

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 665

**Entre o Real e o Complexo:
Uma Visão Unificada do Conceito de Transformada**

Danny Augusto Vieira Tonidandel

DATA DA DEFESA: 03/03/2011

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE
Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

**Entre o Real e o Complexo:
Uma Visão Unificada do Conceito de Transformada**

Danny Augusto Vieira Tonidandel

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador : Prof. Antônio Emílio Angueth de Araújo

Belo Horizonte, 3 de março de 2011.

"Entre O Real e O Complexo: Uma Visão Unificada do Conceito de Transformada"

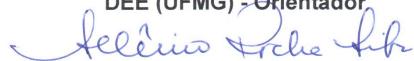
Danny Augusto Vieira Tonidandel

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 03 de março de 2011.

Por:

Prof. Antônio Emílio Angueth de Araújo
DEE (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Selênio Rocha Silva
DEE (UFMG)



Prof. Dr. Hani Camille Yehia
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Wallace do Couto Boaventura
DEE (UFMG)



Agradecimentos

Muito tenho aprendido desde o início deste trabalho. À Jesus, o mestre de todos os mestres, que ensinou sem palavras as verdadeiras lições da sabedoria e do amor, devo minha vida. À minha mãe, Maria Amélia, cuja abnegação é para mim a expressão do amor de Deus na Terra, dedico meu amor. Para minha flor, Tati, entrego meu coração. Várias ideias apresentadas tem o toque de suas mãos suaves e de sua inteligência encantadora. À ela, dedico o título e várias outras partes deste trabalho. Aos amigos Márcio, Adrielle, Elisa e Regiane, que tanto me auxiliaram neste caminho, procurarei sempre retribuir a amizade sincera. Possa o Pai igualmente devolver, em forma de bençãos, tudo o que recebi de minha tia Magna, tio Didi, tia Marilda, Mauro, tio Maurício, Laís, Sydnei e tantos outros, além de uma personagem anônima que, com um simples bilhete, mudou minha vida. A amizade não é senão uma luz que pousa suavemente no trato de nossos corações!

Por fim, ao meu orientador, o prof. Antônio Emílio A. de Araújo, que me acolheu paternalmente, dedico este trabalho. Sem o seu concurso, ele não teria se tornado realidade.

Resumo

Depois das quatro operações matemáticas fundamentais, as transformadas estão entre as ferramentas mais utilizadas na engenharia elétrica, destacando-se as transformadas de *Laplace*, transformada de *Fourier* e transformada \mathcal{Z} . Gerações de físicos, matemáticos e engenheiros têm delas se utilizado como valioso atalho para a solução de diversos problemas. Mas o que é, em essência, uma “transformada”? Nos cursos de graduação, elas são quase sempre ensinadas como disciplinas isoladas ou como “simples” ferramentas, úteis no tratamento de problemas específicos. Não é raro inclusive que o estudante, ao terminar o curso, mantenha a sensação de falta de conexão entre os diversos assuntos estudados. Qual então seria o problema? Periódicos voltados à educação têm procurado tratar do assunto, não sendo incomum encontrar-se soluções que têm como foco a mudança de currículo dos cursos: nitidamente um processo difícil e que gera muitos problemas. Uma alternativa seria a abordagem que busca desenvolver os conceitos juntamente com o aspecto humano e histórico. Dada a complexidade destes assuntos, além da natural magnitude de fundamentos matemáticos necessários à sua compreensão, propõe-se um estudo que busque unificar o “conceito de transformada” e suas aplicações, explorando as características de cada uma em particular e em conjunto, bem como exemplificar a relação existente entre elas, inclusive quanto aos aspectos históricos que levaram tais técnicas a se tornarem o que são atualmente.

Palavras-chave: Transformadas, educação superior, equações diferenciais.

Abstract

After the four fundamental mathematical operations, the transform techniques lie between the most used in electrical engineering, highlighting the Laplace transform, Fourier transform and \mathcal{Z} -transform. Generations of physicists, mathematicians and engineers have been using them as a valued short-cut to solve countless problems. But what is, in essence, a transform? In undergraduate level, they have almost always been taught as isolated disciplines or “merely” tools, usefull in treatment of specific problems. It is not rare, moreover, that the student finishes the course keeppping the feeling of lack of conection between the studied subjects. What seems to be the problem? Journals devoted to education have tried to deal with the subject, not being unusual to find solutions that focus in changing the undergraduate level curricula: clearly a dificult process that generates several problems. An alternative would be the approach that consists in develop concepts combined with the human and historical aspect. Given the complexity of those subjects, beyond the natural magnitude of mathematical fundaments necessary to its comprehension, it is proposed a study that seeks to unify the “concept of transform” and its applications, exploring their particular and general characteristics, including in the historical aspects that led those techniques to become what they are today.

Keywords: *Transforms, higher education, differential equations.*

Sumário

Lista de Abreviaturas	vii
Lista de Símbolos	viii
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Considerações Preliminares	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Contribuições	2
1.4 Organização do Trabalho	2
2 A transformada de <i>Laplace</i> é mesmo de <i>Laplace</i>?	5
2.1 O que é uma transformada?	5
2.2 Reinvenção da transformada	6
2.3 A matemática experimental de <i>Heaviside</i>	13
2.4 O problema de <i>Heaviside</i> e o Cálculo Operacional	17
2.5 Equação Integral: transformada de <i>Carson-Laplace</i>	20
2.6 O Teorema da Expansão	24
2.7 Solução de uma EDP via fórmula de <i>Heaviside</i>	26
2.8 Integral de Inversão de Bromwich	33
2.9 Solução de uma EDP via Integral de <i>Bromwich</i>	37
3 A teoria do calor , séries e a transformada de <i>Fourier</i>	46
3.1 Prelúdio	46
3.2 Teoria do calor	48
3.3 O nascimento da série de <i>Fourier</i>	52
3.4 Conceito de função generalizada: O Delta de <i>Dirac</i>	61
3.5 A Integral de <i>Fourier</i>	66
3.6 Pulso Gaussiano e o Princípio da Incerteza	71
3.7 Solução de uma EDP via transformada de <i>Fourier</i>	77

3.8 “Conectando” as transformadas de <i>Fourier</i> e <i>Laplace</i>	79
4 Equações de diferenças e a transformada Z	85
4.1 Equações de diferenças	85
4.2 Por que Z?	87
4.3 Correspondência entre os planos s e z	91
4.4 Decifrando a transformada Z	92
4.5 Propriedades	96
4.6 Métodos de Inversão	98
5 Considerações Finais	100
5.1 Entre o Real e o Complexo	100
5.2 Sugestões para Pesquisas Futuras	103
Referências Bibliográficas	104
A A derivada de uma integral é a integral da derivada?	108
B Transformada Inversa através das integrais de Duhamel	113
C Integral de probabilidades de <i>Laplace</i>	116
D Trem de pulsos no MATLAB	119
E Transformada \mathcal{Z} na discretização de sistemas	121
F A transformada de <i>Kelvin</i>	124
Índice Remissivo	128

Lista de Abreviaturas

EDO	Equação Diferencial Ordinária.
EDP	Equação Diferencial Parcial.
f.e.m.	Força eletromotriz.
ESD	Densidade Espectral de Energia (<i>Energy Spectrum Density</i>).
RDC	Região de convergência de uma série de Laurent ou da transformada \mathcal{Z} .
A/D	Sigla para uma conversão ou conversor analógico/digital.

Listas de Símbolos

$\mathcal{L}\{\}$	Operador transformada de <i>Laplace</i> .
$\mathcal{L}^{-1}\{\}$	Operador transformada inversa de <i>Laplace</i> .
$f(t)$	Função ou sinal no domínio do tempo.
$K(p, z)$	Núcleo ou <i>Kernel</i> de uma equação integral.
s	Operador relativo à derivação.
p	Operador relativo à derivação utilizado por <i>Heaviside</i> , i.e., $p \triangleq \frac{d}{dt}$.
D	Operador relativo à derivação.
$F(p)$	Transformada de <i>Carson-Laplace</i> de uma função ou sinal.
y_x	Notação para $y(x)$ utilizada por <i>Euler</i> e <i>Laplace</i> .
t	Variável independente (tempo).
x	Variável independente.
Δx	Incremento na Variável x .
Δ	Incremento de uma variável ou função.
dx	Diferencial de x .
$H(t)$	Função de <i>Heaviside</i> ou função degrau unitário.
$u(t)$	Função degrau unitário.
“1”	Notação usada por <i>Heaviside</i> para a função degrau unitário.
$e(t)$	Fonte de tensão.
$i(t)$	Corrente elétrica.
R	Resistência elétrica ou resistência por unidade de comprimento.
L	Indutância ou indutância por unidade de comprimento.
C	Capacitância ou capacidade por unidade de comprimento.
$I(p)$	Corrente elétrica no domínio da variável p (transformada).
$A(t)$	Admitância indicial ou Admitância indicial de transferência.
$Z(p)$	Operador resistência.
$N(p)$	Numerador de uma equação operacional.
$D(p)$	Denominador de uma equação operacional.
α_k	k-ésima raiz da função $D(p)$.
$G(p)$	Equação operacional.

$g(t)$	Solução de uma equação operacional (transformada inversa).
$\mathcal{T}\{\}$	Operador transformada de <i>Carson-Laplace</i> .
$\mathcal{T}^{-1}\{\}$	Operador transformada de <i>Carson-Laplace</i> .
$v(x, t)$	Tensão elétrica como função do tempo t e da distância x .
$i(x, t)$	Corrente elétrica como função do tempo t e da distância x .
$V(x, p)$	Transformada de <i>Carson-Laplace</i> relativa à variável t de $v(x, t)$.
$I(x, p)$	Transformada de <i>Carson-Laplace</i> relativa à variável t de $i(x, t)$.
$I(x, p)$	Transformada de <i>Carson-Laplace</i> relativa à variável p de $i(x, t)$.
$V(x, p)$	Transformada de <i>Carson-Laplace</i> relativa à variável p de $v(x, t)$.
$\vartheta(t)$	Velocidade de uma “onda viajante”.
Z_c	Impedância característica de uma linha de transmissão.
$\varphi(t)$	Sinal de tensão no domínio do tempo.
$\Phi(p)$	Transformada de <i>Carson-Laplace</i> da função $\varphi(t)$.
l	Comprimento da linha de transmissão.
$v(t)$	Fonte de tensão.
$h(t)$	Transformada inversa a partir da Integral de <i>Bromwich</i> .
$\Phi(t)$	Função do tempo com um termo de convergência $\Phi(t) = e^{-\sigma t}f(t)$.
$F(s)$	Transformada de <i>Laplace</i> da função $f(t)$.
Res	Resíduo de uma função.
erf	Função erro (<i>error function</i>).
erfc	Função erro complementar.
$u(x, t)$	Temperatura de uma barra condutora de calor em função da distância e tempo.
$U(x, s)$	Transformada de <i>Laplace</i> da função $u(x, t)$.
$F(x, s)$	Representação da função $U(x, s)e^{st}$.
κ	Difusividade térmica de um material.
K	Condutividade térmica de um material.
σ	Calor específico de um material.
μ	Massa ou volume específico de um material.
u_0	Temperatura inicial de uma barra condutora de calor.
ρ	Raio do número complexo s escrito em coordenadas polares.
θ	Ângulo ou fase.

ω, ω_0	Frequência angular.
b_k	k -ésimo coeficiente de uma série trigonométrica.
Δu	Acréscimo de temperatura.
\hat{n}	Vetor unitário.
\hat{i}	Vetor unitário na direção x .
\hat{j}	Vetor unitário na direção y .
\hat{k}	Vetor unitário na direção z .
Δn	Descolamento espacial na direção do vetor \hat{n} .
ϕ	Fluxo de calor.
ϕ_x	Fluxo de calor da direção x .
ϕ_y	Fluxo de calor da direção y .
ϕ_z	Fluxo de calor da direção z .
$\vec{\nabla}$	Operador diferencial gradiente.
∇^2	Operador diferencial Laplaciano.
ΔV	Elemento de volume.
Δt	Intervalo de tempo.
j	Número imaginário, $j = \sqrt{-1}$.
b^n, a^n	Coeficientes da soma de <i>Weirstrass</i> .
c_1, c_2, \dots, c_m	Coeficientes da série de cossenos de <i>Fourier</i> .
a_n e b_n	Coeficientes da série de <i>Fourier</i> na forma trigonométrica.
c_n	n -ésimo coeficiente da série de <i>Fourier</i> na forma exponencial.
T, T_0	Período ou período de amostragem.
$\delta(t)$	Delta de Dirac ou função impulso unitário.
$\beta(t)$	Função contínua arbitrária.
$x(t)$	Sinal no domínio do tempo.
$F(\omega)$	Transformada de <i>Fourier</i> de uma função $f(t)$.
$F(q)$	Notação utilizada por <i>Fourier</i> para a transformada.
Q	Notação igualmente utilizada por <i>Fourier</i> para a transformada.
$f(x)$	Temperatura inicial, que <i>Fourier</i> chamou de resultado da “equação do problema inverso”, o que equivale à transformada inversa de <i>Fourier</i> da função $F(q)$.
I ou $I(\alpha, \beta)$	Abreviação para a integral $\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda$.
$V(j\omega)$	transformada de <i>Fourier</i> de um sinal $v(t)$.
W	Energia de um sinal.
D_t^2	Duração de um sinal no domínio do tempo.
D_ω^2	Duração de um sinal no domínio da frequência.
$\mathcal{F}\{\}$	Operador transformada de <i>Fourier</i> .
$\mathcal{F}^{-1}\{\}$	Operador transformada inversa de <i>Fourier</i> .

$f[kT]$	Função de uma sequência amostrada no domínio do tempo.
$x[nT]$ ou $x[n]$	Função ou sequência de valores amostrados no domínio do tempo.
$\mathcal{Z}\{\}$	Operador transformada \mathcal{Z} .
$\mathcal{Z}^{-1}\{\}$	Operador transformada \mathcal{Z} inversa.
$X(z)$	Transformada \mathcal{Z} de um sinal $x(t)$ ou sequência $x[n]$.
$X^*(s)$	Transformada de <i>Laplace</i> pulsada [amostrada] de um sinal $x(t)$.
$X(s)$	Transformada de <i>Laplace</i> de um sinal $x(t)$.
\mathcal{C}	Conjunto dos números complexos.
\mathcal{K}	Notação para a operação “transformada de <i>Kelvin</i> ”.
\mathcal{K}^{-1}	Notação para a operação “transformada inversa de <i>Kelvin</i> ”.
a	Raio de inversão.
0	Centro de inversão da transformada inversa de <i>Kelvin</i> .
2D	Sigla para duas dimensões espaciais.

Listas de Figuras

2.1	Oliver Heaviside.	10
2.2	Obituário de <i>Heaviside</i> . Fonte: The New York Times.	12
2.3	Círculo RL alimentado.	13
2.4	Função degrau unitário ou Função de Heaviside.	13
2.5	Representação de sinais em componentes impulsivas e de degraus.	18
2.6	Primeira tabela com os “pares de transformadas.”	22
2.7	Linha de transmissão “semi-infinita”.	26
2.8	Contornos de integração da integral de inversão de <i>Bromwich</i> .	35
2.9	Sólido condutor de calor.	37
2.10	Contorno de <i>Bromwich</i> e pontos de ramificação da função plurívoca $F(x, s)$.	40
2.11	Círculo de integração.	40
3.1	Planos a temperaturas diferentes.	49
3.2	Fluxo de calor em um sólido.	51
3.3	Sólido condutor de calor.	53
3.4	Sinal pulso retangular.	62
3.5	Delta de <i>Dirac</i>	63
3.6	Trem de impulsos de <i>Dirac</i> .	64
3.7	Série de Fourier para um “trem de impulsos”	65
3.8	Relembrando a função degrau.	66
3.9	Linha condutora de calor.	69
3.10	Função degrau unitário.	80
3.11	Valor de $u(0)$.	82
4.1	Anel de convergência da série de <i>Laurent</i> .	89
4.2	Mapeamento entre os planos s e z .	93
4.3	Círculo puramente indutivo.	93
4.4	Aproximação da integral por um trapézio.	94
4.5	Esquema de uma transformação conforme.	96
A.1	Definição de diferencial.	109
A.2	Guia para visualização dos limites de integração.	110

A.3	Círculo de inversão da transformada de <i>Kelvin</i>	112
B.1	Círculo de inversão da transformada de <i>Kelvin</i>	113
E.1	Sistema do tipo “entrada/saída”	121
E.2	Comparação entre os métodos de discretização.	123
F.1	Mão com esfera refletida. Fonte: Galeria Nacional de Artes de Washington - EUA.	126
F.2	Círculo de inversão da transformada de <i>Kelvin</i>	127

Lista de Tabelas

4.1 Pares da transformada \mathcal{Z} de algumas funções elementares.	91
---	----

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Frequentemente, os cursos da área de engenharia elétrica são rotulados, nas conversas informais, de os “mais difíceis”; o que não significa porém que são os mais queridos ou procurados. Alguns dos fatores podem ser que os estudantes, ao iniciarem o curso, são literalmente sobrecarregados — e geralmente desmotivados — por uma quantidade imensa de informações, conceitos, métodos matemáticos, teoremas, fórmulas, entre outras centenas de teorias essenciais para a formação do futuro engenheiro. Contudo, não é de se assustar que ao terminar o curso, o aluno não tenha ainda ideia do que um engenheiro eletricista faz; ou ainda, muitos se formam com a sensação da falta de conexão entre os diversos assuntos estudados na graduação. Qual então seria o problema? Vários periódicos voltados à educação têm procurado tratar do assunto, e não é raro encontrar-se soluções que têm como foco a mudança de currículo dos cursos: nitidamente um processo difícil e que gera muitos problemas. Uma tentativa de resolver alguns deles seria a abordagem que busca desenvolver os conceitos juntamente com os aspectos históricos, ou seja, mostrando que a matemática é feita por pessoas reais e não uma “matemágica”. Como afirmou certa vez o matemático francês *Jules Henri Poincaré* (★1854 † 1912), ciência é feita de fatos como uma casa é feita com pedras, porém um amontoado de fatos não é ciência, assim como um amontoado de pedras não é uma casa. Neste trabalho são abordadas algumas ferramentas matemáticas de fundamental importância e que provavelmente são das operações mais utilizadas — após as quatro operações fundamentais — na área de engenharia elétrica: as populares “transformadas”, dentre elas a transformada de *Laplace*, transformada de *Fourier*, transformada \mathcal{Z} e outras, com especial atenção à resolução de equações diferenciais parciais. Dada a complexidade destes assuntos, além da natural magnitude de fundamentos matemáticos necessários à sua compreensão, propõe-se um estudo que busque unificar o “conceito de transformada” e suas aplicações, explorando as características de cada uma em particular e em conjunto, exemplificando a relação existente entre elas, inclusive quanto aos aspectos históricos que levaram tais técnicas a se tornarem o que são atualmente.

1.2 Objetivos

As transformadas são ferramentas essenciais não apenas em engenharia elétrica e afins, como também em áreas como física e matemática, sendo de extrema importância que o futuro engenheiro tenha uma noção integral de sua utilidade, sem aquela sensação de “incompletude” tão comum nos recém-formados em relação aos diversos conteúdos estudados na graduação. A partir dessa premissa, objetiva-se o desenvolvimento de um estudo que aborde diversas técnicas de transformação, como a transformada de *Laplace*, \mathcal{Z} , de *Fourier*, entre outras, que são das técnicas mais utilizadas em cursos de graduação, juntamente com a história que caracteriza seu desenvolvimento até tomarem a forma que possuem atualmente. Como a palavra chave é “unificação”, trata-se principalmente de uma abordagem de ensino, voltada à educação em nível de graduação, na qual pretende-se abordar os conceitos básicos necessários para o entendimento a respeito de tais técnicas, por meio da unificação da base matemática e histórica comum às mesmas. Além disso, será dada especial atenção à resolução de equações diferenciais parciais com o uso das transformadas, assunto relativamente pouco abordado em nível de graduação. Trabalhos similares encontrados na literatura buscam essencialmente resgatar o interesse e incentivar a curiosidade do aluno pelos fatos científicos em conjunto com o aspecto histórico inerente. Acredita-se que o assunto apresentado dessa forma seja pedagogicamente mais atraente, sem deixar de lado o rigor científico necessário para a compreensão, buscando explorar e desenvolver os conceitos na medida em que se fizerem necessários. Em alguns aspectos, isto é similar à abordagem “*just-in-time*”, enriquecida com a adição de aspectos históricos. Além disso, a experiência de professores e a opinião de alunos parecem indicar que o uso desta abordagem é de grande relevância ao criar uma base sólida de aprendizado.

1.3 Contribuições

Como primeira contribuição, pretende-se abordar o tema das transformadas de maneira unificada, com a fundamentação matemática desenvolvida de maneira gradual ao longo do texto, exemplos de aplicação e aspectos históricos. Acredita-se que tal estratégia de abordagem pode ter como resultado um impacto pedagógico positivo. A transformada de *Laplace* e outros métodos operacionais tem sido amplamente utilizados na solução de equações diferenciais ordinárias, lineares e invariantes no tempo, com uma extensa literatura disponível. No entanto, as diversas técnicas de transformação mostram-se extremamente úteis na solução de equações diferenciais parciais. Esta será em essência, a segunda contribuição do trabalho, visto tratar-se de assunto relativamente pouco abordado nos cursos de graduação da área de engenharia elétrica.

1.4 Organização do Trabalho

A referência estrutural do trabalho proposto é o livro “*The Science of Radio*”, do autor *Paul J. Nahim* [Nahin, 2001]. Nele, o autor propõe uma forma diferente e bem

humorada de apresentar temas científicos complexos, descrevendo de maneira leve e gradual os avanços que tornaram o rádio possível, desenvolvendo as ferramentas matemáticas acompanhadas dos aspectos históricos que possibilitam o entendimento do assunto. Os aspectos históricos e curiosidades diversas desempenham papel importante. Por isso, no empenho de contextualizar a utilização de cada técnica de transformação, tais aspectos são apresentados em “caixas” – destacadas e espalhadas ao longo do texto. Contudo, o texto pode ser lido descartando-as sem perda de generalidade e objetividade. O conteúdo divide-se principalmente em três grandes eixos, que são os capítulos sobre a transformada de *Laplace*, transformada de *Fourier* e transformada \mathcal{Z} , no que são enriquecidos com os assuntos dos apêndices. Além de terem o papel de complementar os assuntos abordados ao longo do texto, os apêndices de A até F fornecem igualmente informações relevantes para a formação do “conceito de transformada”.

No capítulo 1, faz-se uma apresentação preliminar do trabalho, com os objetivos, motivação e contribuições do trabalho. No capítulo 2 apresenta-se uma breve introdução sobre o conceito de transformada, ao mesmo tempo em que aborda a técnica da transformada de *Laplace*, juntamente com exemplos práticos de resolução de problemas, mais especificamente equações diferenciais parciais, sendo apresentados o método de *Heaviside*, com uma solução particular para o problema da linha de transmissão e a solução da equação da difusão via integral de Inversão de *Bromwich*, culminando com um comparativo entre os dois métodos.

Em sequência, no capítulo 3, é apresentada a Teoria do Calor, que motivou o surgimento da série de *Fourier* e posteriormente da transformada integral de *Fourier*, quando este faz a extensão do problema para o caso de uma função aperiódica – no caso em que aborda o problema da condução de calor em um sólido condutor de calor de dimensão espacial infinita. Ao final do capítulo, é mostrada a resolução da equação do calor utilizando a transformada de *Fourier*, em contraste com o que é comumente feito, já que a utilização das séries de *Fourier* é prática mais difundida. É ainda apresentada uma comparação entre as transformadas de *Laplace* e *Fourier*, acrescida com os aspectos históricos comuns às duas técnicas. Neste capítulo, a popular “função degrau unitário” é utilizada como um ente matemático que faz uma espécie de “conexão” entre as transformadas de *Laplace* e *Fourier*.

Já no capítulo 4, é abordada a técnica da transformada \mathcal{Z} . Nele, é mostrada a analogia existente entre as equações diferenciais e equações diferenças. É, no entanto, o único capítulo em que não se propõe resolver um problema específico. No entanto, pode ser encarado como um “trampolim” para o entendimento dos fundamentos matemáticos de outras transformadas, como as transformações conformes e a transformada de *Kelvin*, assunto abordado no apêndice F. Desta vez, o ente matemático utilizado para “conectar” a transformada \mathcal{Z} com as outras é a transformação bilinear, ou transformada de *Tustin*.

No capítulo 5, são apresentadas as considerações finais, conclusões e sugestões para

futuros trabalhos. Nele, é mostrado que a maior parte das transformadas são apenas operações sobre o plano complexo, em especial as transformadas de *Laplace*, de *Fourier* e \mathcal{Z} , embora as mesmas sejam utilizadas para resolver problemas do “mundo real”, na busca por respostas para a pergunta “o que é transformada?” e em especial, na formação de um conceito global do significado do termo “transformada”.

Os apêndices de A a E tratam de aspectos essenciais ao entendimento pleno dos diversos assuntos tratados, mas que podem ser estudados à parte. Neles é feita uma tentativa de seguir o mesmo padrão de desenvolvimento da dissertação: com aspectos históricos, exemplos práticos de aplicação e uma forma diferenciada de abordar os assuntos, inclusive no que tange ao estilo literário, ao mesmo tempo apresentando temas de interesse em engenharia e ciências.

No apêndice A, são apresentados tópicos de cálculo diferencial e integral, que são utilizados especialmente no capítulo 2. Continuando, no apêndice B, apresenta-se exemplos de cálculo da transformada de *Laplace* inversa através das integrais de *Duhamel*, em comparação com os já consagrados métodos operacionais da transformada de *Laplace*.

Em seguida, no apêndice C, demonstra-se uma forma incomum para a integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, obtida por *Laplace* e que será útil na solução de uma equação diferencial parcial – mais especificamente, um problema de difusão de calor – no capítulo 3.

No apêndice D, apresenta-se o código em MATLAB para a geração da série de *Fourier* para um “trem de impulsos”, quando o problema do conceito de função generalizada é tratado, ainda no capítulo 3.

No apêndice E, são apresentados exemplos de discretização de sistemas, que podem ser utilizados como plataformas para o estudo das relações entre a transformada \mathcal{Z} e outras transformadas.

Finalmente, no apêndice F é apresentada a transformada de *kelvin*, no intuito de sevir como fechamento de um conceito global de transformada e sua relação com as outras técnicas de transformação.

Capítulo 2

A transformada de *Laplace* é mesmo de *Laplace*?

...there is an idea that in mathematics, unless you follow regular paths, you do not prove anything; this is the most pernicious doctrine, when applied to imperfectly explored regions. Does anybody fully understand anything?

— Oliver Heaviside, em resposta às críticas ao seu método operacional, 1893.

...his discarding an entire series without explanation is intellectually repugnant.

— John R. Carson, em 1926, ironicamente um grande admirador de Oliver Heaviside, em um momento de fúria pelo uso “pródigo” das séries divergentes feito por Heaviside.

2.1 O que é uma transformada?

A matemática é dirigida sempre à lógica e à razão, porém, sua compreensão deve ter suas raízes fincadas na motivação e no interesse, o que permite que os indivíduos assimilem pelo entendimento e pelo sentimento, criando não apenas conhecimento, mas sim, sabedoria. Estudiosos e entusiastas das ciências exatas e engenharias tendem a acreditar que a compreensão dos fenômenos da natureza tem apenas relação com o raciocínio lógico e abstrato. Será isto verdade? Não é desproposital afirmar que as pessoas somente fazem escolhas quando unem razão e sentimento. Ou seja, a escolha, mesmo que pareça simplesmente lógica parece levar em consideração aspectos emocionais. A prova pode vir pela lógica, mas a descoberta é, sem dúvida, motivada pela intuição. Mas o que leva um indivíduo — ou um grupo de indivíduos — a desenvolver técnicas matemáticas complexas? Apenas a necessidade? Como sentir necessidade de uma técnica que ainda “não existe”?

O desenvolvimento promovido pelo homem vem de sua infinita capacidade de aprender, de adaptar-se, de questionar. Contudo, todo o conhecimento, toda a técnica desenvolvida só é útil se puder ser repassada e compreendida por aqueles que, a seu turno, lhe darão

continuidade e aplicação. A história está recheada de momentos que transformaram o mundo, com a criação de ferramentas inovadoras que propiciaram verdadeiras revoluções em diversos campos, especialmente na ciência.

Sem sombra de dúvida, todo estudante de física, matemática, engenharia elétrica ou área afim já ouviu falar das famigeradas “transformadas” e uma pergunta frequente feita em sala de aula é: como alguém inventou esta “coisa”? As transformadas de *Laplace* e de *Fourier*, por exemplo, figuram entre as mais estudadas. Contudo, uma compreensão integral e profunda dos conceitos que as fundamentam não é uma tarefa fácil.

Em engenharia, o conceito de “transformada” traduz geralmente a noção de algum tipo de simplificação. Neste contexto, o logaritmo consiste provavelmente, na ferramenta mais antiga de que se tem notícia cujo conceito se aproxima da ideia de transformada, uma vez que tem como principal característica a de transformar multiplicações e divisões em somas e subtrações, além de ser útil na resolução de equações cujos expoentes são desconhecidos.

O desenvolvimento dos logaritmos deve-se principalmente a uma figura controversa: *John Napier* – o que deu origem ao termo “Neperiano”. *Napier* foi contemporâneo de grandes nomes como o astrônomo *Tycho Brahe* e não era matemático profissional, mas escrevia sobre “tudo”, característica marcante dos pensadores renascentistas^a [Boyer, 1974].

^aCerta vez, num comentário sobre o Livro das revelações, por exemplo, afirmava que o Papa em Roma era o anti-Cristo

2.2 Reinvenção da transformada

A transformada de *Laplace* é, atualmente, amplamente conhecida e estudada, principalmente nas ciências exatas e engenharias. Muitas vezes, é encarada como um “ritual de passagem” pelos estudantes de graduação e frequentemente empregada na resolução de equações diferenciais ordinárias. No entanto, também é útil na resolução de equações diferenciais parciais e de diferenças além de ser importante no estudo de fenômenos transitórios¹. Dentre suas funcionalidades, a transformada de *Laplace* permite a rápida avaliação de certas integrais, reclamando inclusive relações com a teoria dos números e análise funcional. É mais do que natural pensar que o nome “transformada de *Laplace*” deva-se ao grande matemático e astrônomo francês, marquês da corte de *Napoleão Bonaparte*, *Pierre-Simon de Laplace* (★1749 † 1827). Contudo, a transformada de *Laplace* seria mesmo de *Laplace*? A resposta para esta pergunta, por mais óbvia que pareça, não é tão simples. Em verdade, sua história é uma verdadeira saga de quase 200 anos, recheada de inovações empolgantes, disputas, mal-entendidos e injustiças, que remonta aos primeiros trabalhos de *Leonhard Euler* (★1707 † 1783) em 1737 e de *Laplace* em 1774, passando por matemáticos como *Boole* e *Augustin Louis Cauchy* (★1789 † 1857), conterrâneo de *Laplace*, já no

¹Especialmente em estudos teóricos.

século XIX. Porém, isso ainda não é tudo.

Laplace certamente desenvolveu as bases da teoria nascente e propiciou grandes contribuições em funções especiais, teoria das probabilidades², astronomia e mecânica celeste. Em termos atuais, a transformada de *Laplace* é definida por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt . \quad (2.1)$$

Porém, a equação 2.1 pode ser considerada um caso especial de:

$$F(p) = \int_C K(p, z) f(z) dz , \quad (2.2)$$

Uma “Transformação Integral” definida para algum contorno C no plano complexo z [Deakin, 1981], em que $K(p, z)$ é o *Kernel* ou núcleo da transformação e $f(z)$ é a função que se quer “transformar” (No caso da transformada de *Laplace*, $K(s, z) = e^{-st}$). Além disso, a transformada de *Laplace* está intimamente relacionada a um grande número de transformações integrais, tais como a transformada de *Fourier*, entre outras, mas elas não são equivalentes.

Aplicada particularmente na resolução de equações diferenciais ordinárias, a transformada de *Laplace* permite, após a transformação, construir uma equação algébrica em função da nova variável s , de forma que a equação diferencial originária seja solucionada mais facilmente. Em outros casos porém, é possível reduzir equações diferenciais parciais (EDP’s) em EDO’s, para o mesmo propósito. Este último caso é relativamente pouco estudado, principalmente ao nível de graduação em engenharia, sendo dada preferência a outros métodos nos diversos cursos de equações diferenciais. Dessa forma, o presente trabalho irá perseguir este como um dos objetivos principais.

Historicamente, o desenvolvimento das técnicas de transformação começa com a busca por soluções de certos tipos de equações diferenciais. Esta busca começa com *Leonhard Euler* (★1707 † 1783), que considera uma transformação do tipo [Euler, 1769 apud Deakin, 1981]:

$$y(u) = \int_a^b e^{K(u)Q(x)} P(x) dx , \quad (2.3)$$

para solucionar uma equação linear de segunda ordem da forma:

$$L(u) \frac{d^2y}{du^2} + M(u) \frac{dy}{du} + N(u)y = U(u) , \quad (2.4)$$

²Após 1774, *Laplace* escreveu vários artigos sobre probabilidades, incorporando os resultados em 1812, em seu *Théorie Analytique des probabilités*. Até *Laplace*, a probabilidade estava essencialmente voltada aos jogos de azar.

desde que $U(u) = R(a)e^{K(u)Q(a)}$. Aplicando a transformação na equação 2.4, *Euler* obteve uma solução complicada, na forma de integral definida:

$$y(u) = \int_{x=b}^{x=a} e^{KQ} \frac{RdQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}; \quad (2.5)$$

que sob certas condições, pode ser reescrita na forma:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V(u) du. \quad (2.6)$$

Finalmente, em 1779, *Euler* considera a solução de equações diferenciais parciais. No entanto, sua abordagem seguiu outro curso que pouco contribuiu para a teoria nascente. Mas, como *Laplace* entra nesta história? Os estudos de *Laplace*³ relacionados ao assunto começam com uma série de artigos, produzidos a partir de 1779; mesmo ano em que *Euler* atacava o problema das equações parciais. Neles, *Laplace* estava preocupado com uma série de questões, dentre elas o problema da interpolação. Em um dos primeiros trabalhos [Laplace, 1779 apud Deakin, 1981], ele apresenta a noção de função geratriz de uma sequência:

$$u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} y_x t^x. \quad (2.7)$$

Uma função que assume valores discretos ao longo de x [y_x foi a notação utilizada por *Laplace* para a uma função $y(x)$ da variável independente x], formando a sequência de números⁴. Note que o expoente do termo t muda à medida que o índice x avança no somatório. Se essa transição for chamada de Δx , então $\Delta x = k \cdot x$, com $k = 1$ (inteiro). Porém, se a soma for definida para um intervalo contínuo, i.e., $k \rightarrow 0$, então:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Delta x = dx,$$

e

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cdot x = x.$$

A variável y_x será portanto definida para todo $x > 0$ contínuo e, por isso, o somatório transforma-se em uma integral:

$$u(t) = \int_0^{\infty} y_x t^x dx. \quad (2.8)$$

³Que na época concentravam-se principalmente em teoria das probabilidades.

⁴Como será visto ao longo do texto, a noção de função geratriz de *Laplace* aparenta ser, em essência, a raiz de grande parte das transformadas, dentre elas a transformada de *Fourier* e a transformada \mathcal{Z} .

Uma transformação integral relacionada à Transformada de *Laplace*. Atualmente ela é ainda usada, porém escrita na forma moderna:

$$F(p) = \int_0^\infty t^{p-1} f(t) dt . \quad (2.9)$$

A equação 2.9 é mais conhecida como transformada de *Mellin* e inclui, dentro de suas aplicações, a resolução de certos tipos de equações diferenciais com coeficientes variáveis. E apesar de *Laplace* não ter seguido este caminho especificamente, tais investigações parecem ter sugerido o estudo de formas do tipo $\int_0^\infty e^{-sx} \phi(x) dx$, por ter obtido algumas soluções na forma exponencial.

