1 秩为1的矩阵

命题 1.1. 设A为$m \times n$阶非零方阵.
试证明下列说法等价:

(1) $r(A) = 1$;

(2) 存在非0的m维列向量α和n维列向量β, 使得$A = \alpha\beta^T$;(满秩分解)

(3) 方阵A的行与行之间只相差一个比列关系;

(4) 方阵A的列与列之间只相差一个比列关系.

命题 1.2. 设A为n阶非零方阵, 存在两个非0的n维列向量α和β, 使得$A = \alpha\beta^T$.
试证:

(1) $tr(A) = \beta^T\alpha$;

(2) α是方程组$\beta^T x = 0$的解$\Leftrightarrow$$\alpha$和$\beta$正交$\Leftrightarrow$$tr(A) = 0$;

(3) $A^m = tr(A)^{m-1}A$, 特别地, $A^2 = tr(A)A$;

(4) A的最小多项式为$m_A(x) = x^2 - tr(A)x$;

(5) $A\alpha = tr(A)\alpha$;

(6) 设ξ是方程组$\beta^T x = 0$的非零解. 那么$A\xi = 0$;

(7) 方程组$\beta^T x = 0$与$Ax = 0$同解.

(8) 若$tr(A) \neq 0$, 那么α是A的对应到特征值$tr(A)$的特征向量, 方程组$\beta^T x = 0$的非零解是对应到特征值0的特征向量. A特征值

为$tr(A),\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}}$, A可以通过相似变换化为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} tr(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

此时, A的最小多项式为$m_A(x)=x^2-tr(A)x$没有重根;

(9) 若$tr(A)=0$, 那么A特征值为$\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{个}}$, 特征值0的代数重数为$n$, 几何重数为$n-1$, A不可以通过相似变换化为对角矩阵, 但是A可以通过相似变换化为如下矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

此时A的最小多项式为$m_A(x)=x^2$有重根.

命题 1.3. 设$A=E-k\alpha\beta^T$为n阶非零方阵, 其中α和β是两个非0的n维列向量.试讨论矩阵A的性质.

注 1.4. 命题*1.3*中, 考虑多项式$f(x)=1-x$, 令$B=k\alpha\beta^T$, 可以看到$A=f(B)$. 这样, 可以通过多项式$f(x)$, 把秩为1的矩阵B的一些性质, 转换到A上来.

2 AB=O

命题 2.1. 设A为$m\times n$阶实矩阵, B为$n\times p$阶实矩阵.

(1) 将矩阵B分块为$B=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)$, 其中对每一个$i=1,2,\ldots,p$, α_i表示矩阵B的第i列. 试证明: $AB=O$的充分必要条件是B的每一列α_i, 都是齐次线性方程组$Ax=0$的解.

(2) 试证明: $r(A)+r(B)\le n$.

命题 2.2. 设A为n阶实方阵, 且$A^2-(a+b)A+abE=O$, 其中a和b为
AB=0且r(A+B)=n
实数, $a\neq b$.

(1) 试证明: $r(A-aE)+r(A-bE)=n$.

(2) 记$r_1=r(A-aE)$, $r_2=r(A-bE)$.试证明: 矩阵$A-bE$的非0列, 是A的对应到特征值a的特征向量; 矩阵$A-aE$的非0列, 是A的对应到特征值b的特征向量.

(3) 试证明: A可以通过相似变换化为对角矩阵.

(4) 若$A\neq aE$, 且$A\neq bE$, 那么A的最小多项式为$m_A(x)=x^2-(a+b)x+ab$.

(5) 试求:A^{2021}.

注 2.3. 对合矩阵、幂等矩阵是命题2.2中矩阵的特例.

3 方程组同解和对称矩阵AA^T和A^TA

命题 3.1. 设A为$m\times n$阶实方阵, B为$n\times p$阶实方阵. 那么$ABx=0$与$Bx=0$同解的充分必要条件是$r(AB)=r(B)$.

命题 3.2. 设A为$n\times n$阶实方阵.

