Cvičení 6

Příklad 1: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o a) term, b) formuli predikátové logiky (používejte běžné konvence pro vypouštění závorek). Pokud se jedná o formuli predikátové logiky, určete, zda je tato formule i) atomická, ii) uzavřená; pokud není formule uzavřená, určete množinu volných proměnných, které se v ní vyskytují.

U sekvencí symbolů, které jsou termem nebo formulí, nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.

Berte jako dané, že:

- P, Q a R jsou predikátové symboly, přičemž P je unární a Q a R jsou binární,
- f je unární funkční symbol a g je binární funkční symbol,
- c a d jsou konstatní symboly.

1. $(\neg((\neg p) \rightarrow (\neg(\neg r))))$

   Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

2. $\forall x \in A : P$

   Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

3. $f(c)$

   Řešení: Term predikátové logiky.

4. $R(c, d)$

   Řešení: Formule; je uzavřená a atomická.

5. $\forall x \exists y P(c)$

   Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

6. $\forall x \exists y f(R(x, y))$

   Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

7. $\forall x \exists y P(g(x, y))$

   Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

8. $\forall x \exists y f(g(x, y))$

   Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

9. $\forall x \exists y P(g(f(f(x)), c))$

   Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

10. $\forall x (P(d) \land \exists y Q(y, c))$

    Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

11. $P(d) \land \exists y Q(y, c)$

    Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

12. $P(x) \land \exists y Q(d, c)$

    Řešení: Formule; není uzavřená, není atomická, volná proměnná je jen x.

13. $\forall x \exists y (R(x, f(y)) \leftrightarrow \exists z Q(z, c))$

    Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

14. $\forall x P(g(x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky (funkční symbol g je binární, ale zde je použit jen na jeden argument).

15. $\forall x R(f(x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky (predikátový symbol R je binární, ale zde je použit jen na jeden argument).

16. $\forall x R(f(x), f(x), f(x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky (predikátový symbol R je binární, ale zde je použit na tři argumenty).

17. $\forall x P(f(x, x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky (funkční symbol f je unární, ale zde je použit na dva argumenty).

18. $\forall x P(g(x, x))$

    Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

19. $f(f(g(c, d)))$

    Řešení: Term.

20. $P(f(g(c, d)))$

    Řešení: Formule; je uzavřená a atomická.

21. $P(f(d)) \rightarrow \forall x P(x)$

    Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

22. $P(f(g(f, f)))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

23. $P(f(g(c, x)))$

    Řešení: Formule; není uzavřená, je atomická, volná proměnná je jen x.

24. $\forall x(f(x) \rightarrow g(c, x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

25. $\forall x P(f(x) \rightarrow g(c, x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

26. $\forall x P(\neg f(x))$

    Řešení: Není to formule ani term predikátové logiky.

27. $\forall x \neg P(f(x))$

    Řešení: Formule; je uzavřená, není atomická.

28. $\neg(P(f(x)) \vee Q(y, z))$

    Řešení: Formule; není uzavřená, není atomická, volné proměnné jsou x, y, z.

Příklad 2: Následující tvrzení formulovaná v přirozené řeči zapište formálně formulemi predikátové logiky.
Poznámky:

- Nejprve si vždy rozmyslete, jaké jednotlivé predikátové, funkční a konstatní symboly ve formuli použijete, co budou tyto symboly reprezentovat a jaké budou jejich arity.

- Jako mezikrok při vytváření výsledné formule, vytvořte nejdříve „formuli“, kde jako predikátové, funkční a konstatní symboly mohou být použity standardní matematické symboly jako třeba $>$, $+$, $\cap$, $\in$, $\subseteq$, zápis číselných konstant pomocí číslic, apod., a kde jsou použity běžné konvence, jako například infixový zápis binárních funkčních a predikátových symbolů.

- Na základě „formule“ vytvořené v předchozím kroku, vytvořte odpovídající formuli, která je vytvořena přesně podle formální definice syntaxe formulí predikátové logiky (přičemž je možné použít standardní konvence pro vynechávání závorek) a kde jsou jako predikátové, funkční a konstantní symboly použita pouze písmena latinské abecedy.

a) Pro jakékoliv přirozené číslo existuje prvočíslo větší než toto číslo.
b) Některé přirozené číslo není beze zbytku dělitelné číslem 5 ani číslem 7.
c) Pro každé reálné číslo větší než 10 platí, že po odečtení čísla 9 dostaneme kladné číslo.

Řešení:

- Binární predikátový symbol '$>$', unární predikátový symbol 'P' (reprezentující vlastnost „být kladný“), binární funkční symbol '$-$', konstantní symboly '10', '9', '0'.

$$\forall x(x > 10 \ \rightarrow \ P(x - b))$$

nebo

$$\forall x(x > 10 \ \rightarrow \ x - 9 > 0)$$

- Binární predikátový symbol 'G', unární predikátový symbol 'P', binární funkční symbol 'g', konstantní symboly 'a', 'b', 'c'.

