Bài giảng
Toán học tính toán

Nguyễn Đức Thịnh

3/2020

Mục lục

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

§1. Phần mềm Mathematica

Phần mềm Mathematica (gọi tắt `Math`) phục vụ việc học tập và kiểm tra của sinh viên ĐHXD được cung cấp tại

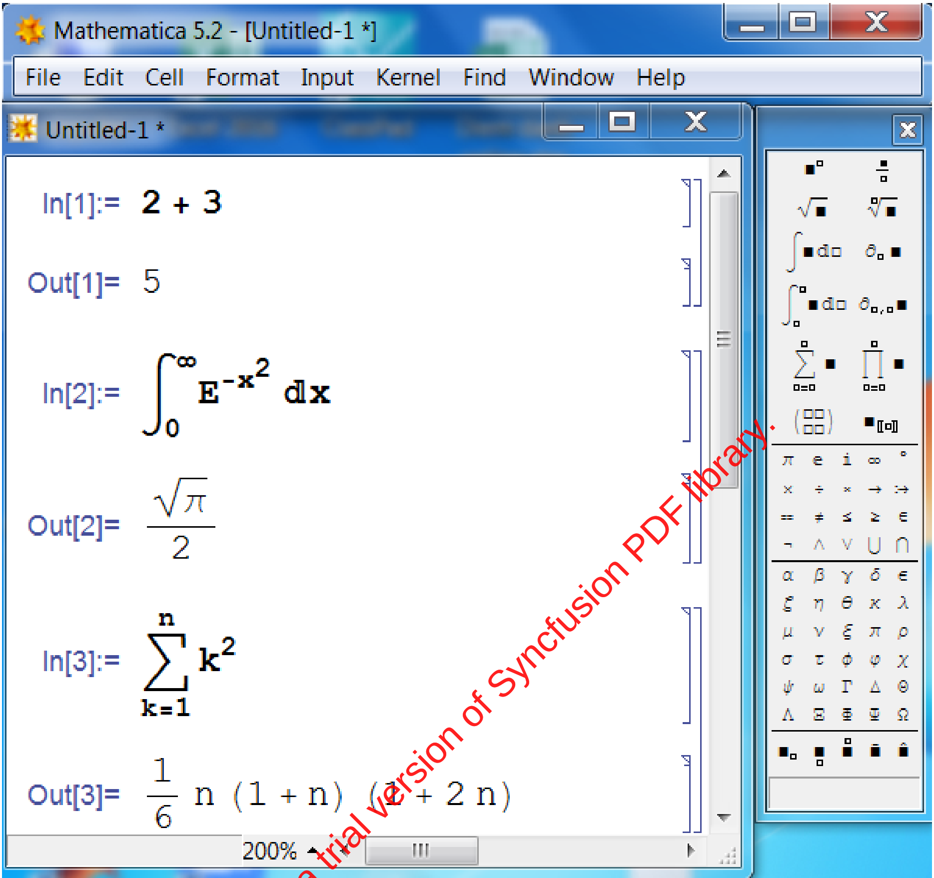
`tinyurl.com/dhxd-thtt`

1. Lệnh

Mỗi cửa sổ của Math gồm các ô, mỗi ô được bao bởi dấu ngoặc bên trái gồm hai phần: phần Input chữ đậm chứa các lệnh và Output hiển thị các kết quả tương ứng.

Lệnh gồm lệnh tính toán, lệnh gán biến, gán hàm và các lệnh (hàm) có sẵn của Math.

Khi con trỏ ở ô nào, bấm phím dịch `Shift + Enter` để thực hiện tuần tự các lệnh ở riêng ô đó. Sau khi dịch, Math tự động gán nhãn `In[n]:=` cho phần lệnh và `Out[n]=` cho phần kết quả.



2. Biến

Lệnh

```
var = expr
```

để gán biểu thức `expr` cho biến `var`. Sau phép gán này, `var` là biến xác định. Biến chưa sử dụng trong phép gán nào gọi là biến bất định. Để đưa biến về biến bất định ta dùng lệnh:

```
Clear[var]
Clear[var1 , var2 , ...]
```

hoặc một trong hai lệnh sau để thoát toàn bộ

```
Quit
Exit
```

Biến % lưu kết quả của biểu thức gần đây nhất.

3. Biểu thức

Biểu thức toán học gồm các hằng số, biến, các phép toán[1] +, −, ∗, /, ^, dấu nhóm biểu thức ( ) và các hàm:

Hàm lý thuyết	Hàm trong Math
$\sin x$	`Sin[x]`
$\cos x$	`Cos[x]`
$\tan x$	`Tan[x]`
$\cot x$	`Cot[x]`
$\arcsin x$	`ArcSin[x]`
$\arccos x$	`ArcCos[x]`
$\arctan x$	`ArcTan[x]`
$\operatorname{arccot} x$	`ArcCot[x]`
$\ln x$	`Log[x]`
$\log_a x$	`Log[a, x]`
$\lvert x\rvert$	`Abs[x]`

Một số thao tác cơ bản với biểu thức:

- `N[expr, n]` cho kết quả của biểu thức `expr` với n chữ số chắc. Hàm `N[expr]` hoặc `expr//N` cho kết quả trên ứng với $n = 6$ mặc định của phần mềm.

- `Expand[expr]` khai triển biểu thức `expr`, nếu biểu thức là đa thức thì kết quả là đa thức dạng chuẩn.