Já no artigo de 1782 [Laplace, 1782 apud Deakin, 1981], ao tratar de equações diferenciais e de diferenças, *Laplace* procura uma solução para a equação de diferenças finitas:

$$S = Ay_s + B\Delta y_s + C\Delta^2 y_s + \dots , \quad (2.10)$$

em que A, B, C etc. são funções de s – assumidas como expansíveis em séries de potências – e y_s , a função desconhecida⁵. *Laplace* então assume y_s da forma:

$$y_s = \int e^{-sx} \phi(x) dx , \quad (2.11)$$

que é uma integral definida, com limites não especificados. Além disso, assume também:

$$\Delta^{(n)} y_s = \int e^{-sx} (e^{-x} - 1)^n \phi(x) dx , \quad (2.12)$$

tornando agora possível escrever a solução S em função das equações 2.11 e 2.12.

Quase trinta anos haveriam de passar⁶ até que *Laplace* volvesse ao assunto. Ao escrever sobre integrais definidas e suas aplicações no cálculo de probabilidades [Laplace, 1810 apud Deakin, 1981], ele considera primeiramente uma série de integrais da forma:

$$\int_0^\infty f(x) e^{-ax} dx . \quad (2.13)$$

Seu objetivo neste ponto consistia em avaliar as integrais exclusivamente, sem qualquer relação com a resolução de equações diferenciais. Decerto que o famoso método operacional conhecido como “transformada de *Laplace*” vai muito além disso, como será mostrado ao longo do texto. Seu desenvolvimento deve-se mais a outros matemáticos, como *Cauchy*⁷

⁵ $y_s = y(s)$

⁶Como o próprio *Laplace* grafou.

⁷Por seus trabalhos em cálculos de resíduos e explorações de métodos simbólicos, utilizando operadores diferenciais.

e *Boole*, engenheiros como o americano *John Carson* e, principalmente, a um autodidata praticamente desconhecido nos dias atuais chamado *Oliver Heaviside*.

Ninguém contribuiu mais para que a teoria da transformada de *Laplace* entrasse na idade adulta, tornando-se um método viável na solução de problemas práticos de engenharia, do que o intrépido e obscuro inglês *Oliver Heaviside* (★1850 † 1925). *Heaviside* pode ser considerado como uma espécie de “reinventor” da transformada de *Laplace*, pois, não fosse por ele, ela teria muito provavelmente sido esquecida nos porões das bibliotecas, ou negligenciada por sua dificuldade inerente de aplicação. Este homem admirável, ao mesmo tempo amado e odiado por homens de ciência do seu tempo, era o esteriótipo do verdadeiro gênio: amado por seu talento e obra fenomenal, odiado pelos métodos nada ortodoxos de que se utilizava.

Em conjunto com o inestimável auxílio de *G. F. FitzGerald* e *O. Lodge*, coube a *Heaviside* a responsabilidade por formalizar a Teoria Eletromagnética de *Maxwell*, que originalmente totalizava 38 equações, em apenas 4 equações fundamentais. Contribuiu também, juntamente com *J. W. Gibbs* na concepção do *Cálculo Vetorial*, e fez com que ele se firmasse como ferramenta básica do Eletromagnetismo, em oposição à *Teoria dos Quaternions* de *Hamilton* [Hunt, 2005].

Segundo *Paul J. Nahin* [Nahin, 2002], o físico irlandês, *George Francis FitzGerald* (★1851 † 1901) foi um grande amigo e colaborador de *Heaviside*. Juntos, eles trocaram correspondências por mais de 20 anos e, até a morte de *FitzGerald* em 1901, haviam se encontrado pessoalmente em apenas duas ocasiões, totalizando cerca de 8 horas, segundo o próprio *Heaviside*. *FitzGerald* foi o amigo que tentou explicar a *Heaviside* as realidades sociais da época, porém sem sucesso.

Ainda no *hall* das contribuições, *Heaviside* foi quem primeiro resolveu o problema da onda viajante em uma linha de transmissão sem distorções, o que tornou possível a comunicação transatlântica de telefones e telégrafos. Em física, teorizou (após o americano *Arthur Kennelly*, porém de maneira independente) que uma camada condutiva existe na atmosfera que permite a uma onda eletromagnética (por exemplo, uma onda de rádio) viajar segundo a curvatura da Terra, e não em linha reta para o espaço. Esta última costumava ser denominada camada de *Heaviside-Kennelly*, porém, a partir da década de 1950, a denominação já havia sido completamente esquecida, tendo sido rebatizada simplesmente de *ionosfera*. *Heaviside* foi um dos primeiros a sugerir [após tomar conhecimento dos trabalhos de *J. J. Thomson*]



Figura 2.1: Oliver Heaviside.

O jovem *Joseph John Thomson* (★1856 † 1940), já com 24 anos era uma das estrelas da física na década de 1880. Conhecido e reverenciado atualmente como o “descobridor” da primeira partícula subatômica, o elétron, *Thomson* começou seus primeiros estudos teóricos (em 1881) sobre os efeitos magnéticos de uma carga elétrica em movimento [Thomson, 1881 apud Nahin, 2002, p.119-124].

que uma carga elétrica em movimento aumenta sua massa com o aumento da velocidade [Heaviside, 1892a, p.446], ou seja, uma antecipação da *Teoria da Relatividade Restrita de Einstein*, além de ter sugerido a existência da propriedade de supercondutividade nos materiais, fato que seria comprovado tempos depois.

Homem simples, sem instrução formal, *Oliver Heaviside*, em plena Inglaterra Victoriana, desafiou os grandes matemáticos de *Cambridge* ao fazer o que ele chamava de “matemática experimental”, inspirada nos fenômenos físicos que até então observava, sem preocupar-se com as minúcias e rigores matemáticos. Segundo [Lathi, 2007] *Heaviside* é, sem dúvida, uma das trágicas figuras na história da ciência e engenharia, pois mesmo tendo contribuído em inúmeros campos, foi severamente criticado durante sua vida, principalmente por ser um “ignorante” que possuia apenas o curso primário. Seu estilo informal fez com que seu nome fosse evitado e suas contribuições creditadas a outros. Muitas delas foram rejeitadas com desprezo pelos figurões da época, considerando que seus métodos ou eram desprovidos de sentido ou eram reapresentações de trabalhos já feitos, o que não corresponde à verdade.

A resposta de *Heaviside* ao argumento de que ele era “ignorante”, sem instrução, foi principalmente ter se tornado “*Fellow*” da *Royal Society*, a mais prestigiosa associação de cientistas que jamais existiu. Secundariamente ele foi também, ironicamente para seus detratores, membro da *Literary Philosophical Society* de *Manchester*. É curioso que seu obituário (Figura 2.2) no jornal *The New York Times* faz exatamente uma referência a estas duas associações, extremamente inapropriadas a um homem ignorante e sem instrução.

Heaviside obteve o sucesso, apesar da falta de rigor, porque utilizou a matemática com sentimento e intuição, coisa que não se aprende na universidade. E por isso talvez, a exemplo de vários nomes das ciências e das artes, das religiões ou filosofias, que *Heaviside* morreu só, incônscito e na mais absoluta miséria. Sua vida foi o reflexo de uma sociedade arrogante e hipócrita, que não respeitava a criatividade alheia a não ser que ela fosse expressa na linguagem padrão e aceita pelo “*establishment*”.

Ao final do século XIX, *Heaviside* escreveu para modesta revista de técnicos em eletricidade, chamada “*The Electrician*” (Posteriormente compilados nos “*Electrical Papers*” de 1892 [Heaviside, 1892a] e [Heaviside, 1892b]), sobre uma técnica que havia desenvolvido e chamado de *Cálculo Operacional*. Tal técnica era, em alto e bom som, nada menos que a *transformada de Laplace*, de maneira próxima como a conhecemos atualmente, inclusive

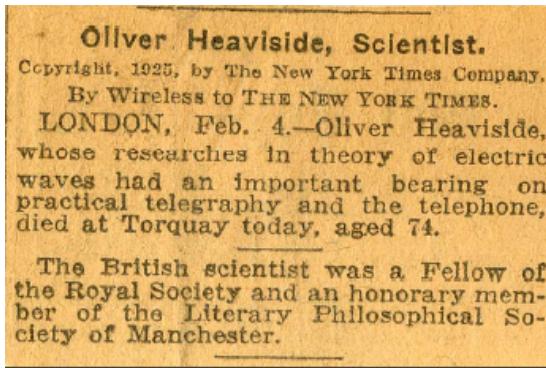


Figura 2.2: Obituário de *Heaviside*. Fonte: The New York Times.

com a noção de operadores lineares. Segundo *Paul J. Nahin*, o Cálculo Operacional de *Heaviside* era a transformada de *Laplace* “disfarçada” [Nahin, 2002, p.218]. A diferença era que, até então, o cálculo operacional tratava de funções apenas no domínio do tempo. Não se tinha ainda a noção de “domínio da frequência” e “domínio do tempo”, que foram incorporados posteriormente.

Se dependesse dos opositores de *Heaviside*, em vista da obscuridade inerente ao seu método, o *Cálculo Operacional* estaria por certo com seus dias contados. Em razão das constantes críticas que recebia, *Heaviside* respondia irreverente [Heaviside, 1893a, p.9]:

“Deveria eu recusar meu almoço só porque não conheço plenamente o processo da digestão?”

E em seguida, rebatia:

“Não, não se eu estiver satisfeito com o resultado.”

Entre os grandes admiradores de *Heaviside*, estava o engenheiro americano, da *Bell Telephone and Telegraph Company*, *John Carson*. No livro *Electric Circuit Theory And The Operational Calculus*, publicado em 1926 e reeditado em 1953 [Carson, 1953], *Carson* toma para si a responsabilidade de continuar o trabalho de *Heaviside*, introduzindo o formalismo matemático e deduzindo todas as fórmulas que o mentor havia proposto. Foi ele inclusive o responsável por fazer a conexão entre o Cálculo Operacional e a integral de *Laplace* (eq. 2.1), demonstrando que todas as fórmulas poderiam ser obtidas através dela. Coube a *Carson* o mérito de aproximar-nos do método hoje conhecido como transformada de *Laplace*, ao publicar, no mesmo livro, a primeira tabela com os “pares de transformadas” – que ele chamou de “tabela de integrais infinitas” –, tendo-as utilizado pela primeira vez na resolução de problemas práticos (Consultar a figura 2.6, na página 22).

2.3 A matemática experimental de *Heaviside*

A melhor forma de apresentar o famoso método de *Heaviside* é, sem dúvida, com um exemplo prático, em consonância com seu peculiar método de ataque.

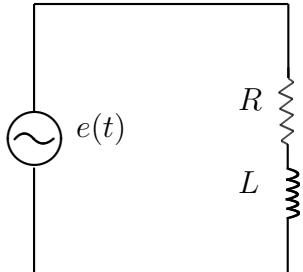


Figura 2.3: Circuito RL alimentado.

Considere o circuito composto por um resistor e um indutor (*RL*) ilustrado pela figura 2.3, alimentado por uma fonte de tensão $e(t) = E \cdot H(t)$, em que $H(t)$ é a função de *Heaviside*, que muito mais tarde ficou conhecida como *função degrau unitário*. Esta função foi criação de *Heaviside*, e pode ser expressa como:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

e ilustrada pela Figura 2.4. Aplicando a lei de *Kirchhoff* das tensões no circuito da

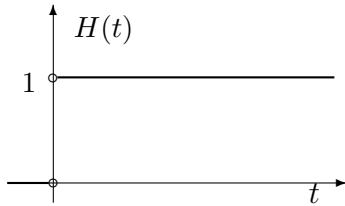


Figura 2.4: Função degrau unitário ou Função de Heaviside.

Figura 2.3, tem-se a equação do circuito:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt};$$

sem maior cerimônia, *Heaviside* reescrevia a equação, substituindo o símbolo de derivada $\frac{d}{dt}$ por p . A partir daí, começava então a tratar “ p ” como uma entidade algébrica qualquer, um número:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t) \Rightarrow LpI + RI = e(t) \quad \text{em que } I = I(p)$$

$$I(R + Lp) = e(t) \Rightarrow I(p) = \frac{1}{R + Lp},$$

Logo,

$$I(p) = \frac{1/Lp}{1 + R/Lp} e(t) . \quad (2.15)$$

A equação 2.15 é chamada equação operacional do problema. Após tratar $\frac{d}{dt}$ como um número, *Heaviside* buscava comparar a forma da equação operacional com soluções conhecidas de problemas existentes, para inferir, deste modo, regras para interpretação da equação operacional e convertê-la em solução explícita (em função de t). Uma de suas

saídas favoritas eram as séries de potência [Lützen, 1979]. Ele sabia que:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots . \quad (2.16)$$

E por analogia, rescrevia a expressão da corrente em potências descendentes de p :

$$\begin{aligned} I(p) &= \left[\frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} \right] \frac{e(t)}{Lp} \\ &= \left[1 - \left(\frac{R}{Lp} \right) + \left(\frac{R}{Lp} \right)^2 - \left(\frac{R}{Lp} \right)^3 + \dots \right] \frac{e(t)}{Lp} \\ &= \left[\left(\frac{R}{Lp} \right) - \left(\frac{R}{Lp} \right)^2 + \left(\frac{R}{Lp} \right)^3 - \left(\frac{R}{Lp} \right)^4 + \dots \right] \frac{e(t)}{R}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Fazendo-se a substituição $e(t) = E \cdot H(t)$, que define uma tensão do tipo degrau, já definida por Heaviside, e amplitude E , tem-se:

$$I(p) = \frac{E}{R} \cdot \left[\left(\frac{R}{Lp} \right) - \left(\frac{R}{Lp} \right)^2 + \left(\frac{R}{Lp} \right)^3 - \left(\frac{R}{Lp} \right)^4 + \dots \right] \cdot H(t). \quad (2.18)$$

O uso da função degrau unitário causava muita confusão no princípio, já que muitas vezes Heaviside a omitia em seus cálculos, pois usava a notação “1”. No capítulo 3, será dada uma atenção especial à esta função, principalmente com relação ao que acontece em $t = 0$, ou seja, $H(0)$.

Contudo, uma investigação da equação 2.18 levanta uma questão a respeito de seu significado. O que vem a ser a expressão

$$\frac{1}{p} \cdot H(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{-1} \cdot H(t) ?$$

Ora, Heaviside raciocinava,

$$\text{se } p \cdot f(t) = \frac{df(t)}{dt}, \quad (2.19)$$

$$\text{então } \frac{1}{p} \cdot f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Além de omitir a constante de integração, *Heaviside* concluía, sem mais delongas, que:

$$p^{-1} \cdot H(t) = \int_0^t H(\tau) d\tau = t \quad (2.21)$$

$$p^{-2} \cdot H(t) = p^{-1} \cdot p^{-1} \cdot H(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2!} \quad (2.22)$$

$$\begin{matrix} \vdots \\ p^{-n} \cdot H(t) = \frac{t^n}{n!}. \end{matrix} \quad (2.23)$$

Assim, substituindo a equação 2.23 em 2.18, tem-se a expressão da corrente em uma série de potências ascendentes de t :

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left[\left(\frac{R}{L} t \right) - \frac{1}{2!} \left(\frac{R}{L} t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{R}{L} t \right)^3 - \dots \right] \cdot H(t). \quad (2.24)$$

No entanto, *Heaviside* sabia que:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

logo, por analogia, concluía finalmente que:

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right], \quad (2.25)$$

que é a solução correta (e completa) para a corrente.

O processo de expandir a equação operacional de tal modo a obter a solução explícita [no tempo] é o que *Heaviside* chamava de “algebrising”, ou “algebrizar” a equação. Bem antes de *Heaviside* [Servois, 1814 apud Lützen, 1979, p.162], pensava-se que a razão pela qual o tratamento algébrico era aplicável aos operadores diferenciais consistia no fato de os mesmos obedecerem às leis comutativa e distributiva. Ademais, a utilização de operadores diferenciais já era conhecida na época [Petrova, 1987, p.8]. Matemáticos como *Cauchy*⁸, *Gregory*⁹ e *Boole*¹⁰ já haviam empregado métodos similares à substituição de $\frac{d}{dt}$ por “ p ”. *Cauchy*, por exemplo, chegou a escrever uma EDO em uma forma simbólica (operacional):

$$F(D)y = \varphi(x),$$

em que D é o operador de diferenciação e $F(D)$ um polinômio em D . Por exemplo, a

⁸[Cauchy, 1827 apud Petrova, 1987].

⁹[Gregory, 1846 apud Petrova, 1987].

¹⁰[Boole, 1859 apud Petrova, 1987].

equação:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$$

seria por ele escrita:

$$(D^2 + 3D + 2) y(t) = Dx(t) \text{ ou } \left(D + 3 + \frac{2}{D} \right) y(t) = x(t).$$

A analogia feita por *Heaviside* na equação 2.20, ao associar o operador $1/p$ com uma integral definida em um intervalo de zero a t implica que $f(0) = 0$, o que pode nem sempre ser verdadeiro. Nestes casos onde isto *não* se verifica, os operadores p e $1/p$ *não* são operadores inversos, ou seja, *não* comutam – a operação $(1/p)p$ não será, neste caso, necessariamente igual a 1. Mesmo a par desta possibilidade, *Heaviside* sempre deixou que sua intuição sobre a realidade física o guiasse [Heaviside, 1893b, p.86]. O mesmo não teria sido problema para *Cauchy* – caso ele tivesse prosseguido com suas explorações –, pois se tratavam de problemas puramente matemáticos.

Heaviside conhecia a abordagem dos operadores diferenciais, entretanto criou sua própria versão do assunto, principalmente pelo uso das séries de potência [coisa que *Cauchy* não logrou explorar. No máximo, ele chegava em algo parecido com a equação 2.15 e parava por aí]. Aliás, a utilização de séries foi um dos motivos pelos quais *Heaviside* comprou inúmeras brigas com os “matemáticos de *Cambridge*”^a. Mas, aparentemente, ele superestimou o uso das séries que, na prática, é bastante limitado. Do ponto de vista de *Heaviside*, a solução deveria ser em forma de série ou então em forma de uma integral definida que, para ele não tinha nenhuma utilidade, a não ser que pudesse ser avaliada. A visão de *Heaviside* demonstra como a tecnologia vigente influencia no que é considerado uma “boa” solução, em termos matemáticos. Neste aspecto, *Heaviside* era apenas um homem de seu tempo. Atualmente, o trabalho pode ser facilmente realizado com simples calculadoras ou em pacotes computacionais como o MATLAB, mas naquela época a história era outra. Até um mero cálculo de uma potência, ou a avaliação do gráfico de uma função qualquer era uma tarefa terrível; certamente um “*trabalho de amor*”, nas palavras de *Heaviside* [Heaviside, 1893a, p. 433]. Em seu livro, *Carson* [Carson, 1953, p. 32] justifica o argumento de *Heaviside* dizendo que:

“Isto era devido ao fato de alguns matemáticos (referindo-se aos matemáticos de *Cambridge*) se refugiarem em determinadas integrais definidas e chamarem *aquilo* de solução.”

^aSempre irreverente, *Heaviside* costumava justificar o uso das séries divergentes e convergentes dizendo que “o antídoto está, quase sempre, muito próximo ao veneno”, como o ditado popular.

Na mesma obra [Carson, 1953, p.95], *Carson* chegou a sugerir (com grande propriedade) o “auxílio de um planímetro^a ou de um intégrafo^b” para a avaliação de integrais. Porém, o que ele não poderia imaginar, era a revolução da computação que aconteceria cerca de meio século depois. Talvez, aos olhos de *Carson* e *Heaviside*, as inovações seriam recebidas com imenso júbilo e sem muitos questionamentos.

^aInstrumento que mede a área de uma figura plana qualquer.

^bInstrumento mecânico por meio do qual se obtém o valor de uma integral.

2.4 O problema de *Heaviside* e o Cálculo Operacional

Há pelo menos dois grandes problemas que envolvem a teoria de circuitos elétricos. Primeiro, a formulação matemática do sistema físico com a consequente obtenção das equações diferenciais que o descrevem. O segundo, a solução das equações diferenciais. Em teoria de circuitos, a maneira mais simples de expressar o problema 1 é a partir das Leis de *Kirchhoff* das tensões e das correntes. Todavia, dificuldades práticas com os métodos clássicos de solução das equações diferenciais fizeram com que *Heaviside* rompesse em definitivo com os métodos até então vigentes, levando-o a desenvolver o chamado “Cálculo Operacional” [Carson, 1953].

O problema em questão era o de calcular a resposta de um circuito em termos de corrente, quando a ele era aplicada uma tensão. Considere que em um ramo qualquer de um circuito elétrico, diga-se, por exemplo, o primeiro ramo, é aplicada (em $t = 0$) uma tensão em forma de um degrau $e(t) = H(t)$, em que $H(t)$ é a função de *Heaviside*. Em resposta à tensão aplicada, seja a corrente resultante em um ramo qualquer, por exemplo no ramo n , denotada por:

$$i_n(t) = H(t)A_{n1}(t). \quad (2.26)$$

Em que $A_{n1}(t)$ foi chamada de *Admitância Indicial* ou *Admitância Indicial de Transferência*¹¹ do ramo n em relação ao primeiro ramo. Se uma entrada de tensão do tipo degrau $e(t) = e_\tau$ é aplicada em um instante $t = \tau$, a corrente é dada por:

$$i_\tau(t) = e_\tau A(t - \tau). \quad (2.27)$$

Se a tensão de entrada tem o formato da Figura 2.5(a), ou seja, formada por degraus $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n$ aplicados nos instantes $t_0, (t_0 + \Delta t), \dots, n\Delta t$, descrita pela equação 2.28:

¹¹O termo mais adequado atualmente seria *função de transferência*, porém com uma ligeira diferença: *Carson* relaciona corrente de saída com a tensão de entrada, ao invés de usar tensões de saída e entrada. Aliás, formalmente, função de transferência de um sistema linear é definida como a transformada – de *Laplace* ou não – da resposta ao impulso.

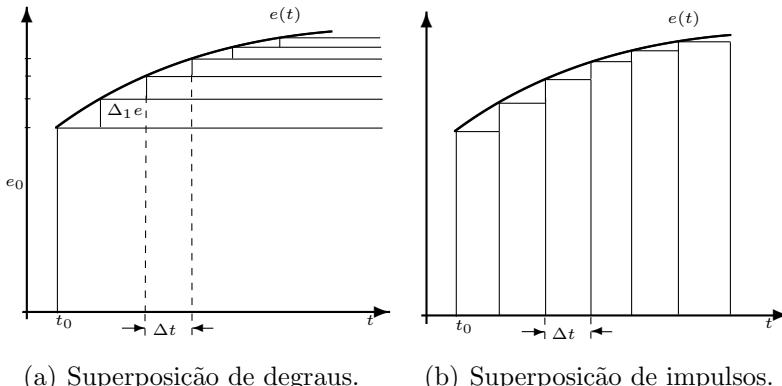


Figura 2.5: Representação de sinais em componentes impulsivas e de degraus.

$$\begin{aligned} e(t) &= e(t_0) H(t - t_0) + \Delta e_1 H[t - (t_0 + \Delta t)] + \Delta e_2 H[t - (t_0 + 2\Delta t)] + \dots \\ &\dots + \Delta e_n H(t - n\Delta t) = e(t_0) H(t - t_0) + \sum_{k=0}^n \Delta e_k H(t - k\Delta t); \end{aligned} \quad (2.28)$$

a corrente resultante será, dessa forma, dada por:

$$\begin{aligned} i(t) &= e(t_0) A(t - t_0) + \Delta e_1 A[t - (t_0 + \Delta t)] + \Delta e_2 A[t - (t_0 + 2\Delta t)] + \dots \\ &\dots + \Delta e_n A(t - n\Delta t) = e(t_0) A(t - t_0) + \sum_{k=0}^n \Delta e_k A(t - k\Delta t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \tau$ e considerando $\Delta t \rightarrow 0$, o acréscimo de tensão devido a cada degrau será¹²:

$$\Delta e = \left\{ \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \right\} \Delta \tau \Rightarrow de = \left\{ \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau.$$

Da mesma maneira, com $n \rightarrow \infty$ [$k\Delta t \rightarrow \tau$] os somatórios tornam-se as integrais¹³:

$$e(t) = e(t_0) H(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \right\} H(t - \tau) d\tau, \quad (2.30)$$

$$i(t) = e(t_0) A(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \right\} A(t - \tau) d\tau. \quad (2.31)$$

A equação 2.30 constitui em essência o *Teorema da Superposição*¹⁴. Além disso, alguns equivalentes úteis da equação 2.31 podem ser obtidos. Fazendo-se, no integrando da

¹²Da definição de diferencial. Para mais detalhes, consulte o apêndice A.

¹³Como Δt será infinitamente pequeno, $k\Delta t$ “deve comportar-se” como uma variável contínua, que foi chamada de τ , i. e., $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} k\Delta t = \tau$.

¹⁴Naturalmente, se a tensão de entrada for expressa em termos de funções impulsivas da forma $e(t) = \int_{t_0}^t e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$, como ilustra a Figura 2.5(b), a equação da corrente também será uma superposição de funções impulsivas.

equação 2.31:

$$\begin{cases} x = t - \tau + t_0 \Rightarrow \tau = t - x - t_0 \\ dx = -d\tau. \end{cases}$$

Como t é constante na equação 2.31, $\frac{\partial}{d\tau}e(\tau) = \frac{\partial}{dt}e(t - x + t_0)$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \left\{ \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \right\} A(t - \tau)d\tau &= - \int_{x=t}^{x=t_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e(t - x + t_0) \right\} A(t - t + x - t_0)dx \\ &= \int_{x=t_0}^{x=t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e(t - x + t_0) \right\} A(x - t_0)dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como o valor da integral na equação 2.32 é função apenas dos limites de integração, pode-se substituir x por τ , logo $\int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e(t - \tau + t_0) \right\} A(\tau - t_0)d\tau$. Então, da equação 2.31, tem-se

$$\int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \right\} A(t - \tau)d\tau = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e(t - \tau + t_0) \right\} A(\tau - t_0)d\tau.$$

Substituindo-se na equação 2.31, tem-se a equação 2.33a, em conjunto com algumas expressões equivalentes:

$$i(t) = A(t_0)e(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} A(\tau - t_0) \right\} e(t - \tau + t_0)d\tau \quad (2.33a)$$

$$= e(t_0)A(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e(\tau - t_0) \right\} A(t - \tau + t_0)d\tau \quad (2.33b)$$

$$= A(t_0)e(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} A(t - \tau + t_0) \right\} e(\tau - t_0)d\tau \quad (2.33c)$$

$$= e(t_0)A(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e(t - \tau + t_0) \right\} A(\tau - t_0)d\tau. \quad (2.33d)$$

Outra importante forma pode ser obtida a partir das equações 2.33. De acordo com a regra de *Leibniz* para a derivada de uma integral com limites variáveis [apêndice A], tem-se:

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e(\tau)A(t - \tau)d\tau \quad (2.34a)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t A(\tau)e(t - \tau)d\tau. \quad (2.34b)$$

As formas expressas na equação 2.34 são chamadas equações de *Duhamel* e sua importância será verificada na seção 2.5.

A função de transferência [neste caso a admitância indicial] determina completamente as características de comportamento do sistema linear. Esta constatação fez com que o todo problema fosse reduzido à *determinação da admitância indicial* em uma simples integração, com as equações de *Duhamel*. Em verdade, *Carson*, deu tanta importância às equações 2.33 e 2.34 que as denominou *Equações Fundamentais da Teoria de Circuitos Elétricos*.

2.5 Equação Integral: transformada de *Carson-Laplace*

Encontrar a *admitância indicial*, ou em termos atuais, a *função de transferência*, era em verdade, o *problema de Heaviside*. E apesar de seu método intuitivo e experimental, uma investigação leva diretamente ao Cálculo Operacional: Suponha uma *f.e.m.* $e(t) = e^{pt}$, em que p é um numero complexo com parte real positiva. A resposta em corrente $i(t)$ pode ser dividida em uma parte transitória e outra permanente:

$$i(t) = \frac{e^{pt}}{Z(p)} + y(t). \quad (2.35)$$

Substituindo $e(t) = e^{pt}$ na equação de *Duhamel* 2.34, tem-se:

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{p(t-\tau)} A(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \left\{ e^{pt} \int_{t_0}^t e^{-p\tau} A(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.36)$$

Usando o artifício $\int_0^t d\tau = \int_0^\infty d\tau - \int_t^\infty d\tau$, pode-se rescrever a integral da equação 2.36:

$$i(t) = \frac{d}{dt} \left\{ e^{pt} \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau - e^{pt} \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.37)$$

Aplicando a derivada, deduz-se:

$$i(t) = pe^{pt} \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau - \frac{d}{dt} \left\{ e^{pt} \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.38)$$

Como a segunda integral tem limites variáveis, deve-se aplicar a regra de *Leibniz*¹⁵:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau \right\} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} [e^{-p\tau} A(\tau)] d\tau + e^{-p(\infty)} A(\infty) \frac{d(\infty)}{dt} - e^{-pt} A(t) \frac{dt}{dt} \\ &= -e^{-pt} A(t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Isto acontece pois, no segundo membro, o integrando não depende de t e a integral se anula. Da mesma forma, o segundo termo do segundo membro se anula, já que $e^{-\infty} = 0$. Continuando, pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{pt} \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau \right\} = p e^{pt} \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau - A(t).$$

Desta forma, substituindo na expressão da corrente 2.38, tem-se:

$$i(t) = p e^{pt} \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau - p e^{pt} \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau + A(t). \quad (2.40)$$

Igualando as equações 2.35 e 2.40, dividindo-se a expressão resultante por e^{pt} , chega-se a:

$$\frac{1}{Z(p)} + y(t)e^{-pt} = p \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau - p \int_t^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau + A(t)e^{-pt}. \quad (2.41)$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, a segunda integral se anula, levando a:

$$\frac{1}{Z(p)} = p \int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau) d\tau. \quad (2.42)$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis $\tau = t$, chega-se, enfim, à equação da admitância indicial 2.43, que nada mais é do que a *transformada de Laplace*, ou melhor, é uma integral do “tipo” *Laplace* (página 9, seção 2.2):

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^\infty e^{-pt} A(t) dt. \quad (2.43)$$

As equações 2.34 e 2.43 constituem por sua vez a formulação completa do problema. A partir delas é possível obter todas as regras do cálculo operacional, as quais *Heaviside* obteve intuitivamente. De fato, foram elas que deram pela primeira vez significado ao cálculo operacional de *Heaviside*. Foi após obter a equação integral que *Carson*, na resolução de problemas práticos, criou uma tabela com os pares de integrais, contendo as equações

¹⁵Para entender a regra de *Leibniz*, consulte o apêndice A.

operacionais e suas soluções explícitas. Esta tabela era, nada mais nada menos que a primeira tabela de “*transformadas de Laplace*”, como mostrado na Figura 2.6.

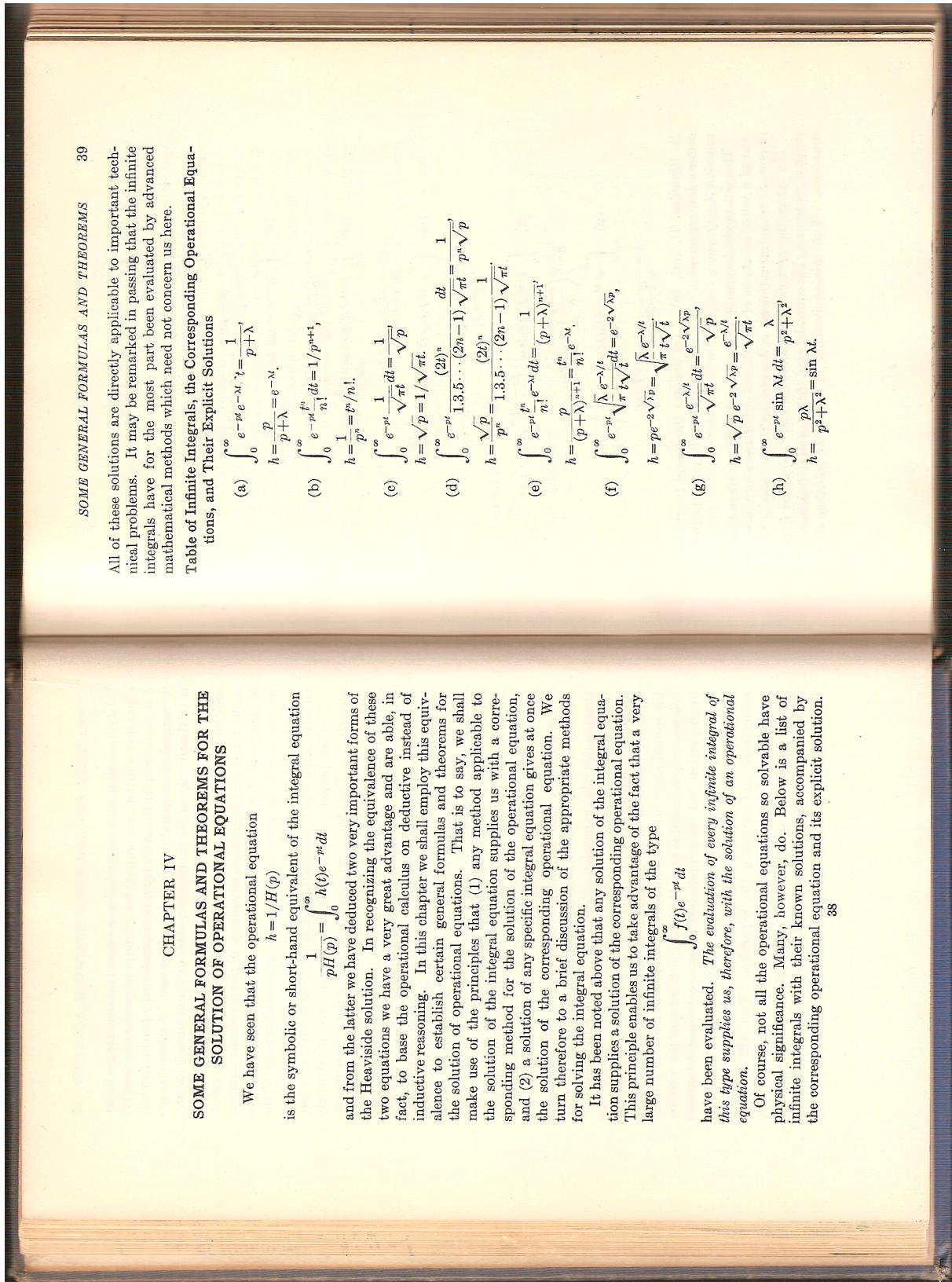


Figura 2.6: Primeira tabela com os “pares de transformadas.”

have been evaluated. *The evaluation of every infinite integral of this type supplies us, therefore, with the solution of an operational equation.*

Of course, not all the operational equations so solvable have physical significance. Many, however, do. Below is a list of infinite integrals with their known solutions, accompanied by the corresponding operational equation and its explicit solution.

Com tal equivalência em mente, percebe-se que a solução de uma equação operacional pode geralmente ser reduzida em simples comparação com a tabela de integrais, fato que *Heaviside* não reconheceu¹⁶. Muitas das soluções que ele obteve para problemas de linhas de transmissão eram extremamente complicadas, devido ao uso de séries de potências. Relembrando seu “método experimental”, baseado em casos bem sucedidos de resolução, *Heaviside* havia chegado na seguinte regra [Petrova, 1987], apesar de nunca tê-la explicitado formalmente:

1. Expandir o ramo direito da equação operacional em série de potências descendentes de p :

$$h(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{H(p)} = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \dots \frac{a_n}{p^n};$$

2. Substituir os termos em $\frac{1}{p^n}$ por $\frac{t^n}{n!}$. A equação é convertida por sua vez em uma série de potências ascendentes de t :

$$h(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \dots \frac{a_n}{n!}t^n.$$

Na prática, a expressão $h(t) = \frac{1}{H(p)}$ é puramente simbólica e não faz sentido algum. Até então, a ideia de “transformada” não estava ainda consolidada, com a noção de domínio do tempo e da frequência. Por isso, era comum “misturar” na mesma equação, termos em função de “ p ” e “ t ”, que normalmente representava o tempo. Em verdade, esta foi a primeira tentativa de criar uma notação que relacionasse uma função temporal com sua transformada e *vice-versa*. Dessa forma, uma substituição foi feita em lugar do sinal de igualdade, por uma notação mais adequada como $h(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{H(p)}$. Atualmente, não é novidade a notação para a transformada de *Laplace*, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$; ou para a transformação de *Carson* $p\mathcal{L}\{f(t)\} = pF(s) = F(p)$ [Carson, 1932].

