TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

Chủ đề 8

Phương pháp lặp Seidel và lặp Gauss-Seidel giải hệ phương trình đại số tuyến tính

Họ và tên : Phạm Ngọc Quang Anh

Lớp: KSTN Toán-tin K60

Trường: Đại học Bách khoa Hà Nội

1. Ý tưởng phương pháp :

Từ phương trình AX= b biến đổi về dạng X= αX+ β (1)

Ta phân tích ma trận α thành 2 ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên : $\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

2.Xây dựng công thức :

Từ (1) ta có :

$X = \alpha X + \beta = [\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}]X + \beta$

$= \alpha^{(1)}X + \alpha^{(2)}X + \beta$

Chọn xấp xỉ đầu là $X^{(0)}$ bất kỳ:

Ta tính :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}.x_j^{(0)} + \beta_1 \\ x_2^{(1)} = \alpha_{21}.x_1^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j}.x_j^{(0)} + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.x_j^{(1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}.x_j^{(0)} + \beta_j \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}.x_j^{(1)} + \alpha_{nn}.x_n^{(0)} + \beta_n \end{cases}$$

Ta được xấp xỉ thứ nhất $X^{(1)}$

$$X^{(1)} =(x^{(1)}, x^{(2)},\ldots, x^{(n)})^t$$

Tổng quát với phép lặp thứ k:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.x_j^{k} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}.x_j^{k-1} + \beta_i \qquad i=\overline{1,n}\text{ , } k=1,2,\ldots$$

Hay

$$X^{(k+1)} = \alpha^{(1)}X^{(k+1)} + \alpha^{(2)}X^{(k)} + \beta \quad (2) \quad k=0,1,2,\ldots.$$

3.Sự hội tụ của phương pháp :

Nếu quá trình lặp (2) hội tụ => . $X^{(k)} =\overline{X}$ thì $\overline{X} =X^*$ là nghiệm đúng của hệ (1)

C/m: Từ $X^{(k+1)} = \alpha^{(1)}X^{(k+1)} + \alpha^{(2)}X^{(k)} + \beta$ do $X(k) \rightarrow \overline{X}$ khi $k \rightarrow \infty$ nên $\overline{X} = \alpha^{(1)}\overline{X} + \alpha^{(2)}\overline{X} + \beta = \alpha\overline{X} + \beta \Rightarrow \overline{X} = X^*$

3.1.Điều kiện hội tụ :

Định lý : Nếu $\|\alpha\|_{(p)} < 1$ ($p = \infty, 1$) thì phương pháp lặp Seidel hội tụ tới nghiệm đúng X^* của hệ phương trình $X = \alpha X + \beta$(1) với xấp xỉ đầu $X^{(0)}$ bất kỳ (3)

Nếu phương trình AX= b trong đó A có dạng đường chéo trội có thể đưa được về dạng (1) thỏa mãn định lý (3)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$ (theo hàng)

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$$ (theo cột) $i=\overline{1,n}$

Chọn xấp xỉ đầu $X(0) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^t$

3.2.Các công thức sai số :

+Nếu $\|\alpha\|_{(\infty)} < 1$:

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty < \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty \quad (4)$$

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty < \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\left\|X^{(1)} - X^0\right\|_\infty \qquad (5)$$

Với

$$\lambda = \frac{\sum_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|}{1-\sum_{j=1}^{i-1}|\alpha_{ij}|} \le ||\alpha_{ij}||_\infty < 1$$

+Nếu $\|\alpha\|_{(1)} < 1$:

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_1 < \frac{\xi}{(1-S)(1-\xi)}\left\|X^{(k)} - X^{k-1}\right\|_1 \qquad (6)$$

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_1 < \frac{\xi^k}{(1-S)(1-\xi)}\left\|X^{(1)} - X^0\right\|_1 \qquad (7)$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{j}|\alpha_{ij}|}{\sum_{i=j+1}^{n}|\alpha_{ij}|} \le ||\alpha||_1 < 1; S = \sum_{i=j+1}^{n}|\alpha_{ij}|$$

- Chứng minh hội tụ :

