# 线代知识点整理

丁阳晖

522010910196

# 目录

# 第一章 矩阵与行列式

## 1.0 预备知识

### 1.0.1 数域

**定义** 设K为至少包含两个元素的数集（加法单位元和乘法单位元），若K关于数的加法、乘法及其逆运算封闭，则称K关于加法和乘法组成的代数结构$(K,+,\cdot)$为一个**数域**。

**定义 1.0.2** 设$K_1$与$K_2$为数域，若$K_1 \subseteq K_2$,则称$K_1$为$K_2$的一个**子域**

**定理** 任意一个数域都包含有理数域Q作为子域。

### 1.0.2 多项式

**（1）多项式的带余除法**

对比整数的带余除法：若$p$,$s$是非负整数，$s \neq 0$，那么存在非负整数$q$,$r$使得

$$p = s \times q + r \quad r < s$$

我们有多项式的带余除法：若$p(x)$,$s(x)$为多项式且$s(x) \neq 0$，则存在：

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \quad deg(r(x)) < deg(s(x))$$

## 1.1 矩阵概念和线性型

### 1.1.1 线性型

**定义** 设K为数域，以K的元素为系数的n元1次齐次函数叫做K上的一个**n元线性型**。

### 1.1.2 矩阵

**定义** 设K为数域，$a_{ij} \in K, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$，令

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称$\boldsymbol{A}$为数域K上的一个$m \times n$ **矩阵**，$a_{ij}$叫做$(i,j)$**元素**。

数域K上全体$m \times n$矩阵的集合记作$K^{m \times n}$。

### 1.1.3 常用矩阵

**（1）零矩阵**

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$，若$\boldsymbol{A}$中所有元素均为零，则称$\boldsymbol{A}$为一个$m \times n$零矩阵，记作$\boldsymbol{O}_{m \times n}$或$\boldsymbol{O}$.

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

**（2）对角矩阵**

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$，若$\boldsymbol{A}$中除对角线外所有元素均为零，则称$\boldsymbol{A}$为n阶对角矩阵.

$$\boldsymbol{D} \xlongequal{\text{def}} \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

（3）**纯量矩阵**

设$\boldsymbol{A}$为 n 阶对角矩阵且对角线上所有元素均相等（不为零)，则称$\boldsymbol{A}$为 n 阶纯量矩阵或数量矩阵.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

特别地，当 k 等于 1 时，$\boldsymbol{A}$叫做 n 阶单位矩阵，记为$\boldsymbol{E}_n$或$\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

（4）**三角形矩阵**

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$，若当$1 \leqslant j < i \leqslant n$时，都有$a_{ij} = 0$，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称$\boldsymbol{A}$为上三角形矩阵;

若当$1 \leqslant i < j \leqslant n$时，都有$a_{ij} = 0$，即

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

则称$\boldsymbol{A}$为下三角形矩阵.

**（5）对称矩阵与反对称矩阵**

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in K^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}\in K^{m\times n}$，若

$$
b_{ij}=a_{ji}\quad 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n
$$

则$\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称$\boldsymbol{A}$为 n 阶对称矩阵,即:

$$
a_{ij}=a_{ji}\quad 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n
$$

若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则称$\boldsymbol{A}$为 n 阶反对称矩阵，即:

$$
a_{ij}=-a_{ji}\quad 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n
$$

容易得到反对称矩阵对角线上的元素都为 0.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$　　均为对称矩阵

**（6）向量**

n 维列向量：$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

n 维行向量：$\boldsymbol{\alpha}=(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n)$

## 1.2 矩阵的运算

### 1.2.1 矩阵的线性运算

**定义**

**（1）矩阵的加法**

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in K^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}\in K^{m\times n}$，令$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$$

则$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

**（2）矩阵加法的性质：**

1.矩阵加法的交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

2.矩阵加法的结合律$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$

3.存在加法零元$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

4.存在加法逆元$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

从而我们得到矩阵减法的运算:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

(

**定义**

**（3）矩阵的数乘**

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in K^{m\times n}$，令$\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{m\times n}$，

$$d_{ij}=ka_{ij},1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$$

则$\boldsymbol{D}=k\boldsymbol{A}$.

**（4）矩阵数乘的性质:**

1.数乘的结合律 $(kl)\boldsymbol{A}=l(k\boldsymbol{A})=k(l\boldsymbol{A})$

2.数乘的分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

$$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$$

3. $$1\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$

### 1.2.2 矩阵的乘法

**定义**

（1）**矩阵的乘法** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in K^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}\in K^{n\times s}$

令$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant s$$

则$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

（2）**矩阵乘法的性质：**

1.乘法结合律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

2.乘法与数乘的结合律 $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

3.乘法左分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

4.乘法右分配律$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$

5.$\boldsymbol{O}_{l\times m}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{l\times n},\boldsymbol{A}\boldsymbol{O}_{n\times l}=\boldsymbol{O}_{m\times l}$，$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$

**注：**

1）.矩阵一般不满足交换律，即$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

那么什么情况下矩阵交换律成立?

一些充分条件:

1.$\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 为零矩阵或数量矩阵;

2.$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为对角矩阵;

3.$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*$;

4.$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 互为可逆矩阵，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

一些充要条件:

1.$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵时，

$\boldsymbol{AB}$ 对称$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；（例 1.2.7，第 18 页）

2.$\boldsymbol{AB}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}$，其中 m，n 为非零实数（由加法交换性易证）

3.若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 的逆可以用 $\boldsymbol{B}$ 的线性变换表示，即:

$$\boldsymbol{A}=(m\boldsymbol{B}+n)$$

其中 m，n 为非零实数（习题一 72 的推广，由充分条件的第四点可证）

2）矩阵乘法消去律一般不成立.