(1) 试证明: 若存在整数m, 使得$A^m\alpha=0$, 但是$A^{m-1}\alpha\neq0$, 那么向量组$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$线性无关;

(2) 试证明:$A^{n+1}x=0$与$A^nx=0$同解;

(3) 试证明: $r(A^n)=r(A^{n+1})$;

命题 3.3. 设A为$n\times n$阶实方阵.

(1) 试证明: *(1)* 对于n阶方阵A, 存在整数$1\le i\le n$, 使得$r(A^i)=r(A^{i+1})$;

(2) 若$A^kx=0$与$A^{k+1}x=0$同解, 那么$A^{k+1}x=0$与$A^{k+2}x=0$同解;

(3) 若整数i满足$r(A^i)=r(A^{i+1})$, 那么$r(A^i)=r(A^{i+1})=\cdots=r(A^n)=r(A^{n+1})=\cdots$;

(4) 设$k=\min\{i\mid r(A^i)=r(A^{i+1}),i\ge 1\}$. 那么$k$恰等于

- 0作为A的最小多项式$m_A(x)$根的重数;
- A的$Jordan$标准形中, 对角线为0的$Jordan$块的最大阶数.

命题 3.4. 设A为$m\times n$阶实数矩阵.

(1) 试证明: AA^T和A^TA都是对称矩阵.

(2) 试证明: 方程组$A^TAx=0$和方程组$Ax=0$是同解方程组.

(3) 试证明: $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$.

(4) 试证明: 矩阵AA^T和A^TA是半正定的.

(5) 试证明: 若A为列满秩矩阵,那么A^TA是正定矩阵.

(6) 试证明: 若A为行满秩矩阵,那么AA^T是正定矩阵.

4 幂零矩阵

设A为n阶方阵. 若存在正整数m, 使得$A^m = O$, 那么称A为**幂零矩阵**.

若A为幂零矩阵, 使得$A^m = O$的正整数中, 最小的那个正整数, 称为A的**幂零指数**.

命题 4.1. *设A为幂零矩阵, $A \neq O$, A的幂零指数为m. 试证明:*

(1) 存在列向量α, 使得$A^{m-1}\alpha \neq 0$;

(2) 方程组$x_1\alpha + x_2A\alpha + x_3A^2\alpha + \cdots + x_mA^{m-1}\alpha = 0$只有零解.

(3) 向量组$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$线性无关.

命题 4.2. *设A为n阶幂零矩阵, $A \neq O$, A的幂零指数为n, 列向量α满足$A^{n-1}\alpha \neq 0$. 试证明:*

$$AP = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中$P = (A^{n-1}\alpha, A^{n-2}\alpha, \cdots, \alpha)$是可逆矩阵.

注 4.3. 若A为秩为1，迹为0的方阵, 那么A是幂零指数为2的矩阵.

5 幂等矩阵

设A为n阶方阵. 若$A^2 = A$, 那么称A为**幂等矩阵**, (也叫投影矩阵).

命题 5.1. 设A为n阶幂等矩阵. 令

$$
\begin{aligned}
U &= \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \\
V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}
\end{aligned}
$$

试证明:

(1) 对任何$u \in U$, 都有$Au = u$(如果$u \neq 0$, 那么u是对应到特征值1的特征向量);

(2) 对任何$v \in V$, 都有$Av = 0$(如果$v \neq 0$, 那么v是对应到特征值0的特征向量);

(3) $U \cap V = \{0\}$;

(4) 对任何$\alpha \in \mathbb{R}^n$, 存在一组唯一的向量u和v, 满足$u \in U$, $v \in V$, 而$\alpha = u + v$;

(5) $\mathbb{R}^n = U + V$;

(6) $r(A) + r(A - E) = n$.

(7) 矩阵A可以相似对角化, 对角化以后，对角线上1的数目等于$r(A)$.

6 对合矩阵

设A为n阶方阵. 若$A^2 = E$, 那么称A为**对合矩阵**.