¹⁶Um exemplo prático mostrando o uso das equações de *Duhamel*, em comparação com o método conhecido das “tabelas de transformadas” é apresentado no apêndice B.

Os predecessores de *Heaviside* já haviam empregado o operador $f(\frac{d}{dx})$ em potências ascendentes e descendentes para a diferenciação, i.e., eles já haviam se utilizado do método desenvolvido por *Heaviside* para a solução de equações diferenciais ordinárias. O que o distingue, todavia, é a interpretação das soluções obtidas dessa forma. Ele entendeu que o desenvolvimento em potências descendentes do operador p expressava soluções em um domínio finito do argumento, enquanto que o segundo tipo de expansão descrevia a solução assintótica com o argumento tendendo ao infinito (apesar de nunca haver utilizado o termo expansão assintótica). Em outras palavras, de acordo com a atual conjuntura do Cálculo Operacional, que é baseado em transformações de *Laplace* ou modificações nela, o entendimento de *Heaviside* com relação às duas expansões corresponde ao fato de que o comportamento assintótico de uma função nas vizinhanças do zero determina o comportamento assintótico da sua transformada de *Laplace* no infinito, tratando-se, em essência, dos *Teoremas dos Valores Inicial e Final* [Petrova, 1987]:

$$\begin{aligned} f(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \\ f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para equações diferenciais ordinárias, este fato é, sem dúvida, trivial, mas é essencial para entendermos a essência das expansões no caso de equações diferenciais parciais. Porém, é necessário falar da ferramenta mais simples e poderosa para este propósito: o *Teorema da Expansão de Heaviside*.

2.6 O Teorema da Expansão

Pode-se afirmar que a maior contribuição de *Heaviside* para a afirmação do Cálculo Operacional e que hoje engloba as diversas técnicas de soluções de problemas com a transformada de *Laplace*, foi o famoso “Teorema da Expansão”. Ainda utilizado atualmente para obter a transformada inversa, é a prova viva do gênio de *Heaviside*, já que foi por ele estabelecido sem qualquer prova matemática.

Teorema 1 (Expansão de *Heaviside*). Se a equação operacional é uma função racional da forma $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, então a solução explícita no tempo (transformada inversa) pode ser expressa como:

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_k t} - 1}{\alpha_k} \quad (2.45)$$

Em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são as raízes do polinômio $D(p)$ ou polos de $G(p)$.

Uma demonstração simples do Teorema da Expansão, bem diferente da que *Heaviside* obteve, pode ser derivada da seguinte forma:

Demonstração. Seja equação operacional (Transformada) da forma $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$. Se

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são as raízes do polinômio $D(p)$ (polos de $G(p)$), pode-se expandir $G(p)$ em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2} + \frac{A_3}{p - \alpha_3} + \dots \\ &+ \frac{A_k}{p - \alpha_k} + \dots + \frac{A_n}{p - \alpha_n}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação 2.46 por $p - \alpha_k$, vem:

$$\frac{N(p)}{D(p)}(p - \alpha_k) = (p - \alpha_k) \left[\frac{A_1}{p - \alpha_1} + \dots + \frac{A_n}{p - \alpha_n} \right] + A_k;$$

fazendo $p \rightarrow \alpha_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{p \rightarrow \alpha_k} \frac{N(p)}{D(p)}(p - \alpha_k) \\ &= \lim_{p \rightarrow \alpha_k} N(p) \cdot \lim_{p \rightarrow \alpha_k} \frac{p - \alpha_k}{D(p)} \\ &= N(\alpha_k) \cdot \lim_{p \rightarrow \alpha_k} \frac{p - \alpha_k}{D(p)}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de l'Hospital na fração $\frac{p - \alpha_k}{D(p)}$, vem:

$$A_k = N(\alpha_k) \cdot \lim_{p \rightarrow \alpha_k} \frac{1}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\}}.$$

Tomando o limite¹⁷, tem-se:

$$A_k = \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\}}.$$

Dessa forma, a igualdade 2.46 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{N(\alpha_1)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_1)\}} \cdot \frac{1}{p - \alpha_1} + \frac{N(\alpha_2)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_2)\}} \cdot \frac{1}{p - \alpha_2} + \dots \\ &+ \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\}} \cdot \frac{1}{p - \alpha_k} + \dots + \frac{N(\alpha_n)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_n)\}} \cdot \frac{1}{p - \alpha_n}. \end{aligned}$$

Como a Transformada inversa, $\mathcal{T}^{-1} \left\{ \frac{a}{p-a} \right\} = e^{at} - 1$ (utilizando uma notação similar à

¹⁷Na prática, este procedimento consiste no cálculo do resíduo de uma função racional, que vale A_k . O Teorema e o método dos resíduos são tratados na caixa da página 37.

$\mathcal{L}\{\cdot\}$ para a Transformada de *Laplace*), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{N(\alpha_1)}{\frac{d}{dp}\{D(\alpha_1)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_1 t} - 1}{p - \alpha_1} + \frac{N(\alpha_2)}{\frac{d}{dp}\{D(\alpha_2)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_2 t} - 1}{p - \alpha_2} + \dots \\ &+ \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp}\{D(\alpha_k)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_k t} - 1}{p - \alpha_k} + \dots + \frac{N(\alpha_n)}{\frac{d}{dp}\{D(\alpha_n)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_n t} - 1}{p - \alpha_n}. \end{aligned}$$

Logo, tem-se a *fórmula da Expansão*:

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1} \left\{ \frac{N(p)}{D(p)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp}\{D(\alpha_k)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_k t} - 1}{\alpha_k} \quad (2.47)$$

□

Em comparação com outros métodos existentes, o Teorema da Expansão provê uma forma rápida e extremamente simples de calcular a transformada inversa. De fato, o *Teorema da Expansão de Heaviside* foi a **ferramenta** que possibilitou a utilização prática do Cálculo Operacional e da Transformada de *Laplace* em engenharia. Outros métodos, apesar de eficazes, são geralmente dispendiosos por exigirem operações complexas, como integrais de linha em contornos fechados ou expansões assintóticas em séries de potências, geralmente distantes do dia-a-dia do engenheiro, o que os tornam muitas vezes impraticáveis.

2.7 Solução de uma EDP via fórmula de Heaviside

A transformada de *Laplace* têm sido amplamente utilizada na solução de equações diferenciais ordinárias, lineares e invariantes no tempo, com extensa literatura disponível. Contudo, tais métodos são extremamente úteis na resolução de equações diferenciais parciais [Duffy, 1994]. O Cálculo Operacional desenvolvido por *Heaviside* teve como principal objetivo a resolução de EDP's, sendo uma das principais a que descreve o comportamento das linhas de transmissão, que desafiava os cientistas e engenheiros da época. *Heaviside* foi, com mérito, o primeiro a resolvê-lo [Lützen, 1979]. Considere uma linha de comprimento l aberta em uma de suas extremidades, como ilustrado pela Figura 2.7.

Na outra extremidade é aplicada uma f.e.m. $v(t) = V_0\varphi(t)$, que significa uma entrada de tensão arbitrária. Supondo-se que a linha seja sem perdas e que L e C são, respectivamente, a indutância e a capacidade por unidade de comprimento da linha, propõe-se calcular a distribuição de tensão e corrente ao longo da linha após a aplicação da tensão $v(t)$.

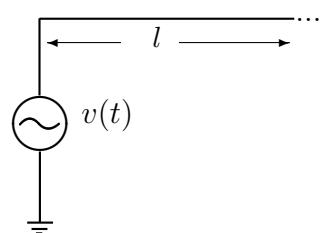


Figura 2.7: Linha de transmissão “semi-infinita”.

As equações diferenciais de distribuição de potencial $v(x, t)$ e corrente $i(x, t)$ ao longo da linha são:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (2.48)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Com as condições iniciais e de contorno:

$$v(0, 0) = H(t),$$

$$v(x, 0) = 0,$$

$$i(x, 0) = i(l, 0) = 0,$$

deduz-se que a linha está em repouso antes da aplicação da f.e.m.. Utilizando o símbolo \mathcal{T} para a transformada de *Carson-Laplace*, tem-se:

$$\mathcal{T}\{v(x, t)\} = V(x, p) = V; \quad (2.50)$$

$$\mathcal{T}\{i(x, t)\} = I(x, p) = I. \quad (2.51)$$

Dessa forma, tem-se as transformadas:

$$\mathcal{T}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = \frac{dV}{dx}; \quad (2.52)$$

$$\mathcal{T}\left\{\frac{\partial i}{\partial x}\right\} = \frac{dI}{dx}; \quad (2.53)$$

$$\mathcal{T}\left\{\frac{\partial i}{\partial t}\right\} = pI - pi(x, 0) = pI; \quad (2.54)$$

$$\mathcal{T}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = pV - pv(x, 0) = pV. \quad (2.55)$$

Aplicando as transformadas nas equações 2.48 e 2.49, vem:

$$-\frac{dV}{dx} = LpI; \quad (2.56)$$

$$-\frac{dI}{dx} = CpV. \quad (2.57)$$

Ou, derivando com relação a x , tem-se:

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = Lp \frac{dI}{dx}; \quad (2.58)$$

$$-\frac{d^2I}{dx^2} = Cp \frac{dV}{dx}. \quad (2.59)$$

Comparando as equações 2.59 com 2.56 e 2.58 com 2.57, tem-se:

$$\frac{d^2V}{dx^2} - LCp^2V = 0; \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} - LCp^2I = 0. \quad (2.61)$$

Tomando $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tem-se:

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{p^2}{\vartheta^2}V = 0; \quad (2.62)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} - \frac{p^2}{\vartheta^2}I = 0. \quad (2.63)$$

E ainda, fazendo-se $\frac{p^2}{\vartheta^2} = q^2$, as equações diferenciais parciais (EDP's) que descrevem a distribuição de tensão e corrente ao longo da linha são agora transformadas em equações diferenciais ordinárias (EDO's):

$$\frac{d^2V}{dx^2} - q^2V = 0; \quad (2.64)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} - q^2I = 0. \quad (2.65)$$

Sempre que um matemático vê uma função proporcional à sua derivada (ou derivada segunda, neste caso), a palavra *exponencial* desonta em sua mente. Dessa forma, tratando q como uma constante, pode-se assumir a solução da equação operacional para a tensão como¹⁸:

$$V(x, q) = Ae^{qx} + Be^{-qx}. \quad (2.66)$$

Derivando a equação 2.66 com relação a x e utilizando a equação 2.56, vem:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= Aqe^{qx} - Bqe^{-qx} = -LpI \\ A\frac{p}{\vartheta}e^{qx} - B\frac{p}{\vartheta}e^{-qx} &= -LpI. \end{aligned}$$

Isolando-se o valor de I , vem:

$$\begin{aligned} I(x, q) &= \frac{1}{\vartheta L} [Be^{-qx} - Ae^{qx}] \\ &= \frac{\sqrt{LC}}{L} [Be^{-qx} - Ae^{qx}] \\ &= \sqrt{\frac{C}{L}} [Be^{-qx} - Ae^{qx}]. \end{aligned}$$

¹⁸Imagine que a solução seja da forma $V = Ce^{\alpha x}$. Substituindo na equação 2.64, encontra-se $\alpha = \pm\sqrt{q^2}$, e então a solução será dada pela equação 2.66.

Fazendo $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ a impedância característica da linha, chega-se a:

$$I(x, q) = \frac{1}{Z_c} [Be^{-qx} - Ae^{qx}] , \quad (2.67)$$

que é a solução operacional para a distribuição de corrente.

Na “infância” dos métodos operacionais, dentre eles o cálculo operacional, *Heaviside* fez muito uso dos famigerados *operadores impedância* na resolução de equações operacionais [Heaviside, 1892b, p.355, Heaviside, 1893c]. Hoje, na idade madura dos métodos que englobam a transformada de *Laplace*, tais operadores são conhecidos pelo *método das impedâncias complexas*, empregado na modelagem de sistemas lineares, não se restringindo apenas a sistemas elétricos, mas também mecânicos, termodinâmicos etc.

Considerando *primeiramente* uma linha “semi-infinita” (i.e., $x > 0$), com as condições iniciais e de contorno em $x = 0$ e $x = \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} i(l, t) &= 0 ; \\ v(x, 0) &= 0 ; \\ v(0, t) &= v(t) = V_0\varphi(t) . \end{aligned}$$

Além disso, tomando $\mathcal{T}\{V_0\varphi(t)\} = V_0\Phi(p)$ e $\mathcal{T}\{i(l, t)\} = I(l, p)\}$, após aplicar-se as condições de contorno, obtém-se o sistema de duas equações:

$$V_0\Phi(p) = A + B , \quad (2.68)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I = \frac{1}{Z_c} \lim_{l \rightarrow \infty} [Be^{-ql} - Ae^{ql}] = 0 . \quad (2.69)$$

Ora, com $l \rightarrow \infty$, a equação 2.69 será satisfeita apenas quando $A = 0$. Consequentemente na equação 2.68:

$$B = V_0\Phi(p) .$$

Assim sendo, a equação 2.66 torna-se:

$$V(x, p) = V_0e^{-qx}\Phi(p) , \quad (2.70)$$

em que $q = \frac{p}{\sqrt{LC}}$. Calculando a transformada inversa, vem:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \mathcal{T}^{-1}\{V(x, p)\} \\ &= \mathcal{T}^{-1}\{V_0\Phi(p)e^{-qx}\} . \end{aligned}$$

Segundo a propriedade de deslocamento, $\mathcal{T}\{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau}F(p)$, então:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \mathcal{T}^{-1} \left\{ V_0 \Phi(p) e^{-p \cdot \frac{x}{\vartheta}} \right\} \\ &= V_0 \varphi \left(t - \frac{x}{\vartheta} \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

A equação 2.71 representa portanto uma “onda de tensão” que se propaga com velocidade $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, em que $V_0 \varphi(t)$ é a tensão de entrada. Da mesma forma, conclui-se que:

$$\begin{aligned} I(x, p) &= \frac{V_0 \Phi(p) e^{-qx}}{Z_c} \\ &= \frac{V_0 \Phi(p) e^{-p \cdot \frac{x}{\vartheta}}}{Z_c}. \end{aligned}$$

Então, a solução para a distribuição de corrente para o cabo “semi-infinito” é dada por:

$$i(x, t) = \frac{V_0}{Z_c} \varphi \left(t - \frac{x}{\vartheta} \right). \quad (2.72)$$

Como extensão do mesmo problema, considere desta vez que o cabo possui um comprimento definido l , no qual é aplicado uma tensão do tipo degrau, $v(t) = H(t)$. Isto significa novas condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= H(t), \\ i(l, 0) &= 0. \end{aligned}$$

A partir da equação 2.66:

$$V(x, q) = A e^{qx} + B e^{-qx};$$

aplicam-se as novas condições de contorno e obtém-se, dessa forma, o sistema de duas equações:

$$A + B = H(t), \quad (2.73)$$

$$-A e^{ql} + B e^{-ql} = 0. \quad (2.74)$$

Multiplicando-se a equação 2.73 por e^{ql} e somando-a com a equação 2.74, obtém-se:

$$B (e^{ql} + e^{-ql}) = H(t) e^{ql};$$

ora, como $\cosh ql = \frac{e^{ql} + e^{-ql}}{2}$, tem-se:

$$B = \frac{e^{ql}}{2 \cosh ql} H(t).$$

De maneira análoga, chega-se a:

$$A = \frac{e^{-ql}}{2 \cosh ql} H(t).$$

Substituindo-se os valores de A e B na equação 2.66, chega-se a:

$$\begin{aligned} V(x, q) &= \frac{e^{q(x-l)}}{2 \cosh ql} \cdot H(t) + \frac{e^{q(l-x)}}{2 \cosh ql} \cdot H(t) \\ &= \frac{1}{2 \cosh ql} \cdot H(t) \cdot [e^{q(l-x)} + e^{-q(l-x)}] \\ &= \frac{1}{2 \cosh ql} \cdot H(t) \cdot 2 \cosh q(l-x) \\ &= \frac{\cosh q(l-x)}{\cosh ql} H(t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Sabendo que¹⁹ $\cosh j\theta = \cos \theta$, fazendo a mudança de variável $s = jq \Rightarrow s^2 = -q^2$, chega-se a solução operacional do problema 2.76:

$$V(x, s) = \frac{\cos s(l-x)}{\cos sl} H(t), \quad (2.76)$$

em que:

$$s = jq = j \frac{p}{\vartheta} = jp\sqrt{LC} \Rightarrow s^2 = -p^2 LC.$$

Para encontrar a solução temporal para a distribuição de tensão ao longo do cabo, $v(x, t)$, faz-se necessário calcular a transformada inversa. Para este feito, a exemplo de Heaviside, faz-se uso do “Teorema da Expansão” [equação 2.45]:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\}} \cdot \frac{e^{\alpha_k t} - 1}{\alpha_k},$$

em que os α_k são os polos de $D(p)$. Dessa forma, da equação operacional, reconhece-se que:

$$V(x, s) = \frac{\cos s(l-x)}{\cos sl} H(t) = \frac{N(p)}{D(p)} H(t).$$

Como D no caso apresentado é função de s – i.e., $D = D(s(p))$ – a derivada deve ser calculada pela regra da cadeia:

$$\alpha_k \frac{d}{dp} \{D(\alpha_k)\} = p \frac{d}{dp} D(p) \Big|_{p=\alpha_k} = p \frac{d}{ds} D(s) \cdot \frac{ds}{dp}.$$

¹⁹Da equação de Euler, $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, em que $j = \sqrt{-1}$.

Ora, como

$$s^2 = -q^2 \Rightarrow s = \sqrt{-\frac{p^2}{\vartheta^2}},$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dp} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{p^2}{\vartheta^2}}} \cdot \left(\frac{-2p}{\vartheta^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{-2p}{\vartheta^2} \right); \text{ multiplicando por } \frac{p}{p} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{-p^2}{\vartheta^2} \right) \cdot \frac{1}{p}; \text{ mas } \frac{-p^2}{\vartheta^2} = s^2 \text{ então} \\ &= \frac{1}{s} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{s}{p}. \end{aligned}$$

Continuando,

$$\frac{d}{ds} D(s) = -l \sin sl;$$

logo,

$$\begin{aligned} p \frac{d}{dp} D(p) &= p \cdot (-l \sin sl) \cdot \frac{s}{p} \\ &= -sl \sin sl. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtém-se:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= - \sum \frac{\cos s(l-x)}{sl \sin sl} (e^{pt} - 1) \\ &= 1 - \sum \frac{\cos s(l-x)}{sl \sin sl} e^{pt}, \end{aligned} \tag{2.77}$$

em que os valores de s são as raízes positivas²⁰ de

$$\cos sl = 0,$$

exceto para $s = 0$. Isto significa que, exceto pela solução trivial,

$$sl = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$ Então:

$$s = \frac{1}{2} \frac{\pi}{l}, \frac{3}{2} \frac{\pi}{l}, \dots \tag{2.78}$$

²⁰As raízes negativas conduzem ao mesmo resultado.

Além disso, os valores de $p = \alpha_k$ podem ser obtidos da seguinte forma. Como:

$$\begin{aligned} s &= jq \\ &= j\frac{p}{\vartheta}; \\ s^2 &= -p^2 LC; \end{aligned}$$

então,

$$p = -j \frac{s}{\sqrt{LC}}.$$

Assim, obtém-se, finalmente, a solução temporal para a distribuição de tensão ao longo da linha de comprimento l , através da Transformada Inversa:

$$v(x, t) = 1 - \sum \frac{\cos s(l-x)}{sl \sin sl} e^{-j\frac{s}{\sqrt{LC}}t}. \quad (2.79)$$

Como já foi dito, o *Teorema da Expansão* foi (e ainda é!) a mais poderosa ferramenta do cálculo operacional. Apesar de sua prova existir somente para funções racionais, *Heaviside* usou, com sucesso, o mesmo procedimento para funções transcendentais, da forma mostrada no exemplo anterior. Aliás, *Heaviside*, que era notoriamente conhecido pela aversão ao rigor, não hesitou um segundo ao defrontar-se com *operadores fracionários* (que significavam derivadas fracionárias), como $p^{1/2}$, por exemplo. Eles já eram conhecidos na época, porém a atitude de *Heaviside* gerava preconceito e dificultava a aceitação das ideias que ele promovia [Nahin, 1991].

Como não poderia deixar de ser, algumas contribuições de *Heaviside* foram reconhecidas e ele acabou por tornar-se “*fellow*” da famosa *Royal Society* de Londres. Porém, *Heaviside* sequer chegou a pisar naquele solo, tendo tampouco ido buscar o prêmio em dinheiro a que fazia direito.

2.8 Integral de Inversão de Bromwich

Apesar das contribuições de *Carson* e outros na formalização da obra de *Heaviside*, *Thomas John I'Anson Bromwich* (★1875 † 1929) foi o primeiro a explicar – e de certa forma justificar – a abordagem de *Heaviside*, usando *Teoria de Funções de Variáveis Complexas* [Bromwich, 1916]. Ele percebeu que a solução operacional – que nada mais é que a transformada inversa – é dada pela integral imprópria:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{pH(p)} dp, \quad (2.80)$$

que pode ser avaliada ao longo da linha que corta o eixo real, como ilustra a figura 2.8(a) e com os polos do integrando situados no lado esquerdo da reta. Esta integral de linha é

chamada de *integral de inversão de Bromwich* ou *integral de Mellin-Fourier*. Mas, como ele conseguiu? Ele começa com a forma complexa da integral de *Fourier*²¹:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u} du. \quad (2.81)$$

Se, para melhor compreensão, for substiuído u por t , o que é lícito, vem:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.82)$$

Porém, para uma $f(t)$ causal ($f(t) = 0$ para $t < 0$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.83)$$

Fazendo $\Phi(t) = e^{-\sigma t}f(t)$, em que σ é uma constante positiva, pode-se rescrever a integral:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_0^{\infty} e^{-\sigma t}f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.84)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (2.85)$$

Fazendo $s = \sigma + j\omega \Rightarrow ds = jd\omega \Rightarrow d\omega = \frac{ds}{j}$. Levando em consideração os limites de ω , a integral é rescrita com os limites da nova variável s :

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{(s-\sigma)t} ds \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (2.86)$$

$$= \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} ds \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt. \quad (2.87)$$

E como $\Phi(t) = e^{-\sigma t}f(t)$, tem-se:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} ds \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt. \quad (2.88)$$

²¹Que será obtida no capítulo 3.

Ora, a segunda integral na equação 2.88 nada mais é que a transformada de *Laplace*, $F(s)$. Logo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (2.89)$$

que é denominada integral de Inversão de *Bromwich*. Contudo, para facilitar os cálculos, pode-se fazer uso da teoria funções complexas. O caminho mostrado na figura 2.8(a) pode ser transformado no contorno fechado da Figura 2.8(b), com $g = \sqrt{R^2 - a^2}$ e com os polos de $F(s)e^{st}$ ou $\frac{e^{pt}}{pH(p)}$ em seu interior. Dessa forma, a integral de linha é transformada em

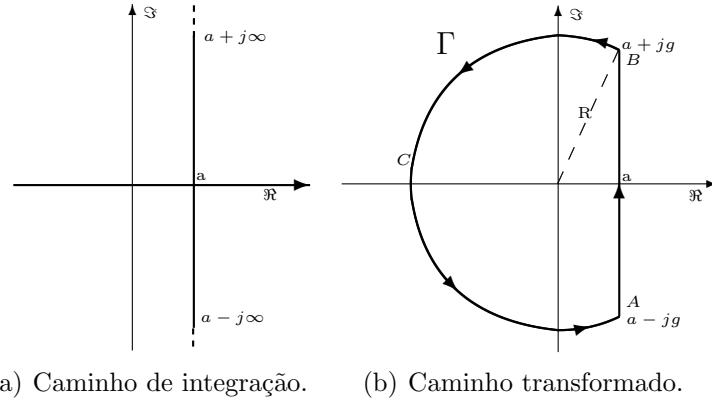


Figura 2.8: Contornos de integração da integral de inversão de *Bromwich*.

uma integral de contorno²²:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{e^{pt}}{pH(p)} dp, \quad (2.90)$$

ou, em termos da transformada de *Laplace*:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(s)e^{st} ds. \quad (2.91)$$

Utilizando a forma das equações 2.90 ou 2.91, pode-se facilmente avaliar a integral pelo método dos resíduos. Segundo o *lemma de Jordan*, fazendo-se $R \rightarrow \infty$, a integral ao longo

²²Geralmente avaliada no sentido anti-horário.

do caminho \widehat{BCA} tende a zero. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{pH(p)} dp \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-jg}^{c+Jg} F(s)e^{st} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \left\{ 2\pi j \sum_{k=0}^{\rho-1} \text{Res} [F(s)e^{st}]_{s=s_k} \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\rho-1} \text{Res} [F(s)e^{st}]_{s=s_k},
 \end{aligned}$$

em que $F(s)e^{st}$ possui ρ polos $s_0, s_1, \dots, s_{\rho-1}$ de ordem m .

O método dos resíduos fornece um método de integração elegante e poderoso, que envolve curvas fechadas em \mathcal{C} ; inclusive para resolver integrais reais.

Teorema 2 (Teorema do resíduo de *Cauchy*). Se $f(z)$ é uma função analítica em um contorno fechado C (tomado no sentido positivo - anti-horário) exceto nos pontos z_1, z_2, \dots, z_n em que $f(z)$ possui singularidades, então

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{j=1}^n \text{Res} [f(z)]_{z=z_j}, \quad (2.92)$$

em que $\text{Res} [f(z)]_{z=z_j}$ denota o resíduo de $f(z)$ para a singularidade z_j .

A designação “resíduo” foi introduzida em 1826 por *Augustin Louis Cauchy* ($\star 1789 \dagger 1857$) para a diferença das integrais de uma função sobre dois caminhos diferentes, com as mesmas extremidades, delimitando uma região onde a única singularidade é o polo da função. O nome resíduo traduz literalmente a ideia de uma componente residual que, nas condições indicadas, faltava a uma das integrais para dar o valor da outra. A fórmula mais comum para o cálculo de resíduos é:

$$\text{Res} [f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \right\}. \quad (2.93)$$

Porém a grande utilidade das integrais de contorno está no fato de matemáticos, como *C. Jordan*, terem percebido que era possível transformar uma integral de linha em uma integral de contorno, adicionando arcos, e por terem divisado que ao fazerem o raio dos arcos tenderem ao infinito, as integrais sobre eles tendiam a zero, restando apenas o caminho original. Isto pode ser observado pelo lema de *Jordan*:

Lema 1 (Lema de Jordan). Considere C_R um arco circular com raio R e centro na origem. Se $R \rightarrow \infty$, $f(z) \rightarrow 0$ uniformemente à medida que $R \rightarrow \infty$. Então,^a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \text{ com } a > 0. \quad (2.94)$$

^aA demonstração deste importante lema pode ser encontrada em [Duffy, 1994, p. 19].

2.9 Solução de uma EDP via Integral de *Bromwich*

Considere um sólido “semi-infinito” do qual o limite existente é constituído por um plano perpendicular ao eixo $0x$, na origem, tal como ilustrado pela Figura 2.9. Supõe-se que em $t < 0$, sua temperatura seja zero e que, no instante inicial, uma temperatura constante u_0 é aplicada e mantida na face do sólido em $x = 0$.

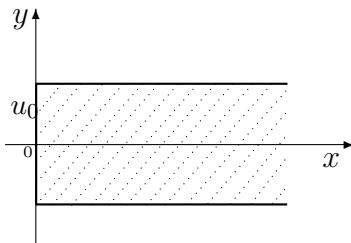


Figura 2.9: Sólido condutor de calor.

Deseja-se calcular a temperatura de um ponto qualquer da barra em função de sua distância x à origem, a partir do instante inicial, i.e., $u(x,t)$ [Duffy, 1994, Vianna, 1971, Carslaw e Jaeger, 1941]. A forma como o calor é difundido pela barra é dada pela *equação do calor*:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.95)$$

em que κ é a chamada *difusividade*²³ térmica do sólido.

Seguindo o curso de desenvolvimento das técnicas operacionais, será utilizada desta vez a transformada *Laplace*. Mais especificamente, a transformada será aplicada duas vezes: a primeira para transformar a EDP em uma EDO e a segunda, para transformar a EDO em uma equação algébrica. Posteriormente, será aplicada a transformada inversa no intuito de encontrar a solução temporal [serão utilizadas as variáveis s e r para indicar

²³A difusividade é a grandeza $\kappa = \frac{K}{\sigma\mu}$, em que K é a condutividade térmica, σ é o calor específico da barra e μ é o volume (ou massa) específico(a) do sólido, também chamado densidade.

as transformações]. As condições iniciais e de contorno para o problema são:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0; \\ u(0, t) &= u_0; \\ u'(0, t) &= A; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &< \infty \forall x, t \text{ [temperatura limitada].} \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de *Laplace* e a condição inicial no primeiro membro da equação 2.95, obtem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} &= sU(x, s) - u(x, 0) \\ &= sU(x, s). \end{aligned}$$

Da definição de transformada, $\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt = U(x, s) - u(x, 0)$ [que pode ser obtida diretamente integrando por partes], tem-se:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dt = \frac{d^2 U(x, s)}{dx^2}.$$

Retornando à equação 2.95, tem-se a equação operacional, uma EDO de segunda ordem:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{s}{\kappa} U \text{ em que: } U = U(x, s). \quad (2.96)$$

Para resolver a EDO obtida na equação 2.96, aplica-se novamente a transformada de *Laplace*. Desta vez, com relação à variável x :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U(x, s)\} &= V(r, s); \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 U}{dx^2} \right\} &= r^2 V(r, s) - rU(0, s) - \frac{d}{dx} U(0, s). \end{aligned}$$

Ora, $U(0, s) = \mathcal{L}\{u_0\} = \frac{u_0}{s}$. Da mesma forma, das condições de contorno, $U'(0, s) = \frac{A}{s}$. Substituindo na equação 2.96 tem-se:

$$\begin{aligned} V(r, s) &= \frac{u_0}{s} \cdot \frac{r}{r^2 - \frac{s}{\kappa}} + \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{s^2 - \frac{s}{\kappa}} \\ &= \frac{u_0}{s} \cdot \frac{r}{r^2 - (\sqrt{\frac{s}{\kappa}})^2} + \frac{A}{s\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}{s^2 - (\sqrt{\frac{s}{\kappa}})^2}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Como $\mathcal{L}\{\sinh wt\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ e $\mathcal{L}\{\cosh wt\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}$, a transformada inversa da equação 2.97

será:

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s} \cdot \cosh \sqrt{\frac{s}{\kappa}} x + \frac{A}{s \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{\kappa}} x. \quad (2.98)$$

Rescrevendo a equação 2.98 na forma exponencial, tem-se:

$$\begin{aligned} U(x, s) &= \frac{u_0}{2s} \left(e^{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x} \right) + \frac{A}{2s\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \left(e^{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x} \right) \\ &= \frac{1}{2s} \left(u_0 + \frac{A}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right) e^{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x} + \frac{1}{2s} \left(u_0 - \frac{A}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right) e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Mas, uma condição do problema estabelece que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0$. Logo, pelo *teorema do valor inicial*²⁴, $u(x, 0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(x, s)$. Então:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U(x, s) \\ 0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{A}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right) e^{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x} + \left(u_0 - \frac{A}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right) e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Ora, com $s \rightarrow \infty$, o segundo membro tende a zero. Isto será verdade se:

$$u_0 + \frac{A}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} = 0 \Rightarrow A = -u_0 \sqrt{\frac{s}{\kappa}}. \quad (2.101)$$

Substituindo a equação 2.101 na expressão 2.99, obtém-se:

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}, \quad (2.102)$$

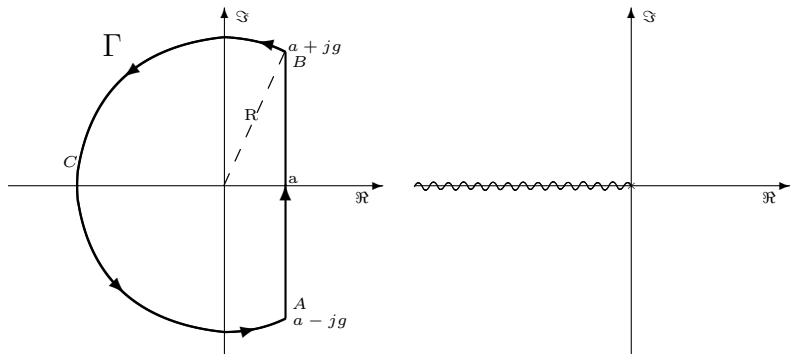
que é a solução operacional. Para encontrar a solução temporal, a partir da equação 2.102, basta encontrar a transformada inversa. Uma das alternativas consiste em usar a integral de *Bromwich*:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{U(x, s)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{st} U(x, s) ds \\ &= \frac{u_0}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{st-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Como mostrado na seção 2.8, o caminho de integração pode ser modificado [Figura 2.10(a)] para permitir o uso de uma integral de contorno e o método dos resíduos. No entanto, como ilustrado pela Figura 2.10(b), a função $F(x, s) = \frac{1}{s} e^{st-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}$ é plurívoca²⁵, possuindo um ponto de ramificação em $s = 0$.

²⁴Consultar a caixa da página 24.

²⁵Uma função é dita plurívoca se, para um valor dado de uma variável z , existem dois ou mais valores

(a) Contorno de *Bromwich*.(b) Representação dos pontos singulares de $F(x, s)$.Figura 2.10: Contorno de *Bromwich* e pontos de ramificação da função plurívoca $F(x, s)$.

O nome “ramificação” vem do inglês *Branch point*: na prática, há infinitos pontos singulares – polos e zeros – na função $F(x, s) = \frac{1}{s}e^{st-x}\sqrt{\frac{s}{\kappa}}$. Isto ocorre porque a função exibe a raiz quadrada de um número complexo em $\sqrt{\frac{s}{\kappa}}$ que, na prática, não tem nada de simples. Escrevendo “ s ” na forma polar, e.g., $s = \epsilon e^{j\theta}$, sua raiz quadrada fica $\sqrt{s} = \sqrt{\epsilon e^{j\theta}} = \epsilon^{1/2} e^{j\theta/2}$ para qualquer valor de θ . Para um aprofundamento maior, uma ótima opção é o clássico – e excelente – livro *The Fourier Integral and its Applications*, de Athanasios Papoulis, 1962 [Papoulis, 1962, p.287].

Em princípio, o contorno de integração deve circundar os polos da função. Então, como resolver o problema? Os físicos dizem frequentemente que se uma “coisa” é indesejada, deve-se tirá-la do caminho, ou ao menos contorná-la. Felizmente, a *análise complexa* permite “torcer” à vontade os contornos de integração; então, basta escolher um caminho que não passa pelo ponto de ramificação, como ilustra a Figura 2.11.

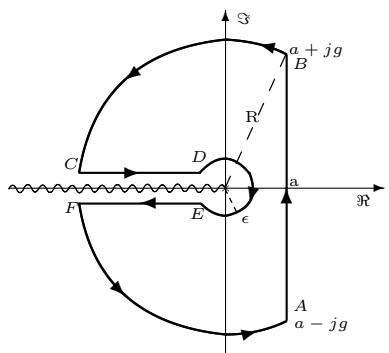


Figura 2.11: Circuito de integração.

Posteriormente, basta “encolher” o raio menor ϵ e “alongar” até o infinito o raio maior R . Como a integral em um circuito fechado que não contém polos é nula²⁶, após a deformação da curva, o resultado será devido aos resíduos dos polos da função $F(x, s)$. Dessa forma, é possível obter a solução geral para a transformada inversa:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} e^{st-x}\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \frac{ds}{s} = 0. \quad (2.104)$$

A integral para o contorno Γ corresponde ao somatório das integrais de linha em cada

$w = f(z)$ distintos.

