

Bài tập tuần 5

Nguyễn Tuấn Anh - ID: 2252038 - CN03

Ngày 30 tháng 1 năm 2023

Xác định sai số phép đo trực tiếp

Bài 3

$h_1 = 690mm$

Thước mm: $\Delta x_{ht} = 1mm$

Máy đo thời gian: $\Delta t_{ht} = 0.001s$

Thước kẹp: $\Delta x_{ht} = 0.02mm$

Lần đo	d(mm)	t(s)	$h_2(mm)$
1	8.14	7.521	515
2	8.14	7.506	519
3	8.14	7.517	521
4	8.16	7.515	518
5	8.16	7.509	517

Kết quả đo của h_1 bằng tổng h_1 với sai số hệ thống của thước mm chia cho một nửa:

$$H_1 = h_1 \pm \frac{x_{ht}}{2} = 690 \pm 0.5(mm)$$

Giá trị trung bình của đường kính d :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{5} \cdot (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) = \frac{1}{5} \cdot (8.14 + 8.14 + 8.14 + 8.16 + 8.16) = 8.148(mm)$$

Giá trị sai số tuyệt đối:

$$1. \Delta d_1 = |d_1 - \bar{d}| = |8.14 - 8.148| = 0.008(mm)$$

$$2. \Delta d_2 = |d_2 - \bar{d}| = |8.14 - 8.148| = 0.008(mm)$$

$$3. \Delta d_3 = |d_3 - \bar{d}| = |8.14 - 8.148| = 0.008(mm)$$

$$4. \Delta d_4 = |d_4 - \bar{d}| = |8.16 - 8.148| = 0.012(mm)$$

5. $\Delta d_5 = |d_5 - d| = |8.16 - 8.148| = 0.012(mm)$

Giá trị sai số tuyệt đối trung bình:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta d} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta d_i = \frac{1}{5} \cdot (\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3 + \Delta d_4 + \Delta d_5) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (0.008 + 0.008 + 0.008 + 0.012 + 0.012) = 0.0096(mm)\end{aligned}$$

Sai số toàn phần:

$$\Delta d = \overline{\Delta d} + \Delta x_{ht} = 0.0096 + 0.02 = 0.296(mm)$$

Giá trị đo lường của đại lượng d là:

$$d = \bar{d} \pm \Delta d = 8.15 \pm 0.03(mm)$$

Giá trị trung bình của thời gian t :

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i = \frac{1}{5} \cdot (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = \frac{1}{5} \cdot (7.521 + 7.506 + 7.517 + 7.515 + 7.509) = 7.5136(s)$$

Giá trị sai số tuyệt đối:

1. $\Delta t_1 = |t_1 - t| = |7.521 - 7.5136| = 0.0074(s)$
2. $\Delta t_2 = |t_2 - t| = |7.506 - 7.5136| = 0.0076(s)$
3. $\Delta t_3 = |t_3 - t| = |7.517 - 7.5136| = 0.0034(s)$
4. $\Delta t_4 = |t_4 - t| = |7.515 - 7.5136| = 0.0014(s)$
5. $\Delta t_5 = |t_5 - t| = |7.509 - 7.5136| = 0.0046(s)$

Giá trị sai số tuyệt đối trung bình:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta t} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \frac{1}{5} \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 + \Delta t_5) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (0.0074 + 0.0076 + 0.0034 + 0.0014 + 0.0046) = 0.00488(s)\end{aligned}$$

Sai số toàn phần:

$$\Delta t = \overline{\Delta t} + \Delta t_{ht} = 0.00488 + 0.001 = 0.00588(s)$$

Giá trị đo lường của đại lượng t là:

$$t = \bar{t} \pm \Delta t = 7.51 \pm 0.01(s)$$

Giá trị trung bình của chiều cao h_2 :

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n h_{2i} = \frac{1}{5} \cdot (h_{21} + h_{22} + h_{23} + h_{24} + h_{25}) = \frac{1}{5} \cdot (515 + 519 + 521 + 518 + 517) = 518(mm)$$

Giá trị sai số tuyệt đối:

1. $\Delta h_{21} = |h_{21} - h_2| = |515 - 518| = 3(mm)$
2. $\Delta h_{22} = |h_{22} - h_2| = |519 - 518| = 1(mm)$
3. $\Delta h_{23} = |h_{23} - h_2| = |521 - 518| = 3(mm)$
4. $\Delta h_{24} = |h_{24} - h_2| = |518 - 518| = 0(mm)$
5. $\Delta h_{25} = |h_{25} - h_2| = |517 - 518| = 1(mm)$

Giá trị sai số tuyệt đối trung bình:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta h_2} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta h_{2i} = \frac{1}{5} \cdot (\Delta h_{21} + \Delta h_{22} + \Delta h_{23} + \Delta h_{24} + \Delta h_{25}) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (3 + 1 + 3 + 0 + 1) = 1.6(mm)\end{aligned}$$

