_{i,j=\overline{1,n}}$ với $k=1,2,...$ hội tụ tới ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n}$ khi $k\to\infty$ nếu:

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \forall i, j \text{ hoặc } \lim_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} - A \right\| = 0$$

Ký hiệu: $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$

1.2. Ma trận chéo trội

Xét ma trận A vuông cấp n. Ta có hai kiểu ma trận chéo trội là ma trận chéo trội hàng và ma trận chéo trội cột:

Nếu A là ma trận chéo trội hàng: $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = \overline{1,n}$

Nếu A là ma trận chéo trội cột: $\sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad j = \overline{1,n}$

2. Phương pháp lặp Newton

2.1. Ý tưởng

Cho $a \in R(a \neq 0)$, tìm x thỏa mãn $ax = 1$

$$ax = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{x}$$

Đặt $f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$ (1)

Áp dụng phương pháp Newton (tiếp tuyến) đối với phương trình (1) để tìm nghiệm gần đúng. Ta có:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{a - \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_k^2}}$$

Hay:

$$x_{k+1} = x_k(2 - ax_k), \text{ với } k \in N \quad (2)$$

2.2. Nội dung phương pháp

Cho A là ma trận vuông cấp n, không suy biến $(\det A \neq 0)$. Trong (2) coi a là ma trận A , x là ma trận X . Cần tìm ma trận X là ma trận nghịch đảo của A sao cho $AX = XA = E$.

Ta có công thức lặp suy ra từ (2) như sau:

$$X_{k+1} = X_k\left(2E - AX_k\right), \text{ với } k = 0,1,2,...$$

trong đó E là ma trận đơn vị cùng cấp

Như vậy, ta cần khảo sát điều kiện hội tụ của dãy $\{X_k\}$

2.3. Điều kiện hội tụ

Vấn đề đặt ra là với điều kiện nào thì $\lim\limits_{k\to 0} X_k = A^{-1}$

Đặt $G_k = E - AX_k, \forall k = 0,1,2,...$ (3)

Từ (3), ta được:

$$G_k = E - AX_k = E - AX_{k-1}\left(2E - AX_{k-1}\right)$$

$$= E - 2AX_{k-1} + \left(AX_{k-1}\right)^2$$

$$= \left(E - AX_{k-1}\right)^2 = G_{k-1}^2$$

Từ đây ta thu được:

$$G_k = G_{k-1}^2 = G_{k-2}^4 = ... = G_0^{2^k}$$

Mặt khác:

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}\left(E - AX_k\right) = A^{-1}G_k = A^{-1}G_k = A^{-1}G_0^{2^k}$$

Nên:

$$\left\|A^{-1} - X_k\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|\left\|G_0\right\|^{2^k} \qquad (4)$$

trong đó $G_0 = E - AX_0$. Từ (4) ta thấy nếu $\|G_0\| < 1$ thì:

$$\|A^{-1} - X_k\| \to 0 \text{ khi } k \to \infty$$

Hay:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}$$

Vậy điều kiện hội tụ của quá trình lặp là: $\|G_0\| \le \|E - AX_0\| < 1$ (5)

Như vậy, không phải $\{X_k\}$ luôn hội tụ với mọi xấp xỉ X_0. Ta cần tìm xấp xỉ ban đầu X_0 thỏa mãn bài toán

2.4. Công thức sai số

Giả sử $\|G_0\| \le q < 1$

Ta lại có: $G_0 = E - AX_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}(E - G_0)$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E - G_0)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = X_0(E + G_0 + G_0^2 + ...)$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\| \le \|X_0\|(1 + q + q^2 + ...) = \frac{\|X_0\|}{1-q}$$

Thay vào (4) ta được:

$$\|A^{-1} - X_k\| \le \frac{\|X_0\|}{1-q}\|G_0\|^{2^k} = \frac{\|X_0\|}{1-q}q^{2^k}$$

Vậy : $\|A^{-1} - X_k\| \le \frac{\|X_0\|}{1-q}\|G_0\|^{2^k} = \frac{\|X_0\|}{1-q}q^{2^k}$ là công thức sai số của phương pháp.

2.5. Các phương pháp chọn xấp xỉ đầu

Theo như (5) thì không phải với bất kỳ ma trận đầu vào X_0 như thế nào thì (3) cũng hội tụ. Do đó, chúng ta cần có cách tìm X_0 thích hợp.

2.5.1. Chọn X_0 thông qua các phương pháp tính đúng

Đầu ra của các phương pháp như: Gauss-Jordan, Cholesky,… hoàn toàn có thể sử dụng làm X_0. Khi đó ta sẽ có một phương pháp kết hợp: đầu tiên tìm ma trận nghịch đảo thông qua các phương pháp tính đúng, sau đó sử dụng phương pháp Newton để đánh giá sai số.

2.5.2. Chọn X_0 thông qua khai triển SVD

Dựa trên khai triển SVD ta có thể chọn X_0 thông qua công thức:

$$X_0 = \frac{A^T}{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

Ta sẽ thử ngược lại xem với X_0 như trên thì có thỏa mãn điều kiện hội tụ $\|G_0\| < 1$ không.

Ta có:

$$\Rightarrow (AX_0)^{-1} = (E - G_0)^{-1} \qquad (6)$$

Mà:

$$E = (E - G_0)(E - G_0)^{-1}$$
$$\Rightarrow (E - G_0)^{-1} = E + G_0 (E - G_0)^{-1}$$
$$\Rightarrow \left\|(E - G_0)^{-1}\right\| \le \|E\| + \|G_0\| \left\|(E - G_0)^{-1}\right\|$$

Chia cả hai vế cho $\left\|(E - G_0)^{-1}\right\|$ ta được:

$$1 \le \frac{\|E\|}{\left\|(E - G_0)^{-1}\right\|} + \|G_0\| \Rightarrow \left\|(E - G_0)^{-1}\right\| \le \frac{\|E\|}{1 - \|G_0\|} \qquad (7)$$

Từ (6): $A^{-1} = X_0 (E - G_0)^{-1} \Rightarrow \left\|A^{-1}\right\| \le \|X_0\| \left\|(E - G_0)^{-1}\right\|$

Thay (7) vào bất đẳng thức trên:

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \left\|X_0\right\| \frac{\left\|E\right\|}{1-\left\|G_0\right\|}$$

$$\Rightarrow 1-\left\|G_0\right\| \le \left\|X_0\right\| \frac{\left\|E\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|}$$

$$\Rightarrow c\left(1-\left\|G_0\right\|\right) = \left\|X_0\right\| \frac{\left\|E\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|} \left(c \ge 1\right)$$

$$\Rightarrow \left\|G_0\right\| = 1 - c'\left\|X_0\right\| \frac{\left\|E\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|} \left(c' = \frac{1}{c} \le 1\right)$$

Như vậy, với $X_0 = \dfrac{A^T}{\left\|A\right\|_1 \left\|A\right\|_\infty}$ thì $\left\{X_k\right\}$ hội tụ .

