线性代数

第一章 矩阵与行列式

知识点总结

姓名：董申华

学号：522030910006

学院：电子信息与电气工程学院

致远学院

目录

第一讲 多项式和数域

一、多项式

1. 多项式的带余除法

   若$p(x)$和$s(x)$是系数在数域F上的多项式，$\mathrm{s(x)} \neq 0$，那么存在

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x), deg\big(r(x)\big) < deg\big(s(x)\big)$$

2. 多项式的根

   若$p(x)$是系数在复数域C上的m次多项式，那么$p(x)$可唯一分

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)$$

   其中$c, x_1, x_2, \cdots x_m$都是复数

3. 多项式根与系数的关系

   多项式$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$，根$x_1, x_2, \cdots, x_m$，那么，

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$$

$$x_1 x_2 \cdots x_m = (-1)^m \frac{a_0}{a_m}$$

二、数域

1. 常见数域

   有理数域Q、实数域R、复数域C

2. 所有的正整数不构成数域

   所有整数不构成数域

第二讲 矩阵的概念和运算

一、矩阵

1. 定义 $m\times n$个数

$$a_{ij}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$$

排成m行n列的长方形数表，用圆括号或方括号括起来，称为矩阵，记作A，B，$C\cdots$

如：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$

2. 几种特殊类型的矩阵

行(列)矩阵:只有一行(列)的矩阵。(也叫行（列）向量)

例如：行矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

列矩阵$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

零矩阵：元素全部为 0 的矩阵。(类比实数 0)

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

方阵：行数和列数相同的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

记作$A=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$

单位矩阵：(类比实数 1)

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

数量矩阵:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}, \text{记作} aE \text{或者} aI$$

三角形矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角形矩阵

对称矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{其中} a_{ij} = a_{ji}, (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

反对称矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{其中} a_{ij} = -a_{ji}, (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

注：$a_{ii} = 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$

3. 矩阵相等

定义：　设

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = (b_{ij})_{s \times t} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{st} \end{pmatrix}$$

如果$m = s, n = t, a_{ij} = b_{ij}$，那么称$A = B$

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法：

设

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = (b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{那么} A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$-A = (-a_{ij})_{m \times n}$，　$A\text{-}B = A + (-B)$。

- 性质:

$$A+B=B+A(\text{加法交换律})$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)(\text{加法结合律})$$
$$A+O=O+A(\text{加法单位元})$$
$$A+(-A)=O(\text{加法逆元})$$

2. 矩阵的数乘:

$$\text{设}A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, c\text{是一个数,}$$

$$\text{那么}cA=(ca_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

这样,$-A=(-1)A,\quad cE=diag(c,c,\cdots,c)$。

- 性质:

$$EA=A;$$
$$k(lA)=(kl)A;$$
$$(k+l)A=kA+lA;$$
$$k(A+B)=kA+kB;$$

3. 矩阵的乘法:

$$\text{设}A=(a_{ij})_{m\times p}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, B=(b_{ij})_{p\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$\text{那么}A\bullet B=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中,$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$。

✧ 注意:矩阵乘法不满足交换律

何时可交换?

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是$n\times n$的方阵.那么对任意$n\times n$的方阵B,都有$AB=BA$当且仅当A是数量矩阵。

矩阵乘法不满足消去律

何时可消去?——行列式

- 性质:

$$(AB)C=A(BC)\ (\text{乘法结合律})$$
$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$
$$(A+B)C=AC+BC(\text{乘法右分配率})$$
$$C(A+B)=CA+CB(\text{乘法左分配率})$$
$$k(A+B)=kA+kB$$

$$Am \times nEn = Am \times n \ \ Em\,Am \times n = Am \times n$$
$$Am \times pOp \times n = Om \times n \ \ Om \times pAp \times n = Om \times n$$

4. 矩阵的转置:

$$\text{定义：} A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}\text{，那么} A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

➢ 性质:

$$(A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(kA)^T = k(A^T)$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A_1 \bullet A_2 \bullet \cdots \bullet A_m)^T = A_m^T \bullet A_{m-1}^T \bullet \cdots \bullet A_1^T;$$
$$\text{若}A\text{为n阶方阵，则}(A^n)^T = (A^T)^n;$$

✧ 注意: 矩阵A为对称矩阵当且仅当$A^T = A$;
矩阵A为反对称矩阵当且仅当$A^T = -A$;
若矩阵A是$m \times n$的矩阵，那么AA^T，$A^T A$都是对称矩阵。
若A是反对称矩阵，即$A^T = -A$,那么对任何$x \in R^n, x^T Ax = 0$

5. 方阵的幂:

