# ESTIMASI PARAMETER MODEL MATEMATIKA PERTUMBUHAN POPULASI

## Pendahuluan

Model matematika pertumbuhan populasi telah diterapkan secara luas untuk mendeskripsikan relasi antara berat badan dan umur dalam bidang ilmu kedokteran hewan. Dari suatu model matematika pertumbuhan populasi, dapat ditentukan parameter aplikatif penting yang berhubungan dengan pertumbuhan hewan, misalkan berat maksimal hewan (*mature weight*) dan laju pertumbuhan (*growth rate*) suatu hewan. Kedua parameter tersebut sangat bermanfaat untuk memperoleh prakiraan/estimasi kebutuhan makanan harian suatu hewan ternak, atau untuk mengevaluasi pengaruh kondisi lingkungan terhadap pertumbuhan suatu hewan ternak. Selain itu, model matematika pertumbuhan populasi juga dapat diterapkan untuk memperkirakan umur pemotongan ternak yang optimal. Oleh karena itu, model matematika pertumbuhan populasi dapat dipandang sebagai instrumen optimisasi dalam produksi hewan.1,2,3

Proses pertumbuhan ternak, termasuk unggas, dapat diukur dari profil massa (berat) ternak terhadap waktu.4,5 Pertumbuhan ternak dan unggas umumnya mengikuti pola *sigmoid*. Pertumbuhan unggas biasanya dimulai dengan fase pertumbuhan yang cepat dari fase penetasan. Kemudian, unggas mencapai tingkat pertumbuhan maksimum pada waktu tertentu (*waktu belok*). Setelah itu, pertumbuhan unggas melambat. Pada fase akhir, berat unggas umumnya cenderung ke nilai batas (asimtot), yaitu berat badan unggas pada usia dewasa (*mature weight*).6,7

Model pertumbuhan dapat diklasifikan ke dalam dua kelompok, yaitu model pertumbuhan empiris dan model pertumbuhan dinamik (model pertumbuhan yang diturunkan dari suatu persamaan diferensial biasa). Model pertumbuhan empiris meliputi model pertumbuhan Weibull dan model pertumbuhan MMF (Morgan-Mercer-Flodin). Model pertumbuhan Weibull dan MMF telah diterapkan untuk mendeskripsikan dinamika pertumbuhan ayam.8 Model pertumbuhan dinamik meliputi model pertumbuhan logistik, Gompertz, Richards, dan model pertumbuhan WEP-logistik (WEP dari kata Windarto-Eridani-Purwati). Model pertumbuhan dinamik telah diterapkan untuk mendeskripsikan dinamika pertumbuhan berbagai binatang, termasuk ayam4,9, mamalia10, ikan11, reptilia12, dan amfibi13.

Misalkan menyatakan berat badan hewan atau banyaknya populasi makhluk hidup pada saat . Model pertumbuhan Weibull dan model pertumbuhan MMF beturut-turut diberikan oleh

(1.1)

dan

(1.2)

Pada persamaan(1.1), dan berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan berat hewan dan berat maksimal hewan. Ketika menyatakan banyaknya populasi suatu makhluk hidup, parameter merupakan laju pertumbuhan intrinsik, sedangkan parameter adalah parameter *carrying capacity*, yaitu banyaknya maksimal populasi yang dapat didukung secara optimal oleh lingkungan tempat hidup populasi makhluk hidup tersebut. Pada persamaan(1.2), merupakan parameter empiris.

Model pertumbuhan logistik diturunkan dari persamaan diferensial logistik yang berbentuk

(1.3)

Model pertumbuhan logistik diberikan oleh

(1.4)

dengan Pada persamaan(1.4), parameter merupakan parameter waktu belok (*inflection time parameter*), yaitu waktu optimal pertumbuhan suatu populasi. Pada tahun 1959, Richards mengusulkan modifikasi persamaan diferensial logistik yang disebut persamaan diferensial Richard. Persamaan diferensial Richards berbentuk

(1.5)

Persamaan diferensial Gompertz merupakan suatu bentuk hampiran dari persamaan diferensial Richards. Persamaan diferensial Gompertz berbentuk

(1.6)

Model pertumbuhan Richards dan Gompertz berturut-turut merupakan solusi persamaan diferensial Richards dan persamaan diferensial Gompertz. Model pertumbuhan Richards diberikan oleh

(1.7)

dengan

Model pertumbuhan Gompertz diberikan oleh

(1.8)

dengan . Pada persamaan (10.7), parameter merupakan parameter tambahan yang membedakan model pertumbuhan Richards dengan model pertumbuhan logistik. Ketika parameter maka model pertumbuhan Richards dapat disederhanakan menjadi model pertumbuhan logistik. Ketika

Selain itu,

Dengan demikian, model pertumbuhan Gompertz pada persamaan (1.8) juga merupakan hampiran model pertumbuhan Richards pada persamaan (1.9) untuk kondisi parameter

Pada tahun 2018, Windarto dkk. juga mengusulkan modifikasi persamaan diferensial logistik yang berbentuk

(1.9)

Pada persamaan(1.9), dan dapat dipandang sebagai laju pertumbuhan konstan dan laju pertumbuhan proporsional. Solusi persamaan diferensial (1.9) merupakan model pertumbuhan WEP-logistik, dan diberikan oleh

(1.10)

dengan . Parameter pada persamaan (1.10) adalah laju pertumbuhan populasi, sedangkan parameter berhubungan dengan ukuran awal (banyaknya populasi pada saat awal). Ketika parameter , maka model pertumbuhan WEP-logistik dapat disederhanakan menjadi model pertumbuhan logistik.

Parameter pada model pertumbuhan populasi perlu diestimasi, sehingga model pertumbuhan populasi tersebut dapat digunakan untuk menentukan beberapa parameter penting atau indikator penting yang terkait dengan perkembangan populasi. Berikut parameter penting atau indikator penting tersebut.

1. Berat hewan ternak pada usia dewasa (*mature weight*). Parameter ini direpresentasikan oleh parameter pada model pertumbuhan Weibul, logistik, Richards, Gompertz, dan model WEP-logistik. Dalam hal variabel keadaan (*state variable*) menyatakan banyaknya populasi suatu makhluk hidup, parameter merupakan maksimal banyaknya populasi yang dapat didukung secara optimal oleh lingkungan.
2. Laju pertumbuhan populasi, yaitu parameter pada model pertumbuhan Weibul, logistik, Gompertz, Richards, atau parameter pada model pertumbuhan WEP-logistik.
3. Waktu optimal/waktu pertumbuhan populasi paling cepat ().
4. Kurva laju pertumbuhan populasi terhadap waktu (). Secara matematis, kurva ini diperoleh dari plot terhadap waktu ().