[1] Tạo nhanh phân số và lũy thừa bằng phím tắt `Ctrl + ^`, `Ctrl + 6`.

- `Factor[expr]` phân tích thành nhân tử.
- `Simplify[expr]` rút gọn biểu thức.
- `Print[expr]` hiển thị kết quả biểu thức.

4. Lệnh có sẵn

`TênLệnh[tham số 1 , tham số 2 , ...]`

trong đó

- `TênLệnh` có ký tự đầu viết hoa, nếu là từ ghép thì viết hoa các ký tự đầu.
- Các tham số đặt trong dấu `[ ]` và ngăn cách bởi dấu `,`
- Mỗi tham số có thể gồm nhiều lệnh con. Khi đó các lệnh con đó ngăn nhau bởi dấu `;`

Lệnh kết thúc bởi dấu `;` sẽ không hiển thị kết quả, ngoại trừ `Print`, `Plot`.

5. Định nghĩa hàm

```
f[x_] := expr
f[x_ , y_] := expr
```

để khai báo hàm số f một biến hoặc nhiều biến. Các biến x, y, ... ở vế trái là biến địa phương, **phải viết liền** với dấu gạch chân.

6. Các kí tự đặc biệt

`C` dãy hằng số bất định

`D` lệnh tính đạo hàm

`E` số loga tự nhiên e

`I` đơn vị ảo *i*

`N` lệnh chuyển biểu thức về số thập phân.

§2. Mathematica trong Đại số

1. Giải phương trình

`Solve[ phương trình , biến ]`

- Mỗi phương trình có dạng

  `vế trái == vế phải`

- Tham số `phương trình` có thể gồm nhiều phương trình, khi đó các phương trình gom vào trong dấu `{ }` và ngăn cách bởi dấu `,` Tham số `biến` cũng vậy.

2. Véctơ

Khai báo

Véctơ $u = (2, -1, 3)$ được khai báo bởi lệnh

`u = {2, -1, 3}`

`u//MatrixForm` trả về hình khối dạng véctơ cột $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

`Length[u]` cho giá trị 3 là số chiều của véctơ.

$\mathtt{u}_{[\![2]\!]}$ trả về -1. Chỉ số của dãy bắt đầu từ 1.

Nếu véctơ có các phần tử là biểu thức tổng quát ta dùng lệnh

`Table[expr , {i, a, b}]`

trong đó chỉ số *i* là biến địa phương chạy từ $a, a+1, \ldots$ và $\leq b$.

Phép toán

Cho hai véctơ cùng cỡ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ và k là số hoặc biến bất định, ta có

Lệnh	Kết quả
`u+v`	$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$
`u-v`	$u - v = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)$
`k*u`	$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$
`u.v`	$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$

Ngoài ra các phép toán khác như `*`, `/`, `^`, `!`, tác động hàm...được thực hiện một cách tự nhiên theo vị trí tương ứng.

3. Ma trận

Khai báo

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ được khai báo bằng hai cách

Cách 1: Xem mỗi hàng của A là một véctơ và A là véctơ lập từ các hàng đó

```
A = { {2, -1, 3} , {0, 4, 1} }
```

Cách 2: Gọi mẫu tạo ma trận `[RClick]Create Table/Matrix/Palette`, chọn cỡ của ma trận rồi điền giá trị vào các ô của mẫu

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

`A//MatrixForm` cho hình khối dạng ma trận của A.

`Dimensions[A]` cho cỡ $\{m, n\}$ gồm số hàng, số cột của A.

`A[[i]]` cho véctơ ứng với hàng i của ma trận A.

`A[[i,j]]` cho phần tử hàng i, cột j của A.

Các ma trận đặc biệt:

`IdentityMatrix[n]` cho ma trận đơn vị cấp n.

`DiagonalMatrix[u]` cho ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính tạo nên véctơ `u`.

Nếu ma trận có các phần tử là biểu thức tổng quát ta dùng hàm

```
Table[expr , {i,a,b} , {j,c,d}]
```

với chỉ số chạy cho hàng $i = a, a+1, \ldots \leq b$ và cho cột $j = c, c+1, \ldots \leq d$.

Phép toán

Tương tự véctơ, ta cũng có phép toán tự nhiên theo vị trí tương ứng của ma trận. Ngoài ra các lệnh quan trọng sau:

Lệnh	Kết quả	Chú thích
`A.B`	AB	
`Inverse[A]`	A^{-1}	
`MatrixPower[A, k]`	A^k	số nguyên k có thể $\leqslant 0$
`Transpose[A]`	A^T	
`Det[A]`	$\lvert A\rvert$	
`MatrixRank[A]`	$\mathrm{r}(A)$	
`CharacteristicPolynomial[A, λ]`	$P(\lambda)$	đa thức đặc trưng, λ là biến bất định.

Giả sử ma trận vuông A có các véctơ riêng $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots)$ ứng với giá trị riêng λ_i, $i = 1, 2, \ldots$ Khi đó lệnh

```
Eigensystem[A]
```

cho kết quả $\{\Lambda, \mathrm{U}\}$ trong đó Λ là véctơ có thành phần thứ i là λ_i, U là ma trận có hàng thứ i là u_i.

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Viết lệnh và trình bày kết quả cho yêu cầu:

i) Tìm đa thức đặc trưng, từ đó tìm các giá trị riêng của A

ii) Cho biết các véctơ riêng của A kèm theo giá trị riêng tương ứng

iii) Ma trận A có chéo hóa được không, vì sao?