命题 6.1. 设A为n阶对合矩阵. 令

$$
\begin{aligned}
U &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = x\}, \\
V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = -x\}
\end{aligned}
$$

试证明:

(1) 若$x \in U$, 且$x \neq 0$, 那么x是对应到特征值1的特征向量;

(2) 若$x \in V$, 且$x \neq 0$, 那么x是对应到特征值-1的特征向量;

(3) $U \cap V = \{0\}$;

(4) 对任何$\alpha \in \mathbb{R}^n$, 存在一组唯一的向量(u, v), 满足$u \in U$, $v \in V$, 而$\alpha = u + v$;

(5) $\mathbb{R}^n = U + V$;

(6) $r(A+E) + r(A-E) = n$;

(7) 矩阵A可以相似对角化;

(8) 若$x \in U$, $y \in V$, 那么$(x, y) = 0$.

7 循环矩阵

设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R} \text{ for all } i$$

称A为n阶**循环矩阵**.

命题 7.1. 设A为n阶循环矩阵, 方程$z^n = 1$在复数域上的n个两两不同的根为$1, w_1, \cdots, w_{n-1}$, 特别地, $w_i = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \cdots, n-1$. 对每一个$i$, 令

$$\alpha_i = (1, w_i, w_i^2, \cdots, w_i^{n-1})^T,$$

及多项式$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$

(1) 试证明:$A\alpha_i=f(w_i)\alpha_i$;

(2) 试求$\det(A)$.

8 斯密特正交化的矩阵形式

命题 8.1. 设A为$n\times m$阶矩阵.

(1) 若$r(A)=m$, 那么存在列正交的$n\times m$阵Q, 和对角线元素全为1的$m\times m$上三角阵R, 使得$A=QR$;

(2) 若$r(A)=m$, 那么存在标准列正交的$n\times m$阵Q, 和对角线元素全大于0的$m\times m$上三角阵R, 使得$A=QR$;

(3) 若$r(A)=m=n$, 那么存在列正交的n阶方阵Q, 和对角线元素全为1的n阶上三角方阵R, 使得$A=QR$;

(4) 若$r(A)=m=n$, 那么存在n阶正交阵Q, 和对角线元素全大于0的n上三角方阵R, 使得$A=QR$;

试求方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的一组标准正交基.

9 内积和度量矩阵

设V为n维欧氏空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V上一组基, 令

$$A=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix},$$

称A为欧氏空间V在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵.

命题 9.1. *设V为n维欧氏空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V上一组基, A为欧氏空间V在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵. 证明: A是正定矩阵*

命题 9.2. *设V为n维线性空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V上一组基, A为n阶正定矩阵. 对任意$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x$, $\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)y$, 令$(\alpha,\beta)=x^TAy$. 证明: $(\bullet,\bullet)$是V上的内积.*

10 方程组$A^TAx=A^Tb$对任何的b都有解

命题 10.1. *设A为$m\times n$阶实矩阵. 试证明: 对任何的$b\in\mathbb{R}^m$, 方程组$A^TAx=A^Tb$都有解.*

$\mathbb{R}^m$为m为欧氏空间, A为$m\times n$阶实矩阵, b为$\mathbb{R}^m$中任意向量, 如何求b在$\mathbb{R}^m$的子空间

$$W=\{Ax\mid x\in\mathbb{R}^n\}$$

上的正交投影?

命题 10.2. *设A为$m\times n$阶实矩阵.*

(1) 令$W^\perp$表示$\mathbb{R}^m$中和W中所有向量正交的向量组成的集合, 即

$$W^\perp=\{\beta\in\mathbb{R}^m\mid \text{对任何}\alpha\in W,\text{都有}(\beta,\alpha)=0\}.$$

试证明$W^\perp=\{x\mid A^Tx=0\}$, 即$W^\perp$是齐次线性方程组$A^Tx=0$的解空间.

