

Cvičení 2

Příklad 1: Vezměme si následující atomické výroky:

p — „svítí slunce“
 q — „prší“
 r — „je vidět duha“
 s — „sněží“

V přirozené řeči řekněte, co tvrdí následující výroky zapsané formulami výrokové logiky:

a) $(p \wedge q) \rightarrow r$

Řešení: Jestliže svítí slunce a prší, je vidět duha.

b) $p \rightarrow (\neg q \wedge \neg s)$

c) $\neg \neg r$

Řešení: Není pravda, že není vidět duha.

d) $(p \vee q) \vee s$

e) $q \rightarrow q$

f) $\neg s \rightarrow q$

g) $(\neg r \wedge q) \leftrightarrow \neg s$

Řešení: Právě tehdy když není vidět duha a prší, nesvítí slunce.

h) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

Příklad 2: Zapište následující výroky pomocí formulí výrokové logiky (u každé formule přesně specifikujte, co jsou jednotlivé atomické výroky):

a) Jestliže dnes není pondělí, tak pozítří nebude středa.

Řešení: $\neg p \rightarrow \neg q$

p — „dnes je pondělí“, q — „pozítří bude středa“
 pravdivý výrok ve všechny dny v týdnu

b) Jestliže je dnes pondělí nebo středa a pozítří není pátek, tak je dnes pondělí.

c) Dnes není pondělí ani čtvrtek.

Řešení: $\neg p \wedge \neg q$

p — „dnes je pondělí“, q — „dnes je čtvrtek“

nepravdivý výrok v pondělí a ve čtvrtek, pravdivý v ostatní dny v týdnu

Určete, v které dny v týdnu jsou jednotlivé výroky pravdivé a v které nepravdivé.

Příklad 3: Zapište následující výroky pomocí formulí výrokové logiky (u každé formule přesně specifikujte, co jsou jednotlivé atomické výroky):

a) V případě, že poklesne tlak, tak bude pršet nebo sněžit.

Řešení: $p \rightarrow (q \vee r)$

p — „poklesne tlak“, q — „bude pršet“, r — „bude sněžit“

b) Jestliže přijde paket s požadavkem, bude tento požadavek vyřízen a bude odeslán paket s potvrzením, nebo bude odeslán paket s informací o chybě.

- c) Když nebudou nalezena nová ložiska ropy a nastane krize na blízkém východě, cena ropy na světových trzích stoupne.

Řešení: $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$

p — „budou nalezena nová ložiska ropy“, q — „nastane krize na blízkém východě“, r — „cena ropy na světových trzích stoupne“

- d) Pokud si pan Novák koupil nové auto a neprodal staré, tak už splatil hypotéku nebo si vzal další půjčku.

- e) Sestra má modrý kabát a bílý kabát.

Řešení: $p \wedge q$

p — „sestra má modrý kabát“, q — „sestra má bílý kabát“

- f) Jestliže John půjde k soudu a bude vypovídat podle skutečnosti, bude na něj podáno trestní oznámení, a když k soudu nepůjde, také na něj bude podáno trestní oznámení.

- g) To, že číslo x je prvočíslo a je větší než 2, je postačující podmínkou pro to, aby x bylo liché.

- h) Nutnou podmínkou pro to, aby posloupnost konvergovala, je to, že je zdola i shora omezená.

- i) Tato částka bude zaplacená tehdy a jen tehdy, když bude dodáno zboží v náležité kvalitě.

- j) Jestliže je x kladné, pak je i x^2 kladné.

- k) Pokud není trojúhelník ABC rovnoramenný, pak není ani rovnostranný.

- l) Graf G je planární právě tehdy, když neobsahuje jako svůj podgraf podrozdělení grafu K_5 ani podrozdělení grafu $K_{3,3}$.

Řešení: $p \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg r)$

p — „graf G je planární“, q — „graf G obsahuje jako svůj podgraf podrozdělení grafu K_5 “, r — „graf G obsahuje jako svůj podgraf podrozdělení grafu $K_{3,3}$ “

- m) Není pravda, že když tento kandidát nebude zvolen prezidentem, tak nedojde ke zhoršení hospodářské situace.

Řešení: $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

p — „tento kandidát bude zvolen prezidentem“, q — „dojde ke zhoršení hospodářské situace“

- n) Jestliže pachatel zfalšoval tento dokument, podplatil taxikáře a nezahladil všechny stopy na místě činu, budou proti němu nalezeny usvědčující důkazy.