HD:

Lệnh	Kết quả
`A = `$\begin{pmatrix} -6 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$`;`	
`CharacteristicPolynomial[A,λ]`	$-18 + 3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3$
`Solve[% == 0, λ]`	$\{\{\lambda \to -2\}, \{\lambda \to 3\}, \{\lambda \to 3\}\}$
i) Đa thức đặc trưng của A là $P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 18$ $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \text{ (bội 2)} \end{array}\right.$. A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$	
`Eigensystem[A]`	$\{\{3, 3, -2\}, \{\{-1, 2, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{-2, 1, 1\}\}\}$
*ii)*Véctơ riêng ứng với 3 là $u_1 = (-1, 2, 1)$, ứng với -2 là $u_2 = (-2, 1, 1)$ *iii)* A không chéo hóa được vì không có hệ 3 véctơ riêng độc lập tuyến tính.	

4. Hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình $AX = B$ trong đó A, X, B là các ma trận cỡ tương thích, X là biến ma trận cần tìm. Hàm

`LinearSolve[A, B]`

có thể cho các kết quả sau:

- Thông báo

```
LinearSolve::nosol :
  Linear equation encountered which has no solution...
```

  cho biết hệ vô nghiệm.

- Khi hệ có nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm thì kết quả là một nghiệm riêng X_0 của hệ (nghiệm nào đó thỏa mãn hệ). Ta dùng tiếp lệnh

  `Nullspace[A]`

  để xác định cơ sở của không gian nghiệm $\mathcal{N}$ của hệ thuần nhất $AX = 0$. Nghiệm của hệ có dạng:

$$X_0 + \mathcal{N}$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

HD:

Trình bày	Lệnh
* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (1, 4)$	$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$
	`b = {1, 4}`
* PT có nghiệm riêng $X_0 = (3, 1, 0, 0)$	`X0 = LinearSolve[A, b]`
* Không gian nghiệm $\mathcal{N}$ của PT $AX = 0$ có cơ sở $\{u_1 = (-4, 1, 0, 3), u_2 = (3, 5, 1, 0)\}$	`U = NullSpace[A]`

* PT có nghiệm tổng quát: $X = X_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2$ hay $x_1 = 3 - 4c_1 + 3c_2$, $x_2 = 1 + c_1 + 5c_2$, $x_3 = c_2$, $x_4 = 3c_1$	`n = Length[U]`
	`hs = Table[C[i], {i, 1, n}]`
	`X = X0 + hs.TN`

§3. Mathematica trong Giải tích

1. Tính giá trị

`f/.x->a`

tính f khi thay **biến bất định** x trong f (nếu có) bởi a:

- Phép gán `/.x->` được thực hiện sau mọi phép toán khác.
- Biến gán x là biến địa phương.

Tương tự, lệnh `f/.{x->a , y->b}` khi thay đồng thời x, y vào f, và `f/.x->X` với X là véctơ, cho véctơ các giá trị tương ứng của f.

Nếu biểu thức đã khai báo dưới dạng hàm, ta dùng lệnh `f[a]`, `f[a,b]`, `f[X]`

Ví dụ:

Lệnh	Kết quả
`2x+y/.x->1+x-y/.y->x`	$\left[(2x+y)\big\|_{x\to(1+x-y)}\right]\Big\|_{y\to x} = \left[2(1+x-y)+y\right]\Big\|_{y\to x} = 2+x$
`2x+y/.{x->1, y->2}`	5
`2y/.y->{-1,0,1,2}`	`{-2,0,2,4}`

2. Giới hạn

Lệnh	Kết quả
`Limit[f, x->a]`	$\lim\limits_{x\to a} f$
`Limit[f, x->a, Direction->1]`	$\lim\limits_{x\to a^-} f$
`Limit[f, x->a, Direction->-1]`	$\lim\limits_{x\to a^+} f$

trong đó x là biến bất định. Ví dụ

$$\texttt{Limit}[\frac{\texttt{Abs[x]}}{\texttt{x}}\ ,\ \texttt{x->0}\ ,\ \texttt{Direction->1}]$$

cho kết quả $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x} = -1.$

3. Đạo hàm

Lệnh	Kết quả
`D[f, x]`	$f'(x)$
`D[f, {x,k}]`	$f^{(k)}(x)$
`D[f, {x,k}]/.x->a`	$f^{(k)}(a)$

trong đó x là biến bất định. Lưu ý $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

Nếu biểu thức khai báo dưới dạng hàm một biến, ta dùng lệnh `f'[x]`, `f'''[x]`,... trong đó x là biến hoặc biểu thức.

4. Khai triển Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O\left[(x-a)^{n+1}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O\left[(x-a)^{n+1}\right]$$

ta dùng lệnh

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\texttt{D[f, \{x,k\}]/.x->a}}{k!}(x-a)^k$$

hoặc hàm tắt `Series[f, {x,a,n}]`

Ví dụ: Hàm `Series[E^x, {x, 0, 3}]` cho:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right).$$

5. Tích phân

Ngoài cách nhập mẫu tính tích phân từ công cụ BasicInput, ta có thể dùng lệnh

Lệnh	Kết quả
`Integrate[f, x]`	$\int f dx$
`Integrate[f, {x,a,b}]`	$\int_a^b f dx$
`Integrate[f, {x,a,b}, {y,c,d}]`	$\int_a^b dx \int_c^d f dy$

trong đó x, y là các biến bất định.