2.6. Thuật toán

Input: Ma trận A, ε

Output: Ma trận X là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Bước 1: Nhập A, ε

Bước 2: Tính $X_0 = \dfrac{A^T}{\left\|A\right\|_1 \left\|A\right\|_\infty}$

Bước 3: Gán

$$q := \left\|E - AX_0\right\|$$

$$k := 0$$

$$X := X_0$$

Bước 4: Kiểm tra điều kiện, chừng nào $\dfrac{\left\|X_0\right\| q^{2^k}}{1-q}$ còn đúng thì tiếp tục thực hiện gán

$$X := X\left(2E - AX\right)$$

$$k := k + 1$$

Sai thì chuyển sang bước 5

Bước 5: Đưa ra X chính là ma trận nghịch đảo

Giải thích các biến trong thuật toán:

A: Ma trận cần nghịch đảo.

X_0: Xấp xỉ đầu vào.

ε: Sai số cho phép.

E: Ma trận đơn vị cùng cấp với.

X: Dãy ma trận X_k, tuy nhiên chúng ta chỉ cần xét phần tử X_{k-1} để tính X_k nên chúng ta chỉ cần 1 ma trận X.

q: Giá trị trong q công thức sai số.

3. Phương pháp lặp Jacobi

3.1. Ý tưởng của phương pháp

Tương tự như phương pháp lặp Jacobi giải hệ phương trình $AX = b$, ta giải phương trình $AX = E$ với ma trận A chéo trội.

Lặp dãy ma trận: Cho xấp xỉ đầu vào X_0 và tính theo công thức lặp:

$$X_k = \alpha X_{k-1} + \beta \qquad k = 1,2,...$$

Nếu dãy hội tụ thì giới hạn là nghiệm cần tìm.

3.2. Xây dựng công thức

$$T = diag\left\{\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, ..., \frac{1}{a_{nn}}\right\}$$

Với $a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$ là các phần tử trên đường chéo chính của A.

3.2.1. A là ma trận chéo trội hàng

$$AX = E \Rightarrow TAX = TE \Rightarrow X = X - TAX + TE \Rightarrow X = \left(E - TA\right)X + TE$$

Công thức lặp:

$$X_k = \left(E - TA\right)X_{k-1} + T \quad k = 1,2,...$$

3.2.2. A là ma trận chéo trội cột

Đặt $D = T^{-1},\ X = TY$

$$AX = E \Leftrightarrow ATY = E \Leftrightarrow Y = Y - ATY + E \Leftrightarrow Y = \left(E - AT\right)Y + E$$

Công thức lặp:

$$\begin{aligned} &Y_k = \left(E - TA\right)Y_{k-1} + E \Leftrightarrow TY_k = T\left(E - TA\right)DTY_{k-1} + TE \\ &\Leftrightarrow X_k = \left(E - TA\right)X_{k-1} + T \end{aligned} \qquad k = 1,2,...$$

3.3 Điều kiện hội tụ

Phương pháp này hội tụ nếu $\|E - TA\| < 1$, tức là ma trận A phải chéo trội.

Chứng minh dãy lặp $X_k = \alpha X_{k-1} + \beta$ sẽ hội tụ tới nghiệm đúng X^* khi $\|E - TA\| \le q < 1$

$$X^* = \alpha X^* + \beta$$

$$X_k = \alpha X_{k-1} + \beta$$

$$\Rightarrow X_k - X^* = \alpha X_{k-1} - \alpha X^* = \alpha\left(X_{k-1} - X^*\right)$$

$$\Rightarrow \left\|X_k - X^*\right\|_{(p)} \le \|\alpha\|\left\|X_{k-1} - X^*\right\|_{(p)} \le q\left\|X_{k-1} - X^*\right\|_{(p)}$$

Truy hồi theo k được:

$$\left\|X_k - X^*\right\|_{(p)} \le q^k \left\|X_0 - X^*\right\|_{(p)}$$

Do c nên $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|X_k - X^*\right\|_{(p)} = 0$ hay $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X^*$

3.4. Công thức sai số

Trường hợp chéo trội hàng: đặt $\alpha = E - TA$ và $\lambda = 1$, tồn tại một số q để:

$$\|\alpha\|_\infty \le q < 1$$

Trường hợp chéo trội cột: đặt $\alpha' = E - AT$ và $\lambda = \dfrac{\max|a_{ii}|}{\min|a_{ii}|}$, tồn tại một số q để:

$$\|\alpha'\|_1 \le q < 1$$

Công thức sai số:

$$\left\|X_k - X^*\right\| \le \lambda \frac{q}{1-q}\left\|X_k - X_{k-1}\right\|$$

$$\left\|X_k - X^*\right\| \le \lambda \frac{q^k}{1-q}\left\|X_1 - X_0\right\|$$

3.5. Thuật toán

Input: Ma trận A chéo trội, sai số ε.

Output: Ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo.

Bước 1: Nhập A , ε

Bước 2: Kiểm tra tính chéo trội của ma trận A

Nếu $p = 1$, ma trận A chéo trội hàng

Nếu $p = -1$, ma trận A chéo trội cột

Bước 3 : Tìm ma trận đường chéo :

$$T = diag\left\{\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, ..., \frac{1}{a_{nn}}\right\}$$

Bước 4: Gán $\alpha := E - TA,\ \alpha' := E - AT$

Bước 5: Tính q:

Nếu $p = 1,\ q = \left\|\alpha\right\|_\infty$

Nếu $p = -1,\ q = \left\|\alpha'\right\|_1$

Bước 6: Xác định λ:

Nếu $p = 1,\ \lambda = 1$

Nếu $p=-1$, $\lambda=\dfrac{\max|a_{ii}|}{\min|a_{ii}|}$

Bước 7: Thực hiện lặp

Đánh giá tiên nghiệm:

Gán $q_k := 1$, $X := X_0$

Chừng nào $\dfrac{\lambda q_k \|(\alpha X_0 + T) - X_0\|}{1-q} > \varepsilon$ còn đúng thì thực hiện gán:

(công thức chuẩn tùy thuộc vào p)

$$X := \alpha X + T$$

$$q_k := q_k * q$$

Sai thì trả về X .