+ Với $\|\alpha\|_{(\infty)} < 1$: Ta có

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}.x_j^k + \sum_{j=i}^{n}\alpha_{ij}.x_j^{k-1} + \beta_i \qquad i=\overline{1,n}\text{ , k=1,2,…}$$

Nếu X* là nghiệm đúng của phương trình (1) thì

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^* + \beta_j \qquad i=\overline{1,n}$$

Từ đó ,

$$x_i^{(k)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} (x_j^{(k)} - x_j^*) + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} (x_j^{(k-1)} - x_j^*)$$

$$\Rightarrow \left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \left|x_j^{(k)} - x_j^*\right| + \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}| \left|x_j^{(k-1)} - x_j^*\right| \qquad i=\overline{1,n}$$

Đặt $p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|$, $q_i = \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}|$ quy ước $p_1 = 0$

Với mọi j :

$$\left|x_j^{(k)} - x_j^*\right| \le \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty$$

Nên $\left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le p_i \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty + q_i \left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty$

Giả sử ứng với vecto $X^{(k)}$ có chỉ số s nào đó sao cho :

$$\left|x_s^{(k)} - x_s^*\right| = \max_i \left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| = \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty$$

thì ta được :

$$\left\|X^{(k)}-X^*\right\|_\infty \le p_s\left\|X^{(k)}-X^*\right\|_\infty + q_s\left\|X^{(k-1)}-X^*\right\|_\infty$$

hay

$$\left\|X^{(k)}-X^*\right\|_\infty \le \frac{q_s}{1-p_s}\left\|X^{(k-1)}-X^*\right\|_\infty$$

Đặt

$$\lambda = \max_i \frac{q_i}{1-p_i} = \max_i \frac{\sum_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|}{1-\sum_{j=1}^{i-1}|\alpha_{ij}|}$$

=> $\left\|X^{(k)}-X^*\right\|_\infty \le \lambda\left\|X^{(k-1)}-X^*\right\|_\infty$

Nếu ta thay $X^{(k)}$ bởi $X^{(k+1)}$ và $X^{(*)}$ bởi $X^{(k)}$,chứng minh tương tự ta có :

$$\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|_\infty \le \lambda\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty \quad (*)$$

*) Chứng minh : $\lambda < \|\alpha\|_{(\infty)} < 1$

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}| \le \|\alpha\|_\infty < 1$$

$q_i \le \|\alpha\|_\infty - p_i$. Với mọi i=$\overline{1,n}$, ta có :

$$\frac{q_i}{1-p_i} \le \frac{||\alpha||_\infty - p_i}{1-p_i} \le \frac{||\alpha||_\infty - p_i||\alpha||_\infty}{1-p_i} = ||\alpha||_\infty < 1$$

Đpcm => λ là hệ số ánh xạ co.

- Nhận xét : Nếu $||\alpha||_\infty = p_s + q_s$ mà $p_s = 0$ thì $\lambda = ||\alpha||_\infty$.

Ta có:

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le \lambda \left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty \le \dots \le \lambda^k \left\|X^{(0)} - X^*\right\|_\infty$$

=> $\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \to 0$ khi k→ ∞

Vậy $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$

*) Với ma trận A có dạng đường chéo trội theo hàng thì ta đưa về X= αX+ β với

$$\alpha = [\alpha_{ij}]_n = \begin{cases} 0 & i = j \\ \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \end{cases}$$

Và $\beta = \begin{vmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{vmatrix}$

Từ đó quá trình lặp được tính theo công thức :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] + \frac{b_i}{a_{ii}}$$ i=$\overline{1, n}$ k=0,1,2,…

+Với $\|\alpha\|_1$<1 :

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.x_j^k + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}.x_j^{k-1} + \beta_i$$ $i=\overline{1,n}$, k=1,2,…

Nếu X* là nghiệm đúng của phương trình (1) thì

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^* + \beta_j$$ $i=\overline{1,n}$

Từ đó ,

$$x_i^{(k)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} (x_j^{(k)} - x_j^*) + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} (x_j^{(k-1)} - x_j^*)$$

