第一讲

极限理论

命题 设$\{x_n\}$为正数列, 则成立

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Cauchy第二定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a\ (\text{反之不然})$$

反例 令 $x_n=2+(-1)^n$, 说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$

一、按定义证明问题

例1 设函数 f 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A\in\mathbb{R}$$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=A$.

提示: 由导数定义，只需证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$$

一、按定义证明问题

例2(首届决) 设函数 f 在$(-1, 1)$内定义, 在$x = 0$处可导,

且$f(0) = 0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} f'(0).$$

提示: 利用有限增量公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \alpha(x)\cdot x$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$$

一、按定义证明问题

例3 设函数 $f\in U.C[0,+\infty)$, 且对$\forall$固定的$x\in[0,+\infty)$,

有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

(2)(首届决) 函数列$\{f(x+n)\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

提示: 按定义证明; 将$[0,1]$分为n等份, 使得 $\dfrac{1}{n}<\delta$,

其中δ来自一致连续条件.

一、按定义证明问题

例4 设$\{a_n\}$为递增正数列. 若对任意的正整数m, n, 有

$a_{mn} \geq m a_n$, 且

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{a_n}{n}\right\} = A < +\infty$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = A.$

提示: 按定义或利用上、下极限证明!

一、按定义证明问题

Ex.1 设数列$\{a_n\}$满足条件: 对$\forall$正整数m, n, 有

$$0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$$

证明: 数列 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 收敛.

提示: 按定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$$

例5 设$p > 1$, $\{b_n\}$为正数列. 令

$$a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_{n-1} + \sqrt[p]{b_n}}}}$$

证明: $\{a_n\}$收敛的充要条件是: 数列 $\left\{\frac{\ln b_n}{p^n}\right\}$有上界.

提示: 利用单调有界定理! 特别地, 数列

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{(n-1) + \sqrt{n}}}}$$

收敛.

例6(三届决) 设正数列$\{a_n\}$满足条件:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$$

证明: $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1$

提示: 令$x_n = \ln a_n$, 则有 $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n < +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0. \quad \text{要证} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x_k} = 1$$

Ex.2 设正数列$\{a_n\}$满足条件:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

能否断言

(I) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$?　　　(II) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$?

二、一致收敛性问题

例7(首届预) 设函数列$\{f_n(x)\}$在$[a, b]$上可微, 且逐点收敛, 又$|f_n'(x)|\le M$. 证明:

(1) $\{f_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛;

(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$是否一定在$[a, b]$上处处可导, 为什么?

提示: (1)用Cauchy一致收敛准则; (2) 不一定! 如

$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \overset{[-1,1]}{\rightrightarrows} |x|$$

二、一致收敛性问题

Ex.3 设函数列$\{f_n(x)\}\,(n\in\mathbb{N})$在$[a,b]$上满足条件: 存在常数$K>0$, 使得

$$|f_n(x)-f_n(y)|\le K|x-y|,\quad (x,y\in[a,b],n\in\mathbb{N})$$

且 $f_n(x)\xrightarrow{[a,b]} f(x)$. 证明: $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

提示: 用Cauchy一致收敛准则!

二、一致收敛性问题

例8 设 $f_n \in C[a, b]\ (\forall n \in \mathbf{N})$, 且对 $\forall x \in [a, b]$, $\{f_n(x)\}$ 均有界. 证明: $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致有界.

提示: 利用反证法, 并结合闭区间套定理.

思考: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上是否一定一致有界, 为什么?

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

二、一致收敛性问题

例9(二届决) 设连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 满足

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)-f(y)|<+\infty$$

证明: 存在常数a, 使得 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-ax|<+\infty.$

提示: 先证明 $$\left|f(x)-\frac{f(nx)}{n}\right|\le M$$

再证明 $$\frac{f(nx)}{n}\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}g(x)$$

且$g(x)$满足**Cauchy**方程, 从而$g(x)=g(1)\cdot x$

二、一致收敛性问题

Ex. 设函数 $f \in C(\mathbb{R})$，令

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

证明: 函数列$\{f_n(x)\}$在任意有限区间$[a, b]$上一致收敛.

提示: 先确定极限函数

$$f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} \int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

再用定义证明.