  Interpretace, kde univerzum je množina reálných čísel, G reprezentuje binární relaci „větší než“, P unární relaci „být kladný“, g funkci „minus“ a a, b, c konstanty 10, 9 a 0.

$$\forall x(G(x, a) \rightarrow P(g(x, b)))$$

nebo

$$\forall x(G(x, a) \rightarrow G(g(x, b), c))$$

d) Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.
e) Pro každé dvě množiny platí, že jsou obě podmnožinami jejich sjednocení.

Řešení:

- Binární predikátový symbol '$\subseteq$,' a binární funkční symbol '$\cup$'.

$$\forall x \forall y(x \subseteq x \cup y \ \wedge \ y \subseteq x \cup y)$$

- Binární predikátový symbol 'P,' a binární funkční symbol 's'.

  Interpretace, kde univerzum je množinové univerzum, tj. soubor všech množin (pozn.: dá se ukázat, že tento soubor ve skutečnosti není množina, ale tzv. vlastní třída). Symbol P reprezentuje binární relaci „být podmnožinou“ a s binární funkci „sjednocení“.

$$\forall x \forall y(P(x, s(x, y)) \wedge P(y, s(x, y)))$$

f) Průnik dvou množin je podmnožinou obou těchto množin.

Příklad 3: Předpokládejme, že

- P a Q jsou unární predikátové symboly a R je binární predikátový symbol,
- f je binární funkční symbol a g je unární funkční symbol,
- c a d jsou konstantní symboly.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací a valuací určete pravdivostní hodnotu dané formule při dané interpretaci a valuaci.

Formule:

1. $R(c, d)$
2. $R(c, d) \to R(c, x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z))$
4. $\exists x (Q(x) \land \forall y R(y, g(x)))$
5. $\exists x \neg P(f(x, y))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, g(g(y)))$

Interpretace:

a) Interpretace $\mathcal{A}$, kde univerzem je množina $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Predikátům P, Q a R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{A}} = \{\alpha, \gamma\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\alpha, \gamma)\}$

Funkčním symbolům f a g jsou přiřazeny funkce $f^{\mathcal{A}}$ a $g^{\mathcal{A}}$ popsané následujícími tabulkami:

$f^{\mathcal{A}}$	α	β	γ
α	β	α	γ
β	β	β	β
γ	α	γ	β

x	$g^{\mathcal{A}}(x)$
α	β
β	γ
γ	γ

Konstantním symbolům c a d jsou přiřazeny prvky α a β, tj. $c^{\mathcal{A}} = \alpha$ a $d^{\mathcal{A}} = \beta$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = \gamma$, $v(y) = \alpha$ a $v(z) = \alpha$.

Řešení: Zdůvodnění v závorkách jsou jen nepřesná, neformální.

1) ano ((a, b) je v relaci přiřazené R)
2) ano (obě strany implikace jsou pravdivé)
3) ano (relace přiřazená R je tranzitivní)
4) ne (už $Q(x)$ není pravda pro žádné x)
5) ano (např. pro $x = b$ je $f(b, a) = b$ a b není v množině přiřazené P)
6) ne ($g(g(y)) = c$ pro každé y, tedy pro $x = b$ je bez ohledu na y vždy (b, c) v relaci přiřazené R)

b) Interpretace $\mathcal{B}$, kde univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $P^{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $Q^{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $R^{\mathcal{B}} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.
- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $f^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f^{\mathcal{B}}(x, y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $g^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $g^{\mathcal{B}}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2, tj. $c^{\mathcal{B}} = 0$ a $d^{\mathcal{B}} = 2$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = 7$, $v(y) = 2$, $v(z) = 9$.

Příklad 4: Pro každou z následujících formulí najděte nějakou interpretaci, která je jejím modelem, a nějakou interpretaci, která jejím modelem není.

1. $\forall x\big((P(x) \wedge Q(x, a)) \to R(x)\big)$

   Řešení:

$$
\begin{array}{lcl}
U = \mathbb{R} & & \\
P^U \subseteq \mathbb{R} & : & \text{být celé číslo} \\
Q^U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} & : & \text{být ostře menší než} \\
R^U \subseteq \mathbb{R} & : & \text{být záporný} \\
a^U \in \mathbb{R} & : & \text{číslo } 0
\end{array}
$$

2. $\forall x\big(P(a, x) \to Q(x)\big)$

3. $\exists x\big(P(x, f(x))\big)$

   Řešení:

$$
\begin{array}{lcl}
U = \mathbb{N} & & \\
P^U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} & : & \text{být větší nebo rovno } (\geq) \\
f^U : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & : & \text{druhá mocnina}
\end{array}
$$