Một số tích phân suy rộng phụ thuộc tham số chỉ hội tụ với ràng buộc nhất định của tham số. Khi đó ta bổ sung ràng buộc là tham số cuối của lệnh `Integrate`

`Assumptions -> điều kiện`

trong đó `điều kiện` gồm các ràng buộc liên kết với nhau bởi toán tử logic, hoặc thường tổ hợp lại trong dấu {} nếu chỉ có toán tử "và".

Ví dụ: $\int_0^\infty e^{-ax} dx$ hội tụ khi $a > 0$. Các lệnh

```
Integrate[E^(-a*x) , {x,0,∞} , Assumptions -> a>0]
```

`Simplify[` $\int_0^\infty \mathrm{E}^{-a*x} dx$ `, a>0]`

đều cho kết quả $\frac{1}{a}$.

6. Phương trình vi phân

`DSolve[ phương trình , hàm , biến ]`

trong đó các hàm và biến là bất định. Các tham số cũng có thể gồm nhiều thành phần.

Ví dụ: $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ có nghiệm $y = C_1x^2 + C_2x^3$:

```
DSolve[x^2 * y''[x] - 4x * y'[x] + 6y[x] == 0 , y[x] , x]
```

Ví dụ: $\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ với $\begin{cases} y(0) = -1 \\ z(0) = 3 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} y = 5e^{-x} - 6e^{x} \\ z = 5e^{-x} - 2e^{x} \end{cases}$:

```
DSolve[
  {y'[x] == 2y[x] - 3z[x] , z'[x] == y[x] - 2z[x] , y[0] == -1 , z[0] == 3} ,
  {y[x] , z[x]} ,
  x]
Simplify[%]
```

Ví dụ: $u_x + 2u_t = 0$ có nghiệm $u = C(t - 2x)$ trong đó C là hàm bất kỳ:

```
DSolve[∂_x u[x, t] + 2∂_t u[x, t] == 0 , u[x, t] , {x, t}]
```

7. Phương trình sai phân

Lệnh `RSolve` hoạt động như lệnh `DSolve`.

Ví dụ: Dãy Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 0, f_1 = 1$ có công thức tổng quát $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$:

```
RSolve[{f[n]==f[n-1]+f[n-2], f[0]==0, f[1]==1}, f[n], n]
```


§4. Lập trình với Mathematica

1. If - Rẽ nhánh

```
If[điều kiện, khối lệnh 1, khối lệnh 2*]
```

trong đó nếu `điều kiện` đúng thì thực hiện `khối lệnh 1`, ngược lại thực hiện `khối lệnh 2` (không có tùy chọn này tức là không thực hiện gì).

- `If` có thể vừa là *hàm*, vừa là *thủ tục*.

- mỗi khối lệnh có thể gồm nhiều lệnh - ngăn cách bởi dấu `;`

Khi lệnh rẽ nhiều nhánh được điều khiển bởi nhiều điều kiện, có thể dùng các hàm `If` lồng nhau, tuy nhiên nên dùng hàm `Piecewise` bằng cách gõ `[Esc]pw[Esc]` để tạo mẫu, `Ctrl+Enter` để tạo thêm nhánh.

$$\begin{cases} \blacksquare & \square \\ \square & \square \end{cases}$$

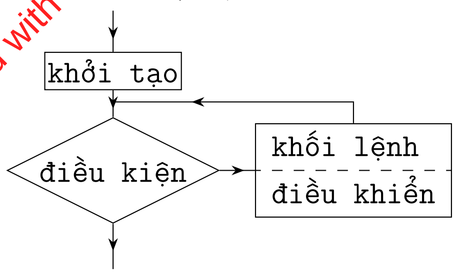
2. Do - Lặp xác định

```
Do[khối lệnh, {n}]
Do[khối lệnh, {i,a,b}]
```

để thực hiện `khối lệnh` tuần tự `n` lần, hoặc theo chỉ số chạy $i = a, a+1, a+2, ... \leq b$. Ở đây i là biến địa phương.

3. For - Lặp không xác định

```
For[khởi tạo , điều kiện , điều khiển* , khối lệnh]
```



- `điều khiển` viết trước nhưng thực hiện sau, và có thể không có (lệnh `For` chỉ có ba tham số). Ta cũng viết

  `For[khởi tạo, điều kiện, khối lệnh ; điều khiển]`

  tức là đặt các lệnh điều khiển vào phần `khối lệnh`.

- khởi tạo chỉ thực hiện một lần.

- `khởi tạo`, `điều khiển`, `khối lệnh` có thể gồm nhiều lệnh.

Ví dụ: Lệnh

```
For[i=1 , i ≤ 50 , i++ , i=i^2+1]
i
```

cho kết quả $i = 123$, được mô tả trong bảng sau:

Bước lặp	i	điều kiện	i_1 (`i=i^2+1`)	i_2 (`i++`)
1	1	$1 \leq 50 = T$	2	3
2	3	$3 \leq 50 = T$	10	11
3	11	$11 \leq 50 = T$	122	123
	123	$123 \leq 50 = F$	dừng	

4. Chương trình con

```
TênCT[x_, y_]:= Block[
    {các biến địa phương},
    khối lệnh
];
```

- nếu không có biến địa phương, dòng khai báo biến có dạng:

```
{},
```

- biểu thức cuối cùng của khối lệnh (không có dấu kết thúc `;`) trả về kết quả của chương trình con.

