Cvičení 4

Příklad 1: Jestliže platí $p \leftrightarrow q$, co lze říci o pravdivostní hodnotě formule $p \vee \neg q$?

Řešení: Pokud platí $p \leftrightarrow q$, musí platit i $p \vee \neg q$. (Pokud platí $p \leftrightarrow q$, tak jsou buď oba výroky p a q pravdivé, a $p \vee \neg q$ je pravda, protože je pravda p, nebo jsou oba výroky p a q nepravdivé, a $p \vee \neg q$ je pravda, protože je pravda $\neg q$.)

Příklad 2: Předpokládejme, že platí $\neg p \vee q$. Které z následujících formulí budou za tohoto předpokladu platit (tj. které z následujících formulí logicky vyplývají z tohoto předpokladu)? Vaše odpovědi zdůvodněte (např. pomocí tabulkové metody, nalezením sémentického sporu nebo nalezením pravdivostního ohodnocení, při kterém platí předpoklad $\neg p \vee q$, ale neplatí závěr).

a) p
b) $q \rightarrow p$
c) $p \rightarrow q$
d) $\neg q \rightarrow \neg p$
e) $\neg p \wedge q$

Řešení:

a) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$
b) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
c) Vyplývá.
d) Vyplývá.
e) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$

Příklad 3: Předpokládejme, že platí $p \wedge q$. Které z následujících formulí budou za tohoto předpokladu platit (tj. které z následujících formulí logicky vyplývají z tohoto předpokladu)? Vaše odpovědi zdůvodněte.

a) p
b) q
c) $p \vee q$
d) $p \wedge \neg q$
e) $\neg p \vee q$
f) $\neg q \rightarrow p$
g) $p \leftrightarrow q$

Řešení:

a) Vyplývá.
b) Vyplývá.
c) Vyplývá.
d) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 1$
e) Vyplývá.
f) Vyplývá.
g) Vyplývá.

Příklad 4: Vezměme si následující formule:

a) $\neg p$
b) $\neg q$
c) $\neg p \vee \neg q$
d) $\neg p \wedge \neg q$
e) $p \leftrightarrow \neg q$
f) $\neg(p \leftrightarrow q)$
g) $p \wedge \neg q$
h) $\neg p \wedge q$
i) $\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$

- Pro které z těchto formulí platí, že z dané formule logicky vyplývá závěr $\neg(p \wedge q)$?

  Řešení:

  a) Vyplývá.
  b) Vyplývá.
  c) Vyplývá.
  d) Vyplývá.
  e) Vyplývá.
  f) Vyplývá.
  g) Vyplývá.
  h) Vyplývá.
  i) Vyplývá.

- Pro které z těchto formulí platí, že z dané formule logicky vyplývá závěr $\neg(p \vee q)$?

  Řešení:

  a) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
  b) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$
  c) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$
  d) Vyplývá.
  e) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$
  f) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$
  g) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$
  h) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
  i) Vyplývá.

- Pro které z těchto formulí platí, že z dané formule logicky vyplývá závěr $\neg(p \rightarrow q)$?

  Řešení:

  a) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$
  b) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$
  c) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$
  d) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$
  e) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
  f) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
  g) Vyplývá.
  h) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
  i) Vyplývá.

Vaše odpovědi zdůvodněte.

Příklad 5: Určete, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů. (Vaše odpovědi zdůvodněte).

a) Z předpokladů q a $p \rightarrow q$ vyplývá p.
b) Z předpokladů $\neg p$ a $p \rightarrow q$ vyplývá $\neg q$.
c) Z předpokladů p a q vyplývá $p \wedge q$.
d) Z předpokladů p a $p \vee q$ vyplývá q.
e) Z předpokladů $\neg q$ a $p \vee q$ vyplývá p.
f) Z předpokladů $\neg p$ a $p \vee q$ vyplývá $\neg q$.

g) Z předpokladu $\neg p \vee (q \rightarrow p)$ vyplývá $\neg p \wedge q$.
h) Z předpokladu p vyplývá $q \vee \neg q$.

Řešení:

a) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
b) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
c) Vyplývá.
d) Nevyplývá: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$
e) Vyplývá.
f) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$
g) Nevyplývá: $v(p) = 0$, $v(q) = 0$
h) Vyplývá.