定义：设A为n阶方阵，那么
$$A^2 = A\bullet A, A^3 = A^2 \bullet A = A\bullet A\bullet A, \cdots$$
$$A^m = A^{m-1}\bullet A, \cdots \text{其中}m\text{是正整数。}$$
规定$A^0 = E$

➢ 性质:
$$A^m A^n = A^{m+n};$$
$(A^m)^n = A^{mn}$,其中 m, n 为非负整数;
$$(A+E)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} + \cdots + C_m^m E$$

✧ 注意: 矩阵乘法交换律对方阵幂的影响

6. 方阵的多项式:

定义：方阵A的多项式
$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_m E,$$
其中$a_0, a_1, \cdots, a_m$是已知常数，
A是n阶方阵，E是n阶单位矩阵。

对照：$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_m E$
$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m x^0$$

7. 矩阵的迹:

$$设A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称数$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$（就是主对角线上元素的和）

是矩阵A的迹，记作$tr(A)$,即$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。

- 性质:

$$tr(AB)=tr(BA)$$

8. 矩阵的共轭:

定义：设A是一个元素为复数的矩阵，$A=(a_{ij})_{m\times n}$,

矩阵A的共轭为$(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$,记作$\overline{A}$,即$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$。

- 性质:

$$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B};$$
$$\overline{cA}=\overline{c}\bullet\overline{A};$$
$$\overline{AB}=\overline{A}\bullet\overline{B};$$
$$|\overline{A}|=\overline{|A|}。$$

第三讲 行列式的定义与性质

一、行列式的定义

由n^2个数组成的n阶行列式等于所有
取自不同行不同列的n个元素的乘积
的代数和 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

记作 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

更一般地：
固定一个排列$i_1i_2\cdots i_n$, 我们有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$
$$=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

二、排列及逆序数

1. 排列的有关定义：

排列：由n个不同的元素按一定顺序排成一行，称为这n个元素的一个排列

n 级排列：由$1,2,\ldots,n$ 组成的有序数组称为一个n级排列。记为$j_1,j_2,\ldots,j_n$

标准排列：我们规定各元素之间有一个标准次序, n个不同的自然数，规定由小到大为标准次序(或标准排列)。

2. 排列的逆序数：

逆序定义：在一个排列$(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n), t<s$ 中，若数$i_t>i_s$，则称这两个数组成此排列的一个**逆序**；否则称这两个数组成此排列的一个**顺序**。

一个排列$j_1,j_2,\ldots,j_n$中逆序的个数与顺序的个数之和等于$\frac{n(n-1)}{2}$

逆序数定义：一个排列$j_1,j_2,\ldots,j_n$中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**。记为$\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)$

3. 排列的奇偶性：逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列。

4. 对换：

定义：在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的操作叫做**对换**。将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**

定理 1：一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性 .

推论：奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，
偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

定理 2：$n\geq 2$时，n个元素的所有排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$

三、利用行列式定义计算行列式：

1. 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$= (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21}$$

$$= (-1)^{0} a_{11}a_{22} + (-1)^{1} a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. 三阶行列式：

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. 上下三角行列式及对角型行列式：（贡献法）

如：下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

4. 分块行列式：

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$

则$D = D_1 D_2$

四、行列式的性质——类比对方程的变换

1. 行列式的转置：记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则称 $D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为行列式 D 的转置行列式

性质 1：行列互换，行列式的值不变，即$D^T=D$

✧ 说明：性质 1 说明行列式中行与列具有同等的地位，因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立

2. **性质 2**：互换行列式的两行（列），行列式变号

   推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零

3. **性质 3**：行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式

   推论：行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面

4. **性质 4**：行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零

5. **性质 5**：若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，如：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & (\boldsymbol{a}_{1i}+\boldsymbol{a}'_{1i}) & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & (\boldsymbol{a}_{2i}+\boldsymbol{a}'_{2i}) & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & (\boldsymbol{a}_{ni}+\boldsymbol{a}'_{ni}) & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下面两个行列式的和：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1i} & \cdots \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2i} & \cdots \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{ni} & \cdots \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \cdots & \boldsymbol{a}'_{1i} & \cdots \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \cdots & \boldsymbol{a}'_{2i} & \cdots \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{a}'_{ni} & \cdots \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

6. **性质 6**：把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变

五、简单行列式计算

计算行列式常用方法：利用行列式的性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值

每行(列)的元素和都一样行列式的计算方法：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

第四讲 行列式的按行（列）展开

一、引入——二、三阶行列式的关系

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

二、余子式与代数余子式

定义：在n阶行列式D_n中，划掉元素a_{ij}所在的行与列中的所有元素，余下的元素按原来的次序构成的 n-1 阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}