Příklad 4: Vezměme si následující tři výroky:

p — „Praha má více obyvatel než Liberec“

q — „Karlovy Vary se nachází na západě České republiky“

r — „Labe protéká Českými Budějovicemi“

(Výroky p a q jsou tedy pravdivé a výrok r nepravdivý.)

Které z následujících výroků jsou pravdivé a které nepravdivé? (Zformulujte tyto výroky rovněž v přirozené řeči.)

a) $p \vee r$

Řešení: „Praha má více obyvatel než Liberec nebo Labe protéká Českými Budějovicemi“, pravdivý

b) $p \wedge r$

c) $\neg p \wedge \neg r$

d) $p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$

e) $(q \vee \neg r) \rightarrow p$

f) $(q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$

Řešení: „Jestliže se Karlovy Vary nachází na západě České republiky nebo má Praha více obyvatel než Liberec, potom z toho, že Karlovy Vary se nachází na západě České republiky, plyne, že Labe neprotéká Českými Budějovicemi“, pravdivý

g) $(q \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

h) $(q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q))$

Příklad 5: Pro každou z následujících sekvencí symbolů proveďte následující:

- Určete, zda se jedná o dobře utvořenou formuli výrokové logiky (podle formální definice).
- Určete, zda se jedná o dobře utvořenou formuli výrokové logiky, pokud je možno používat konvence pro vypouštění závorek.
- Pokud se jedná o dobře utvořenou formuli (ať už podle bodu (a) nebo bodu (b)):
 - Napište příslušnou formuli přesně podle formální definice (bez vypouštění závorek).
 - Napište příslušnou formuli s vypuštěním všech závorek, které je možno podle konvencí vypustit.
 - Nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.

(Vaše odpovědi v bodech (a) a (b) zdůvodněte.)

1. $\neg(p) \wedge \wedge$

Řešení: a) ne, b) ne

2. $\forall x : q(x) \wedge r(x, x)$

3. p

4. $(\neg(\neg q))$

Řešení: a) ano, b) ano, c) $\neg\neg q$

5. $(\neg(\neg q()))$

Řešení: a) ne, b) ne

6. $(\neg(\neg)q)$

7. $(p \neg q)$

8. $\wedge pq$

9. $p \wedge q$

10. $(p \wedge q)$

11. $((p \wedge q))$

12. $((p \wedge q) \vee r)$

13. $((\neg p) \vee (q \leftrightarrow (\neg r)))$

14. $r \vee (\neg q \vee s)$

15. $((\neg r \vee \neg p) \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$

Řešení: a) ne, b) ano,

c) $((((\neg r) \vee (\neg p)) \vee s) \wedge ((\neg q) \vee s)),$

$(\neg r \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$

16. $(\neg((\neg p) \rightarrow (\neg(\neg r))))$

Řešení: a) ano, b) ano, c) $\neg(\neg p \rightarrow \neg\neg r)$

Příklad 6: Pomocí tabulkové metody určete všechny modely následujících formulí a určete, které z těchto formulí jsou tautologie, které jsou splnitelné a které jsou kontradikce:

- a) $p \vee q$
 b) $p \vee \neg p$
 c) $p \vee q \rightarrow q \vee p$
 d) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$
 e) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
 f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
 g) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$
 h) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$
 i) $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$
 j) $p \wedge q \rightarrow p \vee r$
 k) $(p \vee (\neg p \wedge q)) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
 l) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$
 m) $(p \wedge q \rightarrow (p \wedge \neg p \rightarrow q \vee \neg q)) \wedge (q \rightarrow q)$
 n) $p \leftrightarrow q$
 o) $p \leftrightarrow p \vee p$
 p) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
 q) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
 r) $(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow p$

Řešení: a)

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

není kontradikce, je splnitelná (má 3 modely), ale není tautologie (ohodnocení $v(p) = 0$, $v(q) = 0$ není modelem)

j)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \vee r)$	$p \wedge q \rightarrow p \vee r$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

je tautologie a tedy je i splnitelná, není kontradikce

k)

p	q	$\neg p$	$(\neg p \wedge q)$	$(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(p \vee (\neg p \wedge q)) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

je tautologie a tedy je i splnitelná, není kontradikce