Đánh giá hậu nghiệm:

Gán $X_t := X_0$, $X_s := \alpha X_0 + T$

Chừng nào $\dfrac{\lambda q \|X_s - X_t\|}{1-q} > \varepsilon$ còn đúng thì tiếp tục thực hiện gán:

(công thức chuẩn tùy thuộc vào p)

$$X_t := X_s$$
$$X_s := \alpha * X_t + T$$

Sai thì trả về X_s .

4. Phương pháp lặp Gauss-Seidel

4.1. Ý tưởng

Dựa trên sự phát triển lặp Jacobi, muốn tăng tốc độ hội tụ của phương pháp lặp jacobi, giảm số lần lặp.

Sử dụng ngay những kết quả vừa tính được tại bước k để tính các thành phần khác của bước k, chỉ những thành phần nào chưa được tính thì mới lấy ở bước k-1.

4.2. Xây dựng công thức

Công thức lặp tính toán: $X_{n+1} = UX_n + LX_{n+1} + T$

Hay $$X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} X_j^{(k)} + T_i$$

Với $T = diag\left(\frac{1}{a_{ii}}\right), i = \overline{1m}$ và $D = diag\left(a_{ii}\right)$ ta có:

$$A = D - L - U$$
$$\Rightarrow TA = TD - TL - TU$$
$$AX = E$$
$$\Rightarrow TAX = TE \Rightarrow (E - TL - TU)X = T \Rightarrow X = (TL + TU)X + T$$

Lại có:

$$X_{k+1} = TUX_k + TLX_{k+1} + T$$
$$\Leftrightarrow X_{k+1} - TLX_{k+1} = TUX_k + T$$
$$\Leftrightarrow (E - TL)X_{k+1} = TUX_k + TE$$
$$\Leftrightarrow D(E - TL)X_{k+1} = DTUX_k + DTE$$
$$\Leftrightarrow (D - L)X_{k+1} = UX_k + E$$
$$\Leftrightarrow X_{k+1} = (D - L)^{-1}[UX_k + E]$$

4.3. Điều kiện hội tụ

Công thức lặp:

$$X_{k+1} = \left(D - L\right)^{-1}\left[UX_k + E\right]$$

Đặt: $M = \left(D - L\right)^{-1}U$, M là ma trận lặp, λ là giá trị riêng của ma trận lặp.

Bổ đề: Nếu $\left|\lambda\right| \geq 1$ thì ma trận $\lambda\left(D - L\right) - U$ luôn khả nghịch.

Để tìm giá trị riêng của ma trận lặp ta tính định thức:

$$\det(\lambda E - M) = \det\left[\lambda E - (D-L)^{-1}U\right] = 0$$

$$\Rightarrow \det\left[(D-L)\left[\lambda E - (D-L)^{-1}U\right]\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left[\lambda(D-L) - U\right] = 0$$

λ là giá trị riêng của ma trận lặp $\Leftrightarrow$ λ là giá trị làm cho $\det\left[\lambda(D-L)-U\right]=0$

$\Rightarrow$ Ma trận M chéo trội =>khả nghịch.

Để M không khả nghịch thì $\rho(M)<1 \Rightarrow$ Tồn tại $\|M\|<1$

$\Rightarrow M$ là ma trận hội tụ.

4.4. Công thức sai số

Trường hợp chéo trội hàng: $\alpha := E - TA$, $q = \max\limits_{1\le i\le n} \dfrac{\sum\limits_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|}{1-\sum\limits_{j=i}^{i-1}|\alpha_{ij}|} \le \|\alpha\|_\infty < 1$, $S = 0$

Trường hợp chéo trội cột: $\alpha' = E - AT$, $q = \max\limits_{1\le i\le n} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{i}|\alpha'_{ji}|}{1-\sum\limits_{j=i+1}^{n}|\alpha'_{ij}|}$, $S := \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=i+1}^{n}|\alpha'_{ji}|$

Công thức sai số tuyệt đối:

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{q}{(1-q)(1-S)}\|X_k - X_{k-1}\|$$

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{q^k}{(1-q)(1-S)}\|X_1 - X_0\|$$

Công thức sai số tương đối:

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} \le \delta$$

4.5. Thuật toán

Input: Ma trận chéo trội cột A

Output: Ma trận A^{-1} nghịch đảo

Bước 1: Nhập A, ε

Bước 2: Kiểm tra tính chéo trội của ma trận

Bước 3: Tìm ma trận đường chéo $T = diag\left\{\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, ..., \frac{1}{a_{nn}}\right\}$

Bước 4: $\alpha := E - TA,\ \alpha' := E - AT$

Bước 5:

Nếu ma trận A chéo trội hàng: $S := 0$, $q = \max\limits_{1 \le i \le n} \frac{\sum\limits_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}|}{1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|}$

Nếu ma trận A chéo trội cột: $S := \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=i+1}^{n} |\alpha'_{ji}|$, $q = \max\limits_{1 \le i \le n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} |\alpha'_{ji}|}{1 - \sum\limits_{j=i+1}^{n} |\alpha'_{ij}|}$

Bước 6: Thực hiện lặp

Đánh giá tiên nghiệm

Gán $q_k := 1$ $X := X_0$

Tính X_1:

Gán X_1 là ma trận không cấp n

$$X_{1(row\_i)} := \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} * X_{1(row\_j)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} * X_{0(row\_j)} + T_i$$

Chừng nào $\frac{q_k * \|X_1 - X_0\|}{(1-q)*(1-S)} > \varepsilon$ còn đúng thì thực hiện gán

Tính X :

Gán X_{next} là ma trận không cấp n

$$X_{next(row\_i)} := \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} * X_{next(row\_j)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} * X_{(row\_j)} + T_i$$

$$X := X_{next}$$

$$q_k := q_k * q$$

Nếu sai trả về X .

Đánh giá hậu nghiệm

Gán $X_{old} := X_0$

Tính X_{new} :

Gán X_{next} là ma trận không cấp n

$$X_{next(row\_i)} := \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} * X_{1(row\_j)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} * X_{0(row\_j)} + T_i$$

$$X_{new} := X_{next}$$

Chừng nào $\frac{q * \|X_{new} - X_{old}\|}{1-q} > \varepsilon$ còn đúng thì thực hiện gán

$$X_{old} := X_{new}$$

Tính X_{new} :

Gán X_{new} là ma trận không cấp n

$$X_{new(row\_i)} := \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} * X_{new(row\_j)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} * X_{old(row\_j)} + T_i$$

$$X_{new} := X_{next}$$

Nếu sai trả về X .