三、行列式的按行（列）展开定理

n阶行列式D的值等于它的任一行的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

推论：n阶行列式D的任一行（列）的各元素与另一行（列）对应的各元素的代数余子式的乘积之和等于零。

四、拉普拉斯定理

1. 相关定义：

在n阶行列式D中，任取k行k列,位于这k行k列交叉位置的元素按原行列式D中的相对位置排成的k阶行列式N称为行列式D的一个**k阶子式**

在行列式D中,划去k阶子式N所在的k行k列,剩余元素按原行列式D中的相对位置排成的$n-k$阶行列式M称为**k阶子式N的余子式**

如果子式N的k行k列在D中的行标与列标分别为$i_1,i_2,\ldots,i_k;j_1,j_2,\ldots,j_k$，则称

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$$

为 **N 的代数余子式**。

2. 拉普拉斯（Laplace）定理：

设在n阶行列式D中，取定某k行，则D位于这k行的所有k阶子式$N_i(i=1,2,\ldots,t)$与它们各自对应的代数余子式的乘积之和等于行列式D，即

$$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t=\sum_{i=1}^{t}N_iA_i$$

五、行列式的乘法

1. 行列式乘积法则：$|A_nB_n| = |A_n||B_n|$

2. **定理**：两个n阶行列式$A = |a_{ij}|_n$，$B = |b_{ij}|_n$的乘积等于一个n阶行列式$C = |c_{ij}|_n$，其中C的第i行第j列元素c_{ij}是 A 的第i行各元素与 B 的第j列对应元素之和，即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

3. 性质：

$$|A^T| = |A|$$
$$|AB| = |A||B|$$
$$|A_1A_2 \ldots A_m| = |A_1||A_2| \ldots |A_m|$$
$$|A^k| = |A|^k$$
$$|cA| = c^n|A|$$

六、相关行列式的计算

1. 范德蒙德（Vandermonde)行列式 （利用递推和按行展开）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & x_3^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-1} & x_3^{\ n-1} & \cdots & x_n^{\ n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

2. 计算行列式$D = \begin{vmatrix} O & D_1 \\ D_2 & C \end{vmatrix}$,其中$D_1$、$D_2$分别为$m$、$n$阶 （利用拉普拉斯定理）

$$D = (-1)^{mn}D_1D_2$$

第五讲 行列式的计算

◆ **递推法**

如：
$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

n阶和$n-1$阶情况相同，按行（列）展开得到递推式

◆ **拆元法**

如：
$$\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ -a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a & -a & \cdots & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+a-a & a & \cdots & a\\ 0-a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0-a & -a & \cdots & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+a & a & \cdots & a\\ 0 & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & -a & \cdots & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a & a & \cdots & a\\ -a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a & -a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

写成两个行列式的和后分别计算（利用递推）

◆ **加边法**

如：
$$\begin{vmatrix}b+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & b+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & b+a_3 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b+a_n\end{vmatrix}\quad (b\neq 0)$$

特点：行（列）有重复元素

加行：$1,a_1,a_2,\cdots,a_n$；加列：0,0,⋯,0

◆ **数学归纳法**

如：范德蒙德行列式

◆ **利用递推方程组**

如：
$$\begin{vmatrix}x & y & y & \cdots & y\\ z & x & y & \cdots & y\\ z & z & x & \cdots & y\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ z & z & z & \cdots & x\end{vmatrix}$$

方法：利用拆元法，由于转置不改变行列式的值，将 y、 z 互换后得到递推方程组

◆ **乘已知行列式**

如：
$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & w_1 & w_2\\ 1 & w_1^2 & w_2^2\end{vmatrix}$$

◆ **利用线性方程组**

如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n} & a_2^{n} & a_3^{n} & \cdots & a_n^{n} \end{vmatrix}$$

方法：构造线性方程组，利用根与系数关系得出方程组的解，再根据克莱姆法则得到行列式的值

第六讲 可逆矩阵与 Cramer 法则

一、可逆矩阵的定义

设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB = BA = E$，则称A是n阶可逆矩阵（或可逆阵），称B是A的逆矩阵，记作 A^{-1}。