Ví dụ: Chương trình con tìm tổng và tích của dãy

```
f[u_]:= Block[
    {n, i, s, p},
    n=Length[u];
    For[s=0; p=1; i=1, i ≤ n, i++,
        s = s + u[[i]]; p = p * u[[i]];
      ];
    {s, p}
  ];
```

thì lệnh `f[{2, -1, 5}]` cho kết quả `{6, -10}`.

§5. Sai số

Bài tập

1. Tìm khai triển Mac-Laurin của hàm số $f(x) = e^x \ln(1 + \sin x)$ tới cấp 5 bằng hai cách.

2. Viết chương trình con tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của dãy: Đầu vào: dãy `u`, Đầu ra: `{LN, NN}`.

3. Viết chương trình con tìm vị trí của số `x` trong dãy `u`: Đầu vào: `x`, `u`; Đầu ra: `vt`.

Chương 2

Giải phương trình

§1. Phương trình đại số

1. Phương pháp chia đôi

Xét phương trình

$$f(x) = 0, \ \ x \in [a, b]\,. \tag{2.1}$$

Giả sử

i) $f \in C[a, b]$.

ii) $f(a)\,f(b) < 0$.

Khi đó

a) $\exists x^* \in [a, b] : f(x^*) = 0$.

b) Xét dãy đoạn $[a_n, b_n]$ xác định bởi

i) $a_0 = a, b_0 = b$.

ii) Đặt $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Khi $f(a_n)\,f(c_n) < 0$ đặt $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$; ngược lại đặt $f(c_n)\,f(b_n) \leqslant 0$ thì $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$.

thì

i) $a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$.

ii) $\forall x_n \in [a_n, b_n] : |x_n - x^*| \leqslant b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ (thường chọn $x_n = a_n$).

$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset$ ... là các khoảng chứa nghiệm x^* và

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Ví dụ: Xét phương trình $x^3 + 2x - 1 = 0$, $x \in [0, 2]$.

i) Kiểm tra điều kiện thực hiện phương pháp

ii) Xây dựng dãy đoạn chứa nghiệm sau 5 bước

iii) Cho 1 nghiệm gần đúng với sai số 10^{-2}

iv) Cần thực hiện bao nhiêu bước lặp để thu được nghiệm có sai số 10^{-6}.

HD: i) $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Dễ thấy $f \in C[0, 2]$; $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 11 > 0$.

ii, iii)

n	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	ε_n
0	0	2	1	$-$	$+$	$+$	
1	0	1	0.5	-1	1	1	

iv) $\dfrac{b-a}{2^n} < 10^{-6} \Rightarrow n > \log_2 \dfrac{b-a}{10^{-6}} = 20.9316$. Chọn $n = 21$.

2. Phương pháp Newton

Xét phương trình

$$f(x) = 0, \;\; x \in [a, b]. \tag{2.2}$$

Giả sử

i) f', f'' không đổi dấu trên $[a, b]$.

ii) $f(a)\, f(b) < 0$.

Khi đó

a) $\exists x^* \in (a, b) : f(x^*) = 0$.

b) Xét dãy $\{x_n\}$:

i) $x_0 \in [a, b] : f(x_0)\, f'' > 0$ (thường chọn x_0 là a hoặc b).

ii) Công thức lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.3}$$

thì

i) $\{x_n\}$ đơn điệu và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

ii) Công thức sai số

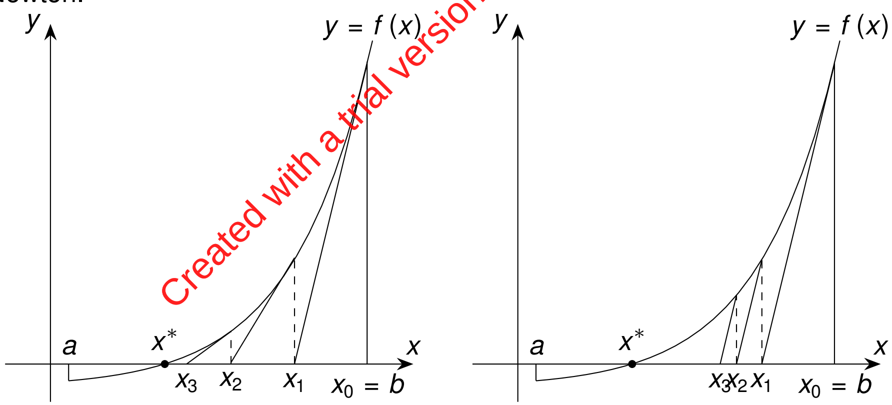
$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 \tag{2.4}$$

trong đó $M \geq |f''(x)|$, $0 < m \leq |f'(x)|\ \ \forall x \in [a, b]$.

Công thức Newton cải biên

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \tag{2.5}$$

có số phép tính mỗi bước ít hơn nhưng tốc độ hội tụ chậm hơn công thức Newton.



Cần nắm vững đặc tính hàm sơ cấp và tính chất của hàm trị tuyệt đối để đánh giá giá trị của các biểu thức trong bài học; hoặc đánh giá qua đồ thị trong `Math` bằng cách đọc mức giá trị của hàm.

Nếu f'' không đổi dấu trên $[a, b]$ thì f' đơn điệu. Khi đó f' không đổi dấu nếu $f'(a)\, f'(b) > 0$; và kéo theo $m = \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$.