=> $$\left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \left|x_j^{(k)} - x_j^*\right| + \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}| \left|x_j^{(k-1)} - x_j^*\right|$$ $i=\overline{1,n}$

Ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |\alpha_{ij}| \left|x_j^{(k)} - x_j^*\right| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} |\alpha_{ij}| \left|x_j^{(k-1)} - x_j^*\right|$$

Đặt $$S_j = \sum_{i=j+1}^{n} |\alpha_{ij}| \,, p_j = \sum_{i=1}^{j} |\alpha_{ij}|$$,quy ước $S_1 = 0$

=> $$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_1 \le \sum_{j=1}^{n-1} S_j \left|x_j^{(k)} - x_j^*\right| + \sum_{j=1}^{n} p_j \left|x_j^{(k-1)} - x_j^*\right|$$

+) Chứng minh $\zeta \leq ||\alpha||_1 < 1$

$$S_j + p_j = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \leq ||\alpha||_1 < 1$$

=> $p_j \leq ||\alpha||_1 - S_j$ Với mọi j = $\overline{1, n}$ ta có :

$$\frac{p_j}{1 - S_j} \leq \frac{||\alpha||_1 - S_j}{1 - S_j} < \frac{||\alpha||_1 - S_j \, ||\alpha||_1}{1 - S_j} = ||\alpha||_1 < 1$$

$$\xi = \max_j \frac{p_j}{1 - S_j}$$

Từ đó => đpcm.

- Nhận xét : Nếu $||\alpha||_1 = S_k + p_k$ mà $S_k = 0$ thì $\xi = ||\alpha||_1$.

Tương tự với trường hợp hàng :

*Với ma trận A có dạng đường chéo trội theo cột thì :

Xét ma trận T:

$$\left[\frac{1}{a_{11}}\ 0\ \ \ldots\ \ 0\ 0\ \frac{1}{a_{22}}\ \ddots\ \vdots\ \ \vdots\ \ddots\ \ddots\ \vdots\ 0\ \cdots\ \ \ldots\ \frac{1}{a_{nn}}\right]$$

Ta đặt vectơ Z=T.X rồi đưa về dạng : Z=αZ + β với :

$$\alpha = [\alpha_{ij}]_n = \begin{cases} 0 & j = i \\ \frac{-\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}} & j \neq i \end{cases}$$

và β=b => ma trận α chéo trội theo cột với vectơ Z.
Từ đó , quá trình lặp được tính theo công thức :

$$z_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j^{(k)} + b_i$$ i=$\overline{1,n}$ k=0,1,2,…

$$X^{(k)} = \frac{Z^{(k)}}{a_{jj}}$$ j=$\overline{1,n}$

Khi đó ,ta có:

$$\|Z^{(k)} - Z^{*}\|_1 = \|T(X^{(k)} - X^{*})\|_1 \leq \|T\|_1 \|X^{(k)} - X^{*}\|_1 \quad \leq \frac{\xi}{(1-S)(1-\xi)} \|Z^{(k)} - Z^{(k-1}$$

- ⇨ $\|X^{(k)} - X^{*}\|_1 \leq \frac{\xi}{(1-S)(1-\xi)\|T\|_1} \|Z^{(k)} - Z^{(k-1)}\|_1$

- Chứng minh sai số :

(4) Xét 2 phép lặp liên tiếp $X^{(k+1)}$ và $X^{(k)}$

Từ : $\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\|_\infty \leq \lambda \left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|_\infty$

Với p nguyên dương bất kỳ :

$$\left\| X^{(k+p)} - X^{(k)} \right\|_\infty \leq \left\| X^{(k+p)} - X^{(k+p-1)} \right\|_\infty + ... + \left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\|_\infty$$

$$\leq \left(\lambda^p + \lambda^{p-1} + ... + \lambda \right) \left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|_\infty \leq \lambda \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\|_\infty$$

Cố định k, cho $p \to \infty$ thì $X^{(k+p)} \to X^*$

Vậy $\left\| X^{(k)} - X^* \right\|_\infty < \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|_\infty$

(5)

$$\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|_\infty \leq \lambda \left\| X^{(k-1)} - X^{(k-2)} \right\|_\infty \leq ... \leq \lambda^{k-1} \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|_\infty$$

Do vậy từ (4) => (5)

(6) và (7) khá phức tạp

4.Thuật toán và chạy thử chương trình :

INPUT: +Ma trận A vuông cấp N

+Vectơ b

+Xấp xỉ đầu vectơ $x^{(0)}$

+Sai số ε.