²⁶Do teorema do resíduo de *Cauchy*.

trecho. Escrevendo de forma resumida, suprimindo os integrandos, tem-se:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(x, s) ds = 0 \quad (2.105)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FA} \right] = 0 \quad (2.106)$$

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{AB} = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FA} \right]. \quad (2.107)$$

Assim,

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{a-jg}^{a+jg} F(x, s) ds = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FA} \right]. \quad (2.108)$$

Em que $F(x, s) = \frac{1}{s} e^{st-x} \sqrt{\frac{s}{\kappa}}$ e $g = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Desde que $\left| \frac{1}{s} e^{-x} \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right| < \left| \frac{1}{s} \right|$ e pelo *lemma de Jordan*, à medida que $R \rightarrow \infty$, as integrais de linha ao longo de \widehat{BC} e \widehat{FA} tendem a zero, logo:

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(x, s) ds = -\frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{a-jg}^{a+jg} F(x, s) ds, \quad (2.109)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{a-jg}^{a+jg} F(x, s) ds = -\frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} \right] \quad (2.110)$$

$$= -\frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\int_R^\epsilon + \int_{DE} + \int_\epsilon^R \right]. \quad (2.111)$$

Tomando o limite, a integral sobre \widehat{DE} transforma-se em um circuito fechado. Além disso, fazendo-se em \overline{CD} $s = \rho e^{-j\pi}$ e em \overline{EF} $s = \rho e^{+j\pi}$, vem:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(x, s) ds = -\frac{1}{2\pi j} \left[- \int_{-\epsilon}^R F(x, \rho e^{-j\pi}) d\rho + \oint_0^{2\pi} F(x, s) ds + \int_{\epsilon}^R F(x, \rho e^{+j\pi}) d\rho \right]. \quad (2.112)$$

A suposição de se escolher $s = \rho e^{-j\pi}$ e $s = \rho e^{+j\pi}$ nos trechos \overline{CD} e \overline{EF} pode ser justificada da seguinte forma: Como um número complexo pode ser visto como um vetor girante (fasor), as integrais ao longo de \overline{CD} e \overline{EF} diferem apenas pelo argumento (fase), ou seja, um está “defasado” com relação ao outro de um ângulo de 2π radianos. Na prática, este artifício serve para indicar o sinal apenas, já que, pela identidade de *Euler*, sabe-se que $e^{2\pi j} = 1$.

A integral sobre o círculo menor (ϵ) será dada por $2\pi j$ vezes a soma dos resíduos (e, como a integral está sendo avaliada no sentido horário, deve-se acrescentar o sinal negativo)²⁷:

$$\begin{aligned} \oint_0^{2\pi} e^{st-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \frac{ds}{s} &= -2\pi j \cdot \text{Res}[F(x, s)]_{s=0} \\ &= -2\pi j \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{e^{st-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}}{s} \right] \\ &= -2\pi j. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Retornando à equação 2.112:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(x, s) ds &= -\frac{1}{2\pi j} \left[- \int_0^\infty e^{-\rho t} e^{-jx\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}} \frac{d\rho}{\rho} - 2\pi j + \int_0^\infty e^{-\rho t} e^{+jx\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}} \frac{d\rho}{\rho} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi j} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \left(e^{+jx\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}} - e^{-jx\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}} \right) \right] \frac{d\rho}{\rho} \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} \Rightarrow \rho = u^2 \kappa \Rightarrow d\rho = 2u\kappa du,$$

e substituindo na equação 2.114, obtém-se:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(x, s) ds = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 \kappa t} \sin ux \frac{du}{u}. \quad (2.115)$$

Fazendo um ligeiro avanço no tempo [assunto abordado na seção 3.6], pode-se afirmar²⁸

²⁷Consultar a caixa da página 37.

²⁸Em verdade, a equação 2.116 é a transformada de *Fourier* da função $e^{-a^2 x^2}$, chamada de *função Gaussiana*. Como se trata de uma função (ou sinal) real, a transformada de *Fourier* é escrita de maneira compacta, como mostrado. Este assunto é discutido com detalhes na seção 3.6.

que:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \quad (2.116)$$

Integrando-se os dois lados da equação 2.116 com relação a ω , de 0 a ω , realizando as mudanças de variáveis convenientes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 \kappa t} \sin ux \frac{du}{u} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\kappa t}} e^{-u^2} du \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Em que “ $\operatorname{erf}()$ ” é uma função especial chamada “*função erro*” e $1 - \operatorname{erf}() = \operatorname{erfc}()$ é a chamada “*função erro complementar*”. Dessa forma:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{st-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \frac{ds}{s} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\kappa t}} e^{-u^2} du \quad (2.118)$$

$$= 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \quad (2.119)$$

$$= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (2.120)$$

Substituindo o resultado da equação 2.120 na expressão 2.103, tem-se a transformada inversa através da integral de *Bromwich*, que fornece a distribuição de temperatura na barra condutora :

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0}{s} e^{st-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right\} = u_0 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (2.121)$$

Neste ponto, já é possível fazer uma comparação entre a abordagens de *Heaviside*, com a fórmula da expansão, e a integral de inversão de *Bromwich*. Em se tratando de funções racionais, ambas constituem ferramentas simples de encontrar a transformada inversa. Em verdade, um método “converge” para o outro, ou seja, no caso de funções racionais a fórmula para cálculo de resíduos²⁹ tem o formato similar à formula de *Heaviside*, que na prática também fornece os resíduos de uma função racional. Entretanto, o uso bem sucedido que *Heaviside* fez da sua fórmula para funções não-racionais é sua marca registrada. Isto se deve ao fato de *Heaviside* tê-la utilizado na resolução de equações diferenciais parciais, o que seria “proibitivo”³⁰. Em contrapartida, a utilização da integral de *Bromwich*

²⁹Equação 2.93.

³⁰Aliás, para *Heaviside*, a resolução de uma equação diferencial não era a solução de um problema em si. O que lhe interessava era compreensão do fenômeno físico.

na resolução de uma EDP, apesar de ser ferramenta poderosa, tem um “custo” muito alto por exigir integrais de contorno e conceitos avançados de análise complexa.

Antes de sua morte trágica, o matemático *Thomas Jonh I'Anson Bromwich* (★1875†1929) da universidade de *Cambridge*, na Inglaterra, trocou várias cartas com *Heaviside* [Nahin, 1991]. *Bromwich* estabeleceu o rigor faltante mostrando como interpretar o trabalho de *Heaviside* em termos de integrais complexas do “tipo *Laplace*”; Porém, seu suicídio em 1929, antes que pudesse publicar estas novas ideias, provavelmente contribuiu para seu relativo anonimato. Ele estendeu o trabalho de *Heaviside* para além da função degrau e para condições iniciais diferentes de zero, tendo descoberto inclusive que sua formulação poderia ser utilizada na resolução de EDP’s, mas não forneceu uma prova matemática. Porém, em um artigo em 1928 [Bromwich, 1928 apud Deakin, 1992, p. 272], *Bromwich* humildemente afirmou:

“Na prática, eu raramente encontrei exemplos nos quais a regra de *Heaviside* não pudesse ser prontamente aplicada, assim como meus próprios métodos.... Minhas experiências durante os catorze anos subsequentes [1914-1928], justificam a afirmação de que o método de *Heaviside* nunca me deixou desviar do caminho.”

Cronologicamente, *Bromwich* chegou em sua formulação da transformação inversa em 1916, cerca de uma década antes que *Carson* pudesse formular rigorosamente o cálculo operacional de *Heaviside*, chegando na integral do tipo *Laplace*. Porém, somente após o trabalho de *Carson*, pode-se conceber a noção de “completude” do método operacional da transformada de *Laplace*.

Surge também outra questão culminante: qual a diferença entre as transformadas de *Laplace*,

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

e a de *Carson*,

$$\mathcal{T} \{f(t)\} = G(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt ?$$

A resposta é: na prática, nenhuma, exceto pelo “*p*” a mais! Todas as fórmulas e teoremas da transformada de *Laplace* são similares às obtidas por *Carson* simplesmente por que foram obtidas da última (pelo menos no início). Aliás, a última leva ligeira vantagem, principalmente em equações diferenciais. Por exemplo, na avaliação de uma condição inicial em termos da transformada de *Laplace*, sempre é necessário escrever $\frac{f(0)}{s}$ como condição inicial de $f(t)$, o que não é necessário no método de *Carson*, pois neste caso a transformada de uma constante é a própria constante. Contudo, pode-se transitar livremente entre os dois métodos [consultar o exemplo do apêndice B].

Agora, o “fim” dessa longa história chega com a transição da variável “ p ”, do cálculo operacional de *Heaviside*, para a variável “ s ” – e da notação “ \mathcal{L} ” –, marcando o batismo da transformada de *Laplace*. Tal mudança deve-se ao matemático alemão e crítico ferrenho dos trabalhos de *Heaviside* e *Carson, Gustav Doetsch*, ao publicar, em 1937, o livro “*Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*” [Doetsch, 1937 apud Deakin, 1992]. No mesmo ano, *Louis A. Pipes* [Pipes, 1937] publicaria um artigo com a primeira aplicação prática do método em engenharia, com o título de “*Laplacian Transform Circuit Analysis*”. Nele, *Pipes* conservou a notação do operador “ p ”, mas não conservou a forma da integral “multiplicada por p ”. Estes últimos trabalhos transformaram o método operacional em tarefa rotineira para as gerações de engenheiros do porvir, espalhando-se rapidamente pelo mundo como teoria “consolidada”.

Capítulo 3

A teoria do calor , séries e a transformada de *Fourier*

...Calor, assim como a gravidade, penetra toda a substância do universo, seus raios ocupam todas as partes do espaço.

— Jean-Baptiste Joseph Fourier, prefaciando seu livro *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822.

3.1 Prelúdio

A transformada de *Fourier*, em conjunto a transformada de *Laplace*, constitui, provavelmente, a *assinatura matemática* do engenheiro eletricista. Juntamente com as séries de *Fourier*, desempenha importante papel em diversas áreas, desde comunicações, processamento de sinais, sistemas de controle, antenas, além de ser uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas de valor de contorno (EDPs), embora com um poderio relativamente menor que a transformada de *Laplace* em alguns aspectos. Por exemplo, para calcular a resposta de um circuito elétrico a um dado valor de entrada (tensão ou corrente), a transformada de *Laplace* fornece a resposta transitória e permanente. Já a transformada de *Fourier*, limita-se ao regime permanente. Na prática, um fator de convergência [uma exponencial negativa] adicionado à transformada de *Fourier* leva diretamente à transformada de *Laplace*. A transformada de *Fourier* pode ser definida como uma soma [integral] ponderada de exponenciais de duração infinita:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt . \quad (3.1)$$

A transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega , \quad (3.2)$$

converte a transformada de volta para $f(t)$. Isto porém não é novidade. O nome “transformada de *Fourier*” refere-se ao grande físico-matemático francês *Jean-Baptiste Joseph*

Fourier ($\star 1768 \dagger 1830$), em razão de seu grande – em todos os aspectos – e aclamado livro *Théorie Analytique de la Chaleur*. No entanto, no desenvolvimento da chamada “análise de Fourier” e da “teoria da transformada de Fourier”, tratadas quase sempre como disciplinas separadas, grandes nomes desempenharam papel importante.

Após a criação do Cálculo Diferencial e Integral por *Newton* e *Leibniz*, os diversos ramos da ciência experimentavam uma explosão de atividade [Churchill, 1963]. A física-matemática atraía a atenção de grandes cientistas, fascinados com o desafiador problema das “cordas vibrantes”: imagine uma corda, perfeitamente elástica e com distribuição de massa uniforme, fixa em suas extremidades, como uma corda de um violino. Se uma força $f(x)$ for aplicada de modo a “colocar em ação” a corda, como esta se comportará? Muitos tentaram responder a esta questão, e as primeiras respostas começaram a surgir através do matemático inglês *Brook Taylor* ($\star 1685 \dagger 1731$), do francês *Jean Le Rond D'Alembert* ($\star 1717 \dagger 1783$) e dos matemáticos *Daniel Bernoulli* ($\star 1700 \dagger 1782$) e *Euler*, ambos suíços, já em meados do século XVIII. Os dois últimos conseguiram solucionar (pelo menos em parte) o problema, encontrando a solução da equação que representava o problema físico em questão, chamada de “*wave equation*” [equação de onda]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad (3.3)$$

sujeita às condições de contorno:

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0 \\ y(l, t) &= 0 \\ \partial y / \partial t|_{t=0} &= 0 \\ y(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

A solução encontrada por eles tinha a forma de uma série trigonométrica:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{k\pi c}{l}t\right). \quad (3.4)$$

Porém, a ideia que escapou por um triz a *Bernoulli*, *Euler* e companhia foi a de que ao aplicar a última condição inicial, que representa o deslocamento inicial da corda, [$y(x, 0) = f(x)$], chegar-se-ia ao impressionante resultado, de implicações ainda mais impressionantes:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad (3.5)$$

que mostrava – caso os coeficientes b_k fossem conhecidos – ser possível realizar uma soma infinita de funções *seno* para obter uma função qualquer! E talvez, por não acreditar

tarem que isto fosse possível, o desenvolvimento das séries trigonométricas parou por aí, problema que seria desvendado por *Fourier* anos mais tarde.

3.2 Teoria do calor

Não é absurdo afirmar-se que a observação da natureza é a mais fértil fonte de descobertas. São frequentes os casos de descobertas paralelas em mais de uma parte do globo, especialmente na matemática, considerada como linguagem universal. Por este motivo talvez, questões referentes à “paternidade” na ciência geram sempre debates acalorados.

A jornada de *Fourier* sobre a terra começa em 1768. Aos 24 anos, *Joseph Fourier* já servia como professor na *École polytechnique* e iniciou seus trabalhos sobre a propagação de calor em corpos sólidos. Para ele, o calor, assim como a gravidade, penetrava todas as substâncias do universo e permeava todos os espaços e ele se propôs, assim como *Newton*, a desvendar os segredos da propagação de calor, por meio de leis que regem tais fenômenos.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (★1768 † 1830), filho de um alfaiate, educado pela ordem de São Bento chegou a pensar em tomar ordens, mas, por uma ironia do destino, decidiu tornar-se professor de matemática, após passar pela *École polytechnique*, na França [Boyer, 1974]. A ironia está no fato de que a revolução francesa começou antes que ele pudesse fazer os seus votos da ordem dos beneditinos. *Fourier*, em meio ao mar bravio da revolução, quase perdeu [literalmente] a cabeça em duas ocasiões, mesmo tendo sido inicialmente favorável ao movimento. Outros cientistas, como *Lavoisier*, não sobreviveram à barbárie e foram levados à guilhotina. Muitos decidiram, pelo mesmo motivo deixar a França, mas *Napoleão*, aparentemente fez com que a perseguição aos intelectuais fosse interrompida: *Fourier* estava nesta “leva” e foi nomeado pelo ditador, aos 26 anos de idade, responsável pela área de matemática da recém criada *École Normale*. Aliás, *Napoleão* foi um grande entusiasta da ciência, tendo sido a *era Napoleônica* uma das mais frutíferas na história das ciências e engenharias. *Napoleão* apreciava conceder títulos pomposos de nobreza à elite intelectual da época. Da mesma forma que concedeu à *Laplace* o título de *marquês*, concedeu à *Fourier* o *baronato*, em 1809. Além do talento incontestável para a matemática, o Barão de *Fourier* também se dava muito bem como administrador: chegou a ser prefeito de *Grenoble* [Lathi, 2007].

Acreditava ele [Fourier, 1878] que :

“causas primárias são por nós desconhecidas, porém são sujeitas à leis *simples* e constantes, que devem ser descobertas por observação, sendo objetos de estudo da filosofia natural.”

A preocupação de *Fourier* não se baseava apenas em descobrir as “grandes verdades”, mas sim em determinar “a temperatura dos céus” [palavras do próprio *Fourier*], dos planetas, dos espaços infinitos. *Fourier* escrevia divinamente, mas não foi por seus talentos

literários que o físico escocês *William Thomson* ($\star 1804 \dagger 1907$), o célebre *Lord Kelvin*, certa vez afirmou que sua obra foi um grande poema: foram suas descobertas na matemática, que abriram campo para o que hoje é conhecida como “Análise de Fourier”, tão extensa quanto a própria natureza em si, que teve e ainda tem grande impacto na vida moderna.

Das três conhecidas formas de condução de calor: condução, convecção e irradiação, a condução de calor é, nos sólidos, o principal veículo de transmissão de energia térmica. Considerando dois meios, a transmissão ocorrerá caso exista um *gradiente* de temperatura entre eles, i.e., uma “taxa de variação” [espacial] da temperatura, que faz com que um *fluxo* de calor se processe do meio de mais alta para o de mais baixa temperatura.

Considere duas seções transversais de um sólido representadas por dois planos a temperaturas u e $u + \Delta u$ respectivamente, como ilustra a figura 3.1. Como o plano da direita está a uma temperatura maior, o gradiente “aponta” no sentido do vetor unitário \hat{n} , ou seja, o gradiente é um vetor que aponta na direção do crescimento de uma função $[\frac{\partial u}{\partial n} \hat{n}]$ é também chamada derivada direcional de u na direção de \hat{n}].

O *fluxo* ϕ de calor, responsável por equilibrar as temperaturas, será da mesma forma proporcional ao gradiente de temperatura, porém com sentido contrário à ele. Logo:

$$\phi = -K \frac{\partial u}{\partial n} \hat{n}, \quad (3.6)$$

em que a constante de proporcionalidade K é a chamada condutividade térmica do material. Se for considerada a transferência de calor através de uma área S em um volume V através dos planos x , y e z , tem-se:

$$\begin{aligned}\phi_x &= -K \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i}; \\ \phi_y &= -K \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j}; \\ \phi_z &= -K \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k};\end{aligned}$$

e, por isso,

$$\begin{aligned}\phi &= -K \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right\} \\ &= -K \vec{\nabla} u.\end{aligned} \quad (3.7)$$

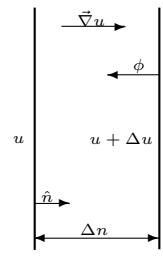


Figura 3.1: Planos a temperaturas diferentes.

O operador diferencial [vetorial] $\vec{\nabla}$ é chamado *Nabla*, um nome adotado por *James Clerk Maxwell* ($\star 1831 \dagger 1879$), em homenagem a um instrumento musical do antigo Egito – uma espécie de harpa – que possuía o formato triangular, similar ao símbolo adotado. Se u é uma função escalar de três dimensões, então $\vec{\nabla}u$ é, em coordenadas cartesianas, o vetor $\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$. Ao aplicar-se novamente o operador *Nabla* em $\vec{\nabla}u$, isto é, $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}u)$, o resultado será novamente uma função escalar chamada *Laplaciano* de u , denotado por ∇^2u , que consiste apenas na soma algébrica das três derivadas parciais [de segunda ordem] da função u . É uma operação que ocorre inúmeras vezes tanto na engenharia elétrica quanto na física, em especial no estudo do eletromagnetismo [Nahin, 2002, p.95].

No entanto, qual a natureza desse “fluxo”? De que se trata o calor? A resposta para esta pergunta é: não se sabe. Fluxo neste contexto é uma transferência de energia, mais especificamente energia térmica através de uma área específica, ao longo do tempo. Isto é, uma espécie de medida de *intensidade*:

$$\phi = \text{transferência de energia térmica} = \frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}}. \quad (3.8)$$

Mas a natureza intrínseca da energia é ainda desconhecida, apesar de muito se falar sobre ela. A *Primeira Lei da Termodinâmica* estabelece que a energia é uma propriedade do universo, que é constante e independente de qualquer processo. No caso da transferência de calor, isto significa dizer que a energia interna de um sistema é igual ao fluxo de calor que entra menos o que sai pela fronteira considerada deste sistema, em um instante considerado. E como a utilização da palavra “calor” neste contexto físico indica uma transferência de energia, sentenças como “quantidade de calor”, “muito calor” ou “pouco calor” não fazem sentido. O aumento ou diminuição da temperatura é apenas a consequência desta transferência.

Na época de *Fourier*, considerava-se o calor [assim como a eletricidade] semelhante a um fluido [líquido ou gás] que se difundia através de um corpo, de regiões com alta concentração para regiões com baixa concentração. Por exemplo, quando uma gota de tinta é adicionada a um copo de água límpida, pode-se observar as moléculas de tinta se difundirem. Esta analogia deu origem à teoria matemática do calor, mesma analogia feita anos mais tarde (1855) por *William Thomson*, o *Lord Kelvin* [Apêndice F], para explicar como a eletricidade “se espalhava” ao longo de um extenso cabo telegráfico – análise que, aliás, precede a descoberta das equações fundamentais do eletromagnetismo, as equações de *Maxwell* [Nahin, 2002, p.29-42]. Porém, a teoria baseada nas séries e na transformada de *Fourier* já não necessita de qualquer alicerce na física! Aliás, do ponto de vista puramente matemático, isto pouco importa: a matemática [moderna] concentra-se basicamente no estudo lógico das relações entre “certas entidades”, mas não da natureza dessas “entidades” em si.

Fazendo a mesma analogia de *Fourier*, supondo o fluxo de calor como um fluido que se difunde em um corpo, considere o pequeno elemento de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ de um sólido de volume V , condutividade térmica K , calor específico ρ e massa específica (densidade) μ , como ilustra a figura 3.2 [Spiegel, 1974]. O fluxo que entra na área EFGH por unidade de área do elemento de volume é

$$-K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x ,$$

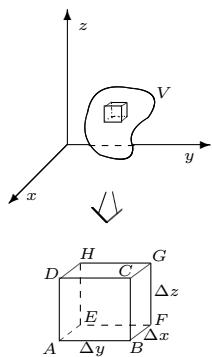


Figura 3.2: Fluxo de calor em um sólido.

em que u representa a temperatura. Desde que a área da face EFGH é $\Delta y \Delta z$, o calor transferido em um tempo Δt será, dessa forma:

$$-K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \Delta y \Delta z \Delta t . \quad (3.9)$$

De maneira análoga, o fluxo através da face ABCD será portanto:

$$-K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t . \quad (3.10)$$

O fluxo de calor que atravessa o volume ΔV na direção x será, por sua vez, o fluxo que entra menos o que sai no intervalo de tempo Δt :

$$\phi_{yz} = \left\{ K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right\} \Delta y \Delta z \Delta t . \quad (3.11)$$

O que ocorre de maneira similar para as direções y e z :

$$\phi_{yz} = \left\{ K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right\} \Delta y \Delta z \Delta t ; \quad (3.12)$$

$$\phi_{yz} = \left\{ K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_z \right\} \Delta y \Delta z \Delta t . \quad (3.13)$$

Então, o calor transferido através do volume ΔV é a soma das equações 3.11, 3.12 e 3.13, que é o calor necessário para aumentar a temperatura de um volume ΔV de uma quantidade Δu . Por outro lado, sabe-se que o calor necessário para elevar de uma quantidade Δu um corpo de massa m é $m\rho\Delta u$, em que $m = \mu\Delta V = \mu\Delta x \Delta y \Delta z$. Logo, a soma das equações de 3.11 a 3.13 será:

$$\rho\mu\Delta x \Delta y \Delta z \Delta u . \quad (3.14)$$

Igualando a equação 3.14 com a soma das equações 3.11 a 3.13, dividindo os dois membros por ΔV , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} + \frac{K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y}{\Delta y} + \\ & + \frac{K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_z}{\Delta z} = \rho \mu \frac{\Delta u}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tomando o limite da equação 3.15 fazendo Δt e ΔV tenderem a zero, chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho \mu \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Como K é constante,

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \mu \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.17)$$

que pode ser resscrito como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u. \quad (3.18)$$

Em que $u \equiv u(x, y, z, t)$ é a distribuição de temperatura ao longo do tempo e $k = \frac{K}{\rho \mu}$ é a chamada *difusividade* do material. A equação 3.18 é denominada “Equação do Calor” ou “*Heat Equation*”. Em se tratando da difusão de uma substância em um meio poroso, a função u denota *concentração* ao invés da *temperatura* – i.e., $u(x, y, z, t)$ representará a massa da substância que se difunde por unidade de volume do sólido – e a constante k será chamada *constante de difusão*. Nestas condições, a equação do calor é rebatizada e passa a ser chamada simplesmente de *equação da difusão* [Churchill, 1963, p.14].

Na dedução da equação do calor, buscou-se utilizar apenas noções de cálculo diferencial e integral básico. Contudo, uma demonstração simples e elegante pode ser encontrada em [Churchill, 1963, pp.10-14] utilizando cálculo vetorial, fazendo uso do belíssimo “Teorema da Divergência”.

3.3 O nascimento da série de *Fourier*

Fourier estudou exaustivamente problemas de condução de calor, tendo considerado sólidos de uma, duas e três dimensões. Em 21 de dezembro de 1807 [Lathi, 2007], ele submeteu um impressionante artigo para a Academia de Ciências de Paris [Nahin, 2006]: Nele, *Fourier* buscava encontrar o perfil de temperaturas permanentes em um “prisma fino” – expressão utilizada por *Fourier* apenas para designar um sólido de espessura desprezível. Considere, por exemplo, o sólido representado pela figura 3.3. Todos os pontos dos planos B e C são mantidos a uma temperatura constante [zero].

Para um estado permanente de condução de calor, a temperatura u não depende de t e, por isso $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Dessa forma, a equação 3.18 transforma-se na equação de *Laplace*:

$$\nabla^2 u = 0. \quad (3.19)$$

Desconsiderando a espessura do prisma, o termo $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ pode ser omitido e a equação do problema torna-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.20)$$

formando o problema de valor de contorno sujeito às condições:

$$|u(x, y)| < M \text{ temperatura limitada}; \quad (3.21a)$$

$$u(0, \pm l) = 0; \quad (3.21b)$$

$$u(x, \pm \frac{\pi}{2}) = u(x, \pm l) = 0; \quad (3.21c)$$

$$u(0, y) = f(y); \quad (3.21d)$$

em que $l = \frac{\pi}{2}$. Basicamente, *Fourier* assume que a função $u(x, y)$ é uma função periódica com período $2l = \pi$.

Fourier sabia que funções de duas variáveis poderiam frequentemente ser reduzidas a expressões mais simples. Segundo [Churchill, 1963], foi *Fourier* quem *efetivamente* ilustrou os procedimentos básicos do método de separação de variáveis e da superposição de soluções. Assim, assumindo que a função u das variáveis independentes x e y seja “separável”, i.e., $u(x, y) = X(x)Y(y)$ e substituindo tal expressão na equação 3.20, chega-se a:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 Y}{dX^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dY^2}. \quad (3.22)$$

Desde que cada membro da equação 3.22 seja função de apenas uma variável, os dois lados serão iguais para todo x e y se cada um for igual a uma mesma “constante” arbitrária m . Logo,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 Y}{dX^2} = m^2; \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dY^2} = -m^2. \quad (3.24)$$

Assumindo uma solução do tipo exponencial $X = Ce^{\alpha x}$ e substituindo-a na equação 3.23:

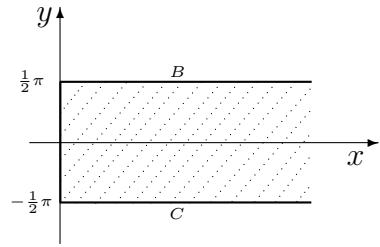


Figura 3.3: Sólido condutor de calor.

$$\alpha^2 C e^{\alpha x} - m^2 C e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha = \pm m. \quad (3.25)$$

Então,

$$X(x) = A e^{-mx} + A_2 e^{mx}. \quad (3.26)$$

Procedendo-se de maneira análoga para a equação 3.24, $\alpha = \pm m j$, em que $j = \sqrt{-1}$, logo:

$$\begin{aligned} Y(y) &= A_3 e^{jmy} + A_4 e^{-jmy} \\ &= A_3 [\cos(my) + j \sin(my)] + A_4 [\cos(my) - j \sin(my)] \\ &= [A_2 + A_3] \cos(my) + j [A_2 - A_3] \sin(my). \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

Ou, incorporando as constantes,

$$Y(y) = B \cos(my) + jC \sin(my). \quad (3.29)$$

Da condição de contorno 3.21a, *Fourier* observa que, como a temperatura não pode aumentar indefinidamente à medida que $x \rightarrow \infty$ – [considerando $m > 0$], o termo exponencial positivo pode ser desconsiderado. Então:

$$X(x) = A e^{-mx}. \quad (3.30)$$

Ele considerou ainda que a função $u(x, y)$, que representava o estado permanente das temperaturas no sólido, deveria ficar “extremamente pequena” [Fourier, 1878, p.134] quando x assumisse grandes valores. E como $u(x, y)$ é uma “função do mundo real”¹, *Fourier* simplifica bastante o problema, desconsiderando o termo imaginário da equação 3.29:

$$Y(y) = B \cos(my); \quad (3.31)$$

Como *Fourier* estava interessado em aplicações e métodos, questões relacionadas à validade das representações não eram para ele um grande problema, razão [provável] pela qual “coloca um véu” sobre o assunto. Condições de validade das séries de *Fourier* foram esclarecidas por *P. G. Lejeune Dirichlet* (★1805 † 1859), que estabeleceu firmemente as condições gerais de *convergência* das séries de *Fourier* para uma função. Isto mostra que *Fourier* estava, pelo menos em parte, errado! Os critérios de *Dirichlet* são mostrados ao fim da seção.

¹Vale lembrar que à época de *Fourier* [século XIX] a teoria de funções de uma variável complexa estava ainda “engatinhando” [Nahin, 1998].

e, reunindo a função anteriormente “separada”, segue-se que:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= Ae^{-mx}B \cos(my). \end{aligned} \quad (3.32)$$

De acordo com a condição de contorno 3.21b, observa-se que:

$$\cos ml = 0.$$

O que significa que, exceto pela solução trivial,

$$ml = (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Ou seja, expressão $m = (2n + 1)\frac{\pi}{2l}$, em que n é um inteiro, mostra que a “constante arbitrária” m não é tão arbitrária assim! Porém, como

$$l = \pi/2 \Rightarrow m = (2n + 1),$$

m assume apenas valores ímpares. Incorporando as constantes da equação 3.32, $AB = c_m$, já que a constante AB será diferente para cada valor de m (ou de n), tem-se:

$$u_m(x, y) = c_m e^{-mx} \cos(my), \quad (3.33)$$

que representa uma solução particular. A solução geral pode então ser encontrada pela soma de todas as soluções particulares, o que estabelece o *princípio da superposição das soluções*:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{\substack{m=2n+1 \\ n=0}}^{\infty} c_m e^{-mx} \cos my \\ &= c_1 e^{-x} \cos y + c_3 e^{-3x} \cos 3y + c_5 e^{-5x} \cos 5y + \dots. \end{aligned} \quad (3.34)$$

E, por fim, aplicando a condição inicial 3.21d, $u(0, y) = f(y)$, Fourier obtém sua famosa série trigonométrica, na forma de uma soma infinita de cossenos:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos my \\ &= c_1 \cos y + c_3 \cos 3y + c_5 \cos 5y + \dots. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Um resultado impressionante, mostrando que era possível (conhecendo-se os coeficientes c_m) realizar uma soma infinita de funções cosseno para obter uma função qualquer! Esta afirmação provocou furor nos meios acadêmicos, razão pela qual o trabalho de

Fourier não recebeu inicialmente o devido crédito.

Tais resultados levaram o também francês e grande matemático *Joseph-Louis Lagrange* ($\star 1736 \dagger 1813$) a afirmar, energicamente, que as alegações de *Fourier* eram simplesmente impossíveis! A reação deve-se provavelmente ao fato de *Lagrange*, mais cedo em sua carreira, haver enfrentado *Bernoulli* em oposição à sua série trigonométrica, no problema das cordas vibrantes [Nahin, 2006]. Dentre os revisores dos primeiros trabalhos de *Fourier* estavam grandes nomes, como *Adrien-Marie Legendre* ($\star 1752 \dagger 1833$), além do próprio *Lagrange* e do já célebre Marquês de *Laplace*. Outra razão provável para a inicial desconfiança com relação ao trabalhos de *Fourier* reside no fato de *Laplace*, há alguns anos antes, haver tratado junto de seus alunos o problema da condução de calor e, por isso, estava relutante em aceitar a superioridade do método de *Fourier*. Uma de suas principais críticas foi, no entanto, a falta de generalidade e rigor matemático [Lathi, 2007].

Era inconcebível para os matemáticos da época que uma função ímpar, por exemplo, pudesse ser descrita por uma soma infinita de funções pares, ou que a soma infinita de funções diferenciáveis pudesse resultar em algo diferente disto! O principal problema em questão residia no fato de que o conceito de função ainda não havia sido completamente esclarecido, além dos parcisos recursos [matemáticos] para o tratamento de séries infinitas disponíveis até então. Em seguida, uma grande controvérsia se instalou na questão da representação de funções por uma soma de funções *sinusoidais*². Problema este que seria solucionado em 1829, por *Dirichlet* [Lathi, 2007], quase 80 anos após os primeiros avanços obtidos por *D'Alembert*, *Bernoulli* e *Euler* no problema das cordas vibrantes. Aliás, o que vem a ser uma função?

D'Alembert acreditava que o conceito de função deveria ser condicionado aos métodos comuns da álgebra e do cálculo. *Euler*, por sua vez, tinha uma visão aparentemente mais simples, acreditando que uma função poderia ser definida simplesmente se fosse possível traçar a curva de $f(t) \times t$, da mesma forma como seria feito por uma caneta ao deslizar sobre um pedaço de papel. Mas a visão de *Euler* não é tão simplória como possa parecer em um primeiro momento: desenhar uma curva sobre um pedaço de papel significa que, em razão dos próprios movimentos da caneta, a curva resultante possui uma tangente em quase todos os pontos (e por isso, existe a derivada)³. Porém, *Euler* estava ligeiramente enganado neste ponto: em 1872, o matemático alemão *Karl Weierstrass* ($\star 1815 \dagger 1897$) apresentou uma função que é contínua mas que não possui derivada em ponto algum, ou

²Em verdade, a palavra “sinusoidal” é um neologismo que vêm do inglês e que seria ótimo para indicar as funções trigonométricas seno e cosseno. Por isso, será tomada a liberdade de utilizá-la.

³Além disso, se uma curva possui um número finito de pontos onde a derivada não existe, ainda é possível traçá-la; por exemplo, uma função do tipo $f(t) = |t|$.

seja, não é possível tracá-la à mão! A soma de *Weirstrass* é a expressão:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (3.36)$$

em que $0 < b < 1$ e a é um número ímpar, tal que $ab > 1 + (3/2)\pi$. Esta função é uma série trigonométrica, mas que não é uma série de *Fourier* pelo simples motivo de que desobedece aos critérios de *Dirichlet*. Os critérios que levam o nome do matemático alemão estabelecem condições *suficientes*⁴ para a convergência de uma série de *Fourier* (e da transformada de *Fourier*). Se $f(t)$ é uma função periódica, então as somas parciais de sua série de *Fourier* convergem para $f(t)$ para todo t se, além de ser absolutamente integrável:

1. $f(t)$ tem um número finito de descontinuidades em um período e
2. $f(t)$ tem um número finito de extremos (máximos ou mínimos) em um período,

em que “absolutamente integrável” significa que a integral da função em um período é finita⁵, ou seja,

$$\int_T f(t) dt < \infty.$$

Para o caso aperiódico [que frequentemente é interpretado como uma função com “período infinito”], o conceito ainda vale [Papoulis, 1962, p.7-10]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty.$$

O que mostra que a soma de *Weirstrass* não é uma série de *Fourier*, já que possui um número infinito de extremos (picos e vales) em um intervalo finito de x . Por indução, não é difícil imaginar que quando $f(t)$ representa um sinal do “mundo real”, i.e., um sinal prático de engenharia, as condições serão sempre obedecidas. Um sinal de tensão $v(t)$ do tipo “dente de serra” é, por exemplo, um sinal que obedece aos critérios de *Dirichlet*, ou seja, possui uma série de *Fourier* que converge para $v(t)$.

Porém, hoje já se sabe que a resposta para a questão “o que é uma função?” é bem mais simples. Uma função $f(t)$ pode ser entendida simplesmente como uma *regra* que associa a cada valor de t um valor de f ; ou seja, é um mapeamento de t em f simbolizado por $f(t) : t \rightarrow f(t)$. E no íntimo desta questão encontra-se a ideia [genial] que escapou a *Euler*, *Bernoulli* e companhia: a de que *qualquer* função pode ser representada por

⁴ As condições de *Dirichlet* são por vezes chamadas *condições fortes de Dirichlet*, por serem *suficientes*, mas não *necessárias* para a convergência de uma série de *Fourier*.

⁵ Considerando uma função ou sinal real. Para um sinal complexo, deve-se aplicar o módulo, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.

uma soma infinita de componentes *sinusoidais*, fato percebido mais tarde pelo gênio de *Fourier*.

