上 海 交 通 大 学 试 卷 (A卷)

(2022至 2023 学年 第1学期 , 2023年1月10日)

班级号______________ 学号______________ 姓名______________

课程名称 线性代数(荣誉) 成绩 ______________

一、选择题(共6题, 每题3分, 共18分)

1. 设在齐次线性方程组$Ax=0$,$Bx=0$中, A和B都是$m\times n$阶矩阵.

   (1) 若$Ax=0$的解都是$Bx=0$的解, 则一定有$r(A)\geq r(B)$;

   (2) 若$r(A)\geq r(B)$, 则$Ax=0$的解一定都是$Bx=0$的解;

   (3) 若$Ax=0$和$Bx=0$同解, 则一定有$r(A)=r(B)$;

   (4) 若$r(A)=r(B)$, 则$Ax=0$与$Bx=0$一定同解;

   上述四个命题中正确的是( ).

   (A) (1)和(3); (B) (1)和(4); (C) (2)和(3); (D) (2)和(4).

2. 设A为三阶方阵, 将A的第二行加到第一行得到矩阵B, 再将B的第一列的-1倍加到第二列得到矩阵C, 令$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则( ).

   (A) $C=P^{-1}AP$; (B) $C=PAP^{-1}$; (C) $C=P^TAP$; (D) $C=PAP^T$.

3. 设A,B,C均为n阶方阵, 若$AB=C$, 且B可逆, 则( ).

   (A) 矩阵C的行向量组与矩阵B的行向量组等价;

   (B) 矩阵C的列向量组与矩阵B的列向量组等价;

   (C) 矩阵C的行向量组与矩阵A的行向量组等价;

   (D) 矩阵C的列向量组与矩阵A的列向量组等价.

4. 设A为3阶方阵, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则$A$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是( )

   (A) 存在可逆矩阵P和Q, 使得$A=PDQ$; (B) 存在可逆矩阵P, 使得$A=PDP^{-1}$;
   (C) 存在正交矩阵Q, 使得$A=QDQ^{-1}$; (D) 存在可逆矩阵P, 使得$A=PDP^T$.

5. 下述变换$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$构成线性变换的是( ).

   (A) $f(x,y,z)=(z,0,y)$; (B) $f(x,y,z)=(y,0,x-1)$;
   (C) $f(x,y,z)=(|x|,-z,0)$; (D) $f(x,y,z)=(y^2,0,x)$.

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人:__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
批阅人(流水阅卷教师签名处)											

6. 设A是秩为1, 迹为0的3阶方阵,

(1) A与矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$合同; (2) A与矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似;

(3) A与矩阵$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$等价; (4) A的Jordan标准形为$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

则上面四种说法中正确的是(　　　)

(A) (1)和(2); (B) (2)和(3); (C) (3)和(4); (D) (4)和(1).

二、填空题(共6题, 每题3分, 共18分)

7. 设A为3阶方阵, 非齐次线性方程组$Ax=b$有通解$b+k_1\xi_1+k_2\xi_2$, 其中ξ_1和ξ_2是方程组$Ax=0$的基础解系, 则A的最小多项式为__________.

8. 设A, B为四阶方阵, $r(A)=3$, $r(B)=4$, 它们的伴随矩阵分别为A^*, B^*, 则$r(A^*B^*)=$ __________.

9. 设A为4阶方阵, A的伴随矩阵A^*的特征值是$2,-2,-2,-8$, 则$tr(A)=$ __________, $|A+2E|=$ __________, $|A^{-1}+E|=$ __________.

10. 设$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$为一个三元二次型, $f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为__________.

11. 设α与β为实n维列向量, A为n阶正交矩阵. 若α与β的内积为1，则$A(3\alpha)$与$A(2\beta)$的内积为__________.

12. 令$M_n(\mathbb{R})$是全体实数上n阶方阵构成的线性空间, $V=\{n$阶反对称矩阵的全体$\}$是$M_n(\mathbb{R})$的子空间, 则$\dim(V)=$ __________.

二、计算题(共4题, 每题8分, 共32分)

13. 设二次型$f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2ax_2x_3 (a > 0)$通过正交替换$x = Qy$可化为$g = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$.

    (1)求a;

    (2)求所使用的正交替换$x = Qy$.

14. 设$\mathbb{R}[x]_n$是实数域上全体次数小于n的多项式和零多项式一起构成的线性空间, σ是$\mathbb{R}[x]_n$上的微分变换, 即对任何$f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, 都有$\sigma(f(x)) = f'(x)$.

    (1) 求σ在基$1, x, \cdots, x^{n-1}$下的矩阵A;

    (2)是否存在$\mathbb{R}[x]_n$中的一组基, 使得σ在这组基下的矩阵为对角阵? 如果存在, 请写出这组基; 如果不存在, 请说明理由.

15. 已知$\mathbb{R}^3$中的两组基为:

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 2, 1)^T, \alpha_2 = (0, 5, 3)^T$$

和

$$\beta_1 = (1, 2, 0)^T, \beta_2 = (1, 3, 0)^T, \beta_3 = (0, 0, 2)^T.$$

(1) 求由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求向量$y = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标.

16. 令$V = \mathbb{R}^2$是一个2维线性空间. 在V上定义了一个内积, 使之构成欧氏空间, 内积用记号(,)表示. 取定V中两组基

$$\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -1)^T$$

和

$$\beta_1 = (0, 2)^T, \beta_2 = (6, 12)^T.$$

对任何$1 \le i, j \le 2$, 设α_i和β_j的内积分别为:

$$(\alpha_1, \beta_1) = 1, (\alpha_1, \beta_2) = 15, (\alpha_2, \beta_1) = -1, (\alpha_2, \beta_2) = 3.$$

(1) 求基α_1, α_2的度量矩阵;

(2) 求V的一组标准正交基.

三、证明题(共4题, 每题8分, 共32分)

17. 设A, B是两个n阶方阵, 且$AB = BA$. 令V_λ为方阵A的特征值λ的特征子空间.

试证: 对任何$\alpha \in V_\lambda$, 都有$B\alpha \in V_\lambda$.

18. 设A为n阶实方阵, $r(A) = r$.

试证: 存在秩为r的$n \times r$阵H和秩为r的$r \times n$阵L, 使得$A = HL$.

19. 设A和B均为实n阶方阵, 且$A^T = A$.

试证: 若A和$A - B^T AB$都是正定矩阵, λ是B的实特征值, 则$|\lambda| < 1$.

20. 设V是n维欧氏空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是$V$中一组标准正交基, σ是V上的一个线性变换, $A = (a_{ij})_{n\times n}$是σ在这组基下的矩阵.

(1) 试证: 对任何$1 \le i, j \le n$, 都有$a_{ji} = (\sigma(\alpha_i), \alpha_j)$, (其中(,)表示$V$上的内积)

(2) 试证: 若A是对称矩阵, 则对任何$\alpha, \beta \in V$, 都有$(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$.