

FRACTAL TRONG CÁC KHOA HỌC TRÁI ĐẤT

Ngô Văn Bưu, Trường Đại học Mở - Địa chất

Khái niệm fractal được nhà toán học Benoit Mandelbrot đưa ra vào năm 1975 và năm 1993 ông được lĩnh giải thưởng toán học Wolf Prize về "Hình học fractal của thiên nhiên"[1]. Từ đó hình học fractal đã được đưa vào ứng dụng trong rất nhiều ngành khoa học. Tháng 4/ 1993 hội nghị quốc tế "Fractal và các hệ thống động lực trong các khoa học trái đất" đã họp tại Frankfurt - Đức, các công trình tại hội nghị được xuất bản năm 1994 [2]. Cuốn sách của Turcotte D.L. "Các fractal và hỗn độn trong địa chất và địa vật lý" xuất bản năm 1992, lại được tái bản ngay vào năm 1997. Chỉ trong vài thập kỷ, fractal đã trở thành một trong những đề tài thời sự nóng hổi nhất của toán học hiện đại [3] và được ứng dụng rộng rãi vào nhiều ngành khoa học kỹ thuật, sinh học, sinh thái, y tế, kinh tế,... đến nỗi "khó mà tìm thấy một người nào nghiên cứu hay quan tâm đến khoa học mà lại không nghe đến fractal"[4].

Ta có thể đo chiều dài mép bằng một cách dễ dàng, nhưng khi nói đến chiều dài của một vật thể không đều đặn như bờ biển khúc khuỷu thì vấn đề sẽ trở nên phức tạp. Giả sử phải đo chiều dài quãng đường AB. Đầu tiên ta chọn một đoạn thẳng có chiều dài chuẩn $l = l_1$, rồi dùng đoạn chuẩn đó để đo chiều dài $L = AB$ bắt đầu từ A; giả sử được N đoạn chuẩn, khi đó ta có $L = Nl_1$. Sau đó giảm chiều dài đoạn chuẩn: $l_2 < l_1$ và lại đo lại như trên. Đối với các hình đều đặn như đoạn thẳng, đường tròn,... thì khi giảm l đi, chiều dài $L(l)$ sẽ tiến nhanh tới giới hạn là giá trị thực L . Trái lại đối với các hình không đều đặn thì lại thấy $L(l)$ tăng khi l giảm, do l càng giảm thì các khúc khuỷu nhỏ dần càng được áp vào để đo thêm lên; như vậy ở đây chiều dài chỉ là một khái niệm tương đối. Muốn mô tả các hình không đều đặn như đường bờ biển khúc khuỷu ở Nam Trung bộ, vịnh than bị uốn nếp, vờ nhàu ở Quảng Ninh,... ta không thể dùng hình học Óclit được, mà phải dùng một thứ hình học mới, hình học fractal. Sau đây chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản của hình học fractal trong ứng dụng vào các khoa học trái đất.

Công cụ chủ yếu để khảo sát fractal là thứ nguyên (số chiều). Khái niệm này có những định nghĩa toán học chặt chẽ khác nhau. Chúng tôi muốn trình bày một cách đơn giản bằng cách nhắc lại khái niệm thứ nguyên trước hết đối với các hình đều đặn đã quen biết. Đối với các vật thể đều đặn (với mật độ đồng nhất) như dây điện dài, tấm mỏng rộng lớn, khối vuông thì thứ nguyên đặc trưng cho khối lượng $M(L)$ thay đổi với chiều dài L . Nếu xét một phần của vật thể với chiều dài r ($r < 1$) thì $M(rL)$ sẽ giảm đi theo hệ số r^d , nghĩa là:

$$M(rL) = r^d M(L) \quad (1)$$

Nghiệm của phương trình đó là $M(L) = A L^d$; đối với đoạn dây điện thì khối lượng thay đổi tỷ lệ thuận với r , nghĩa là $d = 1$, với tấm mỏng $d = 2$ và khối vuông $d = 3$ (xem hình 1) như đã biết trong hình học Óclit về những thứ nguyên chẵn (d) [5].