E como passo final para seu desenvolvimento majestoso, no momento de calcular os coeficientes da série trigonométrica, *Fourier* se atrapalha, ao utilizar um método extremamente complicado e de certa forma “bizarro”. Por exemplo, assumindo $f(y) = 1$ na equação 3.35 [Fourier, 1878, p.137], ele escreve:

$$1 = c_1 \cos y + c_3 \cos 3y + c_5 \cos 5y + \dots . \quad (3.37)$$

Fourier então diferenciava a equação 3.37 um número n (par) de vezes para obter a sequência infinita de equações:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \cos y + 3^2 c_3 \cos 3y + 5^2 c_5 \cos 5y + \dots \\ 0 &= c_1 \cos y + 3^4 c_3 \cos 3y + 5^4 c_5 \cos 5y + \dots \\ &\vdots \\ 0 &= c_1 \cos y + 3^n c_3 \cos 3y + 5^n c_5 \cos 5y + \dots . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Colocando $y = 0$, ele obtinha um número infinito de equações algébricas em função dos n coeficientes. Para resolvê-los, ele utilizou as primeiras m (quaisquer) equações, assumindo que necessitava resolver para os m coeficientes. Assim, tendo solucionado o conjunto de equações para os m coeficientes, ele tomava o limite com $m \rightarrow \infty$, obtendo assim os coeficientes.

No entanto, *Fourier* não percebeu [ao tempo em que chegou em sua série trigonométrica] que o trabalho de se calcular os coeficientes era bem mais simples que imaginava. De fato, retomando a equação:

$$f(y) = c_1 \cos y + c_3 \cos 3y + c_5 \cos 5y + \dots .$$

Multiplicando ambos os lados por $\cos(qy)$, em que $q = 1, 3, 5 \dots$ e integrando ao longo do período [$l = \pi/2$], tem-se:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(qy) f(y) dy = \int_0^{\pi/2} c_1 \cos(qy) \cos(y) dy + \int_0^{\pi/2} c_3 \cos(qy) \cos(3y) dy + \dots . \quad (3.39)$$

Considerando a condição inicial $f(y) = 1$ e considerando $q = 1$, chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos(y) dy &= \int_0^{\pi/2} c_1 \cos^2(y) dy + \int_0^{\pi/2} c_3 \cos(y) \cos(3y) dy + \dots \\ 1 &= c_1 \int_0^{\pi/2} \cos^2(y) dy + \int_0^{\pi/2} c_3 \cos(y) \cos(3y) dy + \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

As integrais da equação 3.40 na forma $\int \cos(qy) \cos(my) dy$ tomadas ao longo do período serão sempre nulas quando $q \neq m$. No caso de $q = m$, a integral pode ser resolvida a partir da identidade trigonométrica:

$$\cos^2(my) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2my)] .$$

Para $m = q = 1$, pode-se rescrever a equação 3.40:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [1 + \cos(2y)] dy + 0 \\ 1 &= c_1 \frac{\pi}{4} \\ c_1 &= \frac{4}{\pi} . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Da mesma forma, para os outros valores de m :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos(my) dy &= \int_0^{\pi/2} c_m \cos^2(my) dy \\ \frac{1}{m} &= c_m \frac{\pi}{4} \\ c_m &= m \frac{4}{\pi} , \end{aligned} \quad (3.42)$$

o que fornece, enfim, a série de *Fourier* para a condição inicial $f(y) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos my \\ &= \frac{4}{\pi} \cos y + \frac{3 \cdot 4}{\pi} \cos 3y + \frac{5 \cdot 4}{\pi} \cos 5y + \dots . \end{aligned} \quad (3.43)$$

A ironia nesta história é que, em um artigo escrito em 1777 [quando *Fourier* tinha apenas 9 anos de idade!], *Euler* já havia resolvido este problema em particular, tendo apresentado um método extremamente simples e engenhoso para o cálculo dos coeficientes c_m , que é em essência o mesmo apresentado no exemplo anterior, no contexto do problema que inspirou *Fourier*. O método de *Euler* é apresentado em seguida.

Fazendo-se uma abstração do problema físico tratado por *Fourier*, considere, sem perda de generalidade, uma função periódica $f(t)$ expressa como uma série trigonométrica:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] . \quad (3.44)$$

Com a_n e b_n constantes e $\omega_0 = 2\pi/T$. Rescrevendo na forma exponencial, vem:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right\} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right] e^{jn\omega_0 t} + \left[\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right] e^{-jn\omega_0 t} \right\} . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Observando a equação 3.45, pode-se incorporar os dois termos do somatório em apenas um, alterando-se os limites. Dessa forma, $f(t)$ pode ser rescrita como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} , \quad (3.46)$$

em que $\omega_0 T = 2\pi$. A equação 3.46 representa a forma exponencial da série de *Fourier*. Multiplicando os dois membros da equação 3.46 por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integrando em um período (de t' a $t' + T$), chega-se a:

$$\int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = c_n T ; \quad (3.47)$$

que expressa, enfim, o elegante método para o cálculo dos coeficientes:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt . \quad (3.48)$$

Ou seja, o coeficiente c_n da série de *Fourier* consiste no valor médio de $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$, ao longo do período⁶. Ou ainda, aplicando um procedimento similar à equação 3.44, chega-se

⁶Que pode ser “tomado” de qualquer forma ou da forma mais conveniente, considerando por exemplo $-T/2 < t < T/2$ ou $0 < t < T$.

à forma trigonométrica para os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt ; \quad (3.49)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt ; \quad (3.50)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt . \quad (3.51)$$

Dessa forma, retornando ao problema de *Fourier*, os coeficientes da série podem ser calculados.

No tempo de seus últimos trabalhos, *Fourier* chegou a utilizar o método de *Euler* para o cálculo dos coeficientes da série trigonométrica que ganharia mais tarde o seu nome, sem citar, contudo, o autor do método. Em 1808, *Fourier* escreveu uma carta (sem destinatário, mas que se dirigia provavelmente a algum dos revisores de seu trabalho), explicando o fato [Nahin, 2006]:

“Sinto por não haver conhecido o matemático que fez uso deste método pela primeira vez, pois eu o haveria citado.”

E, após o artigo de 1807, embora nem todos estivessem convencidos da validade do trabalho de *Fourier*, o assunto “propagação de calor” virou tema do prêmio da Academia de Ciências de *Paris* em 1812, talvez como uma forma de incentivar *Fourier* a esclarecer e expandir suas ideias. O incentivo funcionou plenamente, pois *Fourier* entrou na competição com um novo artigo e ganhou o prêmio! Contudo, seus críticos ainda não estavam convencidos e o artigo, apesar de inovador, não foi publicado. Ainda mais motivado, *Fourier* publicou em 1822 seus trabalhos em forma de livro, o *Théorie Analytique de la Chaleur*. Neste ponto não era mais possível negar suas conquistas. Foi este livro, aliás, que caiu nas mãos do jovem *William Thomson* [Apêndice F] quando este ainda era um adolescente e o inspirou, por sua vez, ao longo de sua carreira. Mais tarde, o livro foi traduzido para o inglês, com correções e adição de comentários de grande interesse histórico, pelo matemático da *Cambridge University*, *Alexander Freeman* [Fourier, 1878].

3.4 Conceito de função generalizada: O Delta de *Dirac*

Sabe-se hoje que qualquer sinal (ou função) pode ser descrito por uma série de *Fourier*, desde que ele permita uma “extensão periódica”. Em outras palavras, é possível construir uma função periódica a partir de uma função não-periódica, mesmo que ela possua descontinuidades. Um exemplo importantíssimo para a engenharia são as “funções” ditas impulsivas, como o delta de *Dirac*. Considere um ligeiro avanço no tempo, indo de *Fourier*

(1822) até cerca de um século depois, na época de *Paul Dirac* ($\star 1902 \dagger 1984$), já no século XX, que será essencial na busca por uma compreensão integral do conceito de transformada. Seu nome é sinônimo de uma “função” muito especial, chamada “função impulso” ou “delta de Dirac” $\delta(t)$.

A noção de *impulso* é uma das mais importantes para o físico ou para o engenheiro eletricista. A ideia central de impulso consiste, fisicamente, em uma função concentrada em curto intervalo de tempo, que acontece “de uma só vez”, como a batida de um martelo sobre uma mesa. Considere por exemplo o sinal $x(t)$ da figura 3.4(b), um pulso retangular de área unitária, formado pela soma de dois sinais do tipo degrau, da figura 3.4(a):

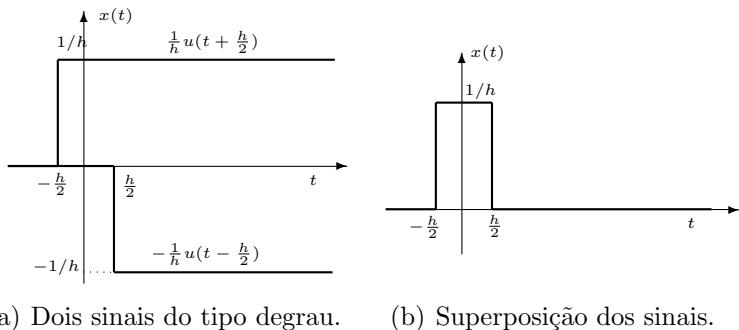


Figura 3.4: Sinal pulso retangular formado pela soma de dois sinais do tipo degrau.

Suponha em seguida que o sinal $x(t)$ seja multiplicado por uma função contínua arbitrária contínua⁷ $\beta(t)$ e integrado ao longo do tempo, i.e.:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\beta(t)dt = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{h}\beta(t)dt = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \beta(t)dt. \quad (3.52)$$

Imagine que em seguida o pulso retangular comece a “encolher”, ou seja, a duração do pulso comece a concentrar-se em um intervalo de tempo cada vez menor e, consequentemente sua altura fique cada vez maior [$h \rightarrow 0$ e $1/h \rightarrow \infty$]. Como $\beta(t)$ é uma função “do mundo real”, isto significa que ela é *pelo menos* contínua e, por isso, pode-se assumir que $\beta(t)$ não possa alterar-se muito neste curto intervalo de tempo. Desta forma, $\beta(t)$ se aproxima de $\beta(0)$ ao longo de todo intervalo de integração, de comprimento h . Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \beta(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \beta(0)h = \beta(0), \quad (3.53)$$

considerando que $\beta(t)$ é “bem comportada” [diferenciável e com $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta(t) = 0$]. Então, o limite de $x(t)$ à medida que $h \rightarrow 0$ parece mostrar que o pulso terá uma *altura infinita* concentrado em um intervalo de tempo de duração zero. Em outras palavras, ele não é

⁷Que é uma suposição razoável, se se considerar $\beta(t)$ uma função “do mundo real”.

uma função! E desde que não é possível traçá-la, *Dirac* a indicou por uma *seta* em $t = 0$, de área unitária, denotada por $\delta(t)$, como ilustra a figura 3.5.

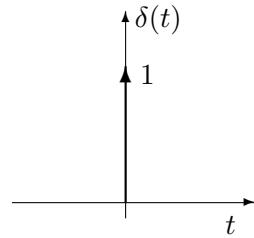


Figura 3.5: Função impulso unitário ou Delta de *Dirac*.

Para uma definição formal, indica-se $\lim_{h \rightarrow 0} x(t) = \delta(t)$, que é o delta de *Dirac* ou *impulso unitário*. E apesar da natural dificuldade para visualizar uma “função” com um pico de altura infinita e uma base com dimensão zero, pode-se visualizar perfeitamente como $\delta(t)$ se comporta *dentro de um sinal de integração*. Logo, para uma função contínua $\beta(t)$ qualquer, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\beta(t)dt = \beta(0). \quad (3.54)$$

E como não há “privilegio” algum com relação ao instante inicial, pode-se locar o impulso em qualquer instante de tempo, e.g., $t = t_0$, escrevendo simplesmente $\delta(t - t_0)$. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\beta(t)dt = \beta(t_0), \quad (3.55)$$

que é uma propriedade importantíssima do impulso, chamada *propriedade da amostragem*⁸. Fisicamente, esta propriedade indica que a avaliação – dentro do sinal de integração – de um impulso multiplicado por uma função contínua é igual ao valor da função naquele ponto!

Então, já é possível formular a seguinte questão: é possível descrever $\delta(t)$, que não é uma função regular, por meio de uma série de *Fourier*? A resposta desta charada é: **não!** Não da forma mostrada na figura 3.5. Contudo, se for considerado um “trem de impulsos”, isto é, uma sequência de funções impulso enfileiradas periodicamente, como ilustra a figura 3.6, então a resposta é **sim!**

O trem de impulsos é expresso por $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, ou por simplicidade de notação,

⁸Será visto nas seções seguintes que a transformada de *Fourier* de uma função descontínua resulta em um impulso, localizado na descontinuidade.

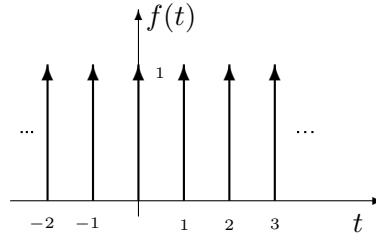


Figura 3.6: Extensão periódica da função impulso ou “trem de impulsos” de Dirac $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$.

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$. Assim, da formulação das séries de Fourier, tem-se:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.56)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.57)$$

Como a escolha do intervalo de integração (período) pode ser feia por conveniência⁹, considere – para evitar maiores questionamentos¹⁰ – que dentro do intervalo de integração exista apenas uma função impulso, e.g., $-T/2 < t < T/2$, com o impulso localizado em $t = 0$. Assim,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.58)$$

Da propriedade da amostragem, vê-se que o valor da integral neste intervalo vale $e^{-jn\omega_0 t_0}$, em $t = t_0$. Dessa forma, em $t = 0$:

$$c_n = \frac{1}{T},$$

o que mostra que o espectro exponencial é real e uniforme para todas as frequências. Logo,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t} \quad (3.59)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)], \quad (3.60)$$

com $\omega_0 = 2\pi/T$. Observando o termo imaginário da equação 3.60, vê-se que o somatório

⁹E como, da definição das séries de Fourier, basta que a série converja em um período.

¹⁰Um deles seria o de se perguntar o que é um “meio-pulso” caso o intervalo escolhido fosse $0 < t < T$.

para todo t se anula, isto é, escrevendo termo a termo os pares $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(n\omega_0 t) = \sin(0) + [\sin(\omega_0 t) + \sin(-\omega_0 t)] + [\sin(2\omega_0 t) + \sin(-2\omega_0 t)] + \dots = 0,$$

já que $\sin(-x) = -\sin(x)$. Dessa forma, tem-se enfim a expressão do “trem de impulsos” como uma série de *Fourier* (considerando $T = 1$):

$$\begin{aligned} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) &= 1 + [\cos(\omega_0 t) + \cos(-\omega_0 t)] + [\cos(2\omega_0 t) + \cos(-2\omega_0 t)] + \dots \\ &= 1 + 2 \cos(\omega_0 t) + 2 \cos(2\omega_0 t) + 2 \cos(3\omega_0 t) + \dots \\ &= 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t). \end{aligned}$$

Traçando o gráfico¹¹ de $f(t)$, como ilustra a figura 3.7, pode-se observar que a série de *Fourier* fica cada vez mais parecida com um trem de impulsos à medida que o número de termos aumenta, o que responde à pergunta formulada no início da seção: é possível descrever $\delta(t)$, que não é uma função regular, por meio de uma série de *Fourier*?

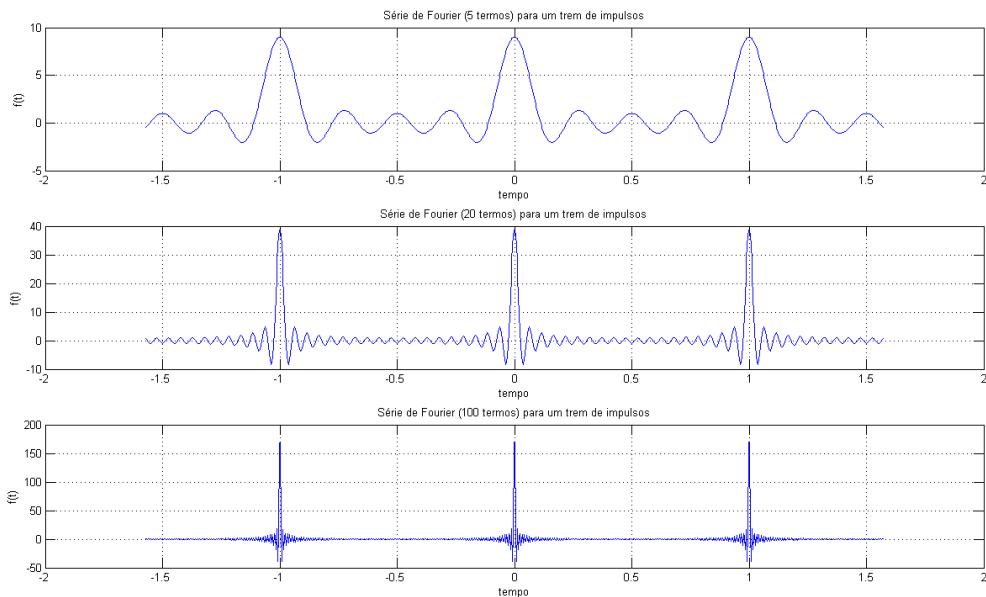


Figura 3.7: Convergência da série de *Fourier* para um “trem de impulsos de Dirac” $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$.

Por fim, relembrando a definição da função degrau $u(t)$, ilustrada pela figura 3.8, pode-se perceber que:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t). \quad (3.61)$$

¹¹O código em MATLAB, para a construção dos gráficos, pode ser consultado no apêndice D.

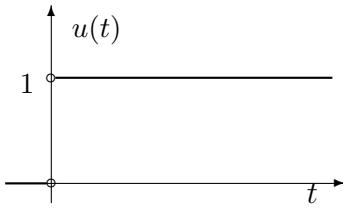


Figura 3.8: Relembrando a função degrau.

Isto é, a função impulso consiste na derivada da função degrau, o que intuitivamente faz sentido, já que a função degrau é sempre constante, exceto para $t = 0$, instante no qual a há um “salto” de 0 para 1. Ou ainda, evitando por ora [até a seção 3.8] a questão do valor da função degrau em $t = 0$, i.e., $u(0)$ e apoderando-se da ideia de que a integral de uma função consiste na área abaixo da curva definida por ela, fica claro que:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\alpha) d\alpha, \quad (3.62)$$

em que α é uma variável auxiliar.

Em verdade, *Dirac* não foi o criador do conceito de impulsos, apesar de tê-los usado magistralmente, já que chegou a ganhar um prêmio *Nobel* [Dirac, 1927 apud Nahin, 2006]. Ele tomou conhecimento de funções impulsivas após a leitura dos livros de *Oliver Heaviside*. No segundo volume do “*Eletromagnetic Theory*” [Heaviside, 1893a, p. 289], aparece a definição de “impulso”, enquanto *Heaviside* tratava de um assunto de certa forma bizarro, o cálculo de $p^{1/2}$:

“ $p \cdot \mathbf{1}$ significa uma função de t totalmente concentrada no instante $t = 0$, com um total^a de 1. É uma *função impulsiva*, por assim dizer... .”

lembmando que p representava o operador linear relativo à derivação ($p \triangleq \frac{d}{dt}$) e que “**1**” foi a notação usada por *Heaviside* para a função degrau.

^aReferindo-se à integral.

3.5 A Integral de *Fourier*

Com o conceito desenvolvido até o momento, já é possível perceber a extrema versatilidade das séries de *Fourier* para descrever uma função periódica qualquer, mesmo que ela possua descontinuidades, como é o caso da “função” impulso. Na prática, a única exigência resultante da *definição* das séries de *Fourier* é que a função (ou sinal) seja periódica e foi este o “truque” utilizado para descrever o trem de impulsos. Mas, e se a função não for periódica? Por exemplo, uma função $f(t)$, definida em $-\infty < t < \infty$, que não se repete de tempos em tempos é claramente não periódica, já que “se utiliza” de todo eixo t , que é infinito. Nestas condições, não há uma série de *Fourier* para esta função. Pode haver

porém, uma saída: e se a função for ainda considerada periódica, mas com um período infinitamente longo? Isto solucionaria, pelo menos em teoria, o problema da periodicidade da função, permitindo-se argumentar que a função se repete sim, mas no infinito! Como mostrar que isto é possível? Para responder a este questionamento, considere a formulação exponencial da série de *Fourier*:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (3.63)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.64)$$

Em que $\omega_0 = 2\pi/T$. Suponha que deseja-se saber o que acontece com a série quando $T \rightarrow \infty$. Note que o termo $n\omega_0$ no somatório da equação 3.63 se altera em um passo ω_0 à medida que o índice n avança. Denotando este passo por $\Delta\omega$, então $\Delta\omega = \omega_0$. Como $\omega_0 = 2\pi/T$, ao estender o período ao infinito percebe-se que $\omega_0 \rightarrow 0$, ou seja, $\Delta\omega$ torna-se arbitrariamente pequeno, i.e., um acréscimo diferencial (apêndice A):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \omega_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = d\omega. \quad (3.65)$$

Da mesma forma, com $T \rightarrow \infty \Rightarrow n\omega_0 \rightarrow n\omega$. E desde que $d\omega$ é muito pequeno, $n\omega$ “deverá” comportar-se como uma variável contínua (denotada por ω), já que n varia de $-\infty$ até $+\infty$. Logo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} n\omega_0 = \omega. \quad (3.66)$$

Rescrevendo a equação 3.64 – dos coeficientes da série de *Fourier* – tomando o limite à medida que $T \rightarrow \infty$, obtem-se:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad (3.67)$$

tendo em mente ser possível escolher os limites (período) da integral como se queira. Multiplicando a equação 3.67 por $2\pi/2\pi$, vem:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.68)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \frac{2\pi}{T} \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (3.71)$$

Definindo a expressão entre colchetes da equação 3.71 como “*transformada de Fourier*” de $f(t)$, atribuindo o símbolo $F(\omega)$, tem-se, portanto:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega, \quad (3.72)$$

em que

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.73)$$

Substituindo o resultado da equação 3.72 na equação 3.63 [da série de *Fourier*], tem-se:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.74)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{jn\omega_0 t} d\omega. \quad (3.76)$$

E, utilizando a mesma analogia feita anteriormente, deixando o período alongar-se *ad infinitum*, $n\omega_0 \rightarrow \omega$ e o sinal do somatório torna-se uma integral, já que a soma estará sendo realizada ao longo de todo ω contínuo. Dessa forma,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (3.77)$$

que é, nada mais nada mais nada menos, que a transformada inversa de *Fourier*, formando o par $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, que fornece $f(t)$ a partir de $F(\omega)$, e *vice-versa*.

Mas a pergunta que não quer calar é: como *Fourier* obteve sua equação integral? Já foi visto que o assunto referente à descrição de uma função periódica por meio de uma série trigonométrica já tinha sido explorado anteriormente, antes dos trabalhos de *Fourier* sobre condução de calor. Entretanto, a equação integral que mais tarde receberia o nome de “transformada de *Fourier*” é inteira e exclusiva criação de *Fourier*, que as obteve a partir de uma analogia similar à utilizada anteriormente.

Em seu problema particular sobre condução de calor, **em que a variável independente é espacial** – x , y ou z , e não o tempo – *Fourier* considera o problema de uma linha infinita condutora de calor, que consiste em uma extensão do problema do prisma que deu origem às séries. Naquele problema, $f(y)$ era uma função periódica considerada em um intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$, em que y representava a espessura do sólido. Neste, *Fourier* permite a espessura do sólido – agora denotada pela variável x , i.e., o período – tender ao infinito. Mais à frente, ele faz o mesmo com as outras dimensões. Eis um resumo do procedimento básico: considere um trecho \bar{ab} de uma linha semi-infinita, condutora de calor, como ilustra¹² a figura 3.9 [Fourier, 1878, p. 333-338]. A equação do calor para este

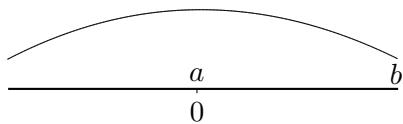


Figura 3.9: Linha condutora de calor.

problema é:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv, \quad (3.78)$$

em que $v = v(x, t)$. Neste momento, tem-se clara demonstração do gênio de *Fourier*. Admitindo $v = e^{-ht}u$, a equação torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.79)$$

em que $v(x, 0) = u(x, 0) = f(x)$.

Como a linha é infinita, *Fourier* percebe de antemão que a solução irá possuir termos exponenciais. Assim, ele escreve a solução na forma de sua série trigonométrica:

$$u = a_1 \cos(q_1 x) e^{-kq_1^2 t} + a_2 \cos(q_2 x) e^{-kq_2^2 t} + a_3 \cos(q_3 x) e^{-kq_3^2 t} + \dots \quad (3.80)$$

¹²Ilustração utilizada por *Fourier*.

A partir deste ponto, *Fourier* faz a mesma suposição já demonstrada, com uma variação contínua da variável q (que seria o equivalente à variável ω_0), resultando em:

$$u = \int_0^\infty Q \cos(qx) e^{-kq^2 t} dq. \quad (3.81)$$

em que $Q = F(q)$. Fazendo $t = 0$, obtém-se por sua vez,

$$f(x) = \int_0^\infty Q \cos(qx) dq, \quad (3.82)$$

que é a equação integral, na forma trigonométrica, da transformada inversa de *Fourier* [aliás, o nome dado por *Fourier* para ela foi “equação do problema inverso”, que representa a temperatura inicial]. Em busca de uma solução $Q = F(q)$ de modo que a equação 3.82 se verificasse, ele a expande em uma série da forma:

$$f(x) = Q_1 \cos(q_1 x) dq + Q_2 \cos(q_2 x) dq + Q_3 \cos(q_3 x) dq + \dots . \quad (3.83)$$

Em seguida, multiplica os dois lados da equação 3.83 por $\cos(rx)dx$ e integra de $x = 0$ até $x = n\pi$, fazendo n tender ao infinito (r corresponde aos elementos q_1, q_2, \dots). As integrais na forma $\int_0^{n\pi} \cos(qx) \cos(rx) dx$ serão sempre nulas, exceto quando $r = q$, que, neste caso, terão valor $\frac{1}{2}n\pi$. Assim, chega-se à expressão:

$$\int_0^{n\pi} f(x) \cos(qx) dx = \frac{1}{2}n\pi Q_j dq. \quad (3.84)$$

Fourier considera ainda que o número n expressa quantas vezes uma unidade de comprimento contém o elemento dq . Em outras palavras, considera que “1” período — que é infinito — vale $1 = ndq$, e por isso, a equação 3.84 transforma-se em:

$$Q = F(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos(qx) dx. \quad (3.85)$$

No que se reconhece a forma geral, que representa a solução para o problema formulado pela equação 3.83. A expressão 3.85 é a famosa equação da transformada de *Fourier*¹³!

¹³Que representa a transformada de uma função par. Como ela é simétrica, a equação é multiplicada por 2 e integrada no intervalo $0 < x < \infty$.

Uma forma mais compacta que representa o teorema da integral de *Fourier* é obtido substituindo-se a equação 3.85 na equação 3.82:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(qx) dq \int_0^\infty f(x) \cos(qx) dx. \quad (3.86)$$

Fourier chegou primeiramente na forma trigonométrica [de meio espectro, i.e., $0 < x < \infty$] da sua transformada. A forma exponencial das equações 3.73 e 3.77, mais compacta e facilmente manipulável algebricamente é uma consequência natural das últimas.

3.6 Pulso Gaussiano e o Princípio da Incerteza

Na seção 2.9, surgiu uma integral do seguinte formato:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda. \quad (3.87)$$

Uma integral aparentemente intimidadora, mas que realmente não é! Nesta seção, será visto que esta integral e principalmente a função $f(\lambda) = e^{-\alpha\lambda^2}$ (no integrando) desempenham um papel importante para o entendimento do significado físico da transformada de *Fourier* e também para a busca de uma visão unificada do conceito de transformada. Na verdade, para resolver esta integral são necessários alguns “truques” de cálculo básico.

Demonstração. Primeiro, comece fazendo

$$I = I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda. \quad (3.88)$$

Derivando a integral com relação a β , ¹⁴tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \beta} &= \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} [-\lambda \sin(\beta\lambda)] d\lambda \\ &= \int_0^\infty \sin(\beta\lambda) (-\lambda e^{-\alpha\lambda^2}) d\lambda \quad (\text{e integrando por partes}) \\ &= \left. \frac{e^{-\alpha\lambda^2}}{2\alpha} \sin(\beta\lambda) \right|_0^\infty - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda \\ &= -\frac{\beta}{2\alpha} I. \end{aligned}$$

¹⁴Desta vez, a derivada de uma integral é apenas a integral da derivada, já que ela possui limites que não são funções da variável de integração. Para mais detalhes, consultar o apêndice A.

Ou seja, até o momento, tem-se:

$$\frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}. \quad (3.89)$$

Porém, do cálculo, sabe-se que $\frac{d}{dx} [\ln u(x)] = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}$, então a equação fica:

$$\frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{d}{d\beta} [\ln I],$$

e, por isso,

$$\frac{d}{d\beta} [\ln I] = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Integrando com relação a β , vem:

$$\ln I = -\frac{\beta^2}{4\alpha} + C_1.$$

Como C_1 é uma constante de integração qualquer, ela pode ser rescrita como $C_1 = \ln C$, que continua sendo uma constante. Logo:

$$\begin{aligned} \ln I &= -\frac{\beta^2}{4\alpha} + \ln C \\ e^{\ln I} &= e^{\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha} + \ln C\right)} \\ I &= e^{\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)} e^{(\ln C)} \\ &= Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \end{aligned}$$

em que $I = I(\alpha, \beta)$. No entanto, da equação 3.88, percebe-se que

$$C = I(\alpha, 0) = \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} d\lambda.$$

Logo, fazendo-se a mudança de variáveis $u^2 = \alpha\lambda^2$, tem-se:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{u^2} du, \quad (3.90)$$

e como $\int_0^\infty e^{u^2} du$ vale $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (consultar o apêndice C), obtém-se o valor de C :

$$C = I(\alpha, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Dessa forma, chega-se a solução geral da equação 3.87:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Ou ainda, como o integrando é uma função par (produto de duas funções pares), pode-se estender o resultado para $-\infty < \beta < \infty$:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (3.91)$$

□

Ora, se for feita uma simples troca de variáveis $\beta = \omega$ e $\lambda = t$, a equação 3.91 revela um aspecto bem familiar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} \cos(\omega t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad (3.92)$$

que nada mais é do que a transformada de *Fourier* da função $f(t) = e^{-\alpha t^2}$, já que $f(t)$ é uma função real. Utilizando-se a identidade de *Euler* $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$, a equação 3.92 pode ser rescrita na forma padrão da transformada de *Fourier*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad (3.93)$$

já que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} \sin(\omega t) dt = 0$, pois o integrando é uma função ímpar. A função $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ é chamada de *função Gaussiana* ou *pulso Gaussiano*, em homenagem ao matemático alemão *Johann Carl Friedrich Gauss* (★1777 † 1855), uma função muito importante em diversas áreas. Tem-se portanto o par:

$$e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \quad (3.94)$$

Em que o símbolo \leftrightarrow indica que a transformada de *Fourier* corresponde a uma relação bijetiva¹⁵.

¹⁵Ou seja, uma relação de um-para-um. Isto significa que, tomar a transformada de *Fourier* de um lado, resultará o outro lado do par.

Se, na equação 3.94, for colocado $\alpha = \frac{1}{2}$, nota-se que:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \leftrightarrow \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (3.95)$$

Um resultado impressionante que indica que, exceto por um fator igual a $\sqrt{2\pi}$, a função Gaussiana $e^{-\frac{t^2}{2}}$ é sua própria transformada de *Fourier*! Porém, a função Gaussiana não é a única com esta característica marcante: há toda uma classe de funções, chamadas de polinômios de *Hermite*, que possuem a mesma propriedade. Mais detalhes podem ser encontrados em [Papoulis, 1962, p.77]. Na próxima seção, este resultado será utilizado para solucionar uma EDP utilizando-se a transformada de *Fourier*.

Ao observar-se atentamente a equação 3.94 com $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha > 0$), é digno de nota o efeito de *espalhamento recíproco* (ou escalamento) da transformada de *Fourier*. Esta propriedade indica que se um sinal sofre uma compressão no domínio do tempo, haverá um espalhamento (expansão) do espectro no domínio da frequência e *vice-versa*. A propriedade do escalamento da transformada de *Fourier* também é frequentemente chamada de “Princípio da Incerteza” na teoria da transformada de *Fourier*. Considerando-se o par $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ de um sinal e sua transformada de *Fourier*, o princípio da incerteza estabelece que é possível relacionar a “incerteza” da localização de $g(t)$ no tempo com a “incerteza” da localização de $G(\omega)$ na frequência [que é, como será visto nesta seção, uma medida de “onde” a energia de $g(t)$ está localizada na frequência]. O termo “localização no tempo” de $g(t)$ indica que uma parte “significante” de $g(t)$ ocorre geralmente ao longo de um *intervalo* de tempo [mesmo que este intervalo seja infinito]; o mesmo valendo para $G(\omega)$ no domínio da frequência. Os dois intervalos variam de maneira inversa, i.e., um sinal que ocorre em um curto intervalo de tempo deverá ter a transformada de *Fourier* com significativa presença em um longo intervalo da frequência. Por exemplo, a “função” impulso $\delta(t)$, que ocupa um intervalo *zero* no tempo¹⁶, possui sua transformada com amplitude uniforme sobre todo eixo ω [infinito].

Neste ponto, já é possível construir conceitos que darão um significado físico para a transformada de *Fourier*.

¹⁶Seção 3.4.

Apesar de os matemáticos “torcerem o nariz” para as analogias físicas, diz-se frequentemente que se imaginarmos $v(t)$ como um feixe de luz, então a transformada de *Fourier*, como um prisma, quebra a função em diversos componentes de frequência ω que a compõe, cada uma de intensidade $V(\omega)$. As várias frequências seriam chamadas *cores* e dessa forma, a transformada de *Fourier* forneceria o *espectro de cores* do sinal. Fazendo o caminho contrário, a transformada inversa de *Fourier* combina o espectro, ou seja, junta todas as cores, para retornar à função original. Opiniões à parte, acredita-se que a analogia com fenômenos físicos é muito útil para uma compreensão integral do *conceito de transformada* e das *transformadas* em geral, já que a maioria delas, senão todas, nasceram a partir de problemas do “mundo real”.

Considere o par $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$ para o sinal não-periódico [e real] $v(t)$ e sua transformada de *Fourier* [Nahin, 2001]:

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.96)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.97)$$

Pode-se definir como a *energia* de um sinal periódico $x(t)$ a integral:

$$W \triangleq \int_{\text{período}} x^2(t) dt. \quad (3.98)$$

Ou, para o caso não-periódico,

$$W \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt. \quad (3.99)$$

Dessa forma,

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] dt. \quad (3.100)$$

Alterando-se a ordem de integração [consultar o apêndice C], tem-se:

A energia de um sinal, como definido pelas equações 3.98 e 3.99, não corresponde à energia real, no sentido físico da palavra, mas em um indicativo da capacidade de energia do sinal e, por isso, não se deve aqui aplicar conceitos como *conservação da energia*, por exemplo. No contexto da engenharia elétrica, tal energia pode ser interpretada como a energia dissipada em uma resistência normalizada de 1Ω quando uma tensão $v(t)$ é aplicada – ou se uma corrente $i(t)$ atravessa a resistência. Um raciocínio paralelo pode ser aplicado à outras medidas, como por exemplo a “potência de um sinal”. Todas elas são uma estimativa do tamanho do sinal e possuem várias aplicações. Por exemplo, se se deseja aproximar um sinal $x(t)$ por outro sinal $y(t)$, cuja diferença entre eles, i.e., o erro de aproximação, é $\epsilon(t) = x(t) - y(t)$, pode-se ter uma noção de quão boa é esta aproximação, calculando-se a energia (potência) do sinal $\epsilon(t)$ [Lathi, 2007].

