第四讲

无穷级数

一、敛散性证明与求和

例1 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0.$$

提示: 利用Abel变换和Cauchy第一定理!

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = b_n S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k)$$

其中 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$

一、敛散性证明与求和

例2(二届决) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 令 $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} ka_{n+k}$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

提示: 先说明t_n有意义; 再考虑余和级数

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} ka_k \text{ 及部分和 } \sum_{k=1}^{m} ka_{n+k}$$

并用定义证明.

一、敛散性证明与求和

例3. 证明级数

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

收敛, 并求其和.

命题 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项 $a_n \to 0\ (n\to\infty)$, 且其部分和 $\{S_n\}$的子列 $\lim_{k\to\infty} S_{pk} = S$ (p为固定正整数), 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

证 由 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{pk} = S$, 对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbf{N}$, 当$k > k_0$时, 有

$$|S_{pk} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 对上述$\varepsilon > 0$, $\exists N \ge pk_0$, 当$n > N$时, 有

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2p}.$$

当$n > N + p$ 时, $\exists$唯一$k > k_0$, 使得 $pk \le n < p(k+1)$, 故

$$|S_n - S| \le |S_n - S_{pk}| + |S_{pk} - S|$$

$$\le \left|\sum_{i=pk+1}^{n} a_i\right| + \frac{\varepsilon}{2} < p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

一、敛散性证明与求和

例4(六届预) 设$\alpha \in (0,1)$，$\{a_n\}$是正数列且满足:

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$, 其中$k>0$.

提示: 首先n充分大后, $\{a_n\}$单调减少, 再证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

最后验证 $b_n = n^k a_n$ 也满足相同条件.

一、敛散性证明与求和

例5(四届预) 已知n为正整数，且当$|x| < 1$时，

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

求和 $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

提示： S_n恰为函数

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x}$$

展开式中x^{n-1}的系数.

一、敛散性证明与求和

例6 设 $a_0=1,\quad a_1=\frac{1}{2}$, 当$n\geq 1$时,

$$a_{n+1}=\frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}.$$

证明: 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛, 并求其和.

提示:利用变形式

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=ka_k-(k+1)a_{k+1},\quad k\geq 1$$

一、敛散性证明与求和

例7 设数列 $\{u_n\}\,(n=0,1,2,\cdots)$ 满足

$$u_n=\sum_{m=1}^{\infty}u_{n+m}^2 \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n \quad 收敛.$$

证明： $u_n=0\,(n=0,1,2,\cdots).$

提示: 若存在某个$u_i=0$, 结论显见. 若$u_n>0$, 则由

$$u_{n-1}-u_n=u_n^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n-1}}=\frac{1}{u_n+1}$$

及Stolz定理可得 $nu_n\to 1$, 导出矛盾.

一、敛散性证明与求和

例8(十届预) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n \quad (n\ge 2).$$

求证: (1) 当 $n\ge 2$ 时, 有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

提示: (2) 证明 $a_n \ge \dfrac{C}{n\ln n}, (n\ge 3)$

二、构造性问题

例9 试构造一个(0, 1)上定义的函数，使之在(0, 1)上单调，且在有理点间断，在无理点连续.

提示: 记(0, 1)内全体有理点为

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\cdots\right\}$$

取定$c_n>0$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛. 对$\forall x\in(0, 1)$，令

$$f(x)=\sum_{x_n<x}c_n$$

二、构造性问题

例10 试构造一个收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

提示: 由于$a_n \to 0\ (n \to \infty)$, 当$n$充分大时 $\left|a_n^3\right| \le |a_n|$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必条件收敛. 令

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \underbrace{- \frac{1}{k\sqrt[3]{k}} - \cdots - \frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}_{k\text{项}} + \cdots$$

二、构造性问题

例11(三届预) 对任何实数α, 求证: 存在取值于$\{-1, 1\}$的数列$\{a_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

提示: 注意

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}=\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-1\right)$$

利用Taylor公式先证

$$\left|\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right|\le x^2,\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Ex.1 设$\{a_n\}$为非负数列，满足$a_1=1$,

$$a_{n+1}\le a_n+\frac{1}{2^n},n=1,2,\cdots$$

证明: 数列$\{a_n\}$收敛.

Ex.2 设φ是**R**上严格单增连续函数, 其反函数为ψ,

数列$\{x_n\}$满足

$$x_{n+2}=\psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})+(1-\frac{1}{\sqrt{n}})\varphi(x_n)\right),\quad n\ge 2$$

判断数列$\{x_n\}$的敛散性, 并说明理由.