(2) $W\cap W^\perp=\{0\}$;

(3) 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$是W的一组基, $\beta_1,\ldots,\beta_{m-r}$是$W^\perp$的一组基, 则

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_{m-r}$$

是$\mathbb{R}^m$的一组基;

(4) 对任何的$b \in \mathbb{R}^m$, 存在唯一向量$u \in W$, 和$v \in W^{\perp}$, 使得$b = u+v$. (称u是b在W上的正交投影, v是b在$W^{\perp}$上的正交投影)

(5) x_0是方程组$A^TAx = A^Tb$的解, 当且仅当向量Ax_0是向量b在线性空间$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$上的正交投影.

11 条件中有"任何"

命题 11.1. 设A为n阶实方阵.

(1) 对任何n维列向量$x \in \mathbb{R}^n$, 都有$Ax = 0$, 当且仅当$A = 0$.

(2) 对任何n阶实方阵$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 都有$AB = BA$, 当且仅当$A$是数量矩阵.

(3) 对任何n维列向量$x \in \mathbb{R}^n$, 都有$x^TAx = 0$, 当且仅当A是实反对称矩阵.

(4) 对任何n维列向量$x \in \mathbb{R}^n$, 都有$(x, x) = (Ax, Ax)$, 当且仅当A是正交矩阵.

(5) 对任何n维列向量$x, y \in \mathbb{R}^n$, 都有$(x, Ay) = (Ax, y)$, 当且仅当A是对称矩阵.

(6) 对任何n维列向量$x, y \in \mathbb{R}^n$, 都有$(x, Ay) = -(Ax, y)$, 当且仅当A是反对称矩阵.

12 利用两个多项式恒等

命题 12.1 (代数基本定理)**.** 任何复系数一元n次多项式方程在复数

域上至少有一根($n \geq 1$), 因此, n次复系数多项式方程在复数域内有且只有n个根(重根按重数计算).

推论 12.2. $f(x)$和$g(x)$是两个复系数一元n次多项式, 存在$n+1$个不同复数$a_1, \ldots, a_{n+1}$使得$f(a_i) = g(a_i)$, 那么$f(x) \equiv g(x)$.

命题 12.3. 设A和B是两个n阶复方阵, 则$(AB)^* = B^*A^*$.

命题 12.4. 设A为n阶幂零方阵, 幂零指数为m. 若方阵B满足$AB = BA$, 则$|A+B| = |B|$.

13 关于AB, BA和$AB = BA$

命题 13.1. 设A为$m \times n$阶复方阵, B为$n \times m$阶复方阵, $m \leq n$. 则$|xE - BA| = x^{n-m}|xE - AB|$

证明. 考虑$(m+n)$阶矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & AB \end{pmatrix}$, 对它做相似变换,

$$\begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -B \\ 0 & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

得到$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & AB \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} BA & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$相似, 所以

$$\left| xE - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \right| = \left| xE - \begin{pmatrix} BA & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \right|,$$

得到

$$x^n|xE - AB| = x^m|xE - BA| \Rightarrow |xE - BA| = x^{n-m}|xE - AB|.$$

□

注 13.2. *(1)* 这个命题说明AB和BA的特征多项式只相差x^{n-m}, 这样他们的非0特征值是完全一样的(包括代数重数), 而0特征值的代数重数相差$n-m$;

(2) 在计算AB和BA的特征多项式的时候, 可以选择AB和BA当中较小的那个去计算, 起到降阶的作用;

(3) 对任何矩阵A, 将A进行满秩分解$A=LR$, 求A的特征多项式, 可以考虑使用这个公式降阶, 例如求行列式$|xE-\alpha\beta^T|$, 其中α和β为n维列向量, 那么$|xE-\alpha\beta^T|=x^{n-1}|xE-\beta^T\alpha|=x^{n-1}(x-\beta^T\alpha)=x^{n-1}(x-tr(A))$;

(4) A和B均为方阵的时候, AB和BA的特征多项式完全相同, 从而特征值完全相同, 行列式和迹都相等.

命题 13.3. 设A和B是两个n阶复方阵, 且$AB=BA$, 则A和B有公共特征向量.