5. Đánh giá các phương pháp

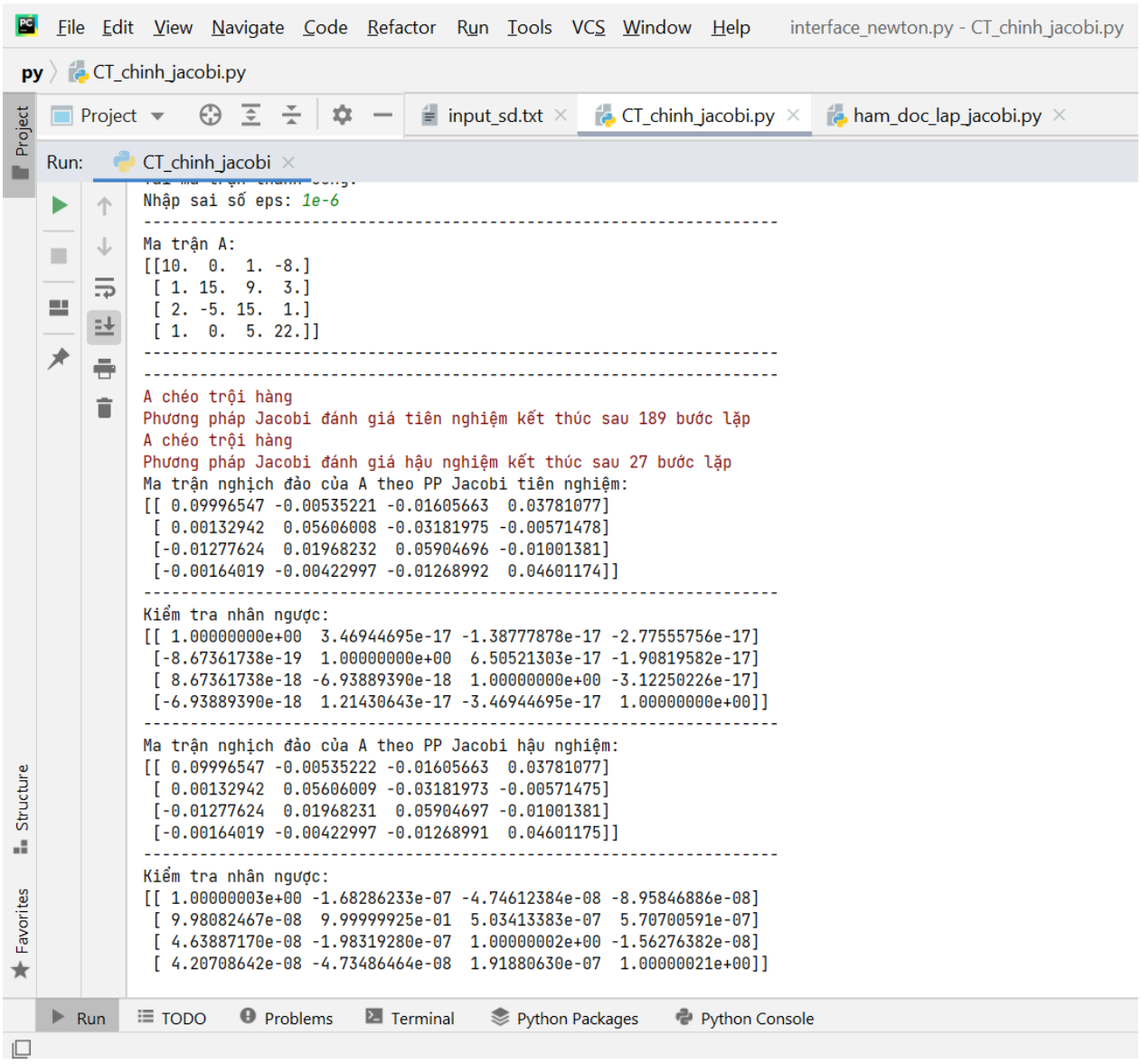
	LẶP JACOBI	**LẶP GAUSS-SEIDEL**	**LẶP NEWTON**
ƯU ĐIỂM	+ Tiết kiệm bộ nhớ. + Có thể tính toán song song. + Giá trị chọn xấp xỉ ban đầu là tùy ý.	+ Tốc độ hội tụ lớn hơn hoặc bằng Jacobi. + Giá trị chọn xấp xỉ ban đầu là tùy ý.	+ Tốc độ hội tụ rất cao, nhanh hơn nhiều so với các phương pháp khác.
NHƯỢC ĐIỂM	+ Chỉ sử dụng cho ma trận chéo trội. + Tốc độ hội tụ chậm.	+ Chỉ sử dụng cho ma trận chéo trội. + Không thể tính toán song song.	+ Khó tìm xấp xỉ đầu vào, không được phép chọn tùy ý.