Ví dụ: Cho phương trình $x^3 = x^2 + 3 \quad (*)$ với $x \in [1, 4]$.

i) Kiểm tra điều kiện thực hiện phương pháp.

ii) Tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước tới x_3.

iii) Tìm sai số của các nghiệm gần đúng ở ý trên.

iv) Tìm nghiệm gần đúng với sai số 10^{-6}, cho biết số bước lặp đã thực hiện.

v) Tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước theo công thức Newton cải biên.

HD: i) $(*) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 3$. Ta có

$$f(x) = 3x^2 - 2x, \quad f''(x) = 6x - 2 \geq 4 > 0, \quad \forall x \in [1, 4].$$

Mặt khác $f'(1) = 1 > 0$, $f'(4) = 40 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in [1, 4]$.

$f(1) = -3 < 0$, $f(4) = 45 > 0$.

ii-iv) $f(4)\, f'' > 0 \Rightarrow x_0 = 4$. Công thức lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n^2 - 3}{3x_n^2 - 2x_n}$$

và sai số $\left|x_n - x^*\right| \leq \dfrac{M}{2m}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2 = \varepsilon_n$ trong đó

$$\left|f''(x)\right| = f''(x) = 6x - 2 \leq 22, \quad \forall x \in [1, 4] \Rightarrow M = 22^{(1)}$$

$$m = \min\left\{\left|f'(1)\right|, \left|f'(4)\right|\right\} = \min\left\{1, 40\right\} = 1.$$

n	x_n	ε_n
0	4	
1	2.875	13.9219
2	2.21883	4.73619
3	1.92841	0.927734
4	1.86641	0.0422842
5	1.86371	0.0000803536
6	1.86371	$\boxed{2.76859 \cdot 10^{-10}}$ (2)

Nghiệm gần đúng có sai số 10^{-5}: $x_6 = 86371$.

(1) Đánh giá bằng đồ thị được $M = 20 + 2.5 = 22.5$.

(2) Tính bằng Math.

v) Công thức Newton cải biên: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - x_n^2 - 3}{40}$.

n	x_n
0	4
1	2.875
2	2.56255
3	2.38103

3. Phương pháp lặp đơn

Xét phương trình

$$x = g(x), \ x \in [a, b]. \tag{2.6}$$

Giả sử

i) $g(x) \in [a, b] \ \forall x \in [a, b]$.

ii) g là ánh xạ co trên $[a, b]$ tức là $\exists q < 1 \ \forall x, y \in [a, b]$:

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y|. \tag{2.7}$$

Khi đó

a) $\exists! x^* \in [a, b] : x^* = g(x^*)$.

b) Xét dãy $\{x_n\}$:

i) $x_0 \in [a, b]$ bất kì (thường chọn $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$).

ii) Công thức lặp

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{2.8}$$

thì

i) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$.

ii) Công thức đánh giá sai số

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &\leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \\ |x_n - x^*| &\leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Giả sử $|g'(x)| \le q < 1\ \forall x \in [a, b]$. Khi đó $\forall x, y \in [a, b]$:

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)| \cdot |x - y| \le q\,|x - y|$$

tức là điều kiện (2.7) thỏa mãn.

Ví dụ: Biến đổi $x^3 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 3}$, với $x \in [1, 4]$.

i) Kiểm tra điều kiện thực hiện phương pháp.

ii) Cho trước $x_0 = 2.5$, tính nghiệm gần đúng tới x_3.

iii) Tìm sai số của các nghiệm gần đúng ở trên.

iv) Tìm nghiệm với sai số 10^{-4} và xác định số bươc lặp đã thực hiện.

v) Không cần tìm dãy nghiệm gần đúng, hãy xác định cần bao nhiêu bước lặp để thu được nghiệm có sai số 10^{-10}.

HD: i) Đặt $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3}$. Ta có

$$g'(x) = \frac{2x}{3(x^2+3)^{2/3}} > 0,\ \ \forall x \in [1, 4]$$

$$\Rightarrow g(1) \le g(x) \le g(4) \Rightarrow 1.5874 \le g(x) \le 2.6684 \Rightarrow 1 \le g(x) \le 4^{(3)}$$

$$g''(x) = \frac{2\left(9 - x^2\right)}{9(x^2+3)^{5/3}} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [1, 4]$$

$$\Rightarrow\ |g'(x)| \le \max\{|g'(1)|, |g'(4)|, |g'(3)|\} =$$

$$= \max\{0.264567, 0.374513, 0.381571\} = 0.381571 = q < 1^{(4)}.$$

ii-iv) Công thức lặp và sai số

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n^2 + 3}$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| =: \varepsilon_n.$$

[3]Đánh giá bằng đồ thị $1.6 \le g(x) \le 2.6 + 0.2$.

[4]Đánh giá bằng đồ thị $q = 0.38 + 0.005$.

n	x_n	ε_n
0	2.5	
1	2.09917	0.247314
2	1.94927	0.0924898
3	1.8945	0.033789
4	1.87475	0.0121887
5	1.86766	0.0043737
...		
9	1.86377	$\boxed{0.000071735}$

Nghiệm gần đúng có sai số 10^{-4}: $x_9 = 1.86377$.

v) Xét

$$\frac{q^n}{1-q}\left|x_1 - x_0\right| < 10^{-10} \Rightarrow q^n < \frac{10^{-10}(1-q)}{\left|x_1 - x_0\right|}$$

$$\Rightarrow n > \log_q \frac{10^{-10}(1-q)}{\left|x_1 - x_0\right|} = 23.4491 \Rightarrow \text{ chọn } n = 24.$$

§2. Hệ phương trình tuyến tính

1. Chuẩn của véctơ và ma trận

Cho véctơ $x \in (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Chuẩn p ($p \geq 1$) của x là

$$\left\|x\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Một số trường hợp đặc biệt:

i) $p = 2 \Rightarrow \left\|x\right\|_2 = \left\|x\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|^2}.$

ii) $p = 1 \Rightarrow \left\|x\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|.$

iii) $p = \infty \Rightarrow \left\|x\right\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \left|x_i\right|$.