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} V(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (3.101)$$

Observa-se que a integral entre colchetes da equação 3.101 é $V^*(\omega)$ [para $v(t)$ real] e, por isso,

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} V(\omega) V^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |V(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.102)$$

Ou seja, é possível calcular a energia do sinal $v(t)$ tanto no domínio do tempo quanto no da frequência,

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |V(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.103)$$

Um resultado impressionante, chamado de Teorema da Energia de *Rayleigh*, em homenagem ao membro da “Casa dos *Lords*” – e professor da *Cambridge University* até sua saída em 1884 – *John William Strutt* ($\star 1842 \dagger 1919$), o “*Lord Rayleigh*” [ganhador do prêmio *Nobel* de física em 1904 por sua participação na descoberta do elemento *Argônio*] [Nahin, 2002]. O segundo termo da equação 3.103 é chamado de “*densidade espectral de energia*” – ESD - *Energy Spectrum Density* – para $|\omega| < \infty$. Em um dado intervalo $\omega_1 < \omega < \omega_2$ a ESD será dada por:

$$ESD = \int_{-\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2\pi} |V(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.104)$$

Essa afirmação fornece um significado físico consistente para a transformada de *Fourier*, na qual o espectro de *Fourier* “diz” onde a energia de um sinal temporal está localizada na frequência.

Ainda considerando o Teorema da Energia de *Rayleigh*, considere, para efeito de simplificação, que a energia do sinal $v(t)$ é unitária [Papoulis, 1962, p.62-64]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |V(\omega)|^2 d\omega = 1.$$

Considere ainda a definição da *duração do sinal* [ou momento de segunda ordem] e sua transformada de *Fourier*:

$$D_t^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 v^2(t) dt, \quad (3.105)$$

$$D_\omega^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |V(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.106)$$

O *Princípio da Incerteza* da teoria da transformada de *Fourier* estabelece que se $v(t)$ se anula “no infinito” mais rápido que $1/\sqrt{t}$, i.e., $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} v(t)\sqrt{t} = 0$, então, para um sinal do tipo *Gaussiano*,

$$D_t^2 D_\omega^2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

que apresenta a dualidade entre as grandezas tempo e frequência relacionadas pela transformada de *Fourier*.

3.7 Solução de uma EDP via transformada de *Fourier*

Vê-se comumente a utilização das séries de *Fourier* para a solução de problemas de valores de contorno em equações diferenciais parciais. No entanto, como é natural, a formulação integral, i.e., a transformada de *Fourier* também é útil para o mesmo propósito.

Considere o seguinte problema de condução de calor, no qual deseja-se determinar a temperatura em uma barra “fina” de comprimento infinito, cuja superfície é submetida a uma temperatura inicial $f(x)$ arbitrária, representado pela equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.107)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x); \\ |u(x, t)| &< M; \text{ [temperatura limitada]} \end{aligned}$$

em que $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$. A equação 3.107 é também chamada de equação da difusão ou equação do calor [*heat equation*] unidimensional. Unidimensional por que uma das variáveis independentes é a distância x , sendo a outra variável independente o tempo, representada por t . $\kappa = \frac{K}{\sigma\mu}$ é a *difusividade* térmica do material, em que K é a condutividade térmica, σ é o calor específico e μ é o volume [ou massa] específico(a) da

barra, também chamado(a) densidade.

O objetivo neste ponto consiste em fazer com que a transformada de *Fourier* tenha o mesmo efeito que o consagrado método da “separação de variáveis”, ao transformar uma EDP em uma equação diferencial ordinária [EDO], de maneira similar ao que já foi feito utilizando a transformada de *Laplace* e o método de *Heaviside*, no capítulo 2. Aplicando a transformada de *Fourier* com relação à variável x nos dois membros da equação 3.107, e utilizando por ora o símbolo $\mathcal{F}\{\cdot\}$ para a operação “transformada de *Fourier* de”, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}\{u\} = -\kappa\omega^2 \mathcal{F}\{u\}. \quad (3.108)$$

Tendo como resultado uma EDO, em que a derivada é proporcional à propria função e isto, como reza a cartilha, indica uma solução exponencial! Dessa forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{u\} &= Ae^{-\kappa\omega^2 t} \\ \mathcal{F}\{u(x, t)\} &= A(x)e^{-\kappa\omega^2 t}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Para calcular o valor de $A(x)$, faz-se $t = 0$ na equação 3.109. Então, $\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = A(x)$. Mas como uma condição inicial imposta pelo diz que $u(x, 0) = f(x)$, tem-se:

$$\mathcal{F}\{u\} = \mathcal{F}\{f(x)\} e^{-\kappa\omega^2 t}. \quad (3.110)$$

E retomando o resultado da seção anterior, lembrando-se que a transformada foi calculada com relação à variável x , tem-se:

$$e^{-\alpha x^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \quad (3.111)$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $\alpha = \frac{1}{2a^2}$, vem:

$$e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \leftrightarrow a\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}}. \quad (3.112)$$

Multiplicando-se ambos os lados por $\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}$ e fazendo $a = \sqrt{2\kappa t}$, tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \leftrightarrow e^{-\kappa\omega^2 t}. \quad (3.113)$$

Por fim, com a informação obtida a partir da equação 3.113, pode-se aplicar o teorema da convolução. Assim, retornando à equação 3.110,

$$u(x, t) = f(x) \star \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{(x-w)^2}{4\kappa t}} d\omega. \quad (3.114)$$

Fazendo a mudança de variáveis $z^2 = \frac{(x-\omega)^2}{4\kappa t}$ ou $z = \frac{(x-\omega)}{2\sqrt{\kappa t}}$, a equação 3.114 torna-se:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f\left(x - 2z\sqrt{\kappa t}\right) dz. \quad (3.115)$$

Se, no problema de valor de contorno, apenas valores positivos da variável independente x forem considerados, i.e., considerando um sólido “semi-infinito”, a equação 3.114 pode ser rescrita como:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} F(w) \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4\kappa t}} d\omega; \quad (3.116)$$

e com a mesma mudança de variáveis proposta anteriormente, $z = \frac{(x-\omega)}{2\sqrt{\kappa t}}$, a equação resultante terá a forma – com limites $z = x/2\sqrt{\kappa t}$ para $\omega = 0$ e $z = \infty$ para $\omega = \infty$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\kappa t}}^{\infty} e^{-z^2} f\left(x - 2z\sqrt{\kappa t}\right) dz. \quad (3.117)$$

Se, por fim, a temperatura inicial aplicada $u(x, 0) = f(x)$ for uma constante de valor, por exemplo, $2u_0$, tem-se:

$$u(x, t) = u_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\kappa t}}^{\infty} e^{-z^2} dz. \quad (3.118)$$

Mas como $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-t^2} dt = \text{erfc}(\zeta)$, a distribuição de temperatura ao longo da barra para qualquer instante de tempo será dada por:

$$u(x, t) = u_0 \cdot \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (3.119)$$

Resultado similar ao obtido pela integral de *Bromwich*, utilizando integrais de contorno e a transformada de *Laplace*, na seção 2.9.

3.8 “Conectando” as transformadas de *Fourier* e *Laplace*

No capítulo 2, quando discutida a transformada de *Laplace*, foi visto que *Heaviside*, na tentativa de resolver inúmeros problemas, criou a função $H(t)$ que, por algum tempo, levou o seu nome e que mais tarde ficou conhecida como função degrau unitário¹⁷ $u(t)$. Ela, como será visto, é uma forma interessante para compreender-se a relação entre as transformadas de *Fourier* e de *Laplace*. E para isto, deve-se fazer a seguinte pergunta: qual é o valor da função degrau unitário $H(t)$, ou na notação moderna, $u(t)$, no instante $t = 0$? Isto é, qual o valor de $u(0)$? Na definição de *Heaviside* [figura 3.10], a função

¹⁷O MATLAB ainda “chama” a função $u(t)$ de função de *Heaviside*.

valia *zero* para $t < 0$ e tornava-se *um* imediatamente após $t = 0$, i.e., $u(0_+) = 1$. Esta questão era dispensável naquela época já que, como é notório, a transformada de *Laplace* considera apenas *sinais causais*. A função degrau é uma função não-simétrica que possui

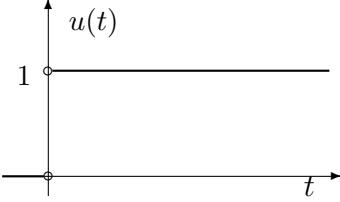


Figura 3.10: Função degrau unitário.

uma descontinuidade, até o momento ignorada. Caso se queira calcular diretamente sua transformada de *Fourier*, tem-se:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} = ? \quad (3.120)$$

O que não faz sentido pois $e^{-j\omega t}$ é uma função periódica que oscilará eternamente entre ± 1 [ou $\pm j$]. Logo, a expressão $e^{-j\infty}$ não faz sentido, já que $e^{-j\omega t}$ não se aproxima de valor algum em particular à medida que $t \rightarrow \infty$. Será então possível conceber uma forma na qual a transformada de *Fourier* não seja indeterminada “no infinito”? Por que não buscar a transformada de *Fourier* de, por exemplo, $e^{-\sigma t}u(t)$, com $\sigma > 0$, ao invés de apenas $u(t)$? Dessa maneira a busca inicial seria alterada, naturalmente. Mas considere por um momento que isto seja possível – pois com $t \rightarrow \infty$ o termo $e^{-\sigma t}$ desapareceria. Calculando a transformada de *Fourier* para a nova função $v(t) = e^{-\sigma t}u(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{\sigma+j\omega} e^{-(\sigma+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sigma+j\omega}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

O termo $e^{-\sigma t}$ é chamado “fator de convergência” e é responsável por remover o problema com o limite superior da transformada. Assim, até o momento tem-se o par:

$$e^{-\sigma t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\sigma + j\omega}, \quad (3.122)$$

da função $e^{-\sigma t}u(t)$ e sua transformada de *Fourier*. Mas a questão do valor de $u(0)$ ainda não foi resolvida. O fato de $u(t)$ ser uma função descontínua, significa que ela pode assumir qualquer valor em $t = 0$? Isto não parece correto, pois significaria afirmar que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{-\sigma t}u(t) = u(t)$ implica em $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma + j\omega} = \frac{1}{j\omega}$ e por conseguinte $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$; A própria razão parece indicar um problema, já que a transformada de *Fourier* possui apenas a parte imaginária. No entanto, ao calcular a transformada de *Fourier* inversa no par obtido da equação 3.122,

$$e^{-\sigma t}u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma + j\omega} e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.123)$$

algo impressionante acontece: De fato, escrever $e^{-\sigma t}u(t)$ é apenas uma forma de dizer que a função $e^{-\sigma t}$ é zero para $t < 0$. Em $t = 0$ a função vale $u(0)$, que é independente de σ e exatamente o que se procura. Dessa forma, fazendo $t = 0$ na equação 3.123, tem-se:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma + j\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma - j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega. \quad (3.124)$$

A parte imaginária do integrando da equação 3.124 será zero, porque o integrando é uma função ímpar. Assim,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega. \quad (3.125)$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $x = \omega/\sigma \Rightarrow \omega = \sigma x$ – e consequentemente $d\omega = \sigma dx$ – tem-se, por fim, o valor da descontinuidade na função degrau unitário:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma^2 x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Isto é, o valor $u(0)$ ilustrado pela figura 3.11 possui um valor real, o que é natural, apesar de ser um resultado impressionante! Em verdade, o “truque” de se adicionar um fator de

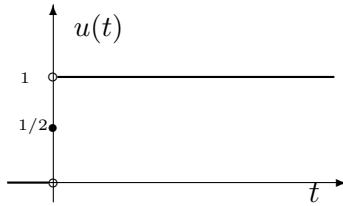


Figura 3.11: Valor de $u(0)$.

convergência $e^{-\sigma t}$ para a transformada de *Fourier*,

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} u(t) dt = \int_0^{\infty} u(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt, \quad (3.126)$$

esconde uma realidade ainda maior. Ora, se for feita a mera mudança de variáveis $\sigma+j\omega = s$, tem-se:

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = U(s), \quad (3.127)$$

que é, como pode-se perceber, a transformada de *Laplace* da função degrau unitário:

$$U(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{\sigma + j\omega}.$$

Nesta altura dos acontecimentos, uma das pontes de ligação entre as transformadas de *Fourier* e *Laplace* é exatamente a função de *Heaviside*! Pode-se entendê-la como uma

conexão entre as duas, na tentativa de uma visão unificada do conceito de transformada, pois uma e outra são, em essência, a mesma coisa. Ainda, a questão do valor da função degrau em $t = 0$ engloba outra questão de extrema importância: como a transformada de *Fourier* se comporta em uma descontinuidade? Do resultado obtido para a função degrau pode-se conceber, por indução, que a transformada converge em uma descontinuidade para seu ponto médio, i.e. $\frac{f(0_+) + f(0_-)}{2}$. Fato que não é tão impressionante, visto a analogia feita nas seções anteriores, da transformada de *Fourier* como uma extensão da série homônima. Para as séries de *Fourier*, o fenômeno de *Gibbs* estabelece exatamente o mesmo: a de que a série de *Fourier* converge em uma descontinuidade para seu ponto médio.

Comparando as transformadas de *Laplace* e *Fourier* como métodos de resolução de equações diferenciais, vê-se que a transformada de *Fourier* pode simplificar bastante a resolução de um problema. Comparar, no entanto, consiste em procurar relações de semelhança ou de disparidade. Mais rigorosamente, as transformadas de *Laplace* e *Fourier* podem ser compreendidas como integrais de contorno em um plano complexo e que realizam operações neste universo. Ambas nasceram como técnica de resolução de problemas de valor de contorno, mas tomaram uma forma abrangente e inimaginável, principalmente no que diz respeito à versatilidade de aplicações; tendo seguido a partir daí caminhos relativamente — ou aparentemente — dispareces. A transformada de *Laplace*, que opera sobre todo plano complexo — como pode-se observar pela formulação de *Bromwich* — “especializou-se” principalmente em sistemas dinâmicos e é muito eficiente no estudo da estabilidade de sistemas.

A teoria da estabilidade, assim como estudado pela maioria dos físicos e engenheiros, leva inevitavelmente a funções temporais da forma $e^{(\sigma+j\omega)t}$, com σ e $\omega \in \mathbb{R}$. Esta forma “explode” para $t \rightarrow \infty$ se $\sigma > 0$ e por isso $\sigma \leq 0$ é a condição para um comportamento estável (entrada finita \Rightarrow saída finita) do sistema analisado. Agora, acontece frequentemente que $s = \sigma + j\omega$ é uma raiz complexa de alguma equação $f(s) = 0$. Se $f(s)$ é um polinômio, isto implica que $f(s)$ é analítica. Geralmente, a questão não é sobre valores específicos de σ , mas simplesmente se *todas* os valores de σ são menores ou iguais a zero. Esta condição assegura a estabilidade do sistema.

O problema de determinar se *todas* as soluções para $f(s) = 0$ tem raízes negativas foi proposto por *Maxwell* [que ficou interessado em estabilidade quando estudava a dinâmica dos anéis de Saturno em meados de 1850] [Nahin, 1998]. Este problema foi resolvido algebraicamente pelo rival de *Maxwell* em *Cambridge*, *Edward John Routh* ($\star 1831 \dagger 1907$). Mais tarde, em 1855, o matemático alemão *Adolf Hurwitz* ($\star 1859 \dagger 1919$) solucionou o mesmo problema utilizando a nascente teoria de funções de uma variável complexa. Atualmente, os estudantes aprendem a técnica como a regra de “*Routh-Hurwitz*” para a estabilidade.

A transformada de *Fourier*, por sua vez, é ideal e extremamente eficiente para o estudo de fenômenos transitórios e de resposta em frequência, já que realiza operações sobre o

eixo imaginário, mas permite “enxergar” aspectos que a primeira não pode, ou que pode de maneira mais complexa.

Historicamente, uma tem relativa ascendência com relação à outra, visto que, nos primórdios do desenvolvimento da transformada de *Laplace*, a formulação de *Fourier* foi frequentemente utilizada para validar os resultados obtidos com a primeira. O próprio *Heaviside* apoderou-se deste artifício inúmeras vezes, utilizando inclusive exemplos de difusão de calor explorados por *Fourier* [Heaviside, 1893a, p.286-288] ou demonstrando que o teorema da expansão levava diretamente às séries de *Fourier* para o caso de uma entrada de tensão periódica, assumindo desde aquela época que o operador “ p ” era um número complexo [Heaviside, 1893a, p.131-134].

Capítulo 4

Equações de diferenças e a transformada Z

4.1 Equações de diferenças

Em diversas áreas, a transformada \mathcal{Z} desempenha o mesmo – e importante – papel que a transformada de *Laplace* para sistemas de tempo contínuo. Do capítulo 2, sabe-se que a transformada de *Laplace* tem a interessante propriedade de transformar uma equação diferencial ordinária em uma equação algébrica e a propriedade ainda mais interessante de transformar uma equação diferencial parcial em ordinária. A transformada \mathcal{Z} não é diferente: resguardadas as devidas proporções, ela tem igualmente a capacidade de transformar uma *equação de diferenças* em equação algébrica. Mas o que é uma equação de diferenças? Para responder esta pergunta, considere a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0. \quad (4.1)$$

Do cálculo diferencial e integral, sabe-se que a derivada de um sinal $x(t)$ é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Eliminando-se o limite, isto é, fazendo com que Δt não se aproxime de zero mas sim, que tenha um valor finito T , que será chamado período de amostragem, obtém-se:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + T) - x(t)}{T}. \quad (4.3)$$

Da mesma forma, a derivada segunda poderá ser representada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{1}{T} \left\{ \frac{x(t + 2T) - x(t)}{T} - \frac{x(t + T) - x(t)}{T} \right\} \quad (4.4)$$

$$\approx \frac{x(t + 2T) - 2x(t + T) + x(t)}{T^2}. \quad (4.5)$$

Substituindo na equação 4.1, vem:

$$\frac{x(t+2T) - 2x(t+T) + x(t)}{T^2} + b \frac{x(t+T) - x(t)}{T} + cx(t) = 0 \quad (4.6)$$

$$x(t+2T) - 2x(t+T) + x(t) + bT[x(t+T) - x(t)] + cT^2x(t) = 0. \quad (4.7)$$

Agrupando os termos semelhantes e renomeando os coeficientes, chega-se a:

$$\underbrace{1}_{a_0} \cdot x(t+2T) + x(t+T) \underbrace{[-2 + bT]}_{a_1} + x(t) \underbrace{[1 - bT + cT^2]}_{a_2} = 0 \quad (4.8)$$

$$a_0x(t+2T) + a_1x(t+T) + a_2x(t) = 0. \quad (4.9)$$

Que é o mesmo que escrever¹:

$$a_0x(t) + a_1x(t-T) + a_2x(t-2T) = 0. \quad (4.10)$$

Para efeito de simplicidade, pode-se suprimir o período de amostragem T . Além disso, como o tempo agora é discreto, $x(t)$ só existirá em múltiplos inteiros do período de amostragem. Fazendo a substituição $t = n$, pois o sinal $x(t)$ forma uma sequência de números, a equação pode ser rescrita como:

$$a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] = 0, \quad (4.11)$$

em que os colchetes representam a notação para o sinal discreto no tempo. A expressão 4.10 é uma equação de diferenças de segunda ordem. Já é possível perceber que uma equação de diferenças nada mais é do que o equivalente discreto à uma equação diferencial.

Em verdade, um software como o MATLAB resolve uma equação diferencial utilizando uma equação de diferenças equivalente. Pelo formato da equação 4.11 pode-se perceber que uma equação de diferenças deste tipo pode ser resolvida por operações simples de adição, subtração e deslocamento, isto é, os valores atuais de x em um instante n podem ser calculados conhecendo-se os valores passados. Caso a equação seja rescrita na forma:

$$x[n] = -\frac{a_1}{a_0}x[n-1] - \frac{a_2}{a_0}x[n-2], \quad (4.12)$$

diz-se que a equação está na forma recursiva.

Embora a dedução de uma equação de diferenças a partir de uma equação diferencial – proveniente de um modelo contínuo – seja razoável e atraente, existem casos nos quais o modelo já é naturalmente discreto. Por exemplo, sistemas econômicos, biológicos, em estudos de dinâmica populacional, dentre outros.

¹Pois $\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+T)-x(t)}{T} = \frac{x(t)-x(t-T)}{T}$.

4.2 Por que \mathcal{Z} ?

A transformada \mathcal{Z} é um método operacional muito útil no tratamento de sistemas (de tempo) discretos. Seu nome já é em si incomum, por se tratar de uma letra do alfabeto e não o nome de algum cientista famoso. Sabe-se que a transformada de *Laplace* tem sido usada desde longa data na solução de equações diferenciais contínuas e invariantes no tempo. Entretanto, métodos para o tratamento de problemas de tempo discreto são relativamente recentes. De acordo com [Strum e Kirk, 1994], um método para a resolução de equações de diferenças lineares e invariantes no tempo foi apresentado por *Gardner* e *Barnes*, aos seus alunos de engenharia no ínicio da década de 1940. Eles aplicaram tal procedimento, que era baseado principalmente em “*jump functions*”², na resolução de linhas de transmissão e aplicações envolvendo funções de *Bessel*. Tal abordagem era bastante complexa e, na tentativa de “dividir para simplificar”, uma transformação de um sinal amostrado foi proposta em 1947 por *Witold Hurewicz* ($\star 1904 \dagger 1956$) [Kuperberg, 1996]. Tal transformação era escrita como função da sequência amostrada f – no domínio do tempo – ao invés do número complexo z da notação moderna:

$$\mathcal{T}\{f[kT]\} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\zeta^{-k}. \quad (4.13)$$

Na década de 40, quando *Hurewicz* deu o pontapé inicial de uma teoria para sistemas de tempo discreto, ao introduzir uma transformada para sequências de dados amostrados, várias aplicações interessantes surgiram [Jury, 1981]. Após a II Guerra Mundial, sistemas de controle para armas de fogo foram desenvolvidos para o tratamento de dados que estavam disponíveis na forma amostrada ou em pulsos. Por exemplo, a rotação de um radar pulsado de exploração que “ilumina” o alvo de tempos em tempos [Jury, 1987]. Na mesma época, o nascimento dos computadores digitais abriu um amplo campo de aplicações para a teoria em franca ascensão.

Em 1952, cinco anos após a tentativa de *Hurewicz*, a transformação foi batizada de “transformada \mathcal{Z} ” pelo “*Sampled-data control group*”, liderada por *John Ralph Ragazzini* ($\star 1912 \dagger 1988$), com *Eliahu Ibrahim Jury* – que, na época, era aluno de doutorado de *Ragazzini*, mas que acabou sendo um dos principais desenvolvedores da teoria –, *Lotfi Zadeh* – famoso pela criação da lógica *Fuzzy* – e colaboradores da *Columbia University*, com o artigo “*The Analysis of sampled-Data Systems*” [Ragazzini e Zadeh, 1952], considerado por muitos como o trabalho pioneiro sobre a transformada \mathcal{Z} . A transformada \mathcal{Z} pode ser definida da forma seguinte [Oppenheim et al., 1997].

Definição 1 (transformada \mathcal{Z}). A transformada \mathcal{Z} de um sinal $x(t)$, ou de uma sequência de valores amostrados $x[nT]$, com período de amostragem T – ou simplesmente $x[n]$

²funções usadas para representar uma sequência de dados amostrados.

denotando a n -ésima amostra – é definida pela equação:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z). \quad (4.14)$$

A operação definida pela equação 4.14 é chamada de *transformada Z bilateral*, já que considera $-\infty < t < \infty$ [a transformada Z unilateral considera $0 < t < \infty$], e o símbolo “Z” é um operador linear, que indica “*transformada Z de*”. Além disso, vê-se pela definição que se uma sequência é zero para $n < 0$, i.e., para um *sinal causal*, $X(z)$ terá apenas potências negativas de z . Nestes casos, representa-se frequentemente $X(z)$ em termos de polinômios em z^{-1} . No entanto, *Hurewicz, Ragazzini* e outros não foram os primeiros...

A transformada Z é uma operação que transita entre um espaço de funções discretas e um espaço de funções analíticas e complexas. No estudo da transformada de *Laplace* e do método de *Carson*, descobriu-se que a transformada inversa pode ser obtida através da integral de *Bromwich*, que consiste em uma integral de linha, envolvendo contornos fechados. E para resolver uma integral de contorno, deve-se lançar mão do teorema do resíduo. Isto significa que uma integral de contorno pode ser resolvida pela mera soma de resíduos.

A questão agora volta-se à natureza do resíduo e como calculá-lo. A resposta envolve a natureza da singularidade em uma extensão da série de *Taylor*, chamada série de *Laurent*.

A partir de 1814, *Cauchy* passou quase 40 anos para sedimentar as bases da teoria de variáveis complexas, exercendo grande influência nos trabalhos de outros pioneiros, como *Pierre Alphonse Laurent* ($\star 1813 \dagger 1854$), que viria a complementar o seu trabalho. *Laurent*, antes de iniciar seu “cargo oficial” como matemático, trabalhou como engenheiro civil para o corpo de engenheiros do exército francês. Aliás, até a contribuição de *Laurent* [datada de 1843], *Cauchy* desconhecia o assunto da expansão em séries de funções analíticas^a. Tal descoberta, além dos avanços do próprio *Cauchy*, representaram um grande progresso, que influenciaria sobremaneira a tecnologia do século XX. Contudo, os trabalhos de *Laurent* só vieram a público após um “empurrão” por parte de *Cauchy*, quando este esreveu uma carta de recomendação à Academia Francesa. Curiosamente, os trabalhos foram publicados em 1863, muito após a morte dos dois [Nahin, 1998].

^aUma função complexa é dita analítica em um ponto se ela é diferenciável neste ponto.

Teorema 3 (Série de Laurent). Se $f(z)$ é uma função analítica, com $r_1 < |z - z_0| < r_2$, então f pode ser expandida em uma série de potências negativas e não-negativas com

centro em torno de z_o :³

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_o)^k. \quad (4.15)$$

Ou ainda, escrevendo de maneira expandida:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_o)^k}. \quad (4.16)$$

Esta série converge em um anel $\Gamma(r_1, r_2)$ com o centro em z_0 , como ilustra a figura 4.1. Em

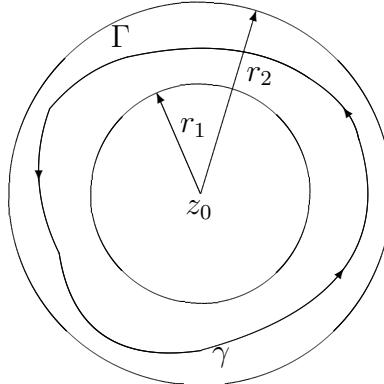


Figura 4.1: Anel de convergência da série de *Laurent*.

Γ , a função $f(z)$ é analítica. Contudo em pontos fora de Γ , ela pode ter singularidades. O primeiro somatório é a expressão familiar da série de *Taylor*; o segundo envolve potências negativas em $z - z_0$, o que fornece a natureza da singularidade. O resíduo é o coeficiente b_1 da potência $1/(z - z_0)$. A expansão em série de *Laurent* tem dois propósitos práticos: (1) dá a natureza da singularidade e (2) pode ocasionalmente ser usada para calcular o valor verdadeiro do resíduo. Quanto à natureza da singularidade, há 3 tipos:

1. Singularidade Essencial: Considere por exemplo a função $f(z) = \cos 1/z$. Fazendo a expansão para o cosseno,

$$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots \quad (4.17)$$

para $0 < |z| < \infty$. Note que essa função nunca é truncada para potências negativas de z . O valor do resíduo para uma singularidade essencial em $z = 0$ é zero.

2. Singularidade removível: considere a função $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Esta função parece a princípio ter uma singularidade em $z = 0$. Entretanto, fazendo a expansão do seno,

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots \quad (4.18)$$

³Vale lembrar neste ponto que z é um “simples” número complexo, sem trocadilho.

vê-se que, em verdade, para todo z a função não possui singularidade alguma. Consequentemente, o resíduo é zero.

3. Polo de ordem m: Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z+1)} \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8(z-1)} - \dots \quad (4.20)$$

para $0 < |z-1| < 2$. Essa função possui duas singularidades: uma em $z = 1$ e outra em $z = -1$. Como a maior potência negativa é 3, $z = 1$ é chamado polo de terceira ordem. A outra singularidade é chamada polo de ordem simples. O resíduo é $\frac{1}{8}$.

A expansão em série de *Laurent* não é, contudo, o método de escolha no cálculo de resíduos – exceto no caso de uma singularidade essencial. Neste caso, a expansão é o único método. Felizmente, esse tipo é muito raro em aplicações práticas. O método mais comum foi apresentado na seção 2.9, quando foi abordado o problema da transformada de *Laplace* inversa pela integral de *Bromwich*. A definição formal do teorema do resíduo pode ser vista na caixa da página 37.

Dessa forma, a transformada \mathcal{Z} de uma sequência $f(n)$ é definida como sua expansão em série de *Laurent* em torno de $z_0 = 0$! Além disso, dada a unicidade da série de *Laurent*, a transformada \mathcal{Z} implica em uma relação bijetiva:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z). \quad (4.21)$$

O somatório [definição 1] pode não convergir [não existir] para todos os valores de z . Os valores de z para os quais a série converge, isto é, para os quais a desigualdade

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z^{-n}| < \infty \quad (4.22)$$

se verifica, formam a chamada *região de convergência* – RDC – de $X(z)$, que é a mesma região de convergência da série de *Laurent*, centrada em $z_0 = 0$, como ilustra a figura 4.1. Isto é o mesmo que dizer que uma condição de existência da transformada \mathcal{Z} é que a sequência seja absolutamente somável. Na prática, a transformada \mathcal{Z} só implicará em uma relação bijetiva quando a RDC for especificada.

Na tabela 4.1 são mostrados os pares da transformada \mathcal{Z} para alguns sinais elementares com as respectivas regiões de convergência, em que $u[n]$ representa a função degrau unitário. No caso bilateral, a transformada inversa para cada $X(z)$ será única apenas se a RDC for especificada. No caso da transformada \mathcal{Z} unilateral, a transformada

Tabela 4.1: Pares da transformada \mathcal{Z} de algumas funções elementares.

n.	$x[n]$	$X[z]$	RDC
1	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
2	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
3	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
4	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $

inversa para cada $X(z)$ é única e, dessa forma, a RDC não necessita ser considerada. Uma lista mais completa pode ser encontrada em [Oppenheim et al., 1997].

4.3 Correspondência entre os planos s e z

A transformada \mathcal{Z} pode ser obtida diretamente a partir da transformada de *Laplace*. Considere um sinal $x(t)$ e sua transformada de *Laplace*:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} \triangleq \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = X(s) . \quad (4.23)$$

Ao aplicar-se um conversor A/D [Jury, 1958] a esse sinal, obtém-se na saída o sinal amostrado, $x^*(t)$, que, embora expresso em tempo contínuo, contém apenas as amostras $x(nT)$ – pois envolve um trem de pulsos, em que T é o período de amostragem. A este sinal, corresponderá a transformada de *Laplace* $X^*(s)$:

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} = X^*(s) . \quad (4.24)$$

Fazendo-se a mudança de variável, $z = e^{Ts}$ – e suprimindo por conveniência o termo T em $x(nT)$ –, tem-se:

$$[X^*(s)]_{z=e^{Ts}} = X(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} , \quad (4.25)$$

o que corresponde à definição de transformada \mathcal{Z} [equação 4.14]. Sendo os planos s e z ambos complexos, $s = \alpha + j\omega$ corresponde a um determinado ponto do plano s e, da mesma forma, um ponto no plano z será:

$$z = e^{Ts} = e^{(\alpha+j\omega)t} = e^\alpha e^{j\omega t} = \sigma e^{j\omega} , \quad (4.26)$$

com $T = 1$. Sendo a relação expressa na equação 4.26 nada mais do que a definição de z , ela define o mapeamento entre os planos complexos s e z . Com este mapeamento, pode-se atribuir a cada ponto do plano s , um ponto correspondente no plano z . Além disso, o fato de z ser uma função periódica com período $j\omega$ faz com que um número infinito de

pontos no plano s tenha o mesmo ponto correspondente no plano z . Com efeito, todos os pontos cuja diferença seja múltipla do período (de amostragem), vão possuir a mesma correspondência no plano z :

$$s_1 = a + jb; \quad (4.27a)$$

$$s_2 = s_1 \pm j\frac{2\pi}{T}k; \quad (4.27b)$$

$$z_1 = e^{Ts_1} = z_2 = e^{Ts_2}. \quad (4.27c)$$

Em se tratando da análise de uma função complexa, deve-se ter em mente a possível localização dos polos e zeros da função. Na análise de sistemas de controle, por exemplo, um método utilizado na determinação de possíveis polos e zeros é o “lugar geométrico das raízes”. Este método gráfico permite ter uma ideia da estabilidade do sistema, no qual um polo localizado no semiplano direito do plano complexo s faz com que o sistema apresente comportamento instável – como explicado na caixa da página 83. Da mesma forma, procede-se em relação ao plano z – em sistemas de tempo-discreto –, caso exista algum polo fora do círculo unitário. Com polos sobre o círculo unitário – ou sobre o eixo imaginário no plano s –, o sistema apresenta comportamento oscilatório.

Da equação 4.27 percebe-se que qualquer ponto em s sobre o eixo imaginário tem parte real nula, o que significa que os pontos correspondentes no plano z são $z = e^{j\omega T}$. Isto equivale dizer que z é o equivalente em coordenadas polares para $z = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)$, o que pode ser entendido como um vetor de módulo constante e fase ω , i.e., um “fator”, no contexto da engenharia elétrica. Tem-se portanto que o mapeamento de todos os pontos sobre o eixo imaginário do plano s correspondem aos pontos sobre um círculo de raio unitário, no plano z , como ilustra a figura 4.2.

Por outro lado, se na análise de um sistema discreto, ocorrerem singularidades [polos ou zeros] da função fora do círculo unitário, isto corresponderá, no plano s , a polos no semiplano direito. Por exemplo, caso existam infinitos polos formando uma reta que corta o eixo real no semiplano direito de s – em um valor, diga-se, α – o mapeamento em z corresponderá a um círculo de raio σ [equação 4.26]. Analogamente, pode-se extender o raciocínio para pontos situados no semiplano esquerdo do plano s : neste caso tem-se $|\sigma| < 1$, situando seus pontos correspondentes no plano z dentro do círculo unitário. Um mapeamento completo dos planos s e z é ilustrado pela figura 4.2.

4.4 Decifrando a transformada Z

Existirá algum elemento que conecte a transformada Z com outras transformadas, da mesma forma que a função de *Heaviside* [seção 3.8] para as transformadas de *Laplace* e *Fourier*?

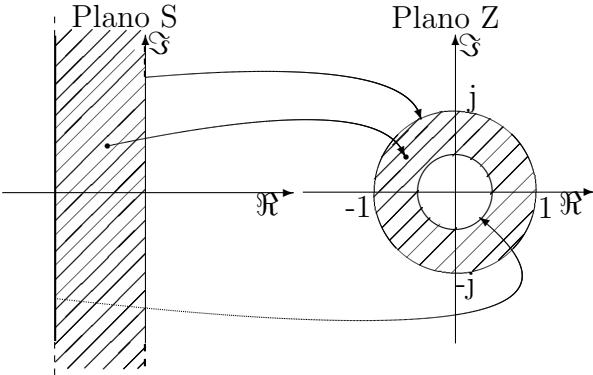


Figura 4.2: Mapeamento entre os planos s e z.

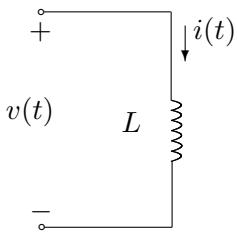


Figura 4.3: Circuito puramente indutivo.