Các fractal trong thiên nhiên là ngẫu nhiên, nhưng trước hết chúng ta hãy bắt đầu làm quen với các fractal được xây dựng theo phép lặp.

1. Đường von Koch (do nhà toán học Thụy điển Helge von Koch nghĩ ra năm 1904) được tạo ra theo phép lặp (hình 2), bằng cách bước đầu ($n=0$) lấy một đoạn thẳng chiều dài L , sau đó bước $n=1$ chia đoạn L làm ba đoạn nhỏ bằng nhau, bỏ đoạn giữa và dựng lên hai cạnh của tam giác đều trên đoạn đã bỏ, sau phép làm đó thì số đoạn $N_1=4$,

mỗi đoạn dài $1/3$ đoạn gốc và chiều dài tăng lên theo hệ số bằng $4/3$. Lập lại như vậy ở bước $n=2$ với mỗi đoạn nhỏ và cứ thế tiếp tục mãi. Hình được tạo thành trong bước thứ nhất ($n=1$) được gọi là hình sinh (generator).

Thứ nguyên của đường có thể tính như đối với các hình đều đặn đã làm ở trên. Theo hình 2, nếu giảm chiều dài đi theo hệ số $r = 1/3$ thì tổng chiều dài (khối lượng) của đường giảm theo hệ số $1/4$ nghĩa là:

$$M(1/3L) = 1/4M(L) \quad (2)$$

Tính chất đó khác hẳn đối với các hình đều đặn (xem hình 1, $d=1$)

Theo (1) và (2) ta có:

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^D \quad (3)$$

hay:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26186 \quad (4)$$

Như vậy đường von Koch có thứ nguyên không phải là một số chẵn và Mandelbrot đặt tên là thứ nguyên fractal (ký hiệu D) và hình có thứ nguyên fractal được gọi là fractal.

Nếu trong xây dựng đường von Koch, thay đoạn bỏ đi bằng các hình sinh khác nhau ta sẽ có các đường von Koch khác nhau với các thứ nguyên fractal khác nhau (hình 3). Đường càng khúc khuỷu mau bao nhiêu càng có thứ nguyên fractal lớn hơn bấy nhiêu. Các thứ nguyên ấy lớn hơn thứ nguyên của đường thẳng ($d=1$) và nhỏ hơn thứ nguyên của mặt phẳng ($d=2$, xem hình 2). Nói chung fractal xây dựng theo phương pháp lặp có thể được tiến hành bằng hai hay nhiều hình sinh. Khi khảo sát một đối tượng cụ thể ta có thể nghĩ ra hình sinh hay mô hình hoá cho phù hợp. Trên hình 4 là đường von Koch lấy từ đường số N^03 trong hình 3 ở phép lặp lần thứ tư.

Cách xây dựng các đường Von Koch có thể làm cho gần với tự nhiên bằng cách thay đoạn ở giữa một cách ngẫu nhiên bằng đoạn đầu, đoạn giữa hay đoạn cuối, mà thứ nguyên fractal vẫn giữ như cũ.

Nhìn vào hình 2 thấy phần giữa giống như một người tuyết, bên trái và phải cũng có những người tuyết, giống hệt như một bản sao, chỉ nhỏ đi $1/3$. Mỗi người tuyết nhỏ lại có những bản sao người tuyết ở bên trái và phải nhỏ đi $1/3$ nữa. Nếu lấy bất kỳ một bộ 3 người tuyết nào (lập ra ở bước n theo tỷ lệ $1/3^n$) với giá trị n bất kỳ, khi phóng đại lên 3^n lần ta sẽ được đường von Koch đầu tiên. Đó là tính chất tự đồng dạng (self-similarity) hay tính bất biến với tỷ lệ. Theo tính tự đồng dạng thì từ quan trắc trên một quy mô nhỏ giúp dự báo cho một quy mô lớn.