6. Hệ thống ví dụ

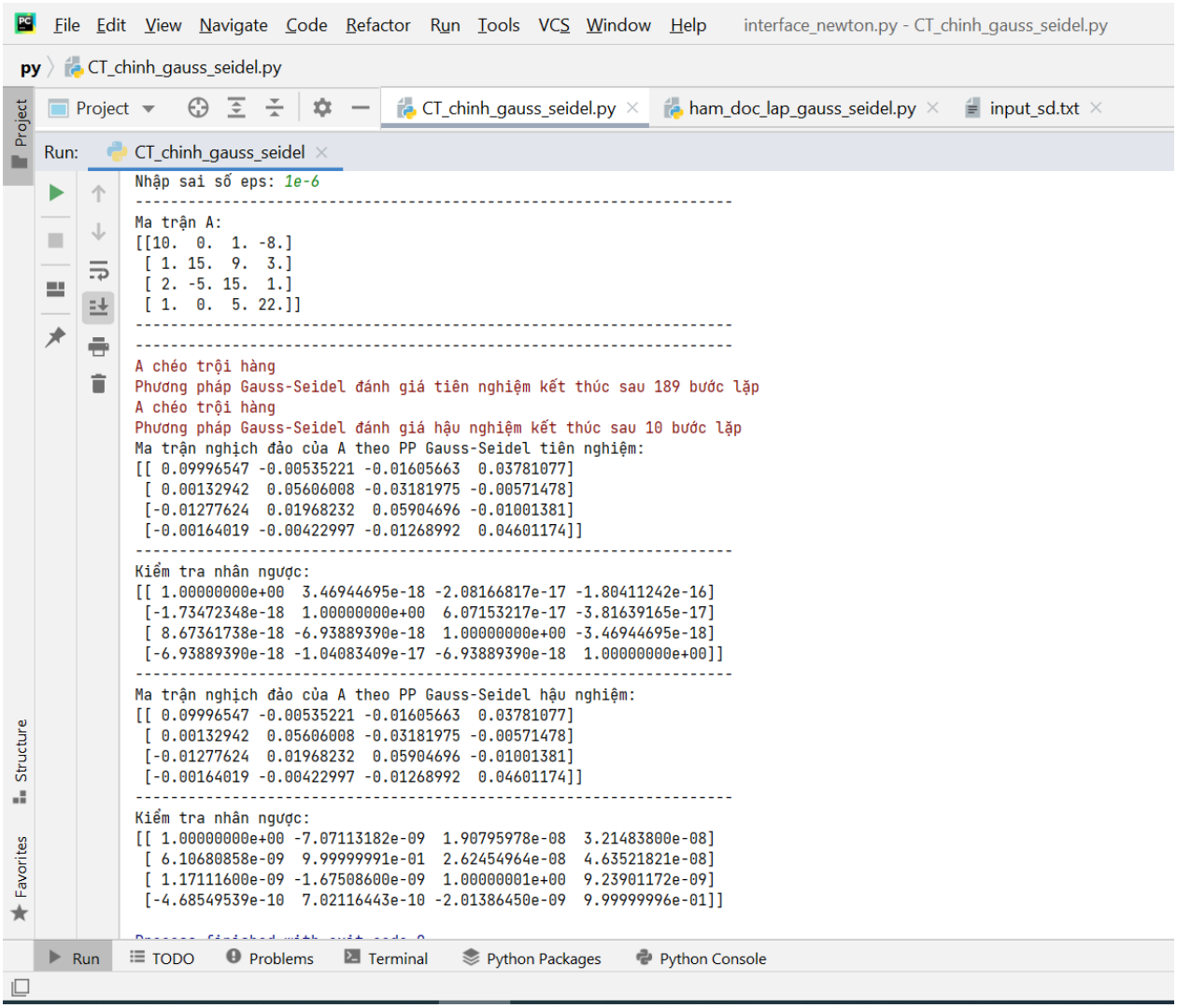
Ví dụ 1: Nghịch đảo ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & 15 & 9 & 3 \\ 2 & -5 & 15 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 22 \end{bmatrix}$$

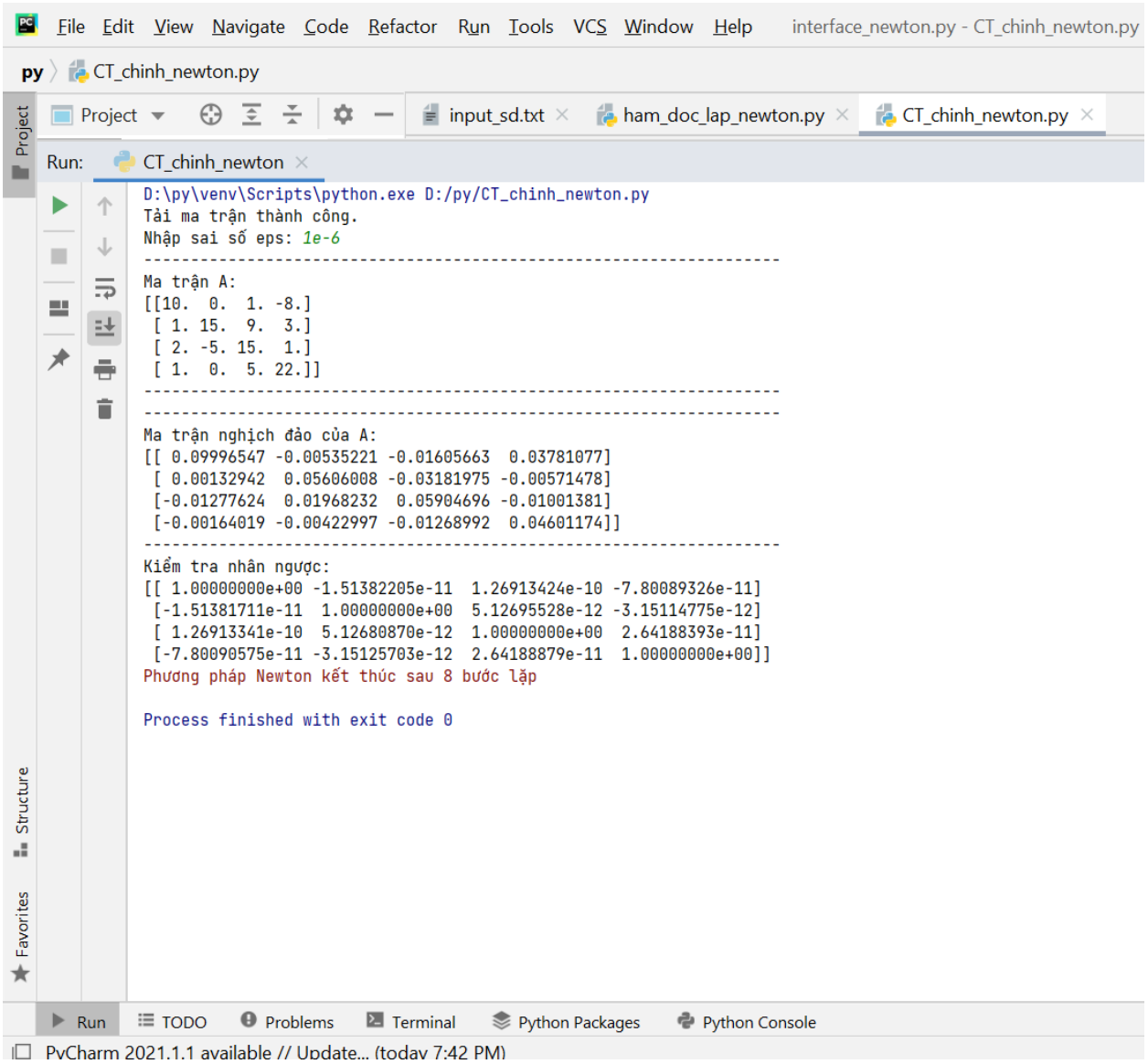
Đây là ma trận chéo trội hàng, thỏa mãn điều kiện hội tụ của phương pháp Jacobi cũng như Gauss-Seidel. Khi chạy các thuật toán với ma trận này với sai số 10^{-6}, ta được kết quả kèm ma trận tích của kết quả thu được với ma trận ban đầu như sau:



Phương pháp lặp Jacobi, xấp xỉ đầu là ma trận A



Phương pháp lặp Gauss - Seidel, xấp xỉ đầu là ma trận A

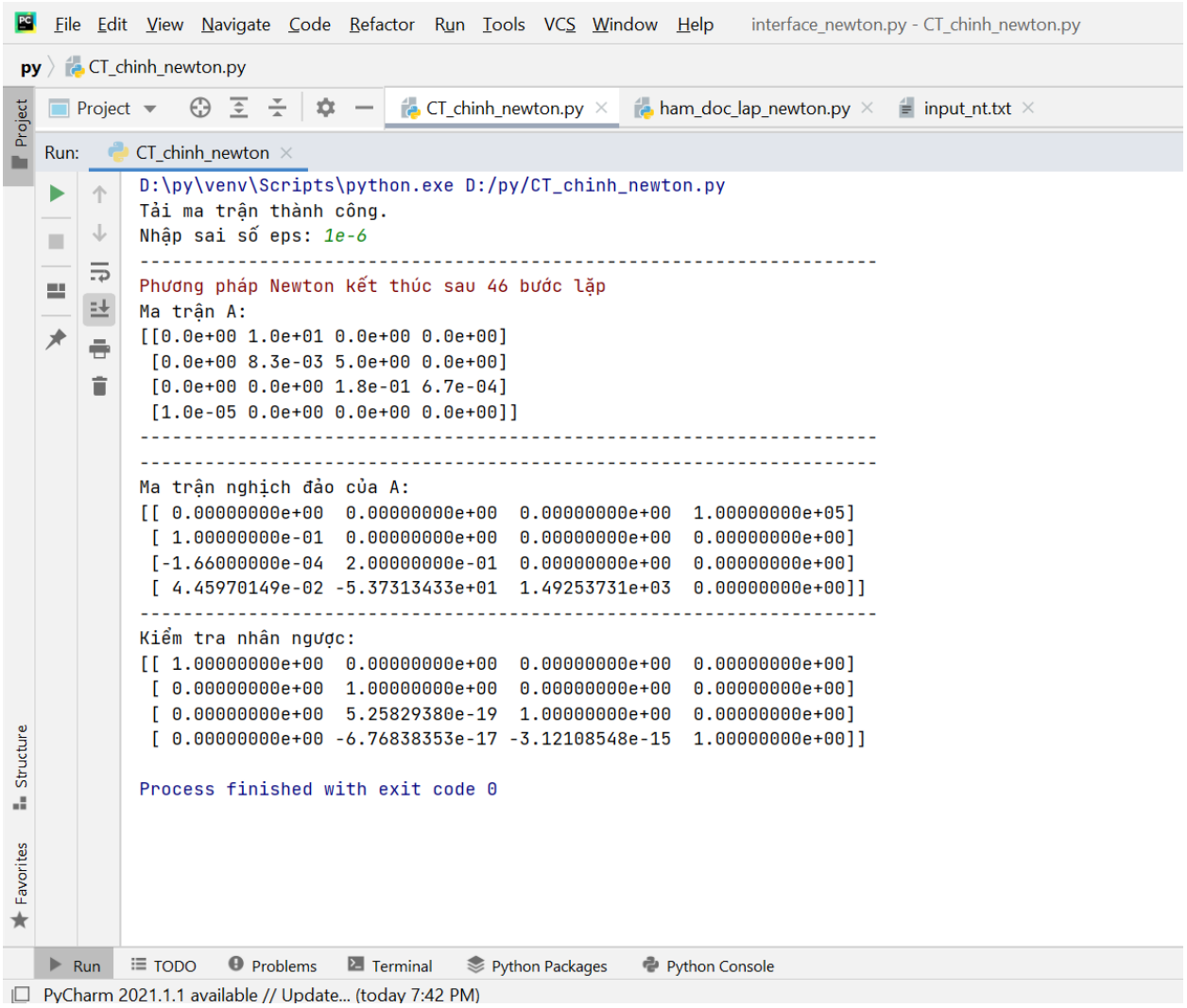


Phương pháp lặp Newton, xấp xỉ đầu theo khai triển SVD

Ví dụ 2: Nghịch đảo ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0083 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 & 0.00067 \\ 0.00001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

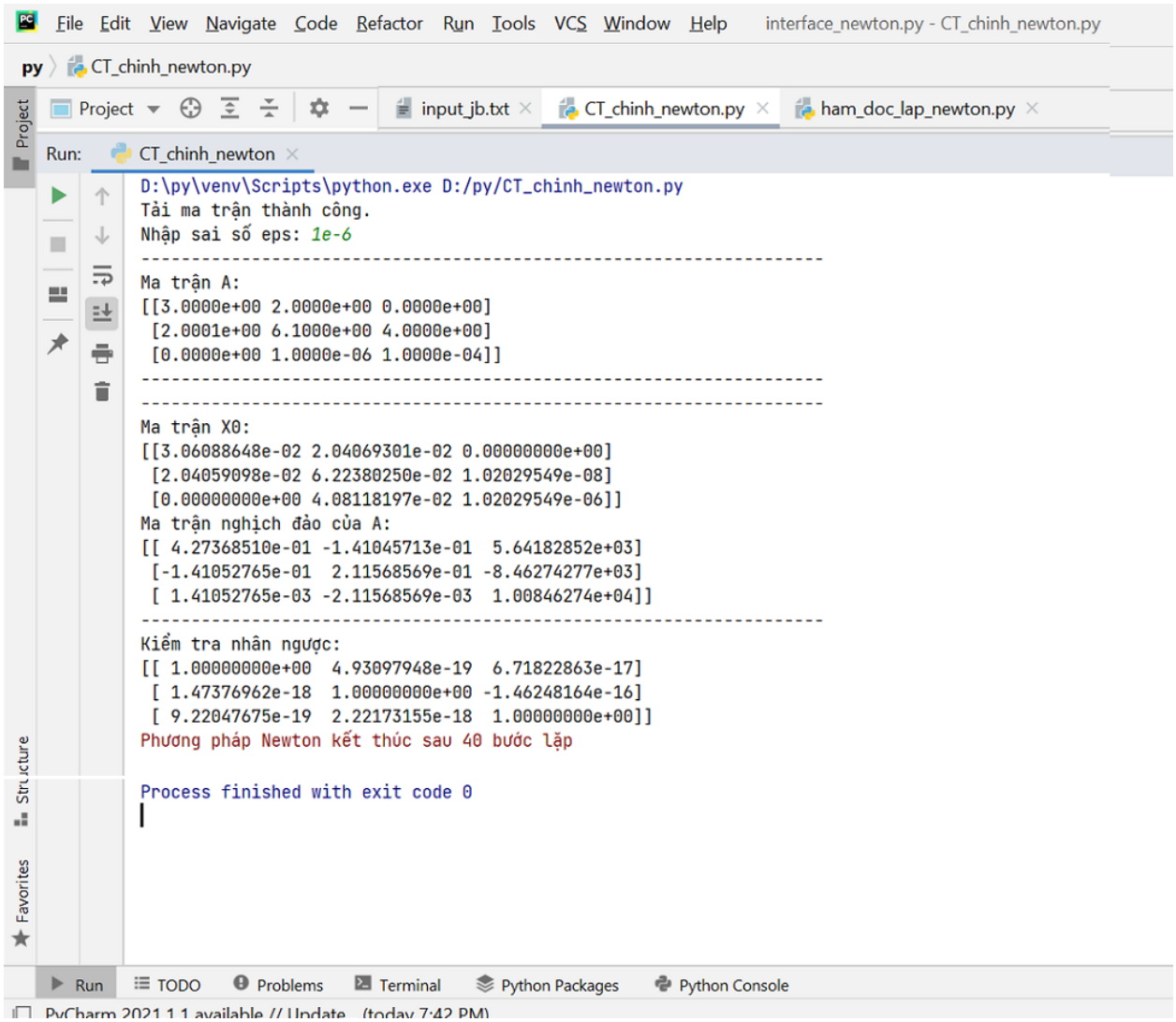
Đây là ma trận không chéo trội và có các định thức con chính bằng 0, tức là không thể chạy được với phương pháp Jacobi cũng như Gauss-Seidel. Khi chạy thuật toán Newton với ma trận này với sai số 10^{-6}, ta được kết quả kèm ma trận tích của kết quả thu được với ma trận ban đầu như sau:



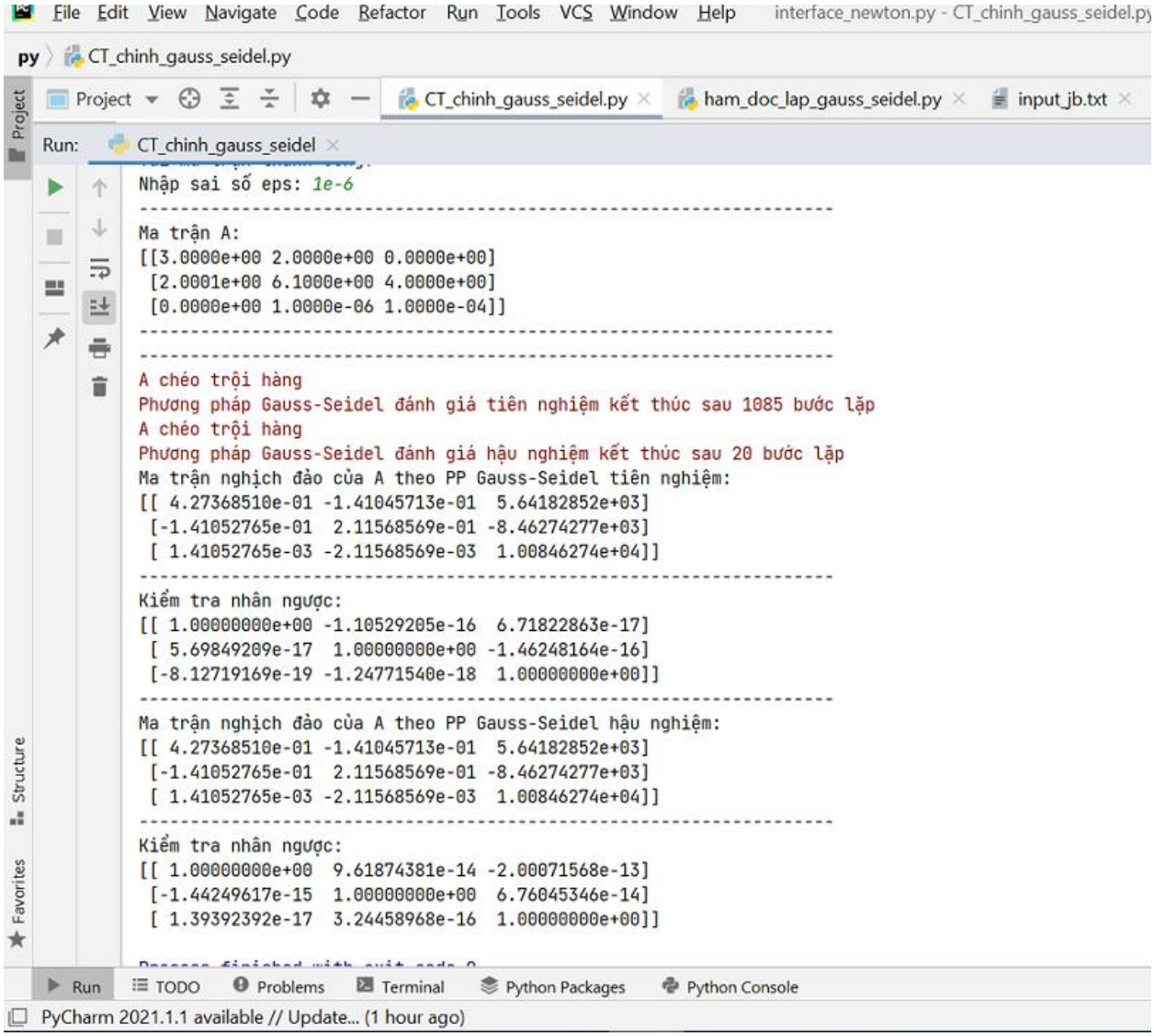
Ví dụ 3: Nghịch đảo ma trận sau:(Ma trận gần suy biến)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2.0001 & 6.1 & 4 \\ 0 & 0.000001 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