Suponha o circuito puramente indutivo ilustrado pela figura 4.3. Este circuito, por mais simples que pareça, contém uma das chaves que podem auxiliar na compreensão do conceito de transformada, além das relações entre a transformada \mathcal{Z} e outras técnicas de transformação. Considerando $L = 1H$ e aplicando a Lei de Kirchhoff das tensões, tem-se, escrevendo a equação resultante em termos da transformada de Laplace:

$$V(s) = sI(s),$$

ou ainda:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = s.$$

Voltando ao domínio do tempo, isto é, aplicando $\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$, tem-se:

$$v(t) = \frac{di}{dt}.$$

Rescrevendo na forma diferencial e integrando a a EDO resultante, obtem-se:

$$\int_{t-T}^t v(\tau)d\tau + \int_{t-T}^t di.$$

Sabe-se que uma integral pode ser interpretada como a área abaixo da curva descrita por uma função. Dessa forma, caso se queira aproximar a integral, isto é, calcular o valor aproximado da área abaixo da curva, pode-se utilizar um trapézio de altura T e bases $v(t)$ e $v(t - T)$, como ilustra a figura 4.4. Assim, uma equação de diferenças será obtida:

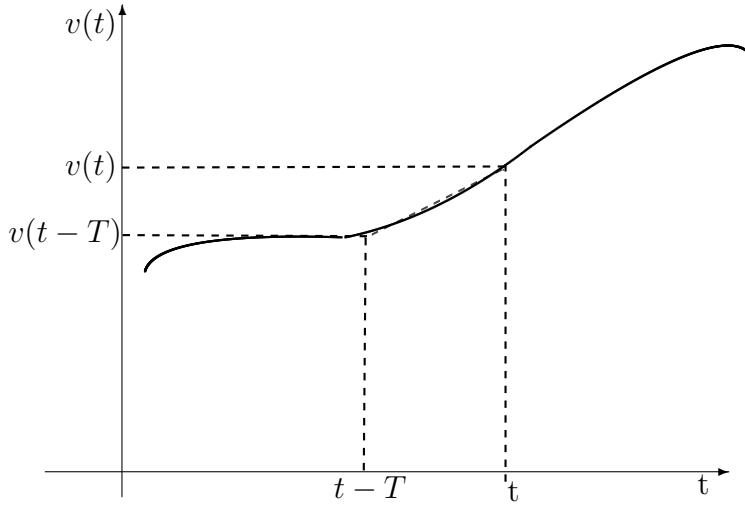


Figura 4.4: Aproximação da integral por um trapézio.

$$\begin{aligned} \frac{v(t) - v(t - T)}{2}T &= i(t) - i(t - T) \\ i(t) &= \frac{v(t) - v(t - T)}{2}T + i(t - T). \end{aligned}$$

Ora, aproximar a integral pela área de um trapézio é o mesmo que discretizar o sistema descrito pela equação diferencial e obter uma equação de diferenças. Quando um sistema contínuo [que possuía transformada de *Laplace*] é discretizado para resolver a equação diferencial que o caracteriza, obtém-se uma equação de diferenças que, por sua vez, pode ser analisada pela transformada \mathcal{Z} . Tem-se então, de um lado, o sistema contínuo e sua transformada de *Laplace* e, de outro, o sistema discreto e sua transformada \mathcal{Z} . Logo, aplicando-se a transformada \mathcal{Z} , tem-se:

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{T}{2}V(z) + \frac{T}{2}z^{-1}V(z) + z^{-1}I(z) \\ I(z)[1 - z^{-1}] &= \frac{T}{2}[1 + z^{-1}]V(z), \end{aligned}$$

No que se obtém:

$$\frac{V(z)}{I(z)} = \frac{T}{2} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right], \quad (4.28)$$

em que T é o período de amostragem. Mas, o que a equação 4.28 tem de importante? Como o sistema é puramente indutivo, sabe-se que a tensão sobre o indutor é proporcional à derivada da corrente. Isto no domínio de *Laplace* corresponde à multiplicar-se $I(s)$ pela variável s . Quando o sistema é discretizado e nele aplicado a transformada \mathcal{Z} , obteve-se uma relação que equivale a uma transformada direta $s \rightarrow z$! Em outras palavras, é uma espécie de “discretização da transformada de *Laplace*”.

$$s \leftrightarrow \frac{T}{2} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]. \quad (4.29)$$

Esta transformada é chamada transformação bilinear ou transformação de *Tustin*, em homenagem ao engenheiro britânico *Arnold Tustin* ($\star 1899 \dagger 1994$), um dos pioneiros da engenharia de controle [Tonidandel, 2010]. Assim, pode-se pensar na transformação de *Tustin* como um “mecanismo” que conecta as transformadas \mathcal{Z} e de *Laplace*, o que responde a pergunta formulada no início da seção.

Contudo, a transformação bilinear é um tipo de transformação que faz parte de uma classe ainda maior de transformadas, que mantêm estreitas relações com a transformada \mathcal{Z} : a das transformações conformes ou mapeamentos conformes. Suponha uma transformação que leva um ponto z_1 do plano z ao ponto ω_1 do plano ω e as curvas igualmente transformadas do plano z ao plano ω , como ilustra o esquema da figura 4.5. Então, se a transformação é tal que conserva o ângulo entre as duas curvas que se interceptam, esta transformação é dita *conforme* [Papoulis, 1962, p. 285 – 286]. Dentre elas, pode-se citar:

- Transformação afim: $\omega = \alpha z + \beta$. Figuras são deslocadas segundo uma função linear;
- Transformação bilinear: $\omega = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$;
- Rotação: $\omega = e^{j\theta} z$. Figuras são giradas de um ângulo θ ;
- Dilatação: $\omega = az$: Figuras são dilatadas ou contraídas no plano z .

Entre os trabalhos sobre funções analíticas do século XIX que influenciariam a tecnologia do século XX estão a Teoria da Estabilidade [caixa da página 83] e a transformação conforme ou mapeamento conforme. Os dois assuntos poderiam, o que de fato já acontece, preencher vários livros. A transformação conforme é o método geral de buscar uma equação que, aplicada em uma “figura” complicada no plano complexo, a transforma em um formato mais simples, e.g., um círculo ou um retângulo. Mas qual sua real utilidade?

Toda solução não trivial da equação de *Laplace* – uma equação diferencial parcial representada por $\nabla^2 u = 0$ [caixa da página 50] – é chamada *função harmônica*. Por exemplo, o problema de *Fourier* que culminou em sua série trigonométrica – assunto abordado no capítulo 3 – consistia em encontrar uma solução para a equação de *Laplace*^a. A utilidade de um mapeamento conforme está no fato da equação de *Laplace* ser mais facilmente solucionada para formas mais simples, como círculos e retângulos. No apêndice F, pode ser visto que a transformada de *Kelvin* também é uma transformação conforme, porém em 3 dimensões!

^aPor isso, não é “à toa” que cada termo da série de *Fourier* seja chamado de harmônico, pois é uma soma de funções harmônicas.

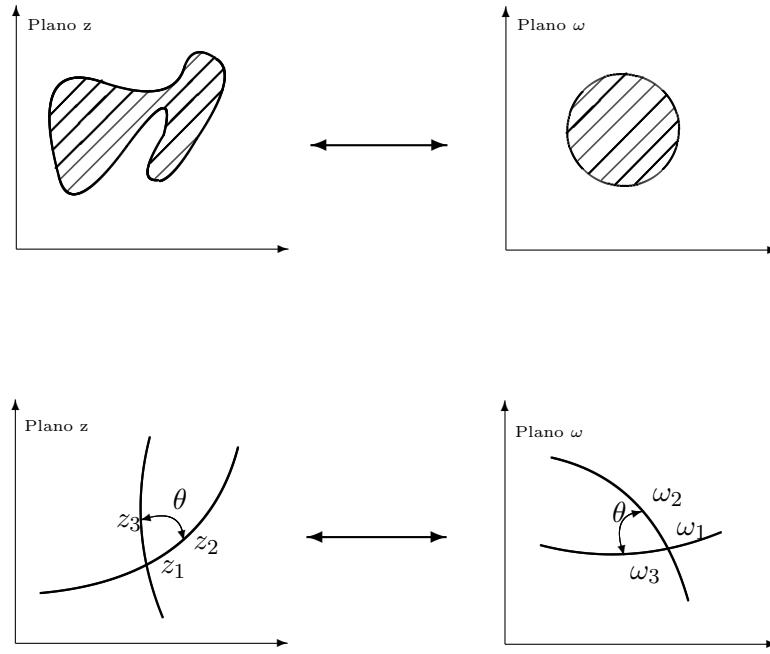


Figura 4.5: Esquema de uma transformação conforme.

Por exemplo, se em um sistema dinâmico é aplicada uma transformação conforme, ele conservará todas as suas características de estabilidade. Esta peculiaridade é explicada pelo fato de uma transformação conforme conservar os ângulos das operações sobre o plano complexo. O apêndice E é mostra um exemplo em que se utiliza a transformação de *Tustin* para a discretização de um sistema contínuo no tempo e sua comparação com outras transformações *não-conformes*, que podem transformar um sistema contínuo estável em um sistema discreto instável. As transformações conformes são muito importantes para o entendimento do conceito de “transformada”. Muitas destas operações são ensinadas como propriedades das transformadas – \mathcal{Z} e outras –, o que não são de fato. Este assunto será abordado na próxima seção.

4.5 Propriedades

A transformada \mathcal{Z} possui diversas propriedades interessantes, tanto do ponto de vista de aplicações quanto no aspecto matemático. Neste último aspecto, foi constatado que algumas de suas propriedades constituem-se em operações sobre um plano complexo. Entre elas, estão as operações de rotação, translação no tempo, dentre outras:

Propriedade 1 (Linearidade). A transformada \mathcal{Z} é linear. Esta é, sem dúvida, a propriedade mais importante da transformada \mathcal{Z} , assim como as transformadas de *Fourier* e *Laplace*. Isto significa que, se $f(n)$ e $g(n)$ possuem a transformada \mathcal{Z} e α e β são escalares, então o sinal discreto $x(n)$ formado pela combinação linear $x(n) = \alpha f(n) + \beta g(n)$

possui a transformada $\mathcal{Z} X(z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$. Em outras palavras, a propriedade da linearidade estabelece que a transformada \mathcal{Z} obedece ao princípio da superposição.

Demonstração. Note que pela definição,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(n)] &\triangleq \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha f(n) + \beta g(n)] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha f(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta g(n) z^{-n} \\ &= \alpha F(z) + \beta G(z).\end{aligned}$$

□

Propriedade 2 (Multiplicação por sequência exponencial a^n). Se $X(z)$ é a transformada z de $x[n]$, então:

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]] = X(a^{-1}z) \quad (4.30)$$

$$\text{Demonstração. } \mathcal{Z}[a^n x[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z).$$

□

Se a^n é um número real positivo, a multiplicação pode ser interpretada como uma “dilatação” ou “encolhimento” do plano z ou de uma “figura” qualquer no plano z . Caso a seja um número complexo com módulo unitário, diga-se, $e^{j\omega_0}$, a multiplicação corresponde a uma rotação no plano z de um ângulo ω_0 , i.e., a localização dos polos e zeros da função mudam ao longo de círculos concêntricos na origem. Frequentemente isto é interpretado como uma translação complexa [de frequência], associada a uma modulação no domínio do tempo por uma sequência exponencial complexa $e^{j\omega_0 n}$. Isto é, se a transformada de Fourier existe, esta propriedade tem a forma:

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X[e^{j(\omega_0 - \omega)}]. \quad (4.31)$$

Propriedade 3 (Deslocamento temporal). Se $X(z)$ é a transformada z de $x[n]$, então:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} X(z); \quad (4.32)$$

para n_0 inteiro. Se n_0 é positivo, a sequência original é deslocada para a direita. Se negativo, $x[n]$ é deslocada para a esquerda.

Demonstração. Se $y[n] = x[n - n_0]$, a transformada \mathcal{Z} correspondente é:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}.$$

Com a substituição de Variáveis $m = n - n_0$, tem-se:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m+n_0} \\ &= z^{n_0} \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \\ &= z^{n_0} X(z). \end{aligned}$$

□

A propriedade de deslocamento temporal é muito útil, juntamente com outras propriedades e procedimentos, na obtenção da transformada \mathcal{Z} inversa [Oppenheim et al., 1997].

4.6 Métodos de Inversão

Alan V. Oppenheim, afirma em seu livro “*Discrete-time Signal Processing*”[Oppenheim et al., 1997] que

“Existe um número de maneiras formais e informais de encontrar a transformada \mathcal{Z} inversa.”

Contudo, segundo ele, os “procedimentos menos formais” são preferíveis na prática, como o método da inspeção direta, que consiste apenas em referir-se aos “pares da transformada \mathcal{Z} ”, como apresentado na tabela 4.1. Ao encontrar-se um par compatível, faz-se a relação $\mathcal{Z} \leftrightarrow \mathcal{Z}^{-1}$. Outro método preferível é o da expansão da função $X(z)$ em série de potências (em termos de z^{-1}). Método útil quando existe a dificuldade de se encontrar uma forma fechada para a inversa em uma tabela de transformadas. Há também o método da expansão em frações parciais, o que leva ao método da “inspeção direta”. Aliás, o método da expansão em frações parciais nada mais é que o método dos resíduos para uma função racional. Em outras palavras é o método de *Heaviside*, em que pode ser utilizado seu famoso Teorema da Expansão.

Por último, o da integral de inversão, pelo qual o cálculo da transformada inversa reduz-se ao somatório de resíduos (devido aos p polos) da função $X(z)z^{n-1}$. Dentre os métodos de inversão, este é o mais poderoso, apesar de aplicação mais onerosa:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \sum_{k=0}^{p-1} \text{Res} [X(z)z^{n-1}]_{z=z_k}, \quad (4.33)$$

o que é o mesmo que escrever:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z)z^{n-1} dz. \quad (4.34)$$

A esta altura, já é possível perceber que a transformada \mathcal{Z} é muito útil quando uma soma infinita pode ser expressa em uma forma fechada e matematicamente simples, no estudo de sinais e sistemas discretos. Vê-se também que a transformação possibilita a operação da transformada inversa por uma integral de contorno, da mesma forma como a integral de *Bromwich*. Contudo, os métodos menos formais são aconselháveis, dada a possibilidade da utilização de pacotes computacionais para a resolução de problemas específicos. As propriedades da transformada \mathcal{Z} podem ser encaradas como transformações em si e podem por sua vez ser encaradas como ponte para uma compreensão ainda maior do conceito de transformada. Neste aspecto, considerando relação entre a transformada \mathcal{Z} e a transformada de *Laplace* por intermédio de uma transformação conforme tem-se igualmente a possibilidade de abordar a questão da resolução de equações diferenciais parciais, como a equação do calor de *Fourier* – e outros *problemas potenciais*, como pode ser visto pela transformada de *Kelvin*, no apêndice F.

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Entre o Real e o Complexo

A matemática é talvez a única ciência que não necessita de um orgão sensorial mas aparenta ser, ao mesmo tempo, um “sensor” para os mecanismos universais, ao menos aqueles tangíveis, dos fenômenos ditos materiais. Nas palavras de *Oliver Heaviside*,

“a matemática deve ser encarada como uma ciência experimental e a ideia de que ao não ser que se caminhe por um caminho pré-definido não é possível provar-se nada é doutrina das mais perniciosas.”

Já há muito, a matemática rompeu com as ideias mecanicistas de *Isaac Newton*, embora o ser humano habite um mundo eminentemente *Newtoniano*. A mecânica quântica é um grande exemplo dessa realidade: a maioria dos seus resultados não fazem qualquer sentido caso se queira interpretá-los utilizando meramente o “bom senso”. A única coisa que não deixou os físicos e engenheiros desviarem-se do caminho foi a matemática.

As transformadas, na visão de muitos, sempre tiveram um certo ar de mistério. Mas o que são realmente? Uma simples substituição de variáveis e até integrais de contorno em um plano complexo podem fazer parte deste contexto. Nesta busca de uma significação do conceito de transformada, muito pode ser tirado como lição: sabe-se que o nome “transformada de *Laplace*” abrange vários outros nomes, mais ou menos notórios, e que fizeram parte da construção desta extraordinária ferramenta. *Oliver Heaviside* – provavelmente o principal protagonista desta história – amado e odiado por homens de ciência de seu tempo é um exemplo. Seria injustiça não considerá-lo ao menos um artífice desta obra monumental. *Joseph Fourier* – pai da transformada que mais tarde levaria seu nome – é igualmente um dos pilares do conceito de transformada. *Hurewicz, Zadeh, Ragazzini* e outros também constituem elementos atuantes do palco em que a estrela principal é a transformada \mathcal{Z} .

Atribui-se frequentemente a famosa citação “Deem-me uma alavanca e um ponto de apoio e poderei mover o mundo” ao pensador grego *Arquimedes de Siracusa*. Talvez seja lícito considerar que o marquês de *Laplace* tenha mesmo descoberto “por acaso” – já que não mais seguiu por este caminho – tal alavanca, ao enunciar:

$$u[t] = \sum_{x=0}^{\infty} y_x t^x .$$

O que deu o nome de *função geratriz* para uma sequência de números, sem divisar naquele momento que este nome teria um significado ainda maior. Esta transformação aparenta estar presente no cerne de quase todas as transformações estudadas ao longo do texto, tanto para a transformada \mathcal{Z} quanto para as transformações integrais, como as transformadas de *Laplace* e *Fourier* – caso a transição dos elementos no somatório seja tomada de forma infinitesimal. Mas isto significa que o trabalho estava realizado? Absolutamente! Para “mover o mundo”, também é necessário o ponto de apoio. Mas onde estaria ele?

Cronologicamente, a transformada de *Fourier* tem relativa ascendência em relação às outras transformadas, seguindo o desenvolvimento das transformadas como *entidades* à parte. Foi com o trabalho de *Fourier* que as equações diferenciais parciais entraram no recinto da engenharia de maneira sorrateira, pelas janelas... antes disso, à época de *Newton*, as equações diferenciais parciais não se impunham e ele não fez delas uso regular. Nas palavras de *Albert Einstein* (★1879 † 1955) [Einstein, 1953], as equações diferenciais parciais “tornam-se indispensáveis para a mecânica dos corpos modificáveis”: o problema da condução de calor atacado por *Fourier* nada mais era que um problema de valor de contorno expresso por uma equação parcial que, sob certos aspectos, transforma-se na equação da difusão ou na equação de *Laplace* – equação que se faz também presente na transformada obtida por *Lord Kelvin*. Tanto na obtenção da série trigonométrica quanto no caso de um “sólido infinito” – abstração admissível para o caso de uma função aperiódica –, o poder da teoria das séries e da transformada de *Fourier* vai além dos limites concebíveis. E não apenas na resolução de uma equação diferencial parcial: o fato de ser possível expressar *qualquer* função por uma série de *Fourier* já é por si admirável!

O mesmo pode ser dito do Cálculo Operacional de *Heaviside*. O procedimento experimental de transformar uma equação diferencial ordinária em uma equação algébrica, com a criação da variável p , foi encarado como um disparate à época, mas se transformou, após os trabalhos de *Carson* e *Bromwich*, em prática rotineira para quase todo o estudante de engenharia e ciências exatas. Além das aplicções costumeiras, o método de *Heaviside* e dos métodos operacionais que abarcam atualmente a transformada de *Laplace* mostraram-se muito úteis na solução de equações diferenciais parciais, já que têm a impressionante propriedade de transformar uma equação parcial em ordinária, solucionável pelos métodos já consagrados. Se aplicada novamente – o que é lícito –, a transformada de *Laplace* tem a igual capacidade de transformar a equação diferencial ordinária obtida em uma equação algébrica! Este assunto é, sem dúvida, pouco explorado ao nível de graduação dos cursos de engenharia.

Contudo, a ferramenta talvez mais extraordinária da teoria da transformada de *Laplace* seja o Teorema da Expansão de *Heaviside*, para o cálculo da transformada inversa. Para funções racionais, o métodos de *Heaviside* e *Bromwich* “convergem” um para o outro, ou

seja, a fórmula para cálculo de resíduos – necessária para resolver a equação de *Bromwich* – tem o formato similar à formula da expansão de *Heaviside*, que na prática também fornece os resíduos de uma função racional. Mas funções racionais aparecem na resolução de equações diferenciais ordinárias. Foi ao utilizar de maneira bem sucedida a fórmula da expansão na resolução de equações diferenciais parciais¹ – o que implica em funções não racionais – que *Heaviside* deixou sua marca e enfureceu os figurões de seu tempo. A fórmula da expansão permite calcular a transformada inversa de maneira muito mais simples que a integral de inversão *Bromwich*, que exige o conhecimento de integrais de contorno e conceitos avançados de análise complexa. De fato, foi o teorema da expansão que possibilitou a utilização prática da transformada de *Laplace* em problemas de engenharia.

Do ponto de vista puramente matemático, as transformadas de *Laplace*, *Fourier* e \mathcal{Z} podem ser compreendidas como integrais de contorno [ou somatórios] em um plano complexo, e que realizam operações neste universo. As duas primeiras nasceram como técnica de resolução de problemas de valor de contorno, mas tomaram uma forma abrangente e inimaginável, principalmente no que diz respeito à versatilidade de aplicações; tendo seguido a partir daí caminhos relativamente díspares. A transformada de *Laplace*, que opera sobre todo plano complexo – como pôde ser observado pela formulação de *Bromwich* –, “especializou-se” principalmente em sistemas dinâmicos e é muito eficiente no estudo da estabilidade de sistemas – lembrando que sistemas dinâmicos são geralmente descritos por equações diferenciais, sobretudo parciais. A transformada de *Fourier*, por sua vez, é extremamente eficiente para o estudo de fenômenos transitórios e de resposta em frequência, já que realiza operações sobre o eixo imaginário, mas permite “enxergar” aspectos que a primeira não pode, ou que pode de maneira mais complicada: nitidamente, uma ferramenta para cada trabalho.... A transformada \mathcal{Z} , em contrapartida, está mais voltada para sistemas discretos e para a resolução de equações de diferenças, que são o equivalente discreto das equações diferenciais. Caso se queira pensar que cada vez mais ferramentas computacionais têm sido utilizadas na resolução de problemas práticos de engenharia, a transformada \mathcal{Z} toma uma importância imensa.

Fica evidente a relação íntima entre todas as transformadas, sendo que vários elementos foram utilizados para demonstrar a “conexão” entre todas elas, como forma de unificar o conceito. Unificar, neste contexto, não significa criar uma transformada única. Há inclusive trabalhos neste sentido, como por exemplo [Corinthios, 2002] e uma transformada generalizada não teria utilidade prática para os objetivos propostos. Foi observado que a função degrau unitário pode ser utilizada como um mote para a compreensão das relações entre as transformadas de *Fourier* e *Laplace*. Matematicamente, foi visto que a transformada de *Laplace* é de fato a transformada de *Fourier* multiplicada por um fator de convergência. Da mesma forma, a transformação de *Tustin* foi utilizada para “conectar”

¹Para a qual, aliás, não existe ainda uma prova matemática.

as transformadas de *Laplace* e \mathcal{Z} , fechando assim o elo entre as três transformadas. Contudo, a transformação de *Tustin*, que é uma espécie de transformação conforme, pode da mesma forma criar vinculações entre o trio e outras transformadas, como a transformada de *Kelvin* que, como visto, pode ser aplicada na resolução da equação de *Laplace*, na busca de funções harmônicas para solução de problemas envolvendo potenciais.

Não se objetivou neste trabalho esgotar o assunto de estudo das transformadas, nem tampouco a história de seu desenvolvimento e aplicações. Uma pretensiosa — e talvez impraticável — empreitada preencheria seguramente vários livros. Buscou-se apresentar de maneira modesta os fundamentos de algumas técnicas de transformação em particular e em conjunto, juntamente com o aspecto humano e histórico inerente ao seu desenvolvimento, na tentativa de criar uma *visão unificada do conceito de transformada*, entendendo que as transformadas são, dentre incontáveis outras técnicas, pontes que facilitam a busca por uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza.

5.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

A proposta deste trabalho de unificar conceitos é uma tentativa de criar uma visão global do conceito de transformada, que acredita-se ser essencial para a formação do engenheiro. E embora o produto final não seja algo mensurável, espera-se ter contribuído neste sentido.

Pode-se observar nitidamente a influência do autor *Paul J. Nahim* e, em especial, de sua obra “*The Science of Radio*”, na confecção deste trabalho. Sua visão histórica e humanista, conjugada harmonicamente com a linguagem técnico-científica, torna o aprendizado um processo natural e divertido, embora sólido.

Propõe-se, como sugestão para futuros trabalhos, a utilização desta estratégia na unificação de outros conceitos. Pode-se inclusive procurar aumentar o “leque” das transformadas, situando a investigação nas raízes e conexões entre transformadas que não foram trabalhadas no texto. Porém este modelo não é aplicável somente no contexto da engenharia e ciências exatas: pode-se utilizá-lo em outras áreas, sempre com o objetivo de unificar conceitos, teorias, ideias. Pode-se também pesquisar outros modelos e estratégias de unificação, sempre com o mesmo objetivo.

Referências Bibliográficas

- [Boole, 1859] Boole, G. (1859). *Treatise on differential equations*. Volume 37 of [Petrova, 1987]. 15
- [Boyer, 1974] Boyer, C. B. (1974). *História da matemática*. Edgard Blücher, Brooklin College, EUA, 1 edição. 6, 48, 116
- [Bromwich, 1916] Bromwich, T. J. I. (1916). Normal coordinates in dynamical systems. *Proceedings of London Mathematical Society*, **15**: 401–448. 33
- [Bromwich, 1928] Bromwich, T. J. I. (1928). Note on prof. Carslaw's paper. *Mathematical Gazette*, **14**. 44
- [Carslaw e Jaeger, 1941] Carslaw, H. S. e Jaeger, J. C. (1941). *Operational methods in applied mathematics*. Oxford University Press, 1 edição. 37
- [Carson, 1932] Carson, J. R. (1932). Notes on Heaviside Operational Calculus. *Bell System Technical Journal*, páginas 150–162. 23
- [Carson, 1953] Carson, J. R. (1953). *Electric circuit theory and the Operational Calculus*. Chelsea Publishing Company, AT&T, New York, 2 edição. Reedição do livro de 1926. 12, 16, 17
- [Cauchy, 1827] Cauchy, A. L. (1827). Sur l'analogie des puissances et des différences etc. *Oeuvr. compl.* 15
- [Churchill, 1963] Churchill, R. V. (1963). *Fourier series and boundary value problems*. McGraw-hill Book Company, Inc., 2 edição. 47, 52, 53
- [Corinthios, 2002] Corinthios, M. J. (2002). A generalized transform, grouping, Fourier, Laplace and Z transforms. In *Proc. 14th International Conference on 2002 - ICM Microelectronics*, páginas 172–175. 102
- [Dassios, 2008] Dassios, G. (2008). The Kelvin transformation in potential theory and Stokes flow. *Journal of Applied Mathematics*, **74**: 427–438. 126
- [Deakin, 1981] Deakin, M. A. B. (1981). The development of the Laplace transform I. Euler to Spitzer, 1737-1880. *Archive for History of Exact Sciences*, **25**(4): 344–391. 7, 8, 9, 105, 106
- [Deakin, 1992] Deakin, M. A. B. (1992). The ascendancy of the Laplace transform and how it came about. *Archive for History of Exact Sciences*, **44**(3): 265–286. 44, 45, 105
- [Dirac, 1927] Dirac, P. (1927). The physical Interpretation of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London*, (A113): 621–41. 66

- [Doetsch, 1937] Doetsch, G. (1937). *Theorie und An. der Laplace-transformation.* Volume 44 of [Deakin, 1992], 1 edição. 45
- [Duffy, 1994] Duffy, D. G. (1994). *Transform methods for solving partial differential equations.* CRC Press Company, New York, 2 edição. 26, 37
- [Einstein, 1953] Einstein, A. (1953). *Como vejo o mundo.* Europa Verlag, Zurich, 11 edição. Tradução de H. P. de Andrade do título original “Mein Weltbild”. 101
- [Euler, 1769] Euler, L. (1769). *Institutiones calculi integralis volumen primum.* In [Deakin, 1981], página 348. 7
- [Fourier, 1878] Fourier, J.-B. J. (1878). *The analytical theory of heat.* Cambridge University Press. Traduzido para o inglês, com notas, por Alexander Freeman. 48, 54, 58, 61, 69, 124
- [Gregory, 1846] Gregory, D. (1846). On the solution of linear differential equations with constant coefficients. In [Petrova, 1987], páginas 1–23. 15
- [Heaviside, 1892a] Heaviside, O. (1892a). *Electrical papers*, volume 1. Elibron Classics, London. 11
- [Heaviside, 1892b] Heaviside, O. (1892b). *Electrical papers*, volume 2. Elibron Classics, London. 11, 29
- [Heaviside, 1893a] Heaviside, O. (1893a). *Electromagnetic Theory*, volume 2. Elibron Classics, London. 12, 16, 66, 84
- [Heaviside, 1893b] Heaviside, O. (1893b). *Electromagnetic Theory*, volume 3. Elibron Classics, London. 16
- [Heaviside, 1893c] Heaviside, O. (1893c). On operators in physical mathematics. *Proceedings of the Royal Society of London*, **52**: 504–529. 29
- [Hunt, 2005] Hunt, B. J. (2005). *The Maxwellians.* Cornell University Press, 1 edição. 10
- [Jury, 1958] Jury, E. I. (1958). *Sampled-data Control Systems.* John Wiley & Sons, Inc. 91
- [Jury, 1981] Jury, E. I. (1981). Sampled-data systems, revisited: reflections, recollections, and reassessments. *Acoustics, Speech, and Signal Processing Newsletter, IEEE*, **54**: 14–20. 87
- [Jury, 1987] Jury, E. I. (1987). On the history and progress of sampled-data systems. *IEEE Control Systems Magazine*, páginas 16–21. 87
- [Kuperberg, 1996] Kuperberg, K., editor (1996). *Collected works of Witold Hurewicz*, volume 4. Am. Math. Soc. 87
- [Laplace, 1779] Laplace, P. S. (1779). Mémoire sur les suites. In [Deakin, 1981], página 352. 8
- [Laplace, 1782] Laplace, P. S. (1782). Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. In [Deakin, 1981], página 353. 9

- [Laplace, 1810] Laplace, P. S. (1810). Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités. In [Deakin, 1981], páginas 357–360. 9
- [Lathi, 2007] Lathi, B. P. (2007). *Sinais e sistemas lineares*. Bookman, Porto Alegre, 2 edição. 11, 48, 52, 56, 76
- [Lützen, 1979] Lützen, J. (1979). Heaviside's Operational Calculus and the attempts to rigorise It. *Archive for History of Exact Sciences*, **21**: 161–200. 14, 15, 26
- [Nahin, 1991] Nahin, P. J. (1991). Behind the Laplace transform. *IEEE Spectrum*, **28**(3): 60. 33, 44
- [Nahin, 1998] Nahin, P. J. (1998). *An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$* . Princeton University Press, 1 edição. 54, 83, 88
- [Nahin, 2001] Nahin, P. J. (2001). *The Science Of Radio: with Matlab and Electronics Workbench demonstrations*. Springer-Verlag, 2 edição. 2, 75, 108
- [Nahin, 2002] Nahin, P. J. (2002). *Oliver Heaviside: the life, work, and times of an electrical genius of the Victorian age*. The Johns Hopkins University Press, 2 edição. Originally printed in a hardcover by the IEEE, Inc., 1987. 10, 11, 12, 50, 76, 124
- [Nahin, 2006] Nahin, P. J. (2006). *Dr. Euler's Fabulous Formula: cures many mathematical ills*. Princeton University Press, 1 edição. 52, 56, 61, 66
- [Ogata, 2003] Ogata, K. (2003). *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall, São Paulo, 4 edição. 122
- [Oppenheim et al., 1997] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., e Buck, J. R. (1997). *Discrete-time signal processing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EUA, 2 edição. 87, 91, 98
- [Papoulis, 1962] Papoulis, A. (1962). *The Fourier Integral and its applications*. A McGraw-Hill Classic Textbook Reissue Series. McGraw-hill Book Company, Inc. 40, 57, 74, 77, 95
- [Petrova, 1987] Petrova, S. S. (1987). Heaviside and the development of the symbolic calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, **37**: 1–23. 15, 23, 24, 104, 105
- [Pipes, 1937] Pipes, L. A. (1937). Laplacian transform circuit analysis. *Philosophical Magazine Series*, **24**(161): 502–511. 45
- [Ragazzini e Zadeh, 1952] Ragazzini, J. R. e Zadeh, L. A. (1952). The analysis of sampled-data systems. *AIEE trans.*, **71**: 225–234. 87
- [Servois, 1814] Servois, F. J. (1814). Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel, et en particulier, sur la doctrine des infiniment petits. *Ann. Math. Pures Appl.*, **5**. 15
- [Soares, 1996] Soares, P. M. O. D. R. (1996). Discretização de controladores contínuos. Dissertação de Mestrado, FEUP - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 122

- [Spiegel, 1974] Spiegel, M. R. (1974). *Schaum's outline of theory and problems of Fourier Analysis*. McGraw-hill Book Company. With applications to boundary value problems. 51
- [Strum e Kirk, 1994] Strum, R. S. e Kirk, D. E. (1994). *Contemporary linear systems*. 87
- [Thomson, 1881] Thomson, J. J. (1881). On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. *Philosophical Magazine Series 5*, **11**: 229–249. 11
- [Thomson, 1855] Thomson, S. W. (1855). On the theory of the electric telegraph. *Proceedings of the Royal Society*. Reimpresso em Mathematical and Physical Papers. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1884, p. 61-76. 124
- [Thomson, 1845] Thomson, W. (1845). Extrait d'une lettre de M. William Thomson a M. Liouville (From Liouville's Journal de Mathématiques). *Kelvin Papers on Electrostatics and Magnetism*, páginas 208–210. 125, 126
- [Tonidandel, 2010] Tonidandel, D. A. V. (2010). Decifrando a transformada Z. In *CBA 2010 - XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. 95, 121
- [Vianna, 1971] Vianna, F. (1971). *Transformação De Carson-laplace (Cálculo Operacional)*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 37
- [Weisstein, 2010] Weisstein, E. W. (2010). Inversion: from Mathworld – a Wolfram web resource. Disponível em <<http://mathworld.wolfram.com/inversion.html>>. acesso: 25 out. 2010, 15:00. 127

Apêndice A

A derivada de uma integral é a integral da derivada?

Propõe-se a seguinte questão [Nahin, 2001]: A derivada de uma integral é a integral da derivada? Isto é, se $g(y) = \int_0^\pi f(x, y) dx$, qual é a derivada de $g(y)$? Pode-se afirmar, corretamente, que:

$$\frac{dg}{dy} = \frac{d}{dy} \int_0^\pi f(x, y) dx = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial y} dx ? \quad (\text{A.1})$$

Decerto que sim! Mas, apenas quando os limites de integração forem constantes, como os da equação A.1. Neste caso, a derivada de uma integral é apenas a integral da derivada. Mas, se um (ou dois) dos limites for função da variável y , i.e., se

$$g(y) = \int_{v(y)}^{u(y)} f(x, y) dy, \quad (\text{A.2})$$

ainda é correto escrever

$$\frac{dg}{dy} = \int_{v(y)}^{u(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx ? \quad (\text{A.3})$$

Neste caso, não se pode dizer o mesmo. Para saber qual a resposta correta, deve-se introduzir alguns conceitos, como o de diferencial:

Definição 2 (Diferencial). Seja uma função $u = f(x)$, como mostrado pela figura A.1. Uma variação na variável independente $\Delta x = x_2 - x_1$ corresponderá a uma variação de $u(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta u &= f(x_2) - f(x_1) \\ \Delta u &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1). \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{\Delta x}{\Delta x}$ e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Delta x.$$

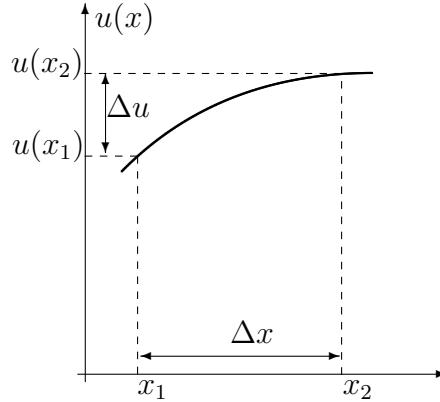


Figura A.1: Definição de diferencial.