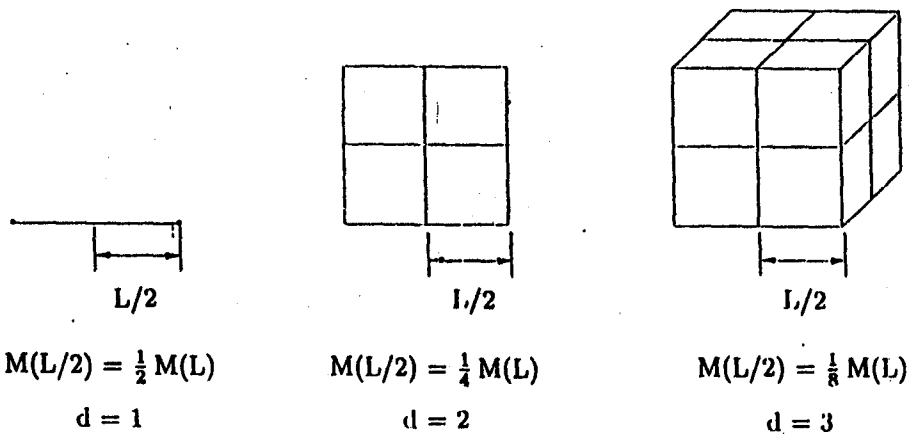
Theo phép xây dựng lặp đầu tiên có đoạn thẳng chiều dài L và gồm một yếu tố: $N_0 = 1$, bước $n=1$ có $N_1 = 4$ yếu tố với chiều dài $l_1 = rL = 1/3L$. Bước $n=2$ có $N_2 = 4^2 = 16$ yếu tố với chiều dài $l_2 = r^2L = (1/3)^2L$, bước n có $N_n = 4^n$ yếu tố với chiều dài l_n :

$$l_n = r^n L = (1/3)^n L \quad (5)$$

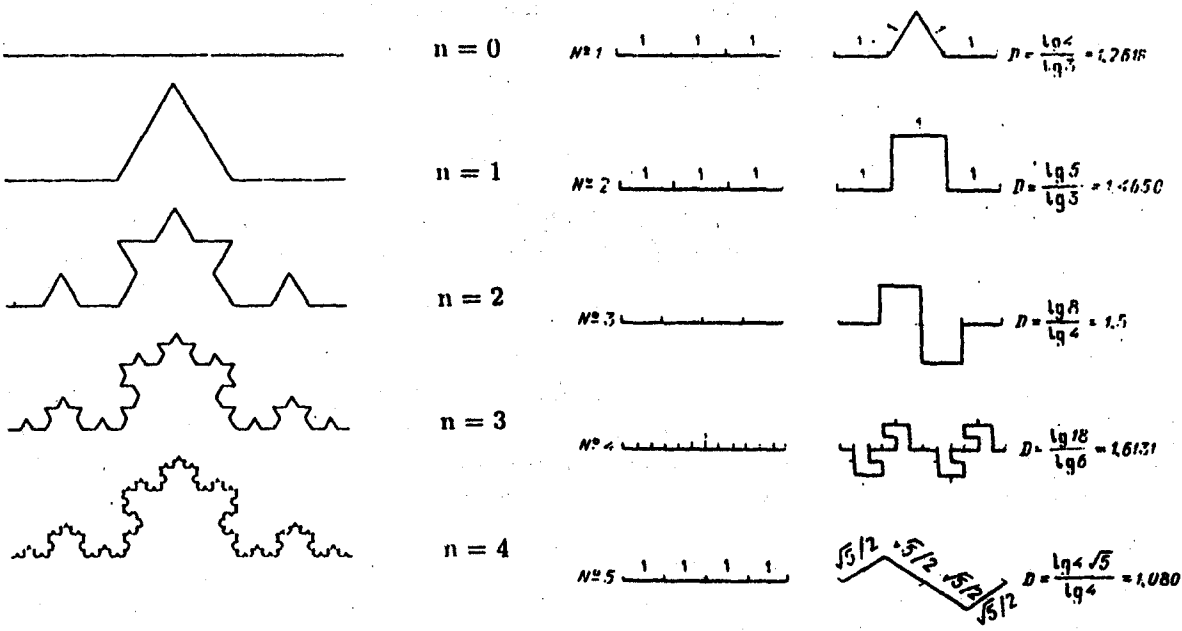
Như vậy N_n tỷ lệ với $(1/l^n)$, số mũ lũy thừa của $(1/l^n)$ đối với vật thể đều đặn là những số chẵn: 1, 2 và 3 tương ứng đối với đường, mặt phẳng và khối (hình 1), còn đối với hình fractal lại không phải là một số chẵn. Từ (3) có thể viết biểu thức chung như sau:

$$\frac{1}{N} = r^D \quad (6)$$

hay

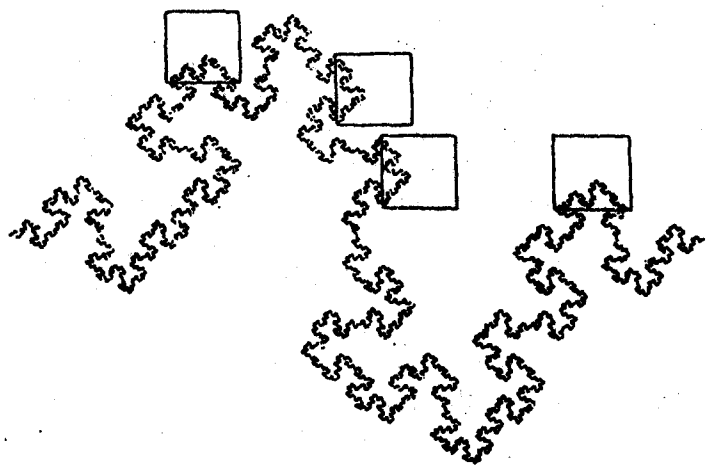


Hình 1



Hình 2

Hình 3



Hình 4

$$D = - \frac{\log N}{\log r} \quad (7)$$

Từ (5) ta có :

$$n = \frac{\log(I_n / L)}{\log r} \quad (8)$$

Nếu có N yếu tố I_n ở bước n nằm trong mỗi yếu tố I_{n-1} ở bước trước (n-1) thì theo (8) sẽ có:

$$Nr(I_n) = N^n = N^{\log(I_n/L)/\log r}$$

hoặc

$$\log Nr(I_n) = n \log N = \log(I_n/L) \frac{\log N}{\log r} \quad (9)$$

trong đó $Nr(I_n)$ là số yếu tố ở bước n với chiều dài của mỗi yếu tố là I_n . Thay (7) vào (9) sẽ được :

$$\log Nr(I_n) = - D \log(I_n/L)$$

hay

$$Nr(I_n) = (L/I_n)^D \quad (10)$$

Đường von Koch là liên tục, nhưng khi n tiến tới vô cùng thì nó luôn bị gãy khúc, không thể kẻ được đường tiếp tuyến nào, không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào. Sự phát hiện ra những đường kỳ dị tương tự đã là nguồn gốc của fractal coi như một ngành toán học.

Thứ nguyên đường von Koch lớn hơn một vì đường đó không theo một đường đều đặn, nhưng nó cũng nhỏ hơn 2 vì chưa phủ hết mặt phẳng. Như vậy thứ nguyên fractal D là một số đo của độ không đều đặn, khúc khuỷu. Nhìn chung, các hình fractal là những hình có thứ nguyên nằm giữa các hình Oclit có thứ nguyên khác nhau, thí dụ giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa mặt phẳng và thể tích.

2. Đệm, thảm, miếng xếp Sierpinski

a. Đệm Sierpinski được xây dựng bằng cách lấy một tam giác đều, đây (hình 5), chia mỗi cạnh có chiều dài L ra làm 2, nối các trung điểm thành 4 tam giác đều nhỏ, bỏ tam giác đều nhỏ ở giữa, rồi lặp lại cách chia đó cho mỗi tam giác đều nhỏ còn lại và cứ thế tiếp tục mãi. So sánh khối lượng của đệm có kích thước L với đệm có kích thước L/2 ta thấy: $M(1/2L) = 1/3 M(L)$ và do đó $D = \log 3 / \log 2 \approx 1,585$.