Hàm tính chuẩn véctơ trong `Math`, ứng với $p = 2$:

`Norm[x]`

hoặc với hằng số $p \geq 1$ xác định:

`Norm[x, p]`

Cho ma trận thực $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, chuẩn $p \geq 1$ của A là

$$\left\|A\right\|_p = \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\|Ax\right\|_p}{\left\|x\right\|_p}$$

trong đó $x \in \mathbb{R}^n$.

i) $p = 2 \Rightarrow \left\|A\right\|_2 = \left\|A\right\| = \max\limits_{1\le i\le n} \sqrt{\lambda_i}$, trong đó λ_i là các giá trị riêng của A^TA.

ii) $p = 1 \Rightarrow \left\|A\right\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} \left|a_{ij}\right|$.

iii) $p = \infty \Rightarrow \left\|A\right\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$.

Các hàm tính chuẩn của ma trận trong `Math` giống như của véctơ.

Trong phần này ta chủ yếu sử dụng chuẩn ∞.

2. Hệ lặp đơn

Xét hệ

$$x = Bx + g \tag{2.10}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = \left(b_{ij}\right)_n$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Phương trình này có dạng khai triển

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + g_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + g_2 \\ \ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + g_n \end{cases}$$

hoặc tổng quát

$$\begin{cases} x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \right) + g_i \\ i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Giả sử $q = \|B\|_\infty < 1$. Khi đó

a) $\exists! x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$ sao cho $x^* = Bx^* + g$.

b) Xét dãy véctơ nghiệm xấp xỉ $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$:

i) $x^0 \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, thường chọn $x^0 = \theta$.

ii) Công thức lặp

$$x^{k+1} = Bx^k + g \ \forall k \geq 0. \tag{2.11}$$

thì

i) $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$.

ii) Công thức đánh giá sai số: $\forall k \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} \left\|x^k - x^*\right\|_\infty &\leq \frac{q^k}{1-q} \left\|x^1 - x^0\right\|_\infty \\ \left\|x^k - x^*\right\|_\infty &\leq \frac{q}{1-q} \left\|x^k - x^{k-1}\right\|_\infty . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Giả sử trong công thức lặp đơn, tại mỗi bước, các thành phần vừa tính được dùng luôn để tính thành phần kế tiếp. Khi đó ta có công thức Seidel với tốc độ hội tụ nhanh hơn:

$$\begin{cases} x_i^{k+1} = \left(\sum_{j<i} b_{ij} x_j^{k+1} \right) + \left(\sum_{j\geq i} b_{ij} x_j^{k} \right) + g_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \tag{2.13}$$

hay dạng khai triển

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = b_{11}x_1^k + b_{12}x_2^k + \dots + b_{1n}x_n^k + g_1 \\ x_2^{k+1} = b_{21}x_1^{k+1} + b_{22}x_2^k + \dots + b_{2n}x_n^k + g_2 \\ x_3^{k+1} = b_{31}x_1^{k+1} + b_{32}x_2^{k+1} + b_{33}x_3^k + \dots + b_{3n}x_n^k + g_3 \\ \dots \\ x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^{k+1} + b_{n2}x_2^{k+1} + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_{nn}x_n^k + g_n. \end{cases}$$

Ví dụ: Cho phương trình $\begin{cases} x_1 = -0.21x_1 - 0.28x_2 + 0.05x_3 - 0.9 \\ x_2 = 0.19x_1 + 0.01x_2 - 0.26x_3 + 3.8 \\ x_3 = 0.39x_1 - 0.12x_2 - 0.06x_3 - 2.9 \end{cases}$

i) Kiểm tra điều kiện thực hiện phương pháp.

ii) Cho xấp xỉ ban đầu $x^0 = (0, 2, -1)$, tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước lặp.

iii) Tìm sai số của các nghiệm gần đúng ở trên.

iv) Tìm nghiệm gần đúng với sai số 10^{-3}.

v) Để đạt được nghiệm với sai số 10^{-8}, cần thực hiện bao nhiêu bước lặp.

vi) Áp dụng công thức Seiden, tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước.

