linear algebra

guanhao2022

October 2022

目录

1 预备知识

1.1 集合

子集 / 空集 /平凡子集（除真子集外的子集）
笛卡尔积（直积）:

$$A_1 * A_2 * A_3 * ...... * A_k = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k)|a_i \in A_i, 1 \leq i \leq k$$

$A^n = A * A * ......$ 称为 A 的 k 次幂
$2^s = \{X|X \subseteq S\}$
|S| 表示 S 中包含的元素个数，称为基数，满足

$$|2^s| = |2|^s$$

1.2 数集

N,Z^+,**Z**,**Q**,**R**,**C**

1.3 数域

对于加减乘除封闭
$Q(i) = \{a + bi|a, b \in Q\}$ 称为 Gauss 数域
任意数域必有有理数 Q 为子域

1.4 求和

求和号 $\sum$ 可交换

2 矩阵与行列式

2.1 线性型和矩阵概念的引入

2.1.1 常用矩阵

零矩阵 (**O**) / 对角矩阵 / 纯量矩阵/ 单位矩阵/ 三角矩阵（上下）
转置矩阵 A^T
$(A^T)^T$=A $(A + B)^T = A^T + B^T$ $(kA^T) = kA^T$
若 A^T=A 则为对称矩阵若 A^T=-A 则为反对称矩阵

2.2 矩阵的运算

2.2.1 加法

$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$,$C=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

则记为 **C=A+B**

2.2.2 纯量乘法

$A=(a_{ij})_{m\times n}$,,$C=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=k\times a_{ij}$$

则记为 **C=k**$\times A$

2.2.3 矩阵乘法

$A=(a_{ij})_{m\times n}$**,**$B=(b_{ij})_{n\times s}$**,**$C=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

则记为 C=A$\times B$

2.2.4 运算律

满足加法交换律、结合律存在零元、负元满足乘法结合律，乘法对于加法的分配律

结论 $x^TAy=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$
$x^TAx=0\Leftrightarrow A_T=-A$

Attention: 存在矩阵 A，B 均不等于 O 而 AB=O 且矩阵乘法不满足交换律和消去律

2.2.5 方阵的幂与方阵多项式

A$\in K^{n\times n}$,**k 为非负整数**

$$A^k=\begin{cases} E_n \quad k=0 \\ A \qquad k=1 \\ AA_{k-1}k\geq 1 \end{cases}$$

$$A^kA^l=A^lA^k=A^{l+k} \quad A^{kl}=A^{kl}$$

2.2.6 方阵的迹

$A=(a_{ij})_{n\times n}$
tr(A)=$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$
有以下性质
tr(A^T**)=tr(A)**
tr(A+B)=tr(A)+tr(B)
tr(kA)=ktr(A)
tr(AB)=tr(BA)

2.3 方阵的行列式

2.3.1 排列

设 S={1,2, · · · ,n} 由集合 S 中全体元素所组成的有序元组成为一个 n 级排列

设 $i_1,i_2,\cdots i_n$ **为一个 n 级排列，1**$\leq j<k\leq n$ $i_j>i_k$ **则** i_ji_k **构成一个逆序，逆序的总数成为逆序数，记作** $\tau(i_1i_2\cdot\cdot\cdot i_n)$ **逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的成为偶排列**

对于一个 n 级排列，若只交换其中两个数的位置而保持其余的数不动，则称为对原排列进行了一次对换，其改变排列的奇偶性

n 级排列中，奇排列数等于偶排列数，均为 $\frac{n!}{2}$

2.3.2 n 阶行列式的定义

设 n$\geq 1,A=(a_{ij})_{n\times n}$
|A|=$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

则称 |A| 为 A 的行列式，$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ **为 |A| 的展开式 |A| 也常记作**