b. Thảm Sierpinski được xây dựng từ một hình vuông đầy chia thành n^2 hình vuông bằng nhau, chọn và loại ra k hình vuông, rồi lặp lại cách làm đó cho mỗi hình vuông nhỏ, tức là chia làm n^2 hình vuông nhỏ hơn, chọn và loại ra k hình vuông ở những vị trí giống như đã làm lần trước và cứ lặp lại như vậy. Hình 6 là thảm Sierpinski với $n=5$ và $k=9$. Có thể loại bỏ k hình vuông theo nhiều cách khác nhau và sẽ có những

fractal tương ứng rất khác nhau, song vì $M\left(\frac{1}{n}L\right) = \frac{1}{n^2 - k} M(L)$ nên

$D = \log(n^2 - k) / \log n$ bất kể cách loại bỏ k hình vuông như thế nào.

c. Miếng xếp Sierpinski (hay còn gọi là miếng xếp Menger, hình 7a) được xây dựng bằng một khối vuông đặc, cạnh L chia thành 27 khối vuông nhỏ với cạnh L/3, bỏ khối vuông nhỏ ở chính giữa khối vuông lớn và 6 khối vuông nhỏ ở giữa mỗi mặt của

khối vuông lớn, lặp lại như vậy ở mỗi khối vuông nhỏ và cứ thế tiếp tục. Lập luận tương tự như trên ta có $M(1/3L) = 1/20M(L)$, do đó $D = \log 20 / \log 3 = 2,7268$. Miếng xốp có thể dùng làm mô hình cho các khối tinh thể pirit xâm tán, cho dòng chảy trong môi trường lỗ hổng,...

Có thể tạo các hổng trong khối vuông L theo những cách khác, thí dụ chia thành 8 khối vuông nhỏ với cạnh $L/2$ và bỏ đi hai khối nhỏ ở hai đầu đường chéo đối diện nhau của khối vuông (hình 7b), lặp lại như vậy ở mỗi khối vuông nhỏ và cứ thế lặp lại. Trong trường hợp này sẽ có $D = \log 6 / \log 2 = 2,585$. Theo cách xây dựng lặp lại như vậy có thể chia khối vuông thành các khối vuông nhỏ theo sự sắp xếp khác nhau để có thứ nguyên fractal bất kỳ với giá trị giữa 0 và 3 và mỗi cấu trúc đó đều có tính chất tự đồng dạng, không liên tục.

3. Cách xác định thứ nguyên D

Một phương pháp hay được dùng trong thực tế gọi là thứ nguyên hộp (box dimension) bằng cách đếm số hộp có kích thước l cần để phủ hình thể. Từ biểu thức (10) ta có:

$$N_r(l) = (L/l)^D = L^D(1/l)^D \propto 1/l^D \quad (11)$$

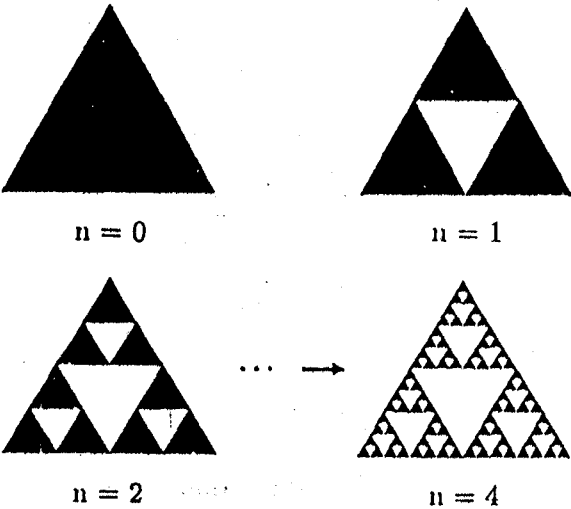
Trong thực tế người ta lập bộ các lưới có kích thước l khác nhau và lần lượt để các lưới phủ lên hình thể và đếm số hộp (δ) chứa hình thể. Trên hình 8 bên trên nêu cách dùng phương pháp hộp để xác định thứ nguyên của khe nứt [6]. Khi số các hộp cắt khe nứt ghi theo số nghịch đảo của kích thước hộp trên giấy loga kép ta sẽ được đường thẳng với độ dốc D . Tương tự như vậy khi ghi số các hộp cắt khe nứt theo kích thước của hộp trên giấy loga kép ta sẽ có đường thẳng với độ dốc $-D$ (hình 8 bên dưới). Trên hình 8 bên dưới cũng nêu ra cách kiểm nghiệm sự đúng đắn của phương pháp hộp cho trường hợp thảm Sierpinski bằng cách đếm các δ với các kích thước của lưới bằng 1, $1/2$, $1/4$ và $1/8$ ứng với các số δ tương ứng là 1, 3, 9 và 27.

