

Math Biology Cơ bản

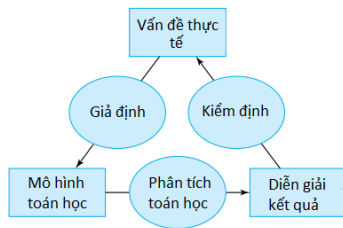
Mô hình hóa Toán học và ứng dụng trong Sinh học

Nguyễn Trần Nam Tiến





Mô hình hóa toán học là quá trình chuyển đổi các vấn đề thực tế thành dạng ký hiệu để phân tích và giải quyết các vấn đề đó. Mô hình hóa toán học có thể được biểu diễn bằng đồ thị sau:



- Xây dựng mô hình toán học bằng cách công thức hóa các vấn đề thực tế
- Phân tích và tìm ra lời giải cho bài toán
- Diễn giải kết quả của bài toán cho phù hợp với với đề thực tế



Có rất nhiều điều kiện để phân loại các dạng mô hình hóa toán học. Có thể kể đến như sau

- ① **Linear vs Nonlinear**
- ② **Static vs Dynamic**
- ③ **Discrete vs Continuous**
- ④ **Deterministic vs Probabilistic**



Toán sinh học (hay Sinh học lý thuyết), là một nhánh của Sinh học sử dụng các phân tích lý thuyết, mô hình toán học và trừu tượng hóa các sinh vật sống để nghiên cứu các nguyên lý đại diện cho cấu trúc, sự phát triển và hành vi của các hệ sinh học.

Các dạng mô hình hóa trong Toán sinh học cũng tương tự như slide trước. Tuy nhiên, trong phạm vi khóa học này chúng ta tập trung vào **phương trình sai phân** - một **discrete dynamical system** vì các lý do sau:

- 1 Modeling with difference equations is a very powerful, yet simple tool for modeling dynamical systems in biology, ecology, the environment, and chemistry
- 2 Modeling with difference equations requires knowledge of algebra but does not require knowledge of differential calculus
- 3 Đối tượng khóa học tập trung vào các bạn học sinh cấp 3 và năm nhất, năm hai đại học, chưa có kiến thức nhiều về các nhánh của toán học như Phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, ...



Ví dụ

Consider the population of a city with a constant growth rate per year. The population is counted at the end of each year. For simplicity, assume that there is no immigration to or emigration from the city.

- i. Model the population dynamic and predict the long-term behavior of the system.*
- ii. In 2020, the city's population was 100,000. The natural annual growth rate of the population is 1% per year. Predict the city's population in 2030. Estimate the population over the next 30 years and graph it. What is the long-term behavior of the population?*



Bàn Luận

i. We will measure the population at discrete time intervals in one-year units. Đặt:

p_n là dân số tại thời điểm kết thúc năm thứ n

p_0 là dân số ban đầu

r là tốc độ gia tăng dân số

Ta có mối liên hệ giữa dân số năm thứ $n + 1$ và năm thứ n :

$$p_{n+1} = p_n + rp_n = (1 + r)p_n \quad (1)$$

Phương trình 1 là một *phương trình sai phân* (hay phương trình đệ quy). Phương trình này kết hợp với điều kiện dân số ban đầu p_0 đại diện cho sự thay đổi động lực học của dân số. Bởi vì dân số thay đổi theo thời gian, nên đây là một **dynamical system**. Chúng ta cũng mô phỏng hệ theo các khoảng thời gian rời rạc, nên đây là một **discrete system**. Như vậy, bài toán thực tế về dân số đã được **mô hình hóa** bằng một **discrete dynamical system**.



Bàn Luận (tiếp):

Để giải hệ trên, giả sử để tìm p_k ta có thể thay p_0 vào phương trình 1 để tìm p_1 , rồi tìm p_2 , lần lượt đến p_k . Bằng phương pháp trên, với mọi k ta luôn tìm được một dãy số:

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$$

là nghiệm của phương trình 1. Đây được gọi là ***ng nghiệm số học (numerical solution)*** của phương trình mô hình hóa.

Ta cũng có thể dễ dàng chứng minh được từ phương trình 1

$$p_n = (1 + r)^n p_0 \quad (2)$$

với $n \in \mathbb{N}$. Đây được gọi là ***ng nghiệm chính xác (exact solution hay analytical solution)*** của phương trình mô hình hóa.

Phương trình 2 là một hàm số mũ. Nếu $r > 0$, $1 + r > 1$ thì p_n sẽ tiến tới vô cùng. Nếu $r < 0$, $1 + r < 1$ thì p_n sẽ tiến tới 0 khi n tiến tới vô cùng. (Đây là bước biện giải mô hình hóa toán học)

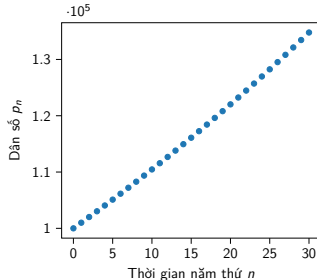


Bàn Luận (tiếp):

ii. Ta có $n = 10$, $p_0 = 100000$, $r = 0.01$. Tại năm thứ 10, dân số của thành phố là:

$$p_{10} = (1 + 0.01)^{10} 100000 = 110462$$

Để vẽ đồ thị, ta tính dãy số $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{30}$ theo phương trình 2. Kết quả như sau:



THANK YOU!