Příklad 5: Uveďte příklad interpretace, ve které současně platí všechny čtyři následující formule:

- $\neg\exists x R(x, x)$
- $\forall x \exists y R(x, y)$
- $\exists x \forall y (\neg R(y, x))$
- $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \to (R(y, z) \to R(x, z)))$

Příklad 6: Zjistěte, zda daný závěr logicky vyplývá z daného předpokladu. Vaše odpovědi zdůvodněte.

a) předpoklad: $\forall x \exists y P(x, y)$, závěr: $\exists y \forall x P(x, y)$
b) předpoklad: $\exists x \forall y R(x, y)$, závěr: $\forall y \exists x R(x, y)$
c) předpoklad: $\forall x (P(x) \to Q(x))$, závěr: $\exists x P(x) \to \forall x Q(x)$
d) předpoklad: $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, závěr: $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$
e) předpoklad: $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$, závěr: $\exists x (P(x) \vee Q(x))$
f) předpoklad: $\exists x (P(x) \vee Q(x))$, závěr: $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
g) předpoklad: $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$, závěr: $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
h) předpoklad: $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, závěr: $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$
i) předpoklad: $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, závěr: $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
j) předpoklad: $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$, závěr: $\forall x (P(x) \to Q(x))$
k) předpoklad: $\forall x (\forall y P(y) \to Q(x))$, závěr: $\forall y P(y) \to \forall x Q(x)$
l) předpoklad: $\forall x (P(x) \to \forall y Q(y))$, závěr: $\exists x P(x) \to \forall y Q(y)$

Příklad 7: Pomocí Vennových diagramů zjistěte, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů. Pokud závěr z těchto předpokladů nevyplývá, uveďte příklad interpretace, kde platí předpoklady a neplatí závěr.

a) *Všichni živočichové jsou smrtelní.*
Všichni lidé jsou živočichové.

Všechni lidé jsou smrtelní.

b) *Všichni lidé potřebují k životu kyslík.*
Lidé jsou živé organismy.

Všechny živé živé organismy potřebují k životu kyslík.

c) *Někteří lidé jsou lháři.*
Adam je člověk.

Adam je lhář.

d) *Z obrazů jsou cenné právě ty, které jsou portréty.*
Všechny portréty jsou olejomalby.
Některé z obrazů nejsou olejomalby.

Obrazy, které nejsou olejomalby, nejsou cenné.

Poznámka: Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny prvky universa jsou obrazy.

e) *Všechna celá čísla jsou racionální.*
Existuje alespoň jedno racionální číslo, které není celé.
Každé reálné číslo buď je racionální nebo není racionální.

Existuje reálné číslo, které je racionální.

Poznámka: Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny prvky universa jsou čísla.

Příklad 8: Které z následujících dvojic formulí jsou logicky ekvivalentní? Vaše odpovědi zdůvodněte.

1. Je $\exists x P(x) \Leftrightarrow P(x)$?
2. Je $\exists y \exists x P(x) \Leftrightarrow \exists x P(x)$?
3. Je $\exists y \exists x P(x) \Leftrightarrow \exists y P(y)$?
4. Je $\exists x P(x, y) \Leftrightarrow \exists y P(y, y)$?
5. Je $\forall x P(x, y) \Leftrightarrow \forall y P(y, y)$?
6. Je $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y, y)$?

Příklad 9: Pomocí ekvivalentních úprav odvoďte:

a) $\neg \forall y \exists x P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \forall x \neg P(x, y)$
b) $\exists x \forall y Q(y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(y)$
c) $\forall x P(x) \rightarrow \exists z(\neg \forall y(Q(y) \vee R(z, y))) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists z \exists y(\neg R(z, y) \wedge \neg Q(y))$
d) $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

e) $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
f) $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))) \;\Leftrightarrow\; \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$
g) $\exists x(P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x))) \;\Leftrightarrow\; \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x(P(x) \wedge R(x))$

Příklad 10: Připomeňme, že symbol "=" označuje rovnost (identitu). Vysvětlete v přirozené řeči, co říká následující formule:

$$\exists x \exists y(\neg(x = y) \;\wedge\; \forall z(z = x \;\vee\; z = y))$$

Jak vypadají modely této formule?

Příklad 11: Řekněme, že P je unární predikát. Pomocí formulí predikátové logiky vyjádřete následující tvrzení (můžete využít symbol "="):

a) Existují alespoň tři prvky s vlastností P (tj. pro alespoň tři různé prvky x platí $P(x)$).
b) Existují nejvýše dva prvky s vlastností P (tj. pro nanejvýš dva různé prvky x platí $P(x)$).