4. Các fractal tự nhiên

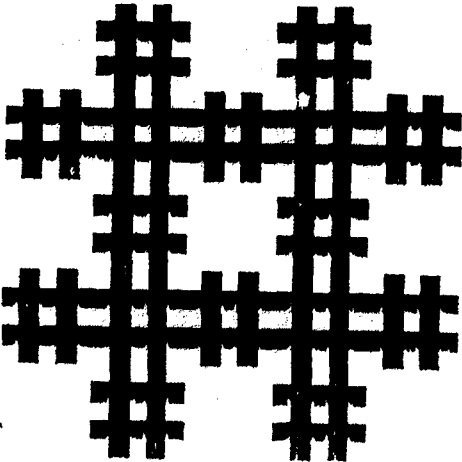
Các fractal toán học như đường von Koch được nghĩ ra từ đầu thế kỷ XVIII, lúc đó giới toán học vẫn cho là những "vật lạ", phải đợi đến năm 1975 Mandelbrot B. chứng minh rằng những "vật lạ" đó không phải là sự tưởng tượng của các nhà toán học mà có thực trong tự nhiên và lại phổ biến nữa.

Trên kia đã nêu một số fractal toán học được xây dựng theo phép lặp, nom rất đều đặn, còn trong tự nhiên các fractal mang tính ngẫu nhiên. Các fractal tự nhiên tự đồng dạng với ý nghĩa thống kê theo một số lớn các mẫu. Sự phóng đại một phần sẽ gần phù hợp với một bộ phận của toàn thể. Các fractal tự nhiên tự đồng dạng trong một dải kích thước (tỷ lệ) nhất định, từ một kích thước tối thiểu đến tối đa.

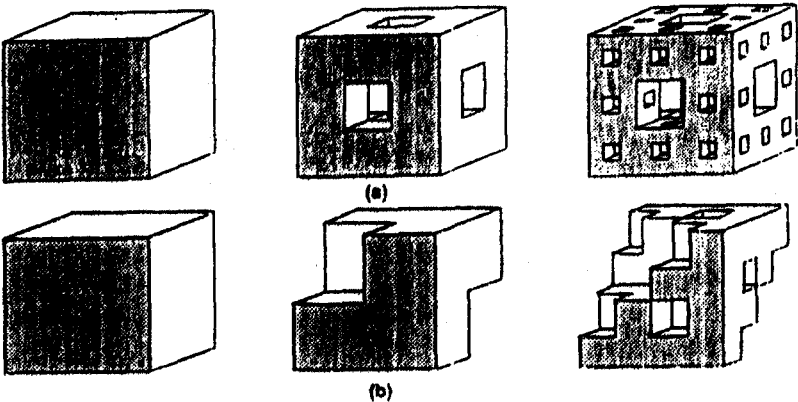
Khái niệm tự đồng dạng của fractal giúp cho nhiều ngành khoa học lập lại trật tự trong hỗn độn biểu kiến. Thí dụ con sông và các phụ lưu của nó, mỗi phụ lưu lại có những phụ lưu riêng của mình cho nên phụ lưu có cùng cấu trúc như con sông, chỉ có điều khác là phụ lưu chiếm một diện tích nhỏ hơn. Các cành và rễ cây, cũng như các mạch máu, dây thần kinh, cuống phổi,... cũng có tính chất như vậy. Sự tăng và giảm của các chỉ tiêu kinh tế có cấu trúc tự đồng dạng khi vẽ đồ thị các chỉ tiêu theo thời gian.