证明. 设λ是A的一个特征值, α是A的对应到λ的特征向量, 即, $A\alpha=\lambda\alpha, \alpha\neq 0$. 令$V_\lambda$是$A$的特征值$\lambda$确定特征子空间, 维数为$r$. 那么$BA\alpha=\lambda B\alpha=AB\alpha$, 这样, $B\alpha\in V_\lambda$. 据此, 取$\alpha_1,\dots,\alpha_r$为V_λ的一组基, 可以得到$B(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)D$, 其中$D$为$r$阶方阵.

现在, 考虑D的一个特征值μ, ξ是D的对应到μ的特征向量, 即, $D\xi=\mu\xi$, $\xi\neq 0$. 我们有, $B(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\xi=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)D\xi=\mu(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\xi$. 记$\theta=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\xi$. 显然地, $\theta\neq 0$是A的对应到λ的特征向量. 而$B\theta=\mu\theta$, 故, θ也是B的对应到μ的特征向量. A和B有公共特征向量θ. □

命题 13.4. 设A和B是两个n阶复方阵, 且$AB=BA$, 则A和B可以通过相似变换同时化为上三角矩阵.

证明. 对矩阵的阶数n, 用数学归纳法. 显然, $n=1$时, 结论是正确的. 下面假设矩阵阶数为$n-1$时, 命题为真. 当矩阵阶数为n时, 由命题13.3, 设α是A和B的公共特征向量, $A\alpha=\lambda\alpha$, $B\alpha=\mu\alpha$. 然后扩展,使得$\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n$为$n$维列向量空间的一组基, 并记, $P_1=(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n)$. 那么$AP_1=P_1\begin{pmatrix}\lambda & \theta^T\\ 0 & \tilde{A}\end{pmatrix}$, 同时, $BP_1=P_1\begin{pmatrix}\mu & \eta^T\\ 0 & \tilde{B}\end{pmatrix}$. 由于$AB=BA$, 我们可以计算得到

$$\begin{pmatrix}\lambda\mu & \lambda\eta^T+\theta^T\tilde{B}\\ 0 & \tilde{A}\tilde{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mu & \mu\theta^T+\eta^T\tilde{A}\\ 0 & \tilde{B}\tilde{A}\end{pmatrix},$$

因此, $\tilde{A}\tilde{B}=\tilde{B}\tilde{A}$. 由归纳假设, $\tilde{A}$和$\tilde{B}$可以同时通过相似变换化为上三角阵, 即存在$n-1$阶可逆矩阵Q, 使得$Q^{-1}\tilde{A}Q=H_1$,$Q^{-1}\tilde{B}Q=H_2$, H_1和H_2为上三角阵. 令$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned} AP &= P\begin{pmatrix}\lambda & \theta^TQ\\ 0 & H_1\end{pmatrix}\\ BP &= P\begin{pmatrix}\mu & \eta^TQ\\ 0 & H_2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

可以看到, $\begin{pmatrix}\lambda & \theta^TQ\\ 0 & H_1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}\mu & \eta^TQ\\ 0 & H_2\end{pmatrix}$都是上三角阵, 所以$A$和$B$可以通过相似变换同时化为上三角矩阵. □

命题 13.5. 设A和B是两个相似于对角矩阵的n阶复方阵. A和B可以通过相似变换同时化为对角矩阵的充分必要条件是$AB=BA$.