如果不存在满足$AB = BA = E$的矩阵B，则称A是不可逆矩阵，或A不可逆。

由于$E_nE_n = E_n$，所以单位矩阵E_n是可逆矩阵，且逆矩阵是它自身。

A和B互为逆矩阵，即$A^{-1} = B, B^{-1} = A$

二、有关可逆矩阵的几点说明

1. 不是每个方阵都有逆矩阵
2. n阶方阵A可逆的充分必要条件：$|A| \neq 0$
3. 伴随矩阵

   定义：设矩阵$A = (a_{ij})_n$是n阶方阵，令矩阵A的行列式$|A|$中，第i行第j列元素a_{ij}对应的代数余子式为A_{ij}，那么我们称矩阵 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 为矩阵A的伴随矩阵，记作A^*。

   性质：$AA^* = A^*A = |A|E = \begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$

4. 求逆矩阵的方法：伴随矩阵法

   若矩阵A可逆，则$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

5. 定理：如果n阶方阵A是可逆的，那么A存在着唯一的一个逆矩阵。

   推论：对n阶方阵A，若存在n阶方阵B，使得$AB = E_n$或$BA = E_n$，则矩阵A 可逆，且$A^{-1} = B$

6. 逆矩阵的性质：

   设矩阵A是n阶可逆矩阵，那么：

$$(1)(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (2)\text{若}k \neq 0, \text{则}(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$(3)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \text{更一般地}, (A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1};$$

$$(4)(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \qquad (5)|A^{-1}| = |A|^{-1};$$

$$(6)(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m; \qquad (7)|A^*| = |A|^{n-1}\text{。}$$

✧ 一些特殊性质：

$$\text{设}A\text{为方阵,且}f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$$

$$\text{若}f(A) = O, \text{对任意满足}f(c) \neq 0\text{的数}c, \text{都有}$$

$$(A - cE)^{-1} = -\frac{g(A)}{f(c)}$$

$$\text{其中}, g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{设} f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k, a_k\neq 0.\\
&A\text{为}n\text{阶方阵}, f(A)=O.\\
&\text{那么对任何正整数} m\geq k,\\
&A^m\text{总可以用} E, A, A^2, \ldots\ldots, A^{k-1}\text{表示出来}.
\end{aligned}
$$

三、方程组 Cramer 法则

1. 非齐次与齐次线性方程组的概念:

设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 若常数项$b_1, b_2, \ldots, b_n$不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；若常数项$b_1, b_2, \ldots, b_n$全为零，此时称方程组为齐次线性方程组。

2. Cramer 法则:

如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数行列式不等于零，即

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0
$$

那么非齐次线性方程组有解，并且解是唯一的，解可以表示为

$$
x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.
$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$
D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

3. 重要定理:

定理 1：如果线性方程组的系数行列式$|D|\neq 0$，则其一定有解，且解是唯一的。

推论：如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

定理 2：如果齐次线性方程组的系数行列式$|D|\neq 0$，则齐次线性方程组仅有零解。

推论：如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零。

4. 说明:
   - ✧ 克莱姆法则的结论只能用于方程组个数和未知数个数相等的情况
   - ✧ 非齐次线性方程组在系数行列式等于 0 的时候，不能由克莱姆法则判别方程组是否有解(方程组可能有解也可能无解)

5. Cramer 法则的推广

设矩阵A是n阶可逆方阵，B是$n \times k$阶的矩阵，且$AX = B$，则矩阵方程$AX = B$存在唯一解$X = A^{-1}B$。

设矩阵A是n阶可逆方阵，B是$n \times k$阶的矩阵，C是k阶可逆方阵，且$AXC = B$，则矩阵方程$AXC = B$存在唯一解$X = A^{-1}BC^{-1}$。

6. 矩阵运算与线性方程组

- 重要结论：若$AB = O$，则矩阵B的列都是齐次线性方程组$AX = O$的解。
  反之，令$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$都是$AX = O$的解，那么矩阵$B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$满足：$AB = O$

利用矩阵的运算表达线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

令$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 令$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$

那么$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ 则线性方程组可表示为 $AX = B$

第七讲 一些特殊矩阵与分块矩阵

一、几个特别一点的矩阵

1. 幂零矩阵

   定义：设A为n阶方阵，存在整数m，使得$A^m = O$，那么称A为幂零矩阵

   幂零指数：设A为n阶幂零矩阵，使得$A^m = O$成立的最小整数m称为A的幂零指数

   - 设A为n阶幂零矩阵，$A \neq O$，A的幂零指数为m，那么

     存在列向量α，使得$A^{m-1}\alpha \neq 0$；

     方程组 $x_1\alpha + x_2 A\alpha + x_3 A^2\alpha + \cdots + x_m A^{m-1}\alpha = 0$ 只有零解。

   - 设A为n阶幂零矩阵，$A \neq O$，A的幂零指数为n，那么

$$AP = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

     其中$P = (A^{n-1}\alpha, A^{n-2}\alpha, A^{n-3}\alpha, \cdots, \alpha)$。

2. 幂等矩阵

   定义：设A为n阶方阵，若$A^2 = A$，那么称A为幂等矩阵（也叫投影矩阵）。

   - 设A为n阶幂等矩阵.令$U = \{Ax \mid x \in R^n\}, V = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}$.

