1　矩阵$\alpha\beta^T$

命题 1.1. 设A为$m\times n$阶非零方阵.
试证明下列说法等价:

(1) 存在非0的m维列向量α和n维列向量β, 使得$A=\alpha\beta^T$;(满秩分解)

(2) 方阵A的行与行之间只相差一个比列关系;

(3) 方阵A的列与列之间只相差一个比列关系.

命题 1.2. 设A为n阶非零方阵, 存在两个非0的n维列向量α和β, 使得$A=\alpha\beta^T$.
试证:

(1) $tr(A)=\beta^T\alpha$;

(2) $A^m=tr(A)^{m-1}A$, 特别地, $A^2=tr(A)A$;

2　条件中有“任何”

命题 2.1. 设A为n阶实方阵.

(1) 对任何n维列向量$x\in\mathbb{R}^n$, 都有$Ax=0$, 当且仅当$A=0$.

(2) 对任何n维列向量$x,y\in\mathbb{R}^n$, 都有$x^TAy=0$, 当且仅当$A=0$.

(3) 对任何n阶实方阵$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 都有$AB=BA$, 当且仅当$A$是数量矩阵.

(4) 对任何n维列向量$x\in\mathbb{R}^n$, 都有$x^TAx=0$, 当且仅当A是实反对称矩阵.

(5) 对任何n维列向量$x, y \in \mathbb{R}^n$, 都有$x^T A y = x^T A^T y$, 当且仅当A是对称矩阵.

(6) 对任何n维列向量$x, y \in \mathbb{R}^n$, 都有$x^T A y = -x^T A^T y$, 当且仅当A是反对称矩阵.

命题 2.2. 设A为n阶复方阵. 对任何n维复列向量$x \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$\overline{x}^T A x = 0,$$

当且仅当$A = 0$, 其中$\overline{x}$表示复矩阵x的共轭.