Hình 5



Hình 6



Hình 7

5. Ứng dụng hình học fractal trong các khoa học trái đất

Việc ứng dụng fractal vào các khoc học trái đất bắt đầu từ địa mạo trong khảo sát hình dạng bờ biển, hệ thống sông, đồi núi,đáy biển, trường karst... Thứ nguyên fractal của rặng núi có thể tính theo một đường đồng mức đặc biệt của bản đồ địa hình và thấy D có giá trị thay đổi trong khoảng 1.15-1.30 [8]. Từ sau hội nghị Frankfurt (1993) nêu trên fractal được đưa rộng rãi vào nhiều ngành khoa học trái đất. Những áp dụng mạnh mẽ được thực hiện trong ngành dầu khí, nhất là khảo sát môi trường hồng phức tạp chứa dầu khí trong đá trầm tích (cát kết, đá cacbonat,...); cát kết có thứ nguyên fractal $D=2.57-2.87$ và thấy rằng thứ nguyên fractal đó phụ thuộc vào loại cát kết [9]. Hình học fractal là một công cụ hữu ích trong khảo sát khe nứt, đứt gãy, kích thước của chúng thay đổi trong một phạm vi lớn từ vi khe nứt tới đứt gãy sâu. Vấn đề khe nứt được đề cập chung trong cuốn "Fractal trong cơ học đá"[10] và được viết thành một chương riêng trong [6] phục vụ cho ngành dầu khí. Fractal được ứng dụng trong khảo sát hàm lượng, trữ lượng [7,11], có cả một chương riêng "Mô tả các tính chất của vỉa chứa bằng fractal " trong cuốn sách [6] phục vụ cho dầu khí. Fractal được ứng dụng trong khảo sát các hiện tượng địa chất phi tuyến như trượt, lụt, hiện tượng đảo ngược cực từ của trái đất theo thời gian, sự đối lưu trong manti, nhất là động đất [7,12].

Sau đây chúng ta hãy xem sự ứng dụng fractal trong khảo sát các uốn nếp phức tạp của quaczit sắt trong bốn trũng Krivoroziie ở Ukraina [13]. Quặng quaczit ở đây phân lớp mỏng, bị uốn nếp thành nhiều cấp, từ nếp uốn lớn của cả mỏ đến vi uốn nếp với biên độ vài milimet. Đường bao quặng uốn lượn theo uốn nếp. Người ta xác định thứ nguyên fractal dựa trên các mặt cắt cấu trúc địa chất, một mặt cắt được nêu trên hình 9. Kết quả xác định thứ nguyên fractal D (ghi trên trục tung, bên trái, hình 10) cho tám mỏ quaczit sắt được đánh số từ 1 đến 8, ghi trên trục hoành. D có giá trị từ 1.01 đến 1.19 và phần lớn ở trong khoảng 1.07-1.16. Trên trục tung, bên phải nêu biểu đồ tổ chức tần số tương đối giá trị D , thấy có ba nhóm khác nhau: I,II và III với các giá trị D tương ứng lần lượt là : 1.01-1.05,1.05-1.145 và 1.15-1.20. Cách chia làm 3 nhóm đó hoàn toàn phù hợp với phân loại mỏ quaczit sắt ở bốn trũng Krivoroziie trong mục đích thăm dò khai thác. Mặc dầu thứ nguyên fractal chỉ là một tham số hình học, không có ý nghĩa vật lý, nhưng các tác giả ở đây [13] đã dựa trên thứ nguyên fractal để xây dựng các hệ số độ uốn khúc và chỉ số mức độ thăm dò để khảo sát mỏ và định ra khoảng cách thích hợp giữa các lỗ khoan thăm dò cho từng loại mỏ theo các mức độ phức tạp khác nhau.

Fractal được dùng có hiệu quả trong khảo sát độ rỗng, độ thấm, những tham số quan trọng trong địa chất thủy văn, địa nhiệt, dầu khí; đặc biệt những kết quả mới được công bố gần đây của các nhà địa vật lý người Đức về áp dụng mô hình fractal trong nghiên cứu bằng lý thuyết và thực nghiệm về độ thấm trong khe nứt chứa dầu khí của đá granit và cách xác định độ thấm đó theo các tài liệu địa vật lý giếng khoan [14].