     那么(1)对任何$u \in U$,都有$Au = u$;

     (2)对任何$v \in V$,都有$Av = 0$;

     (3)$U \cap V = \{0\}$;

     (4)对任何向量$\alpha \in R^n$,存在唯一的向量$u \in U$和$v \in V$，

     使得$\alpha = u + v$

3. 对合矩阵

   定义：设A为n阶方阵，若$A^2 = E$，那么称A为对合矩阵。

   - 设A为n阶对合矩阵.令$U = \{x \in R^n \mid Ax = x \in R^n\}, V = \{x \in R^n \mid Ax = -x\}$.

     那么(1)$U \cap V = \{0\}$;

     (2)对任何向量$\alpha \in R^n$,存在唯一的向量$u \in U$和$v \in V$，

     使得$\alpha = u + v$

4. 周期矩阵

   定义：设A为n阶复方阵，若存在正整数$A^k = E$，那么称A为周期矩阵

二、分块矩阵

1. 定义：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的一个子块，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

2. 分块矩阵的运算：

   加法：设$A = (A_{ij})_{s\times t}, B = (B_{ij})_{s\times t}$，对任意的$i$和$j$，$A_{ij}$和$B_{ij}$都是同类型矩阵（有相同行数和列数的矩阵），那么$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{s\times t}$

数乘：$A=(A_{ij})_{s\times t}$，k是一个数，那么$kA=(kA_{ij})_{s\times t}$。

乘法：$A=(A_{ij})_{s\times r}, B=(B_{kl})_{r\times t}$，$AB=C=(C_{ij})_{s\times t}$，其中$C_{ij}=\sum_{m=1}^{r}A_{im}B_{mj}$

转置：

$$\text{设}A=(A_{ij})_{s\times t}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}，\text{那么}A^T=(B_{ij})_{t\times s}=(A_{ji}^T)_{t\times s}=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}_{t\times s}$$

基本原则：不管整体，还是局部小块，都必须符合矩阵运算规则

3. 几种常用分块形式：

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{array}\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$$

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

两矩阵相乘常用分块：$C=AB$

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_p)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{i1} \quad \sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{i2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{in}\right)$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p}a_{1j}\theta_j \\ \sum_{j=1}^{p}a_{2j}\theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p}a_{mj}\theta_j \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=A(\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \ldots \quad \gamma_n)$$

$$=(A\gamma_1 \quad A\gamma_2 \quad \ldots \quad A\gamma_n)$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}(\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \ldots \quad \gamma_n)=\begin{pmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_2 & \cdots & \beta_1\gamma_n \\ \beta_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \cdots & \beta_2\gamma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_m\gamma_1 & \beta_m\gamma_2 & \cdots & \beta_m\gamma_n \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_p)\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}=\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2+\cdots+\alpha_p\theta_p$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} \beta_1 B \\ \beta_2 B \\ \vdots \\ \beta_m B \end{pmatrix}$$

4. 分块矩阵的初等变换

(1) 交换分块矩阵的两行（列）

(2) 将分块矩阵的某一行（列）的各个元素乘以同一个可逆矩阵P

(3) 将分块矩阵的某一行（列）的各个元素乘以同一个矩阵Q后，加到另一行（列）对应的矩阵上去

5. 分块对角矩阵

定义：称$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$，其中$A_i$都是方阵，为分块对角矩阵，或者准对角矩阵。

运算：

设$A=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & O & \cdots & B_s \end{pmatrix}$,其中$A_i, B_i$都是同阶的方阵，

那么(1)$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2+B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & O & \cdots & A_s+B_s \end{pmatrix}$ (2)令c是一个数，则$cA=\begin{pmatrix} cA_1 & O & \cdots & O \\ O & cA_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & O & \cdots & cA_s \end{pmatrix}$

(3)$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2B_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & O & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}$ (4)$A^T=\begin{pmatrix} A_1^T & O & \cdots & O \\ O & A_2^T & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & O & \cdots & A_s^T \end{pmatrix}$

6. 标准单位向量：

标准单位列向量：ε_j是$n\times 1$的矩阵，它的第j行元素为 1，其余元素全为 0。

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

特点：

任何一个n维列向量，可以用这n个列向量(线性)表示出来

他们中任何一个列向量，都不能被其他向量(线性)表示出来