HD: i) Đặt $B = \begin{bmatrix} -0.21 & -0.28 & 0.05 \\ 0.19 & 0.01 & -0.26 \\ 0.39 & -0.12 & -0.06 \end{bmatrix}$, $g = (-0.9, 3.8, -2.9)$. Ta có $q = \|B\|_\infty = 0.57 < 1$.

ii-iv) Công thức lặp

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0.21x_1^k - 0.28x_2^k + 0.05x_3^k - 0.9 \\ x_2^{k+1} = 0.19x_1^k + 0.01x_2^k - 0.26x_3^k + 3.8 \\ x_3^{k+1} = 0.39x_1^k - 0.12x_2^k - 0.06x_3^k - 2.9. \end{cases}$$

và sai số $\|x^k - x^*\|_\infty \le \varepsilon_k = \dfrac{q}{1-q}\|x^k - x^{k-1}\|_\infty, \ \forall k \ge 1.$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	ε_k
0	0	2	-1	
1	-1.51	4.08	-3.08	2.75721
2	-1.8793	4.3547	-3.7937	0.946067
3	-1.91435	4.47284	-3.92787	0.177852
4	-1.94678	4.50225	-3.94766	0.0429861
5	-1.94919	4.50153	-3.96265	0.0198678
...				
8	-1.95001	4.50491	-3.96338	$\boxed{0.000459243}$

Nghiệm gần đúng với sai số 10^{-3} là $x^8 = (-1.95001, 4.50491, -3.96338)$.

v) Ta có

$$\frac{q^k}{1-q}\left\|x^1 - x^0\right\|_\infty < 10^{-8} \Rightarrow q^k < \frac{10^{-8}(1-q)}{\left\|x^1 - x^0\right\|_\infty}$$

$$\Rightarrow k > \log_q \frac{10^{-8}(1-q)}{\left\|x^1 - x^0\right\|_\infty} = 35.5744 \Rightarrow \text{ chọn } k = 36.$$

vi) Công thức Seidel

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0.21x_1^k - 0.28x_2^k + 0.05x_3^k - 0.9 \\ x_2^{k+1} = 0.19x_1^{k+1} + 0.01x_2^k - 0.26x_3^k + 3.8 \\ x_3^{k+1} = 0.39x_1^{k+1} - 0.12x_2^{k+1} - 0.06x_3^k - 2.9. \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	2	-1
1	-1.51	3.7931	-3.88407
2	-1.83917	4.49835	-3.92403
3	-1.96951	4.49102	-3.97159

3. Hệ chéo trội

Xét hệ

$$Ax = b \tag{2.14}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A = \left(a_{ij}\right)_n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Giả sử *A chéo trội theo hàng*, tức là trên mỗi hàng, phần tử trên đường chéo chính có trị tuyệt đối lớn hơn tổng trị tuyệt đối các phần tử còn lại:

$$\begin{cases} |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}| \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Khi đó

$$(2.14) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow a_{ii}x_i = \left(-\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right) + b_i, \ \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow x_i = \left(-\sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j\right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \ \forall i = \overline{1, n}$$

Đặt $b_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{nếu } i \neq j \\ 0 & \text{nếu } i = j \end{cases}$, $g_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ với $i, j = \overline{1, n}$, thì

$$(2.14) \Leftrightarrow x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right) + g_i, \ \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow x = Bx + g$$

trong đó

$$q = \|B\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j\neq i} \left|-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < 1$$

nên (2.14) giải được theo phương pháp lặp đơn.

Ví dụ: Giải hệ $\begin{cases} -15.4x + y + 6.3z = 30 \\ -4.2x + 10.8y + 3.3z = 25 \\ -2.4x + 5.3y + 15.9z = -10 \end{cases}$ $(*)$ với các yêu cầu như ví dụ trên và xấp xỉ ban đầu $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

HD: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.0649351y + 0.409091z - 1.94805 \\ y = 0.388889x - 0.305556z + 2.31481 \\ z = 0.150943x - 0.333333y - 0.628931 \end{cases}$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0649351 & 0.409091 \\ 0.388889 & 0 & -0.305556 \\ 0.150943 & -0.333333 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow q = \|B\|_\infty = 0.694444 < 1.$$

Công thức lặp

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.0649351y_k + 0.409091z_k - 1.94805 \\ y_{k+1} = 0.388889x_k - 0.305556z_k + 2.31481 \\ z_{k+1} = 0.150943x_k - 0.333333y_k - 0.628931 \end{cases}$$

và sai số $\|X_k - X^*\|_\infty \le \dfrac{q}{1-q}\|X_k - X_{k-1}\|_\infty$, trong đó $X_k = (x_k, y_k, z_k)$.

k	x_k	y_k	z_k	ε_k
0	0	0	0	
1	−1.94805	2.31481	−0.628931	5.26094
2	−2.05503	1.74941	−1.69458	2.42193
3	−2.52769	2.03343	−1.52226	1.07423
4	−2.43875	1.79696	−1.68828	0.537424
5	−2.52203	1.88227	−1.59603	0.209651
...				
$\boxed{14}$	−2.49051	1.84063	−1.61858	$\boxed{0.000927176}$

Nghiệm gần đúng với sai số 10^{-3} là $x_{14} = -2.49051, y_{14} = 1.84063, z_{14} = -1.61858$.

v) Ta có

$$\frac{q^k}{1-q}\|X_1 - X_0\|_\infty < 10^{-8} \Rightarrow q^k < \frac{10^{-8}(1-q)}{\|X_1 - X_0\|_\infty}$$

$$\Rightarrow k > \log_q \frac{10^{-8}(1-q)}{\|X_1 - X_0\|_\infty} = 56.0703 \Rightarrow \text{ chọn } k = 57.$$

vi) Công thức Seidel

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.0649351y_k + 0.409091z_k - 1.94805 \\ y_{k+1} = 0.388889x_{k+1} - 0.305556z_k + 2.31481 \\ z_{k+1} = 0.150943x_{k+1} - 0.333333y_{k+1} - 0.628931 \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	−1.94805	1.55724	−1.44206
2	−2.43686	1.80777	−1.59935
3	−2.48494	1.83714	−1.6164