Fractal được áp dụng để nghiên cứu những vấn đề có tính chất cơ bản cho phương pháp thăm dò điện như tính chất dẫn điện của môi trường hai pha rắn và lỏng, xây dựng cơ sở lý luận và tìm ra ý nghĩa vật lý cho công thức thực nghiệm Archie, hiện tượng phân cực kích thích,...(xem tài liệu gốc được dẫn ra trong [14]).

Fractal được ứng dụng trong nhiều ngành khoa học, đặc biệt vào sóng nhỏ (wavelets), một đề tài nóng hổi khác của toán học hiện đại mười lăm năm gần đây [3]. Trên cơ sở đó biến đổi sóng nhỏ (wavelet transform) đã được ứng dụng trong xử lý số liệu địa vật lý bên cạnh biến đổi Fourier [15].

Hình học fractal là một công cụ toán học hết sức mới mẻ, nhưng đã được áp dụng vào nhiều ngành khoa học. Cùng với hình học Óclit, nó giúp ta mô tả, nghiên cứu các đối tượng và hiện tượng tự nhiên phức tạp một cách có hiệu quả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [2]. Fractals and dynamic systems in geosciences. 1994, 421p.
- [3]. Hoàng Tụy. Hình học fractal. Bài giảng tại Viện Toán học Hà Nội. Tháng 3-4, 2000, 36 tr.
- [4]. Nigmatullin P.P., Ovtrikov M.I., Riabov I.A.E., 1988. Fractal: Từ các mẫu hoa văn cho đến chuyển động. Tạp chí Priroda, số 2, trang 61-71 (tiếng Nga).
- [5]. Bunde A., and Havlin S., Fractals in science. Springer Verlag Heidelberg. 1995, 300p.
- [6]. Hewett T.A., Fractal methods for fracture characterization, in J.M. Yarus and R.L. Chambers, eds., Stochastic Modeling and Geostatistics : Principles, Methods, and Case Studies. AAPG Computer Applications in Geologie, No. 3 : Published by AAPG, Tulsa, Oklahoma, U.S.A., 1994.
- [7]. Turcotte D.L., Fractals and chaos in geology and geophysics. 2nd ed., Cambridge university press, Cambridge, 1997, 398p.
- [8]. Turcotte D.L., Fractals and fragmentation. J. Geophys. Res. 91, B2, p. 1921-1926, 1986.
- [9]. Krohn C.E., Fractal measurements of sandstones, shales, and carbonates. J. Geophys. Res. 93, B4, p. 3297-3305, 1988.
- [10]. Xie H., Fractals in rock mechanics. Rotterdam & Brookfield, VT A.A. Balkema, 1993.
- [11]. Sakin X.X., Xavina I.G., 2000. Phân tích Fractal trữ lượng thiếc ở mỏ Deputat. Địa chất và Thăm dò số 1, trang 70-76 (tiếng Nga).
- [12]. Goltz C., Fractal and chaotic properties of earthquakes, 1988, 178 p.
- [13]. Kulic D.A., Trerunovskii M.I., 1990. Mô hình Fractal uốn nếp nhiều bậc của quaczit sắt (bể Krivoroc). Địa chất và Thăm dò số 5, trang 77-85 (tiếng Nga).
- [14]. Ngô Văn Bưu, Fractal trong địa vật lý và địa chất. Tuyển tập các công trình khoa học, Tập 35, Số chuyên đề kỷ niệm 35 năm thành lập bộ môn Địa vật lý. Trường Đại học Mở - Địa chất, Hà Nội, 2001, tr. 6-16.
- [15]. Kumar P., and Foufoula-Georgiou E., Wavelet analysis for geophysical applications. Rev. Geophys., 35, p. 382-412, 1997.

SUMMARY

Fractals in geosciences

Ngo Van Bui, *University of Mining and Geology*

Some elementary concepts of fractal geometry for applying in geosciences are introduced.