OUTPUT : +Vectơ xấp xỉ x

+Số lần lặp k.

+Sai số thực tế : ss

THUẬT TOÁN :

***MA TRẬN CHÉO TRỘI THEO HÀNG**

Bước 1: Nhập các giá trị INPUT

Bước 2: Kiểm tra xem ma trận A có đường chéo trội theo hàng không .Nếu không , in ra " ma trận không phải đường chéo trội ở hàng " và quay lại bước 1.

Bước 3:Xác định λ và gán n←0

Bước 4: Thiết lập công thức lặp :

```
   n←n+1
for k=1 to N do  sum1←0
                    for   j=1 to N do
                          if j<k  do sum1← sum1 + A(k,j)*x(j)
                          elseif j>k do sum1 ← sum1+ A(k,j)*x^(0)(j)
                             end if;
                             end for;
x(k)← (b(k,:) –sum1)/ A(k,k);
end for;
end for;
```

Bước 5: Thiết lập và kiểm tra sai số:

for k=1 to n do

ss← $\| x(k)-x^{(0)}(k) \|_\infty$

end for;

Nếu ss < ε(1-l)/l :

ss← ss.l/(1-l)

thoát vòng lặp và chuyển đến bước 6

Nếu ss > ε $x^0(k) \leftarrow x(k)$ và quay lại bước 4

Bước 6 : In ra kết quả và kết thúc

+)Chương trình :

*Tính λ:

```
function l=lamda(a)
n=length(a);
for i=1:n
    for j=1:n
        if j==i
            A(i,j)=0;
        else A(i,j)=abs(-a(i,j)/a(i,i));
        end
    end
end
for i=1:n
    b(i)=sum(A(i,i:n));
    c(i)=1-sum(A(i,1:i-1));
end
for j=1:n
    d(j)=b(1,j)/c(1,j);
end
l=max(d);
end
```

*Chương trình chính:

```
function [x,ss,n]=gauss_seidel(a,b,x0,eps)
if nargin <4
    eps=0.001;
end
n=0;
kt=0;
N=size(a,1);
for i = 1:N  %kiem tra ma tran co duong cheo troi theo hang khong ?
    j = 1:N;
    j(i) = [];
    c = abs(a(i,j));
    Check(i) = abs(a(i,i)) - sum(c);
    if Check(i) < 0
        fprintf('ma tran khong phai duong cheo troi tai hang %2i\n\n',i);
        return;
    end
end
l=lamda(a);
while kt==0
    n=n+1;% dem so lan lap tim nghiem
    for k=1:N
        sum2=0;
        for j=1:N
            if j<k, sum2=sum2+a(k,j)*x(j);
            elseif j>k, sum2=sum2+a(k,j)*x0(j);
            end;
        end;
        x(k)=(b(k,:)-sum2)/a(k,k);%ham lap
```

```
        ss=norm(x(k)-x0(k),inf);
    end;
    if ss< eps*(1-l)/l ss=ss*l/(1-l);
        kt=1;
    else
    for k=1:N
        x0(k)=x(k);
    end;
    kt=0;
    end;
end;
if(kt==1)
fprintf('Nghiem cua he phuong trinh hoi tu sau %d lan lap:\n',n);
fprintf('sai so la %.12f',ss);
end
```

Ví dụ:

```
>> a=[-8 1 1;1 -5 1;1 1 -4]
a =

    -8     1     1
     1    -5     1
     1     1    -4

>> b=[1;16;7]

b =

     1
    16
     7

>> x0=zeros(3,1)

x0 =
```

```
     0
     0
     0

>> eps=0.0001

eps =

   1.0000e-004

>> x=gauss_seidel(a,b,x0,eps)

ss =

   6.5800e-005

Nghiem cua he phuong trinh hoi tu sau 6 lan lap:
sai so la 0.000065799946

x =

-0.999919722938538
-3.999937316596985
-2.999964259883881
```