Sai số toàn phần:

$$\Delta h_2 = \overline{\Delta h_2} + \Delta x_{ht} = 1.6 + 1 = 2.6(mm)$$

Giá trị đo lường của đại lượng h_2 là:

$$h_2 = \overline{h_2} \pm \Delta h_2 = 518 \pm 2.6(mm)$$

Xác định sai số phép đo gián tiếp

Bài 1

$$H = 1.72 \pm 0.02 \text{ m} \quad M = 70.5 \pm 0.1 \text{ kg} \quad BMI = M/H^2$$

Ta có:

$$BMI = M/H^2 \rightarrow \overline{BMI} = \overline{M}/\overline{H^2} = 70.5/1.72^2 = 23.8304(kg/m^2)$$

Tính logarit:

$$\ln BMI = \ln \overline{M} - \ln \overline{H^2} = \ln \overline{M} - 2 \ln \overline{H}$$

Lấy vi phân của biểu thức:

$$\frac{\partial BMI}{\partial M} = \frac{\partial \overline{M}}{\partial M} - 2 \cdot \frac{\partial \overline{H}}{\partial H}$$

Thêm trị tuyệt đối:

$$\left| \frac{\partial BMI}{\partial M} \right| = \left| \frac{\partial \overline{M}}{\partial M} \right| + 2 \cdot \left| -\frac{\partial \overline{H}}{\partial H} \right|$$

Thay các vi phân bằng các sai phân

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta BMI}{BMI}\right| &= \left|\frac{\Delta \overline{M}}{\overline{M}}\right| + 2 \cdot \left|-\frac{\Delta \overline{H}}{\overline{H}}\right| \\ \left|\frac{\Delta BMI}{BMI}\right| &= \left|\frac{0.1}{70.5}\right| + 2 \cdot \left|-\frac{0.02}{1.72}\right| = 0.0247 \\ \Rightarrow \Delta BMI &= 0.0247 \cdot BMI = 0.0247 \cdot 23.8304 = 0.5886(kg/m^2)\end{aligned}$$

Vậy ta có được:

$$BMI = 23.83 \pm 0.59(kg/m^2)$$

Bài 2

Bảng 1: Độ chính xác của thước kẹp: 0.02mm, $\pi = 3.14$, $\Delta\pi = 0.005$

Lần đo	D($10^{-3}m$)	$\Delta D(10^{-3}m)$	d($10^{-3}m$)	$\Delta d(10^{-3}m)$	h($10^{-3}m$)	$\Delta h(10^{-3}m)$
1	34.84		28.10		8.84	
2	34.82		28.12		8.86	
3	34.82		28.10		8.84	
Trung bình						

Hãy cho biết kết quả của phép đo V, biết rằng $\overline{V} = \frac{\pi}{4}(\overline{D}^2 - \overline{d}^2) \cdot \overline{h}$

Giá trị trung bình D ở các lần đo:

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n D_i = \frac{1}{3} \cdot (D_1 + D_2 + D_3) = \frac{1}{3} \cdot (34.84 + 34.82 + 34.82) = 34.8267(10^{-3}m)$$

Giá trị sai số tuyệt đối:

1. $\Delta D_1 = |D_1 - \overline{D}| = |34.84 - 34.8267| = 0.0133(10^{-3}m)$
2. $\Delta D_2 = |D_2 - \overline{D}| = |34.82 - 34.8267| = 0.0067(10^{-3}m)$
3. $\Delta D_3 = |D_3 - \overline{D}| = |34.82 - 34.8267| = 0.0067(10^{-3}m)$

Giá trị sai số tuyệt đối trung bình:

$$\overline{\Delta D} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta D_i = \frac{1}{3} \cdot (\Delta D_1 + \Delta D_2 + \Delta D_3) = \frac{1}{3} \cdot (0.0133 + 0.0067 + 0.0067) = 0.0089(10^{-3}m)$$

Giá trị trung bình d ở các lần đo:

$$\overline{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{3} \cdot (d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{3} \cdot (28.10 + 28.12 + 28.10) = 28.1067(10^{-3}m)$$

Giá trị sai số tuyệt đối:

1. $\Delta d_1 = |d_1 - \bar{d}| = |28.10 - 28.1067| = 0.0067(10^{-3}m)$
2. $\Delta d_2 = |d_2 - \bar{d}| = |28.12 - 28.1067| = 0.0133(10^{-3}m)$
3. $\Delta d_3 = |d_3 - \bar{d}| = |28.10 - 28.1067| = 0.0067(10^{-3}m)$

Giá trị sai số tuyệt đối trung bình:

$$\overline{\Delta d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta d_i = \frac{1}{3} \cdot (\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3) = \frac{1}{3} \cdot (0.0067 + 0.0133 + 0.0067) = 0.0089(10^{-3}m)$$

Giá trị trung bình h ở các lần đo:

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n h_i = \frac{1}{3} \cdot (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{3} \cdot (8.84 + 8.86 + 8.84) = 8.8467(10^{-3}m)$$

Giá trị sai số tuyệt đối:

1. $\Delta h_1 = |h_1 - \bar{h}| = |8.84 - 8.8467| = 0.0067(10^{-3}m)$
2. $\Delta h_2 = |h_2 - \bar{h}| = |8.86 - 8.8467| = 0.0133(10^{-3}m)$
3. $\Delta h_3 = |h_3 - \bar{h}| = |8.84 - 8.8467| = 0.0067(10^{-3}m)$

Giá trị sai số tuyệt đối trung bình:

$$\overline{\Delta h} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta h_i = \frac{1}{3} \cdot (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3) = \frac{1}{3} \cdot (0.0067 + 0.0133 + 0.0067) = 0.0089(10^{-3}m)$$

Ta có bảng hoàn thiện sau:

Lần đo	$D(10^{-3}m)$	$\Delta D(10^{-3}m)$	$d(10^{-3}m)$	$\Delta d(10^{-3}m)$	$h(10^{-3}m)$	$\Delta h(10^{-3}m)$
1	34.84	0.0133	28.10	0.0067	8.84	0.0067
2	34.82	0.0067	28.12	0.0133	8.86	0.0133
3	34.82	0.0067	28.10	0.0067	8.84	0.0067
Trung bình	34.8267	0.0089	28.1067	0.0089	8.8467	0.0089

Ta có lần lượt sai số toàn phần của các đại lượng $\Delta D, \Delta d, \Delta h$:

- $\Delta D = \overline{\Delta D} + \Delta x_{ht} = 0.0089 + 0.02 = 0.0289(10^{-3}m)$
- $\Delta d = \overline{\Delta d} + \Delta x_{ht} = 0.0089 + 0.02 = 0.0289(10^{-3}m)$
- $\Delta h = \overline{\Delta h} + \Delta x_{ht} = 0.0089 + 0.02 = 0.0289(10^{-3}m)$

Từ đó, ta có thể tìm ra được kết quả đo của các đại lượng D, d, h :

- $D = \bar{D} + \Delta D = 34.83 \pm 0.03(10^{-3}m)$
- $d = \bar{d} + \Delta d = 28.11 \pm 0.03(10^{-3}m)$

- $h = \bar{h} + \Delta h = 8.85 \pm 0.03(10^{-3}m)$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \frac{\pi}{4} \cdot (\bar{D}^2 - \bar{d}^2) \cdot \bar{h} \\ \bar{V} &= \frac{\pi}{4} \cdot (34.83^2 - 28.11^2) \cdot 8.85 \\ \bar{V} &= \frac{3.14}{4} \cdot (34.83^2 - 28.11^2) \cdot 8.85 = 2938.3866(10^{-9}m^3)\end{aligned}$$

Lại có:

$$\bar{V} = \bar{\pi} \cdot (\bar{D}^2 - \bar{d}^2) \cdot \bar{h}$$

Tính logarit tự nhiên:

$$\begin{aligned}\ln \bar{V} &= \ln(\bar{\pi} \cdot (\bar{D}^2 - \bar{d}^2) \cdot \bar{h}) \\ \ln \bar{V} &= \ln \bar{\pi} + \ln(\bar{D}^2 - \bar{d}^2) + \ln \bar{h}\end{aligned}$$

Lấy vi phân của biểu thức:

$$\frac{\partial V}{\bar{V}} = \frac{\partial \pi}{\bar{\pi}} + \frac{2 \cdot \partial D \cdot \bar{D} - 2 \cdot \partial d \cdot \bar{d}}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2} + \frac{\partial h}{\bar{h}}$$

Lấy giá trị tuyệt đối của mỗi đạo hàm:

$$\left| \frac{\partial V}{\bar{V}} \right| = \left| \frac{\partial \pi}{\bar{\pi}} \right| + \left| \frac{2 \cdot \partial D \cdot \bar{D} - 2 \cdot \partial d \cdot \bar{d}}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2} \right| + \left| \frac{\partial h}{\bar{h}} \right|$$

Thay các vi phân thành các sai phân:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\Delta V}{\bar{V}} \right| &= \left| \frac{\Delta \pi}{\bar{\pi}} \right| + \left| \frac{2 \cdot \Delta D \cdot \bar{D} - 2 \cdot \Delta d \cdot \bar{d}}{\bar{D}^2 - \bar{d}^2} \right| + \left| \frac{\Delta h}{\bar{h}} \right| \\ \left| \frac{\Delta V}{\bar{V}} \right| &= \left| \frac{0.005}{3.14} \right| + 2 \cdot \left| \frac{0.03 \cdot 34.83 - 0.03 \cdot 28.11}{34.83^2 - 28.11^2} \right| + \left| \frac{0.03}{8.85} \right| \\ \left| \frac{\Delta V}{\bar{V}} \right| &= 0.0059 \\ \Rightarrow \Delta V &= \bar{V} \cdot 0.0059 = 2938.3866 \cdot 0.0059 = 17.3364(10^{-9}m^3)\end{aligned}$$

Từ đó, ta có được kết quả đo của đại lượng V :

$$V = \bar{V} + \Delta V = 2938.39 \pm 17.34(10^{-9}m^3)$$