证明. $\Rightarrow$. 设A和B可以通过相似变换同时化为对角矩阵, 即, 存在可

逆矩阵P, 使得$A=PDP^{-1}$, $B=P\Lambda P^{-1}$, D和Λ均为对角阵. 所以

$$\begin{aligned} AB &= PDP^{-1}P\Lambda P^{-1} = PD\Lambda P^{-1} \\ &= P\Lambda DP^{-1} = P\Lambda P^{-1}PDP^{-1} = BA. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$. 已知$AB=BA$. 由于A可以相似对角化, 存在可逆矩阵P_1, 使得$P_1^{-1}AP_1=D$, D为对角阵, 并记$P_1^{-1}BP_1=\tilde{B}$. 由已知, 可以计算得到$D\tilde{B}=\tilde{B}D$. 进一步, 可以设$D=\begin{pmatrix} \lambda_1E_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2E_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_sE_{n_s} \end{pmatrix}$,其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为$A$的全部$s$个两两不同的特征值, $n_1,\cdots,n_s$是它们的代数重数.相应地, 将$\tilde{B}$可以分块为$\tilde{B}=\begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \cdots & \tilde{B}_{1s} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \cdots & \tilde{B}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{B}_{s1} & \tilde{B}_{s2} & \cdots & \tilde{B}_{ss} \end{pmatrix}$,其中$\tilde{B}_{ii}$是$n_i$阶方阵. 计算

$$\begin{aligned} D\tilde{B} &= \begin{pmatrix} \lambda_1E_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2E_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_sE_{n_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \cdots & \tilde{B}_{1s} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \cdots & \tilde{B}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{B}_{s1} & \tilde{B}_{s2} & \cdots & \tilde{B}_{ss} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\tilde{B}_{11} & \lambda_1\tilde{B}_{12} & \cdots & \lambda_1\tilde{B}_{1s} \\ \lambda_2\tilde{B}_{21} & \lambda_2\tilde{B}_{22} & \cdots & \lambda_2\tilde{B}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_s\tilde{B}_{s1} & \lambda_s\tilde{B}_{s2} & \cdots & \lambda_s\tilde{B}_{ss} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}D &= \begin{pmatrix}\tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \cdots & \tilde{B}_{1s}\\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \cdots & \tilde{B}_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{B}_{s1} & \tilde{B}_{s2} & \cdots & \tilde{B}_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 E_{n_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s E_{n_s}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda_1\tilde{B}_{11} & \lambda_2\tilde{B}_{12} & \cdots & \lambda_s\tilde{B}_{1s}\\ \lambda_1\tilde{B}_{21} & \lambda_2\tilde{B}_{22} & \cdots & \lambda_s\tilde{B}_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1\tilde{B}_{s1} & \lambda_2\tilde{B}_{s2} & \cdots & \lambda_s\tilde{B}_{ss}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由于$D\tilde{B}=\tilde{B}D$, 所以对任何$i\neq j$, 都有$\lambda_i\tilde{B}_{ij}=\lambda_j\tilde{B}_{ij}$, 注意到$\lambda_i\neq\lambda_j$, 因而, $\tilde{B}_{ij}=0$, 说明$\tilde{B}$是分块对角矩阵. 由已知B可以相似对角化, 可以得到对每一个i, 方阵$\tilde{B}_{ii}$都可以对角化, 即, 存在可逆矩阵Q_i, 使得$Q_i^{-1}\tilde{B}_{ii}Q_i=\Lambda_i$, 其中$\Lambda_i$是一个对角矩阵. 这样, 令$P=P_1\begin{pmatrix}Q_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & Q_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & Q_s\end{pmatrix}$, 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 E_{n_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s E_{n_s}\end{pmatrix}$, $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_s\end{pmatrix}$, A和B可以通过相似变换同时化为对角矩阵. □

证明. **可以利用命题13.4给出命题12.4的证明**.

由于$AB=BA$, 所以A和B可以同时通过相似变换化为上三角矩阵, 即存在可逆矩阵P, 使得$A=P\tilde{A}P^{-1}$, $B=P\tilde{B}P^{-1}$, 其中$\tilde{A}$和$\tilde{B}$均

为上三角矩阵. 由于A是幂零矩阵, A只有0作为特征值, 这说明矩阵$\tilde{A}$的对角线上元素全为0. 从而

$$|A+B| = |P\tilde{A}P^{-1}+P\tilde{B}P^{-1}| = |P(\tilde{A}+\tilde{B})P^{-1}| = |\tilde{A}+\tilde{B}| = |\tilde{B}| = |B|$$

($\tilde{A}$是对角线上全为0的上三角阵, $\tilde{B}$是上三角阵, 所以$\tilde{A}+\tilde{B}$是上三角阵, 且对角线上和$\tilde{B}$的完全一样) $\square$