*So sánh với Jacobi hàng:

```
function [x,k,ss] = jacobihang(A, b, x0, eps)
%A la ma tran duong cheo troi hang
  %  if kiemtracheotroihang(A) == 0
   %     disp('Ma tran khong co tinh cheo troi hang');
    %    return;
    %nd
    k = 0;
    for i = 1:length(A)
        temp = A(i,i);
        A(i,:) = A(i,:)/temp;
        b(i) = b(i)/temp;
    end
    alpha = eye(length(A)) - A;
    beta = b;
    %Qua trinh lap
    q = norm(alpha, inf);
```

```
    %O day su dung cach lap don thu 2, kiem tra sai so trong vong lap
    continueloop = true;
    while continueloop
        k = k + 1;
        x = alpha*x0 +  beta;
        if (q*norm((x - x0),inf)/(1-q) < eps)
            ss=q*norm((x - x0),inf)/(1-q)
            continueloop = false;
            fprintf('\nso lan lap la %d',k);
            fprintf('\nsai so la %.12f',ss);
        else x0 = x;
        end
    end
end
```

```
>>x= jacobihang(a,b,x0,eps)

ss =

   3.931542998536486e-005
so lan lap la 12
sai so la 0.000039315430
x =

  -0.999985348214090
  -3.999979614646673
  -2.999976581634343
```

***THUẬT TOÁN VỚI MA TRẬN CHÉO TRỘI THEO CỘT :**

Bước 1: Nhập các giá trị INPUT

Bước 2: Kiểm tra xem ma trận A có đường chéo trội theo cột không .Nếu không , in ra " ma trận không phải đường chéo trội ở cột " và quay lại bước 1.

Bước 3: Xác định ζ và gán $n \leftarrow 0$

Bước 4: Thiết lập công thức lặp:
for m=2 to max do
  n←n+1
for k=1 to N do
$X^{(0)} \leftarrow x^{(0)} * A(k,k)$
sum1←0
    for j=1 to N do
      if j<k do sum1← sum1 + A(k,j)*X(j) /A(j,j)
        elseif j>k do sum1 ← sum1+ A(k,j)*$X^{(0)}$(j) /A(j,j)
          end if;
          end for;
X(k)← b(k,:) –sum1;
x(k) ← X(k)/A(k,k);
end for;
end for

Bước 5: Thiết lập và kiểm tra sai số:
for i=1:N
  T(i,i)=1/a(i,i);
end for;

for k=1 to n do
ss← $\| X(k)-X^{(0)}(k) \|_1$
end for

Nếu ss < ε.(1-l).(1-S)/(l.$\|T\|_1$) thì ss← ss.l.$\|T\|_1$/((1-l).(1-S))
Thoát khỏi vòng lặp và đến bước 6.
Nếu ss > ε thì x^0(k)← x(k) và quay lại bước 4.

Bước 6 : In ra kết quả và kết thúc .

+) Chương trình :
*Tính ζ:

```
function [l,S]=xi(a)
n=length(a);
for j=1:n
    for i=1:n
```

```
        if i==j
            A(i,j)=0;
        else A(i,j)=abs(-a(i,j)/a(j,j));
        end
    end
end

for j=1:n
    b(j)=sum(A(1:j,j));
    c(j)=1-sum(A(j+1:n,j));
    s(j)=sum(A(j+1:n,j));
end
for i=1:n
    d(i)=b(1,i)/c(1,i);
end
l=max(d);
S=max(s);
end
```