Ora, como $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ é a própria definição de derivada, vem:

$$\begin{aligned} du &= \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} \Delta x \\ du &= \Delta x \frac{du}{dx}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Demonstração. Retornando ao problema, deseja-se derivar uma integral com limites variáveis, ou seja, calcular $\frac{dg}{dy}$, em que $g(y)$ é dada por A.2. Da definição de derivada, tem-se:

$$\frac{dg}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta x) - g(y)}{\Delta x}. \quad (\text{A.5})$$

Então, de A.2:

$$g(y + \Delta x) - g(y) = \int_{v(y+\Delta x)}^{u(y+\Delta x)} f(x, y + \Delta x) dx - \int_{v(y)}^{u(y)} f(x, y) dx.$$

Se $u(y)$ e $v(y)$ são diferenciáveis, então:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(y + \Delta x) - u(y)}{\Delta x}, \\ \frac{dv}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(y + \Delta x) - v(y)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Então, com $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u(y + \Delta x) &= \Delta x \frac{du}{dy} + u(y) \\ &= du + u(y) \\ v(y + \Delta x) &= \Delta x \frac{dv}{dy} + v(y) \\ &= dv + v(y). \end{aligned}$$

E então,

$$\int_{v(y+\Delta x)}^{u(y+\Delta x)} f(x, y + \Delta x) dx = \int_{v+\Delta x \frac{dv}{dy}}^{u+\Delta x \frac{du}{dy}} dx = \int_{v+dv}^{u+du} dx.$$

Da mesma forma, para $f(x, y)$, com $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f(x, y + \Delta x) = \Delta x \frac{df}{dy} + f(x, y),$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{v(y+\Delta x)}^{u(y+\Delta x)} f(x, y + \Delta x) dx &= \int_{v+dv}^{u+du} \left\{ f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx \\ &= \int_{v+dv}^{u+du} f dx + \Delta x \int_{v+dv}^{u+du} \frac{\partial f}{\partial y} dx. \end{aligned}$$

O que leva a:

$$g(y + \Delta x) - g(y) = \int_{v+dv}^{u+du} f dx + \Delta x \int_{v+dv}^{u+du} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \int_v^u f dx.$$

Usando a figura A.2 como referência para visualizar os limites de integração, vê-se que haverá cancelamento de intervalos. Então, a última expressão pode ser rescrita como:

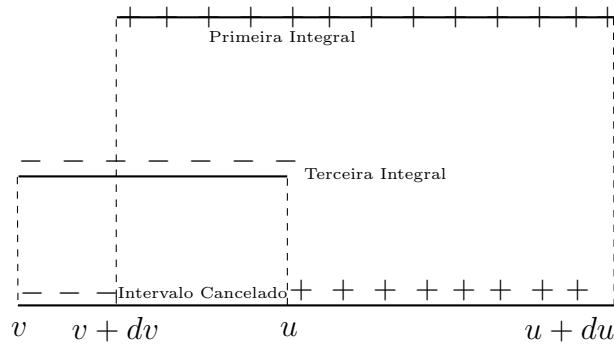


Figura A.2: Guia para visualização dos limites de integração.

$$g(y + \Delta x) - g(y) = \int_u^{u+du} f(x, y) dx + \int_v^{v+dv} f(x, y) dx + \Delta x \int_{v+dv}^{u+du} \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

Então¹,

$$\begin{aligned}\int_u^{u+du} f(x, y) dx &= f[u(y), y] \Delta x \frac{du}{dy} \\ \int_v^{v+dv} f(x, y) dx &= f[v(y), y] \Delta x \frac{dv}{dy}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dg}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta x) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[u(y), y] \Delta x \frac{du}{dy} - f[v(y), y] \Delta x \frac{dv}{dy} + \Delta x \int_{v+\Delta x \frac{dv}{dy}}^{u+\Delta x \frac{du}{dy}} \frac{\partial f}{\partial y} dx}{\Delta x}.$$

Dessa forma, chega-se ao resultado esperado:

$$\frac{dg}{dy} = \int_{v(y)}^{u(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx + f[u(y), y] \frac{du}{dy} - f[v(y), y] \frac{dv}{dy}. \quad (\text{A.6})$$

□

A expressão A.6 é chamada de *Regra de Leibniz* para derivada de uma integral, em homenagem ao matemático alemão *Gotfried Wilhelm Leibniz* (★1646 † 1716), contemporâneo de *Isaac Newton* (★1642 † 1727) e co-criador do cálculo diferencial e integral. Segundo tal regra, a derivada da integral é simplesmente a integral da derivada, se os limites de integração não são função da variável independente.

Exemplo 1 (Circuito RLC). Considere o circuito RLC da figura A.3. No instante $t = 0$ a chave é movida para a direita e o capacitor (até o momento carregado em V_0) começa a descarregar pelo indutor. Utilizando a lei de *Kirchhoff* das tensões, considerando $i(t)$ no sentido horário:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau - V_0 = 0.$$

Derivando com relação a t vem:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \left\{ \int_0^t \frac{\partial i(\tau)}{\partial t} d\tau + i(t) \frac{dt}{dt} - i(0) \frac{d(0)}{dt} \right\} = 0;$$

¹É como se, nesta última simplificação, considerássemos f “constante” na integral, ou seja:

$$\int_u^{u+du} f dx = f \int_u^{u+du} dx = f \cdot x \Big|_u^{u+du} = f \cdot (u + du - u) = f \cdot du = f \cdot \Delta x \frac{du}{dy}.$$

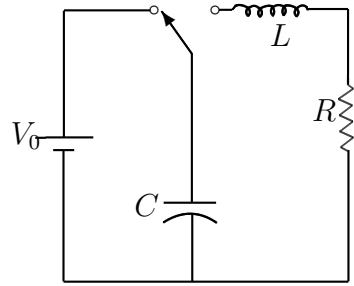


Figura A.3: Circuito RLC alimentado.

desde que $i(\tau)$ não é função do tempo, tem-se que $\frac{\partial i(\tau)}{dt} = 0$. Desta forma:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Esta equação pode ser resolvida por transformada de *Laplace*, ou outro método qualquer, como por exemplo, assumindo uma solução exponencial $i(t) = ke^{st}$.

Apêndice B

Transformada Inversa através das integrais de Duhamel

Segue um exemplo de aplicação de um circuito RC. Apresenta-se o método que *Carson* utilizava para calcular transformada inversa, utilizando as integrais de *Duhamel*. Este exemplo será resolvido duas formas. Primeiro, usando o método de *Carson*, com o conceito de admitância indicial (função de transferência) e integrais de *Duhamel*, para uma contextualização das técnicas disponíveis à época. Em seguida, para efeito de comparação, o método padrão e amplamente conhecido, utilizando tabelas de transformadas.

Exemplo 2 (Círculo RC). Considere o circuito da figura B.1. Calcular a corrente em resposta a uma entrada de tensão do tipo $e(t) = E \sin \omega t$.

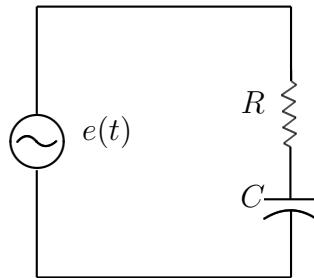


Figura B.1: Círculo RC alimentado.

Solução 1. Para encontrarmos a admitância indicial (ou função de transferência), que relaciona tensão de entrada e corrente de saída, aplica-se a função de *Heaviside* na entrada, ao invés de aplicar-se diretamente a entrada $e(t) = E \sin \omega t$:

$$R i_1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau = H(t).$$

Em que:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Aplicando a transformada de Carson-Laplace, tem-se:

$$RI_1(p) + \frac{1}{Cp} I_1(p) = 1.$$

Se a transformada de Laplace fosse utilizada, teria-se:

$$RI_1(s) + \frac{1}{Cs}I_1(s) = \frac{1}{s}.$$

Rearranjando os termos, vem:

$$I_1(p) = \frac{p}{R(p + \frac{1}{RC})},$$

ou, como $pF(p) = F(s)$:

$$I_1(s) = \frac{1}{R(p + \frac{1}{RC})}.$$

Por uma tabela de transformadas, constata-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at};$$

logo a transformada inversa fica:

$$i_1(t) = A(t) = \frac{1}{R}e^{-t/RC},$$

que é a admitância indicial. Substituindo na integral de Duhamel (eq. B.2):

$$i(t) = A(0)e(t) + \int_0^t e(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} A(\tau - t_0) d\tau, \quad (\text{B.2})$$

$$i(t) = \frac{1}{R}E \operatorname{sen}(\omega t) + \int_0^t E \operatorname{sen}(\omega \tau) \left\{ -\frac{1}{R^2 C} e^{-(t-\tau)/RC} \right\} d\tau,$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{Ee^{-t/RC}}{R^2 C} \int_0^t \operatorname{sen}(\omega \tau) e^{\tau/RC} d\tau.$$

Resolvendo a integral por partes (basta integrar duas vezes e rearranjar os termos), tem-se a corrente:

$$i(t) = -\frac{E\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2} e^{-t/RC} + \frac{E\omega C \cos \omega t}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + \frac{E \omega^2 C^2 R^2 \operatorname{sen} \omega t}{R (1 + \omega^2 C^2 R^2)}. \quad (\text{B.3})$$

Solução 2. A equação diferencial que descreve o sistema é:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = E \operatorname{sen} \omega t.$$

Tomando a transformada utilizando a equação de Carson-Laplace, tem-se:

$$\left[R + \frac{1}{Cp} \right] I(p) = p \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2};$$

rearranjando os termos, a corrente (em função de p) fica:

$$I(p) = \frac{E\omega p^2}{R(p + \frac{1}{RC})(p^2 + \omega^2)},$$

ou, se fosse utilizada a transformada de *Laplace*:

$$\left[R + \frac{1}{Cs} \right] I(s) = \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Rearranjando os termos, vem:

$$I(s) = \frac{E\omega s}{R(s + \frac{1}{RC})(s^2 + \omega^2)}.$$

Vê-se portanto que possuem transformadas similares, exceto pelo operador p . De fato,

$$p\mathcal{L}\{f(t)\} = pF(s) = F(p);$$

ou seja, basta dividir a transformação de *Carson* por p para obter a equação em termos da transformada de *Laplace*. Como o sistema é único, ele terá naturalmente a mesma transformada inversa, ou seja, a corrente no domínio do tempo. De acordo com uma tabela de transformadas:

$$i(t) = -\frac{E\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2} e^{-t/RC} + \frac{E\omega C \cos \omega t}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + \frac{E \omega^2 C^2 R^2 \sin \omega t}{R(1 + \omega^2 C^2 R^2)}. \quad (\text{B.4})$$

Apesar de levarem a resultados idênticos, o uso da integral de *Duhamel* é significativamente mais laborioso, no caso em que uma solução exata é possível. Contudo, ao proceder-se dessa forma é possível fazer conexões com os fenômenos físicos¹. Também é útil quando a transformada inversa não pode ser encontrada.

¹Em sistemas dinâmicos, a integral de *Duhamel* é uma ferramenta utilizada para calcular a resposta de um sistema linear a um sinal de entrada arbitrário.

Apêndice C

Solução de *Laplace* para a fórmula de probabilidades: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

A fórmula

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad (\text{C.1})$$

é uma integral muito importante, tanto em engenharia elétrica, quanto nas ciências físicas e matemática. Ela foi obtida (aparentemente) pela primeira vez em 1733 por *Abraham De Moivre* (★1667 † 1754). Curiosamente, esta equação, chamada de “fórmula de probabilidades”, aparece com frequência no estudo de diversos fenômenos da natureza.

A teoria das probabilidades teve numerosos devotos durante o começo do século XVIII. Dentre eles, um dos expoentes foi *Abraham De Moivre* (★1667 † 1754). *De Moivre*, apesar da considerável quantidade de pesquisa produzida, tornou-se professor particular de matemática por não ter conseguido posto algum em uma universidade, mesmo após esforços de *Leibniz* (seu amigo pessoal) que tentou obter um posto para ele na Alemanha. Na sua célebre obra *The Doctrine of Chances*, de 1718, ele investigava taxas de mortalidade e fundamentos da teoria das anuidades, juntamente com muitos problemas com dados e jogos. Nesta mesma obra, aparece a definição de “independência”. Em outro volume da sua obra, o *Miscellanea Analytica* de 1730, em um suplemento publicado no mesmo ano, aparece a famosa fórmula da aproximação $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, mais conhecida como fórmula de *Stirling*. Além disso, *De Moivre* aparentemente foi o primeiro a trabalhar com a fórmula de probabilidades $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$, resultado que apareceu de maneira discreta em um panfleto impresso por ele mesmo em 1733, época em que a “linguagem científica” padrão era o *Latim*, com o título “*Approximatio ad summan terminorum binomii (a + b)ⁿ in seriem expansi*” [Boyer, 1974].

Mais curioso ainda é notar que esta integral imprópria pode ser facilmente avaliada quando estabelecida de maneira definida, porém não possui solução quando os limites de integração não são especificados. Na literatura, existem diversas demonstrações desta impressionante equação, sendo que a maioria delas consiste na simples e elegante técnica de mudança de coordenadas, transformando a integral retangular para sua forma polar, fazendo com que possa ser avaliada facilmente. Esta demonstração pode ser encontrada em uma infinidade de livros de cálculo avançado, física-matemática, processos estocásticos, probabilidades etc.

Porém, em 1807, enquanto realizava seus estudos sobre Teoria das Probabilidades, o gênio Francês *Pierre-Simon de Laplace* (★1749 † 1827), forneceu um método engenhoso de derivar a fórmula, como mostrado em seguida:

Demonstração. Começando com a integral

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-s(1+x^2)} ds \right\} dx \\
 &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{1+x^2} \int_0^\infty -(1+x^2) e^{-s(1+x^2)} ds \right\} dx \\
 &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{1+x^2} e^{-s(1+x^2)} \Big|_0^\infty \right\} dx \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} dx \\
 &= \arctan(x) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Retornando agora à integral C.2, revertendo-se a ordem de integração, tem-se:

$$I = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-s(1+x^2)} ds \right\} dx = \int_0^\infty e^{-s} \left\{ \int_0^\infty e^{-sx^2} dx \right\} ds. \tag{C.3}$$

A ordem de uma integral como a da equação C.3 pode sempre ser invertida, já que o elemento diferencial de área $dA = dx \cdot ds = ds \cdot dx$. De fato, pode-se demonstrar que *qualquer* integral bidimensional é igual a uma integral simples iterada, desde que a região de integração seja finita e $f(x, y)$ seja uma função matematicamente “bem comportada”. A prova desta afirmação pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo diferencial e integral.

Fazendo a mudança de variáveis $u = x\sqrt{s}$ (e, por isso, $du = s^{1/2}ds \Rightarrow ds = s^{-1/2}du$) na integral que está entre chaves da equação C.3, vem:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\infty e^{-s} \left\{ \int_0^\infty e^{-u^2} s^{-\frac{1}{2}} du \right\} ds \\
 I &= \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} ds \int_0^\infty e^{-u^2} du;
 \end{aligned}$$

e para a integral em s , fazendo a mudança $u = \sqrt{s}$, tem-se:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{1}{u} 2u du \int_0^\infty e^{-u^2} du \\ I &= 2 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

E, por fim, combinando os resultados das equações C.4 e C.2, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 2 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right)^2 \\ \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

ou ainda como o integrando é uma função par,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (\text{C.5})$$

□

O que não é uma solução tão elegante quanto a de se fazer uma mudança para coordenadas, porém é uma demonstração bem ao gosto de *Laplace*, coisa que só um gênio poderia fazer! Além disso, uma função muito especial, a chamada *função gaussiana* ($f(x) = e^{\alpha x^2}$), tem uma estreita relação com o resultado expresso pela equação C.5. Este assunto foi abordado no capítulo 3, seção 3.6.

Apêndice D

Código em MATLAB para a série de *Fourier* de um trem de impulsos

Em seguida, mostra-se o código em MATLAB para gerar a série de *Fourier* de um trem de impulsos de Dirac, estudado na seção 3.4 (página 65):

```
% Serie de Fourier para um trem de impulsos de Dirac
% x_n(t) = 1 + 2*sumatório(2*pi*n*t)
% Gera um vetor de tempo igualmente espaçado, com 1000 pontos
clear all;
clc;
t = linspace(-pi/2, pi/2, 1000);
T_zero= 1; %T_zero= 2*pi;
omega_zero = 2*pi/T_zero;
somatermos = zeros(101,length(t)); % pré-alocando memória
somatermos(1,:) = 1; % Termo DC
for n=1:100
    D_n = 2;
    somatermos(1+n,:) = real(D_n*cos(n*omega_zero*t));
end
% Faz a soma cumulativa
% Cada linha da matriz corresponde a uma série truncada de Fourier
% de 1 até 100 termos
x_n = cumsum(somatermos);
%%
figure('name',...
['Serie de Fourier (truncada) para um trem de impulsos,...'
(' mfilename '.m) - Danny Tonidandel'], 'number', 'off');
% Plota séries truncadas
subplot(311)
plot(t,x_n(5,:),'LineWidth',1.3)
title('Série de Fourier (5 termos) para um trem de impulsos');
xlabel('tempo');
ylabel('f(t)')
grid;
subplot(312)
plot(t,x_n(20,:),'LineWidth',1.3)
title('Série de Fourier (20 termos) para um trem de impulsos');
xlabel('tempo');
```

```
ylabel('f(t)')
grid;
%
subplot(313)
plot(t,x_n(101,:),'LineWidth',1.3)
title('Série de Fourier (100 termos) para um trem de impulsos');
xlabel('tempo');
ylabel('f(t)')
grid;
```

Apêndice E

Transformada \mathcal{Z} na discretização de sistemas

Como mostrado no capítulo 4, uma aplicação interessante para o estudo da transformada \mathcal{Z} e sua relação com outras técnicas de transformação é a discretização de sistemas [Tonidandel, 2010].

Exemplo 3 (Discretização de Sistemas). Considere o sistema de primeira ordem $H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s+p}$, ilustrado pela figura E.1, em que $H(s)$ é a função de transferência do sistema.

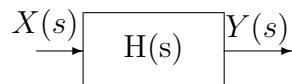


Figura E.1: Sistema do tipo “entrada/saída”.

Reescrevendo a equação, tem-se:

$$kX(s) = sY(s) + pX(s)$$

Voltando ao domínio do tempo (aplicando \mathcal{L}^{-1}), vem:

$$kx(t) = \frac{dy}{dt}(t) + py(t) \Rightarrow \dot{y} + py(t) = kx .$$

Rescrevendo na forma diferencial,

$$dy + pydt = kxdt .$$

Integrando-se então ambos os membros, chega-se a:

$$\int_{t-T}^t dy + p \int_{t-T}^t ydt = k \int_{t-T}^t xdt .$$

Neste ponto, fazendo-se a aproximação “trapezoidal” (figura 4.4) para a integral, obtém-se a equação de diferenças:

$$\begin{aligned} y(t) - y(t-T) + p \left[\frac{y(t) + y(t-T)}{2} T \right] &= \\ &= k \left[\frac{x(t) + x(t-T)}{2} T \right] . \end{aligned}$$

Por fim, aplicando a transformada \mathcal{Z} e reordenando os termos, obtém-se o sistema discretizado, na forma de um polinômio em z^{-1} :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{kT(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})+pT(1+z^{-1})}. \quad (\text{E.-2})$$

Contudo, o método de discretização do exemplo 3 constitui-se em tarefa dispendiosa. Como proceder então? Uma forma de evitar os cálculos seria aplicar uma outra espécie de transformação que, na prática, situa-se basicamente em dois campos: de posse do modelo contínuo do sistema, geralmente expresso em função de s (domínio de *Laplace*), efetua-se a substituição do termo “ s ” (que corresponde ao termo derivativo) por um termo em função de z . Estes correspondem aos métodos clássicos. Na aproximação exata, bastava proceder como exposto na seção 4.3, fazendo-se $z = e^{Ts}$. Desta forma, cada sistema iria diferenciar-se do outro pelo período de amostragem. Outros buscam tratar do termo “ $1/s$ ”, que corresponde à integração no domínio do tempo, por algum termo em função de z . Dentre os diversos métodos presentes na literatura, pode-se citar [Soares, 1996]:

- Transformação de *Euler* ou “*forward difference*”: expansão de z como uma série truncada $z = e^{Ts} \approx 1 + sT$ ou $s = \frac{z-1}{T}$ (Vê-se que esta transformação é claramente instável).
- Transformação diferencial ou “*Backward difference*”: em oposição ao primeiro, busca uma aproximação da derivada pela equação de diferenças $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t)-x(t-T)}{T}x(t)$ ou $\Rightarrow s = \frac{z-1}{zT}$;
- Transformação de *Tustin* ou transformação bilinear: diferentemente dos primeiros, busca a aproximação do termo relativo à integração $\frac{1}{s}$, aproximando-se a integral por um método de integração qualquer, como o “*trapezoidal*”, “*Simpson*” etc.: $s = \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$.

Pode-se, dessa forma, transitar diretamente da transformada de *Laplace* para a transformada \mathcal{Z} , sem passar pelo domínio do tempo, interpretando a regra de integração (do método de discretização) como uma transformação de “ s ” para “ z ”, i.e., encarando a transformação como uma espécie de “discretização da transformada de *Laplace*”. No caso do exemplo 3, o resultado expresso pela equação 3 é obtido diretamente pela transformação de *Tustin*, ou seja, pela mera substituição:

$$s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}.$$

Na figura E.2 mostra-se uma comparação¹ entre os métodos de discretização para um sistema de *benchmark* proposto por [Soares, 1996]:

$$C(s) = \frac{2940s + 86436}{(s + 294)^2}. \quad (\text{E.-1})$$

Observa-se claramente que as transformações de *Euler* e diferencial podem tornar o sistema contínuo instável (pois possui polos com parte real negativa), em sistemas discretos instáveis (polos fora do círculo unitário); em contrapartida, a transformação de *Tustin*

¹A comparação foi feita utilizando-se do “Lugar Geométrico das Raízes” [Ogata, 2003].

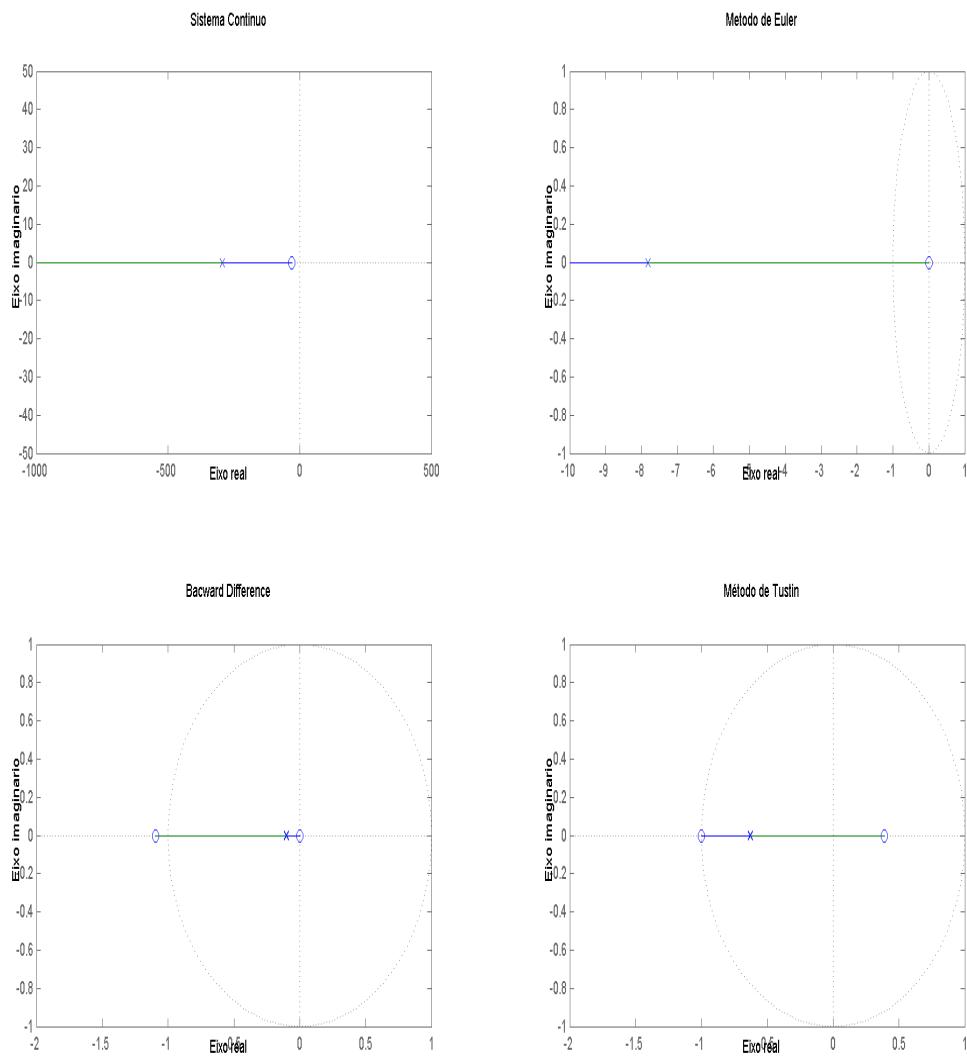


Figura E.2: Comparação entre os métodos de discretização.

preserva as características de estabilidade do sistema. Isto deve-se ao fato de a transformação bilinear ser um tipo de transformação conforme, que, como visto no capítulo 4, conserva o ângulo nas operações sobre o plano complexo.

Apêndice F

A transformada de *Kelvin*

O *insight* de Fourier [Fourier, 1878, p. 336] em aplicar $v(x, t) = e^{-ht}u(x, t)$, que transforma a equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial v^2} - hv,$$

em

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial u^2},$$

é a prova viva de seu gênio colossal. Talvez seja uma das razões que tanto impressionaram William Thomson – o “verdadeiro nome” de Lord Kelvin – quando este ainda era um adolescente. Aliás, o trabalho de Fourier o influenciou sobremaneira.

O historiador da engenharia elétrica Paul J. Nahin, na biografia de Oliver Heaviside [Nahin, 2002], usa a metáfora “Homem de Ferro”, para designar William Thomson, em alusão ao personagem homônimo das histórias em quadrinhos. Metáfora bem empregada, diga-se de passagem, pois além de brilhante cientista, Kelvin tinha um talento excepcional para o trato social, ao contrário de Heaviside, que tinha habilidade “zero” neste quesito.

A analogia de considerar o calor como um fluido foi utilizada por Kelvin na primeira teoria dos cabos de telégrafos. Desta vez, Kelvin considerou que a “entidade”¹ a se difundir ao longo de um cabo muito longo era a eletricidade [Thomson, 1855]. A teoria surgiu a partir de uma série de correspondências trocadas entre Kelvin – que na época era apenas o professor Thomson, da Universidade de Glasgow – e o também professor George Gabriel Stokes (1819 † 1903): um empenho que culminaria no projeto do cabo submarino de telégrafos [\approx 2000 milhas] que cortaria o oceano atlântico. Certamente uma aventura empolgante!

Thomson resolveu – pelo menos em parte – o problema juntamente com Stokes, utilizando a famosa equação do calor de Fourier, em que o termo “ $-hv$ ” representa a fuga de tensão do cabo submarino caso ele não estivesse perfeitamente isolado. Após resolvida a segunda equação, bastava multiplicar o resultado u por e^{-ht} para obter o valor de tensão. A utilidade da transformação $v = e^{-ht}u$ aplicada na equação diferencial parcial está no fato de ela ter a capacidade de transformar a equação em outra mais simples – ainda que parcial – e solucionável por método já conhecido. Ironicamente, a análise de Thomson foi o ponto de partida para os trabalhos de Heaviside – cerca de duas décadas depois –.

Entretanto, Kelvin fez ainda mais: já não é novidade que ele percorreu quase todos os ramos da ciências de seu tempo mas, será que ele também contribuiu com alguma técnica de transformação? Já foi visto no capítulo 3 que a distribuição de temperaturas em regime

¹Uma discussão sobre a natureza da energia pode ser vista na seção 3.2.

permanente no interior de um sólido condutor de calor é representado por uma *função harmônica*² u , representada pela série trigonométrica de *Fourier*. A função u servia como uma *função potencial* para o fluxo de calor e $-K\vec{\nabla}u$ representava o fluxo de calor por condução.

Naquele problema, *Fourier* desconsiderou a terceira dimensão espacial e, por isso, obteve sua famosa série. Mas em 3 dimensões deve-se encontrar outra função harmônica. Aliás, a equação de *Laplace* deve ser adequada à geometria do problema. Por exemplo, se o problema em questão tem simetria esférica, a equação $\nabla^2 u = 0$ possui a forma:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) = 0. \quad (\text{F.1})$$

em que $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ e $z = r \cos \theta$, com $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

A equação F.1 é a equação de *Laplace* em coordenadas esféricas, uma EDP que aparece em diversos fenômenos da natureza, como hidrodinâmica, transferência de calor e massa, gravitação, eletromagnetismo, entre outras. No eletromagnetismo, por exemplo, uma importante função harmônica – e por conseguinte, solução da equação de *Laplace* – é a função do potencial elétrico $V(x, y, z)$ em uma região do espaço livre de cargas elétricas. O potencial pode ser produzido por qualquer distribuição de cargas elétricas fora deste espaço. O vetor $-\vec{\nabla}V$ representa a força exercida em uma carga de prova³ “colocada” em um ponto daquele espaço, chamada por vezes de “força elétrica”. Em virtude disso, problemas que visam encontrar uma função harmônica são por vezes chamados de “problemas potenciais”.

Em uma carta, redigida em francês, e enviada ao amigo e matemático francês *Joseph Liouville* (★1809 † 1882), *Lord Kelvin* deixa seu nome no “hall” das transformadas [Thomson, 1845]. Nesta primeira correspondência, enviada em 1845, *William Thomson* busca soluções para o problema da distribuição de potencial elétrico em uma esfera carregada. Nela, *Kelvin* apresenta uma equação que transforma uma função harmônica em outra função também harmônica:

$$\mathcal{K}(r) = R = \frac{a^2}{|\vec{r}|^2} \vec{r}; \quad (\text{F.2})$$

com a transformada inversa, que é a mesma equação:

$$\mathcal{K}^{-1}(R) = r = \frac{a^2}{|\vec{R}|^2} \vec{R}, \quad (\text{F.3})$$

com $r \neq 0$ e $R \neq 0$, baseado na propriedade $r \times R = a^2$. Este procedimento, chamando por *Thomson* de “método das imagens” é, nada mais nada menos, que a transformada de *kelvin!* Uma peculiaridade interessante é que, pelo formato da equação, pode-se perceber que ∞ (infinito) é a imagem de 0 (zero) e *vice-versa*. Dessa forma, no problema particular de *Kelvin*, esferas são igualmente transformadas em esferas, com a diferença de que todo o exterior à esfera é transferido para dentro e seu “conteúdo” é transferido para fora! Como a operação conserva os ângulos, a transformada de *Kelvin* também é uma transformação conforme⁴, só que desta vez em 3 dimensões!

²Função harmônica é o nome dado a uma solução da equação de Laplace.

³Uma carga unitária positiva.

⁴Consulte o capítulo 4, seção 4.4.

Talvez, uma imagem que traduza a operação realizada pela transformada de *Kelvin* seja a litografia feita pelo artista holandês *Maurits C. Escher* (★1898 † 1972), “Mão com esfera refletida”, como ilustra a figura F.1. A mão do artista não apenas segura a esfera



Figura F.1: Mão com esfera refletida. Fonte: Galeria Nacional de Artes de Washington - EUA.

como também todo espaço em volta, em que a mão refletida toca a “mão real”. O centro deste mundo é o olhar do artista. No contexto da transformada de *Kelvin*, o olhar do artista seria chamado “centro de inversão”. Mas qual a real contribuição da transformada de *Kelvin*?

Transformar uma função harmônica em outra significa afirmar que pode-se obter imediatamente a solução da EDP de *Laplace* – para qualquer problema potencial –, no domínio transformado e de geometria mais simples. Como a transformação é não-linear, pode-se inclusive conceber a solução de um problema que não pode ser resolvido analiticamente no domínio original, aplicando a transformada inversa! Isto é claro, supondo que exista uma solução [Dassios, 2008].

A primeira das famosas cartas trocadas por entre os dois gigantes *Thomson* e *Lioville* foi publicada no jornal fundado por *Lioville*, o “*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*”, carinhosamente chamado de “Jornal de *Lioville*” – e posteriormente publicado nos “*Kelvin Papers on Electrostatics and Magnetism*” [Thomson, 1845] – com o título “*Extrait d'une lettre de M. William Thomson a M. Liouville*”. Aliás, foi *Lioville* quem provou, 5 anos depois, que a transformação de *Kelvin* é unica, uma vez encontrada.

Contudo, a transformada que leva o nome de *Lord Kelvin* já havia sido obtida maneira independente pelo físico-matemático britânico *George Green* (★1793 † 1841) em 1828 [Dassios, 2008]. Contudo, a genialidade de *Lord Kelvin* no uso dessa transformada fez com que fosse possível resolver até então impossíveis.

Exemplo 4 (Transformada de *Kelvin* em 2D). Um exemplo útil para a visualização da transformada de *Kelvin* pode ser feita em apenas 2 dimensões. Considere o círculo ilustrado pela figura F.2 [Weisstein, 2010]. Dois pontos P e P' são ditos inversos um do

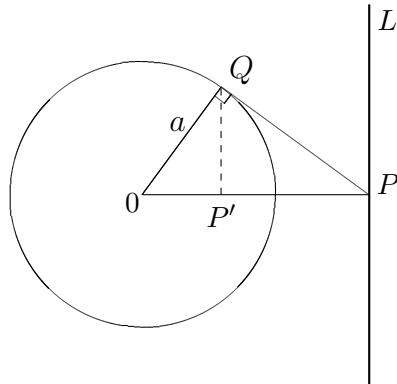


Figura F.2: Círculo de inversão da transformada de *Kelvin*.

outro se P' é a projeção do ponto Q do triângulo ΔOQP em que $OQ \perp \overline{QP}$. Da semelhança de triângulos tem-se a relação:

$$\frac{OP}{a} = \frac{a}{OP'} \Rightarrow a^2 = OP \times OP'.$$

As coordenadas (x', y') do ponto P' serão dadas pela transformada de *Kelvin* do ponto P – de coordenadas (x_0, y_0) – e *vice-versa*:

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + \frac{a^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ y' &= x_0 + \frac{a^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Índice Remissivo

- Bromwich
 Integral de Inversão, 33
- Cálculo Operacional, 17
- Cauchy
 Augustin Louis, 7, 10, 16
 Teorema do resíduo, 40
- Conclusões, 100
- Contribuições, 2
- Dirac
 Delta de, 61
 Paul, 62
- Dirichlet
 P. G. L., 54
 Critérios de, 57
- Discretização, 94, 121
- Duhamel
 integrais de, 19
 utilizando as integrais de, 113
- EDPs
 equação da difusão, 37, 77
 linha de transmissão, 27
 resolução, 26
 solução por transformada de Fourier, 77
- Equações de diferenças, 85
- Estrutura do trabalho, 2
- Euler
 Leonhard, 7, 8, 42
- Exemplos
 circuito RC, 113
 circuito RLC, 111
 derivando uma integral., 111
 linha de transmissão, 26
 resolvendo EDP: eq. da difusão, 37
- FitzGerald
 George Francis, 10
- Fourier, 46
 Coeficientes da série, 59
- Integral de, 66
- Nascimento da série, 52
- Série exponencial, 61
- Série trigonométrica, 55, 59
- Transformada de, 70
- Transformada Inversa, 70
- Vida e obra, 48
- Série no MATLAB, 119
- Transformada Inversa, 69
- Função
 Conceito de, 58
- Gauss
 Função Gaussiana, 71
- Heaviside
 Método de, 13
 Obituário, 11
 Oliver, 10–13
 problema de, 17, 20
 Teorema da Expansão de, 24
 vida e obra de, 11
 Cálculo Operacional, 12
- Incerteza
 Princípio da, 74
- Introdução, 1
- Kelvin
 Lord, 124
 Transformada de, 124
- Laplace
 desenvolvimento da Transformada, 6
 Transformada Inversa, 35
 Obra de, 7
- Leibniz
 regra de, 21, 111
- Logaritmos, 6
- Napier

- John, *veja* Logaritmos
- Objetivos, 2
 - objetivos
 - objetivo, 1
- Rayleigh
 - Lord, 76
- Stokes
 - George Gabriel, 124
- Strutt
 - John William, *veja* Lord Rayleigh
- Thomson
 - Joseph John, 11
 - William, *veja* Lord Kelvin
- Transformada
 - Carson-Laplace, 20
 - Transformação conforme, 92
 - Tustin, 95
 - Fourier, *veja* Transformada de Fourier
 - Laplace, 5
 - Z, 85
- Tustin
 - Arnold, *veja* Transformada de Tustin
- Weirstrass
 - Soma de, 57