第二讲

一元积分学

一、证明性问题

例1 设函数f在$[0, 1]$上可积, 且在$x = 1$处连续. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$$

提示: 注意

$$(n+1)\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x = f(1)$$

故只需证

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]\mathrm{d}x = 0$$

一、证明性问题

例2(二届预) 设函数$f \in R[0, 1]$, 且$f(1) = 0$, $f'(1) = a$.

证明:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = -a$$

提示: 据**Peano型Taylor公式**

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + r(x) = a(x-1) + r(x)$$

其中

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{r(x)}{1-x} = 0$$

一、证明性问题

例3 设正值函数 $f \in C[a, b]$, 令

$$x_n = \int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x \ (n \in \mathbb{N})$$

证明: 1) $x_{n+1}^2 \le x_n x_{n+2}\ (n \in \mathbb{N})$;

2) 数列 $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 收敛, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \max\limits_{a \le x \le b}\{f(x)\}$

提示: 1) Schwarz不等式; 2) Cauchy第二定理

一、证明性问题

Ex.(六届预) 设$f \in C[0,1]$是非负严格单调增函数.

1) 证明: 对任意$n \in \mathbf{N}$, 存在唯一$x_n \in [0,1]$, 使得

$$\big(f(x_n)\big)^n = \int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x$$

2) 证明: 数列$\{x_n\}$收敛, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

提示: 1) 利用积分中值定理或介值定理

2) 利用上例或按定义

二、积分逼近问题

例4 设f为$[0, 1]$上可微函数, $f'\in R[0, 1]$. 对$n\in\mathbf{N}$, 令

$$I_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)$

Ex. 2) (六届预) 设 $A_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

二、积分逼近问题

例5(二届预) 设函数$f \in R[0, 1]$, 且$0 \le f(x) \le 1$. 求证: 对任意$\varepsilon > 0$, 存在只取0, 1的分段(有限段)常值函数$g(x)$, 使得对任意$[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$, 有

$$\left|\int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

二、积分逼近问题

例6(四届预) 设函数 f 在[0, 1]上可微, $f(0)=f(1)$,

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 且 $\forall x\in[0,1]$, 有 $f'(x)\neq 1$. 求证:

对任意的正整数 n, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}$$

提示: 据Darboux定理先推 $f'(x)<1$; 再令

$$g(x)=f(x)-x$$

三、定积分不等式

例7(六届决) 设 $f \in C^1[0, 1]$, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x - x^3)$时成立, 其中A为常数.

提示: 先分部积分

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

再利用**Cauchy-Schwarz**不等式.

三、定积分不等式

例8(首届预) 设

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 \mathrm{d}t$$

求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

提示: 将积分分成两部分

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 \mathrm{d}t$$

对后者用Jordan不等式进行放大.

三、定积分不等式

例9(五届预) 设$f:[-1,1]\to\mathbf{R}$为偶函数, f在$[0,1]$上单调递增, g是$[-1,1]$上的凸函数. 求证:

$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x.$$

提示: 由f为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\left[g(x)+g(-x)\right]\mathrm{d}x$$

注意f和$g(x)+g(-x)$在$[0,1]$上单增, 可利用二重积分.

四、广义积分

例10(五届决) 设f 是$[0,+\infty)$上非负可导函数, $f(0)=0$,

$f'(x)\le\frac{1}{2}$, 且$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意$\alpha>1$,

$\int_0^{+\infty} f^{\alpha}(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 且有

$$\int_0^{+\infty} f^{\alpha}(x)\mathrm{d}x \le \left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta}, \quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}$$

提示: 作变上限积分函数

$$g(t)=\left(\int_0^{t} f(x)\mathrm{d}x\right)^{\beta}-\int_0^{t} f^{\alpha}(x)\mathrm{d}x$$

四、广义积分

例11(四届预) 设$f \in C^1[0,+\infty)$, $f(0)>0$, $f'(x)\ge 0$.

求证: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ 收敛 的充要条件是

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x$ 收敛.

提示: 必要性易; 充分性利用

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(x)+f'(x)}+\frac{f'(x)}{f(x)\left[f(x)+f'(x)\right]}$$

四、广义积分

Ex. (二届决) 设$0 < f(x) < 1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 都收敛. 求证:

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

提示: 记 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = a$, 则

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$