*Chương trình chính :

```
function x=gauss_seidel1(a,b,x0,eps)
if nargin <4
    eps=0.001;
end
n=0;
kt=0;
N=size(a,1);
for j = 1:N  %kiem tra ma tran co duong cheo troi theo cot khong ?
    i = 1:N;
    i(j) = [];
    c = abs(a(i,j));
    Check(j) = abs(a(j,j)) - sum(c);
    if Check(j) < 0
        fprintf('ma tran khong phai duong cheo troi tai cot %2i\n\n',j);
        return;
    end
end
[l,S]=xi(a);
for k=1:N
    X0(k)=x0(k)*a(k,k);
end
while kt==0
    n=n+1;% dem so lan lap tim nghiem
    for k=1:N
        sum1=0;
        for j=1:N
            if j<k, sum1=sum1+a(k,j)*X(j)/a(j,j);
            elseif j>k, sum1=sum1+a(k,j)*X0(j)/a(j,j);
            end;
        end;
        X(k)=b(k,:)-sum1;%ham lap
        ss=norm(X(k)-X0(k),1);
    end;
    t=zeros(N);
    for j=1:N
        t(j,j)=1/a(j,j);
    end
    if ss< eps*(1-l)*(1-S)/(l*norm(t,1)) ss=ss*norm(t,1)*l/((1-l)*(1-S));
        kt=1;
        for k=1:N
    x(k)=X(k)/a(k,k);
    x=x';
end
```

```
    else
    for k=1:N
        X0(k)=X(k);
    end;
    kt=0;
    end;
end;
if(kt==1)
disp(l);
fprintf(' Nghiem cua he phuong trinh hoi tu sau %d lan lap:\n',n);
fprintf('sai so la %.12f',ss);
end
end
```

Ví dụ:

*So sánh với Jacobi cột:

```
>> a=rand(4)+5*eye(4)

a =

    5.8147    0.6324    0.9575    0.9572
    0.9058    5.0975    0.9649    0.4854
    0.1270    0.2785    5.1576    0.8003
    0.9134    0.5469    0.9706    5.1419

>> b=ones(4,1)

b =

     1
     1
     1
     1

>> x0=zeros(4,1)

x0 =

     0
     0
```

```
     0
     0

>> eps=0.001

eps =

  1.0000e-003

>> eps=0.000001

eps =

  1.0000e-006

>> x=gauss_seidel1(a,b,x0,eps)

l=0.4591

 Nghiem cua he phuong trinh hoi tu sau 7 lan lap:
sai so la 0.000000063097
x =

    0.1091
    0.1334
    0.1638
    0.1300

>> format long
>> x

x =

   0.109094441007911
   0.133400133646454
```

0.163829050527993
0.129989339687923

*So sánh với Jacobi cột :

```
function x = jacobicot(A, b, x0, epsilon)
%A la ma tran duong cheo troi hang
    if kiemtracheotroicot(A) == 0
        disp('Ma tran khong co tinh cheo troi cot');
        return;
    end
    k = 0;
    for j = 1:length(A)
        duongcheo(j) = A(j,j);
        A(:,j) = A(:,j)/duongcheo(j);
    end
    alpha = eye(length(A)) - A;
    beta = b;
    %Qua trinh lap
    q = norm(alpha, 1)
    continueloop = true;
    epsilon = epsilon*(duongcheo(:));
    while continueloop
        k = k + 1;
        x = alpha*x0 +  beta;
        if (q*norm((x - x0),1)/(1-q) < epsilon)
            ss=q*norm((x - x0),1)/(1-q);
            continueloop = false;
        else x0 = x;
        end
    end
    for j = 1:length(duongcheo)
        x(j) = x(j)/duongcheo(j);
    end
    fprintf('sai so la %.12f',ss);
    fprintf('\nso lan lap la %d',k);
end
```

>> x=jacobicot(a,b,x0,eps)

q =

0.560916087845276

sai so la 0.000003431652
so lan lap la 16
x =

0.109094442204692
0.133400115655539
0.163829018107286
0.129989292161462

5.Nhận xét :

***Ưu điểm**:
+Tiết kiệm ô nhớ trong máy tính.

+Tranh thủ tối đa lượng thông tin đã có trong quá trình tính (thành phần $x^{(k+1)}$ vừa tính được được sử dụng ngay để tính thành phần tiếp theo của nó).

***Nhược điểm** :
Cũng giống như phương pháp Jacobi và phương pháp lặp đơn, phải đưa về ma trận α thỏa mãn $||\alpha|| <1$ với chuẩn vô cùng và chuẩn 1