

Math Biology Cơ bản

Mô hình hóa Toán học và ứng dụng trong Sinh học

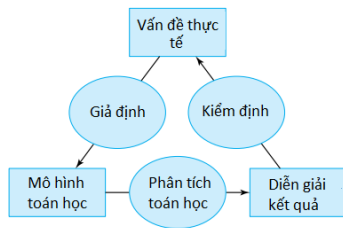
Nguyễn Trần Nam Tiến



Giới thiệu về mô hình hóa



Mô hình hóa toán học là quá trình chuyển đổi các vấn đề thực tế thành dạng ký hiệu để phân tích và giải quyết các vấn đề đó. Mô hình hóa toán học có thể được biểu diễn bằng đồ thị sau:



- Xây dựng mô hình toán học bằng cách công thức hóa các vấn đề thực tế
- Phân tích và tìm ra lời giải cho bài toán
- Diễn giải kết quả của bài toán cho phù hợp với với đề thực tế



Có rất nhiều điều kiện để phân loại các dạng mô hình hóa toán học. Có thể kể đến như sau

- ① **Linear vs Nonlinear:** mô hình có các toán tử là tuyến tính hay phi tuyến
- ② **Static vs Dynamic:** mô hình có phụ thuộc vào thời gian hay ko
- ③ **Discrete vs Continuous:** mô hình coi vấn đề thực tế liên tục hay rời rạc
- ④ **Deterministic vs Probabilistic:** mô hình có các yếu tố ngẫu nhiên hay không

Mô hình hóa toán học và Toán sinh học



Toán sinh học (hay Sinh học lý thuyết), là một nhánh của Sinh học sử dụng các phân tích lý thuyết, mô hình toán học và trừu tượng hóa các sinh vật sống để nghiên cứu các nguyên lý đại diện cho cấu trúc, sự phát triển và hành vi của các hệ sinh học.

Các dạng mô hình hóa trong Toán sinh học cũng tương tự như slide trước. Tuy nhiên, trong phạm vi phần đầu khóa học này chúng ta tập trung vào **phương trình sai phân** - một **discrete dynamical system** vì các lý do sau:

- 1 Mô hình hóa với các phương trình sai phân là một công cụ rất mạnh mẽ nhưng đơn giản để mô hình hóa các hệ thống động lực học trong sinh học, sinh thái học, dịch tễ ...
- 2 Mô hình hóa với các phương trình sai phân yêu cầu kiến thức về đại số nhưng chưa yêu cầu các kiến thức về giải tích
- 3 Đối tượng khóa học tập trung vào các bạn học sinh cấp 3 và năm nhất, năm hai đại học, chưa có kiến thức nhiều về các nhánh của toán học như Phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, ...



Ví dụ

Xem xét vấn đề dân số với tốc độ tăng trưởng dân số (r) tại 1 thành phố; cứ mỗi năm dân số của thành phố đó được tính vào cuối năm.

1. Mô hình hóa quá trình tăng trưởng dân số (population dynamic) của thành phố đó và dự đoán dân số trong những năm tiếp theo.
2. Năm 2020, dân số là 100,000 người. Tốc độ tăng trưởng dân số hàng năm là 1%/năm. Hãy dự đoán dân số vào năm 2030? Ước tính dân số trong vòng 30 năm tiếp theo?



1. Mô hình hóa tăng trưởng dân số của thành phố

Chúng tôi sẽ đo dân số trong các khoảng thời gian riêng biệt trong đơn vị một năm. Đặt:

p_n là dân số tại thời điểm kết thúc năm thứ n

p_0 là dân số ban đầu

r là tốc độ gia tăng dân số

Ta có mối liên hệ giữa dân số năm thứ $n + 1$ và năm thứ n :

$$p_{n+1} = p_n + rp_n = (1 + r)p_n \quad (1)$$

Phương trình 1 là một *phương trình sai phân* (hay phương trình đệ quy). Phương trình này kết hợp với điều kiện dân số ban đầu p_0 đại diện cho sự thay đổi động lực học của dân số. Bởi vì dân số thay đổi theo thời gian, nên đây là một **dynamical system**. Chúng ta cũng mô phỏng hệ theo các khoảng thời gian rời rạc, nên đây là một **discrete system**. Như vậy, bài toán thực tế về dân số đã được **mô hình hóa** bằng một **discrete dynamical system**.



1. Mô hình hóa tăng trưởng dân số của thành phố (tiếp):

Để giải hệ trên, giả sử dân số ban đầu, $p_0 = 3$, với tốc độ tăng dân số $r = 1$, lúc này mô hình sẽ là $p_{n+1} = 2p_n$, và do đó $p_1 = 2p_0 = 2 \cdot 3 = 6$, $p_2 = 2p_1 = 2 \cdot 6 = 12$, v.v. Đây được gọi là **nghiệm số học (numerical solution)** của phương trình mô hình hóa.

Ta cũng có thể dễ dàng chứng minh được từ phương trình 1

$$p_n = (1 + r)^n p_0 \quad (2)$$

với $n \in \mathbb{N}$. Đây được gọi là **nghiệm chính xác (exact solution hay analytical solution)** của phương trình mô hình hóa.

Phương trình 2 là một hàm số mũ. Nếu $r > 0$, $1 + r > 1$ thì p_n sẽ tiến tới vô cùng. Nếu $r < 0$, $1 + r < 1$ thì p_n sẽ tiến tới 0 khi n tiến tới vô cùng. (Đây là bước biện giải mô hình hóa toán học)



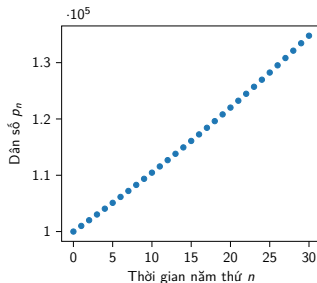
2. Dân số của thành phố đó trong vòng 30 năm tiếp?

Dân số trong 10 năm tiếp theo: ($n = 10, p_0 = 100000, r = 0.01$)

Tại năm thứ 10, dân số của thành phố là:

$$p_{10} = (1 + 0.01)^{10} 100000 = 110462$$

Để vẽ đồ thị, ta tính dãy số $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{30}$ theo phương trình 2. Kết quả như sau:





- Hiểu và nắm được bản chất của mô hình hóa toán học
- Ứng dụng mô hình hóa toán học vào sinh học
- Sử dụng các công cụ toán học và tin học trong mô hình hóa toán học



	Lecture	Slide	Notebook	Homework
1	Introduction of Biomodelling	Lecture 1	Lecture 1	Lecture 1
2	First order linear difference equation Discrete logistic model			
3	Vectors and Matrices			
4	Second-order difference equation System of linear difference equations			
5	System of non-linear difference equations			
6	First order ODE			
7	System of ODEs			
8	System of ODEs ctn			

THANK YOU!