第三讲

微分学

一、微分中值定理

例1(五届预) 设$a>1$, 函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$可微.

求证: 存在正无穷大数列$\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\quad n=1,2,\cdots$$

提示: 用反证法和**Lagrange**中值定理.

$$f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x$$

一、微分中值定理

例2(六届预) 设f在**R**上二阶可导，f，f'，f''都大于0，且存在正数a, b使得 $f''(x) \le af(x) + bf'(x), \forall x \in \mathbb{R}$

1) 求证: $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0;$

2) 求证: 存在常数c，使得$f'(x) \le cf(x)$;

3) 求使上面不等式成立的最小常数c.

提示: 1)利用微分中值定理

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta_x) > f'(x)$$

一、微分中值定理

例3(三届决) 设$k_0 < k_1 < \cdots < k_n$为给定的正整数, A_1, $A_2, \cdots, A_n$为实参数. 当$A_1, A_2, \cdots, A_n$变化时, 求函数

$$f(x) = \sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + \cdots + A_n \sin k_n x$$

在$[0, 2\pi)$上零点个数的最小可能值, 并加以证明.

提示: 利用**Rolle**定理. 考察F'和F零点个数关系! 若

$$F(0) = F(2\pi) = 0$$

且F在$[0, 2\pi)$有N个零点, 则F''在$(0, 2\pi)$至少有$N-1$个零点

二、函数性态与最值

例4 设 $\alpha > 1$. 求证：不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数

$f(x)$ 满足 $\quad f'(x) \geq f^{\alpha}(x),\ x \in [0, +\infty)$

二、函数性态与最值

例5(六届决) 设$a(t)$，$f(t)$为实连续函数，且$f(t)>0$，$a(t)\geq 1, \forall t\in \mathbf{R}$. 又 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=+\infty$. 已知$x(t)$满足

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leq 0, \forall t\in\mathbb{R}$$

求证: $x(t)$在$[0, +\infty)$有上界.

提示: 先推出$x'(t)$单调减少；再利用反证法.

二、函数性态与最值

例6(十届预) 设 $f \in C^{(1)}[0, 1]$, 在 $x=0$ 处任意阶可导,

且 $f^{(n)}(0)=0\ (\forall n \geq 0)$, 又存在常数 $C>0$ 使得

$$|xf'(x)| \leq C|f(x)|, \quad \forall x \in [0,1]$$

证明: **(1)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0 \quad (\forall n \geq 0)$;

(2) 在 $[0, 1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$.

提示: (1) 利用**Hospital**法则;

(2) 证明 $\dfrac{f^2(x)}{x^{2C}}$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少并利用**(1)**.

二、函数性态与最值

例7(十届预) 设 $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$可微，且对$\forall x,y\in\mathbf{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|\le|x-y|^{\alpha}$$

其中 $\alpha\in(0,1]$ 为常数. 求证: 对$\forall x\in\mathbf{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\le\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$$

提示: 对$f'(x)>0$和<0分别利用N-L公式:

$$0<f(x-h)=f(x)-\int_{x-h}^{x}f'(t)\mathrm{d}t,\ \text{其中}h>0\text{待定}$$

二、函数性态与最值

Ex.(五届预) 设$f(x)$在区间$[0, a]$上有二阶连续导数,

$f'(0)=1, f''(0)\neq 0$ 且 $0<f(x)<x, x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n), x_1\in(0,a)$$

1) 求证$\{x_n\}$收敛并求极限; 2) 问$\{nx_n\}$是否收敛?

若不收敛, 则说明理由; 若收敛, 则求其极限.

提示: 1) 先证$\{x_n\}$单减, 再用单调有界定理;

2) 收敛. 利用Stolz定理和Hospital法则.

二、函数性态与最值

例8 求方程

$$x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$$

的近似解, 精确到0.001.

提示: 利用**Taylor**公式

$$\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2$$

二、函数性态与最值

例9 证明方程 $\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{10}}{10!}\right)\mathrm{d}t=5$

在开区间(5, 10) 内存在唯一实根 .

提示: 令

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{10}}{10!}\right)\mathrm{d}t$$

则$F(x)$连续、单增, 据介值定理, 只需证

$$F(5)<5, F(10)>5$$

二、函数性态与最值

例10 设f, g为$\mathbf{R}$上非负连续可微函数, 对$\forall\, x\in\mathbf{R}$, 有

$$f'(x)\ge 6+f(x)-f^2(x)$$

$$g'(x)\le 6+g(x)-g^2(x)$$

证明: **(1)** $\forall\varepsilon\in(0, 1)$及$x\in\mathbf{R}$, $\exists\xi\in(-\infty, x)$使$f(\xi)\ge 3-\varepsilon$

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$, 有$f(x)\ge 3$

Ex. **(3)** $\forall x\in\mathbf{R}$, $\exists\eta\in(-\infty, x)$使$g(\eta)\le 3$

Ex. **(4)** $\forall x\in\mathbf{R}$, 有$g(x)\le 3$

三、多元微分学

例11(二届预) 设$D\subset \mathbf{R}^2$是凸区域, $f(x, y)$是凸函数.

证明或否定: $f(x, y)$在D上连续.

注: 函数$f(x, y)$在D上为凸函数的定义是: $\forall \alpha\in(0, 1)$

及$\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in D$, 成立

$$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\right)\le \alpha f(x_1,y_1)+(1-\alpha)f(x_2,y_2)$$

提示: 先证一元凸函数必连续;

再用定义证$f(x, y)$连续.

例12(首届决) 设$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2<1\right\}$，$f(x,y)$在$D$内

连续, $g(x,y)$在D内连续有界, 且满足条件:

(1) $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} f(x,y)=+\infty$;

(2) f和g 在D内有二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^f, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\ge \mathrm{e}^g$$

证明: $f(x,y)\ge g(x,y)$在D内处处成立.

提示: 采用反证法; 并作辅助函数

$$F(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$$

三、多元微分学

例13 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$，$f(x,y)$在$D$上可微, 且 $|f(x,y)|<1$. 证明: 存在D的内点(x_0,y_0), 使得

$$f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)<1.$$

提示: 若$f(0,0)\ge 0$, 作辅助函数

$$F(x,y)=f(x,y)-\frac{1}{4}(x^2+y^2)$$

若$f(0,0)<0$, 怎么办?

三、多元微分学

Ex. (三届预) 在ΔABC中, 求函数

$$3\sin A+4\sin B+18\sin C$$

最大值.

提示: 记 $E=\{(x,y,z)\,|\,(x+y+z=\pi, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$

$$\max_{(A,B,C)\in E}\left(3\sin A+4\sin B+18\sin C\right)$$

$$=\max_{\substack{A+C\leq\pi\\ A,C\geq 0}}\left(3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C\right)$$

三、多元微分学

Ex.(三届预) 在ΔABC中, 求函数

$$3\sin A+4\sin B+18\sin C$$

最大值.

$$=\max_{0\le C\le\pi}\max_{0\le A\le\pi-C}\left((3+4\cos C)\sin A+4\sin C\cos A+18\sin C\right)$$

$$=\max_{0\le C\le\pi}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C\right)$$

$$=\max_{0\le C\le\pi}\left(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C\right)$$