Příklad 6: Uvedené věty nejprve zformalizujte pomocí formulí výrokové logiky. Poté pomocí nalezení sémantického sporu dokažte, že daný závěr vyplývá z uvedených předpokladů, nebo dokažte, že tento závěr z daných předpokladů nevyplývá, tím, že ukážete pravdivostní ohodnocení, kdy předpoklady platí a závěr ne.

a) *Logika je složitá nebo ji studenti nemají rádi.*
Jestliže je matematika jednoduchá, tak logika není složitá.
___
Jestliže studenti mají rádi logiku, tak matematika není jednoduchá.

Řešení:

$$\frac{\begin{array}{l} \ell \vee \neg s \\ m \rightarrow \neg \ell \end{array}}{s \rightarrow \neg m}$$

- ℓ — logika je složitá
- s — studenti mají rádi logiku
- m — matematika je jednoduchá

Závěr z předpokladů vyplývá.

b) *Pokud je nedostatek odborníků v IT, tak mají vysoké platy.*
Je nedostatek odborníků v IT nebo je o IT velký zájem.
Jestliže je o IT velký zájem, není pro absolventy dostatek pracovních míst.
Pro absolventy je dostatek pracovních míst.
___
Odborníci v IT mají vysoké platy.

Řešení:

$$\frac{\begin{array}{l} n \rightarrow p \\ n \vee z \\ z \rightarrow \neg m \\ m \end{array}}{p}$$

- n — je nedostatek odborníků v IT

- p — odborníci v IT mají vysoké platy
- z — o IT je velký zájem
- m — pro absolventy je dostatek pracovních míst

Závěr z předpokladů vyplývá.

c) *Pokud firma A neuzavřela smlouvu s firmou B nebo dodržela smluvní podmínky, tak žaloba podaná firmou B nebude úspěšná.*
Jestliže firma A nedodala zboží včas, tak nedodržela smluvní podmínky.
Firma A uzavřela smlouvu s firmou B a nedodala zboží včas.
———
Žaloba podaná firmou B bude úspěšná.

Řešení:

$$\begin{array}{l} \neg s \vee p \rightarrow \neg z \\ \neg d \rightarrow \neg p \\ s \wedge \neg d \\ \hline z \end{array}$$

- s — firma A uzavřela smlouvu s firmou B
- p — firma A dodržela smluvní podmínky
- z — žaloba podaná firmou B bude úspěšná
- d — firma A dodala zboží včas

Závěr z předpokladů nevyplývá: $v(s) = 1$, $v(p) = 0$, $v(z) = 0$, $v(d) = 0$.

Příklad 7: Zjistěte, jestli následující předpoklady jsou konzistentní nebo nekonzistentní. Vaše odpovědi zdůvodněte (v případě, že jsou předpoklady nekonzistentní, zdůvodněte to pomocí nalezení sémantického sporu, a v případě, kdy jsou konzistentní, uveďte příklad pravdivostního ohodnocení, při kterém všechny předpoklady platí).

a) Jestliže byl vrahem Jones, tak byl v bytě oběti a neodešel před jedenáctou.
Jones byl v bytě oběti.
Pokud by odešel před jedenáctou, tak by ho viděl vrátný.
Není pravda, že ho viděl vrátný nebo že by byl Jones vrahem.

Řešení:

$$\begin{array}{l} j \rightarrow b \wedge \neg e \\ b \\ e \rightarrow g \\ \neg(g \vee j) \end{array}$$

- j — vrahem byl Jones
- b — Jones byl v bytě oběti
- e — Jones odešel před jedenáctou
- g — Jonese viděl vrátný

Předpoklady jsou konzistentní: $v(j) = 0$, $v(b) = 1$, $v(e) = 0$, $v(g) = 0$.

b) Podmínky smlouvy budou dodrženy právě tehdy, když stavba bude dokončena ke 30. listopadu.
Stavba bude dokončena ke 30. listopadu právě tehdy, když subdodavatel dokončí práce k 10. listopadu.
Investor příjde o peníze právě tehdy, když nebudou dodrženy podmínky smlouvy.
Subdodavatel dokončí práce k 10. listopadu právě tehdy, když investor příjde o peníze.

Řešení: $s \leftrightarrow d$
$d \leftrightarrow p$
$i \leftrightarrow \neg s$
$p \leftrightarrow i$

- s — podmínky smlouvy budou dodrženy
- d — stavba bude dokončena ke 30. listopadu
- p — subdodavatel dokončí práce k 10. listopadu
- i — investor příjde o peníze

Předpoklady jsou nekonzistentní.

Příklad 8: Pro zadání z Příkladu 6 pomocí rezoluční metody určete, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů.

Příklad 9: Pro zadání z Příkladu 7 pomocí rezoluční metody určete, zda jsou dané předpoklady konzistentní nebo nekonzistentní.