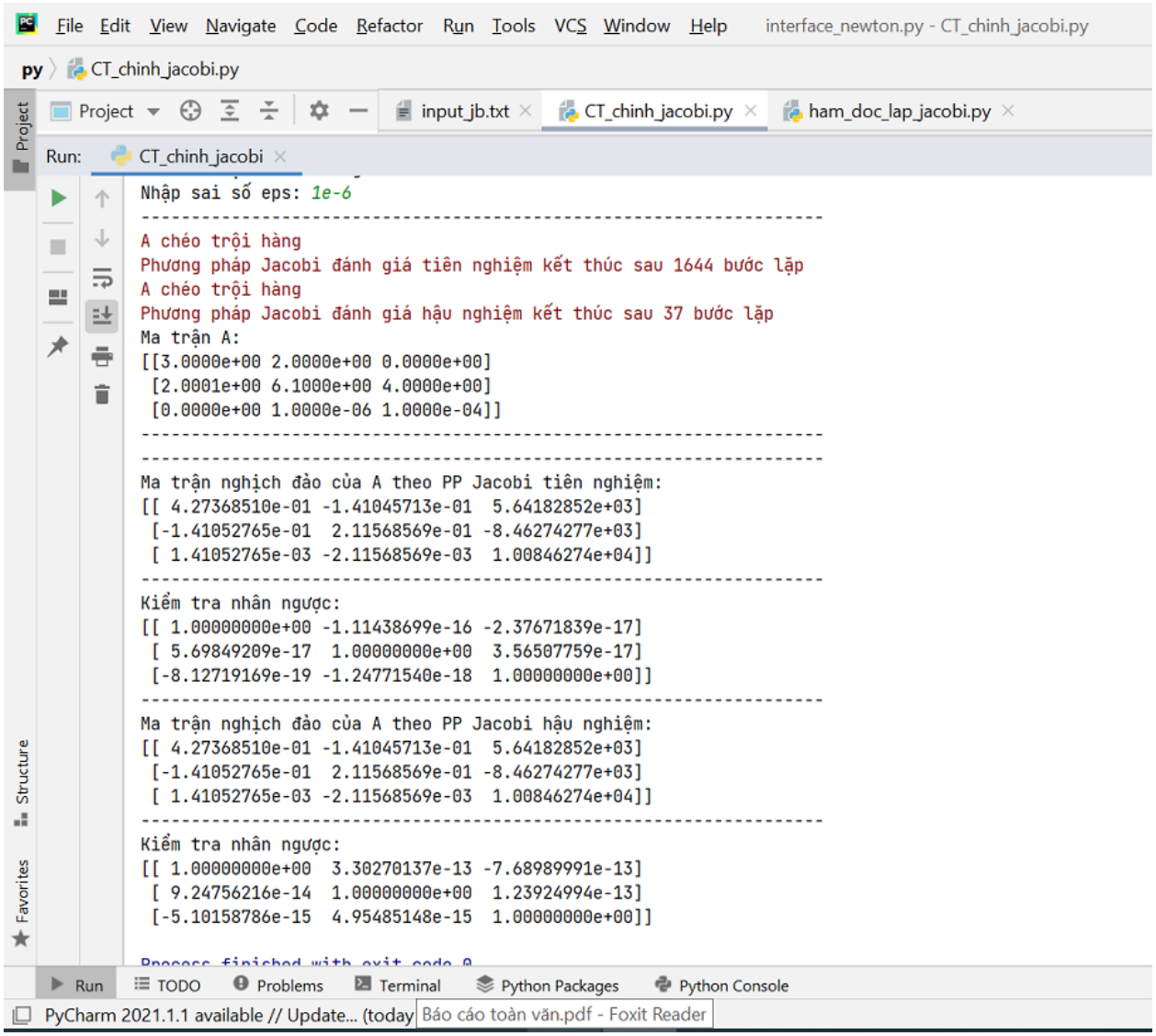
Đây là ma trận chéo trội hàng và là ma trận gần suy biến, thoả mãn điều kiện hội tụ. Khi chạy các thuật toán với ma trận này với sai số 10^{-6} với cùng xấp xỉ đầu X_0 của phương pháp lặp Newton, ta được kết quả kèm ma trận tích của ma trận nghịch đảo thu được với ma trận ban đầu như sau:



Phương pháp lặp Newton, xấp xỉ đầu theo khai triển SVD



Phương pháp lặp Gauss - Seidel, xấp xỉ đầu là ma trận X_0 của phương pháp lặp Newton



Phương pháp lặp Jacobi, xấp xỉ đầu là ma trận X_0 của phương pháp lặp Newton

Kết luận

Qua các chương vừa rồi, chúng ta đã tìm hiểu xong ý tưởng cũng như cơ sở lý thuyết của các phương pháp lặp Newton, lặp Jacobi và lặp Gauss-Seidel. Các phương pháp này mặc dù có những ưu nhược điểm khác nhau nhưng đã giải quyết được: sai số và tính toán ma trận cỡ lớn. Chúng còn có thể kết hợp với các phương pháp tính đúng để mang đến phương pháp kết hợp đạt hiệu quả cao hơn như đã trình bày. Trong thực tế , nghịch đảo ma trận cũng có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực: đồ họa máy tính, kỹ thuật điện, điện tử, an toàn thông tin.

Bài báo cáo còn nhiều hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của mọi người để nhóm hoàn thiện hơn. Nhóm báo cáo xin chân thành cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

1. C. T. Kelley, *Iterative Methods of Linear and Nonlinear Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philapdelphia, 1995.
2. F. Soleimali, M. Sharifi, S. Shateyi, *Approximating the Inverse of a Square Matrix with Applicationin Computation of the Moore – Penrose Inverse, Jour – nal of Applied Mathematics*, vol. 2014, Article ID 731562, 8 pages, 2014.
3. Jayashree Rajafopalan, *An Iterative Algorithm For Inverse Matrices*, Par – tial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Master of Applied Science at Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, 1996.
4. Hà Thị Ngọc Yến, *Phương pháp lặp Jacobi*, 2019.
5. Hà Thị Ngọc Yến, *Phương pháp lặp Gauss - Seidel*, 2019.
6. Hà Thị Ngọc Yến, *Phương pháp Newton*, 2019.
7. Lê Trọng Vinh, *Giáo trình Giải tích số*, NXB Khoa học và kỹ thuật, 2007.
8. Richard L. Burden J. Douglas Faires. *Numerical Methods, 4th Edition*. Brooks / Cole, Cengage Learning, 2013, 2003, 1998.
9. The Pennsylvania State University Jaan Kiusalaas, *Numerical Methods in Engineering With MATTLAB*, Cambridge University Press, 2005.
10. Thomas E. Phipps Jr. "The inversion of large matrices: The Pan and Reif algorithm provides a solution". In: *Byte Magazine* 11.04 (4-1986).
11. Victor Pan, Robert Schreiber, *An Improved Newton Interation for the Gen-eralized Inverse of a Matrix, with Application*, RIACS Technical Report, March 1990.