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.4 行列式的基本性质

2.4.1 行列式的线性性

1. $|\mathbf{A}|=|A^T|$
2. **k 乘 D 中某一行元素就等于用 k 乘 D 本身**
3. **若两个 n 阶行列式除第 i 行之外各行都相同，则这两个 N 行列式的和是一个 N 阶行列式，它的第 i 行中各元素是原来两个行列式第 i 行中相应元素之和，其余各行与原行列式相同**

2.4.2 行列式的初等变换

1. **第一类初等变换：对换行列式的两行，行列式变号**

   推论　若行列式中有两行相同或成比例，行列式为 0
2. **第二类初等变换：同性质 2**
3. **第三类初等变换：将行列式中某一行的常数倍加到另一行，行列式的值不变**

2.4.3 Laplace 定理

设 D 为 N 阶行列式，$1\le k\le n, 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n, 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$ **D 中取定** $i_1i_2\cdots i_k$ **行与** $j_1j_2\cdots j_k$ **列将位于这 k 行 k 列交点上的** k^2 **个元素按照原来的顺序组成 k 阶行列式 M，成为 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去这 k 行 k 列侯余下的元素，按原来顺序组成的 n-k 阶行列式 M' 称为 M 的余子式**

再令 $A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdot\cdot\cdot+i_k)+(j_1+j_2+\cdot\cdot\cdot+j_k)}$M'
A 叫做 M 的代数余子式
设 D 为 N 阶行列式，$1 \le k \le n-1$ 在 D 中任意取定 k 行，由这 k 行元素所组成的全体 k 阶子式记作 $[M_1, M_2, \cdot\cdot\cdot, M_t$ 其中 $t=C_n^k$ 对于 $1 \le i \le t$, 令 M_i 的代数余子式为 A_i 则

$$\mathbf{D}=\sum_{i=1}^{t} M_i A_i$$

推论
1. 对于 k=1，即为行列式的按行按列展开
2.|AB|=|A||B|

2.5 行列式的计算

1. **三角化**
2. **降阶法**
3. **镶边法（有重复的元素）**
4. **各行各列和固定：加在一起，提公因式，相减**
5. **爪形行列式：用初等变换化成三角型行列式**
6. **除对角线，其他都相同：用初等变换化成爪形行列式**
7. **两三角型：拆行，分成两个矩阵，递推**
8. **两对角线型：Laplac 定理，除掉最外侧的，递推**
9. **三对角型：行列展开后递推**

Vandermonde 行列式　对于

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - xi)$$

2.6 可逆矩阵

设 A $\in K^{n\times n}$ **若存在 B** $\in K^{n\times n}$

$$\mathbf{AB=BA=E}$$

则称 A 为 n 阶可逆矩阵，A 与 B 互为逆矩阵
记作 B=A^{-1}

设

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对 1$\leq i,j \leq n$ A_{ij} **为** a_{ij} **的代数余子式，再令**

$$A^{*}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

A^{*} **叫做 A 的伴随矩阵**

定理

1. **A 可逆的充要条件是 |A|**$\neq$ **0**
2. $(A^{-1})^{-1}$**=A**
3. $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$
4. $(AB)^{-1}=(B^{-1})(A^{-1})$
5. $|A|^{-1}=|A^{-1}|$
6. $|A^{*}|=|A|^{n-1}$

对于 A $\in K^{n\times n}$ **若 |A|=0，则称 A 为 n 阶奇异矩阵，若 |A|** $\neq$ **0 则称 A 为 n 阶非奇异矩阵**

对合矩阵：A^2**=E**

幂等矩阵：A^2**=A**

幂零矩阵：$\exists m>0, |A|^m$**=O**

2.7 Cramer 法则

若线性方程组的系数矩阵 A 的行列式不等于 O，则方程组有唯一解且为

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

其中 D=|A|，D_j **是将 A 的第 j 列用常数列**

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

代替所得行列式

2.8 分块矩阵

将矩阵分块后，将小块矩阵进行运算，运算法则与原来相同应注意，分块矩阵相乘时应相互对应