那么什么情况下消去律成立?

1.（充分条件）当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$;

3）存在矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$

那么什么情况下 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Longrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\vee\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 成立?

1.（充分条件）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有一个为可逆矩阵;

2.（充要条件）$\boldsymbol{B}$ 的每一列都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解.

1.2.3

对于矩阵运算，我们可以从三个角度考察:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

### 1.2.4 矩阵的转置的有关性质

**定理** **对任意**$\boldsymbol{A} \in K^{m \times l}$,$\boldsymbol{B} \in K^{l \times n}$**有:**

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

可推广到有限个矩阵相乘.

**定理** $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

**定理** $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$

### 1.2.5 方阵的幂

**定义**

**（1）方阵的幂**

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$，k 为非负整数，令$\boldsymbol{A}$的 k 次幂为：

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{cases}\boldsymbol{E}_n & k=0,\\ \boldsymbol{A} & k=1,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1} & k\geqslant 1,\end{cases}$$

**（2）方阵的幂的性质**

**定理** $\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$

**定理** $(\boldsymbol{A}^l)^k=\boldsymbol{A}^{lk}$

### 1.2.6 方阵多项式

**（1）方阵多项式 定义**

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$，s 为非负整数，且

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s$$

令

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_s\boldsymbol{A}^s$$

则称$f(\boldsymbol{A})$为方阵$\boldsymbol{A}$的一个多项式.（不要漏掉$\boldsymbol{E}$）

（2）性质：由方阵的幂的性质知多项式的加法与乘法对方阵多项式仍适用.

### 1.2.7 方阵的迹

（1）**定义** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$，其主对角线上的元素之和为$\boldsymbol{A}$的迹，记为

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

（2）**性质：**

1. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$
2. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$
3. $\operatorname{tr}(k\boldsymbol{A})=k\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$
4. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

### 1.2.8 矩阵的共轭

**性质：**

1. $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$
2. $\overline{c\boldsymbol{A}}=\bar{c}\cdot\overline{\boldsymbol{A}}$
3. $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$
4. $\left|\overline{\boldsymbol{A}}\right|=\overline{|\boldsymbol{A}|}$

## 1.3 方阵的行列式

### 1.3.1 排列

（1）**排列的定义**

**定义** 设$S=\{1,2,\cdots,n\}$，由集合$S$中全体元素所组成的有序$n$元组成为一个$n$级**排列**.

可知$n$级排列共有$n!$个.

**定义** 设$i_1 i_2 \cdots i_n$为一个$n$级排列（$i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$），$1 \leqslant j < k \leqslant n$，若$i_j > i_k$，则称序对$i_j i_k$构成一个**逆序**.排列$i_1 i_2 \cdots i_n$中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记作$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

**定义** 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

可知对任意$n \geqslant 2$，
$$\tau(12\cdots n)=0$$
$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}\cdot$$

**定义** 对一个$n$级排列，若只交换其中两个数的位置而保持其余位置的数不动，则称为对原排列做了一次**对换**.

**定理** 对换改变排列的奇偶性.

**推论** 在全部$n(n \geqslant 2)$级排列中，奇排列数与偶排列数相等，都是$\frac{n!}{2}$.

### 1.3.2 $n$阶行列式的定义

**定义** 设$n \geqslant 1$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n} \in K^{n\times n}$，令:

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau\left(j_1 j_2 \cdots j_n\right)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

或:

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau\left(i_1 i_2 \cdots i_n\right)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

或:

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau\left(j_1 j_2 \cdots j_n\right)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

或:

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau\left(i_1 i_2 \cdots i_n\right)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

则称$|\boldsymbol{A}|$为$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的行列式或$n$阶行列式，$|\boldsymbol{A}|$也常记作:

$$|\boldsymbol{A}|=\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

且我们把:

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau\left(j_1 j_2 \cdots j_n\right)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

叫做$|\boldsymbol{A}|$的展开式，由定义可知$|\boldsymbol{A}|$的展开式有$n!$项.

## 1.4 行列式的基本性质

### 1.4.1 行列式的转置

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$，令

$$D=|\boldsymbol{A}|,D^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$$

则称 $D^{\mathrm{T}}$ 为 $D$ 的转置行列式，且有

$$D^{\mathrm{T}}=D$$

即:

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$$

说明了行列式行列地位相等.

### 1.4.2 行列式的行性线性和列性线性.

（1）数乘

设 $k\in K$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（行性线性）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（列性线性）

（2）加法

若两个行列式除第$i$行之外其余各行都相同，则:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & \cdots & \cdots & c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

列性线性同理.

### 1.4.3 行列式的初等变换

**（1）第一类初等变换**

交换$D$的第$i$行（列）和第$j$行（列），记作$r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）

**性质：** 经过一次第一类初等变换，行列式变号.

**（2）第二类初等变换**

对$k \in K, k \neq 0$，用$k$去乘$\boldsymbol{A}$的第$i$行（列），记作$k \cdot r_i$（$k \cdot c_i$）

**性质：** 经过一次第二类初等变换，行列式值为原来的$k$倍.

**（3）第三类初等变换**

设$k \in K$，将$D$的第$j$行（列）乘以$k$倍加到第$i$行（列），记作 $r_i + k \cdot r_j$（$c_i + k \cdot c_j$）

**性质：** 经过一次第三类初等变换，行列式值不变.

### 1.4.4 行列式的按行按列展开

**定义** 在$D = |a_{ij}|_n$中，去掉元素$a_{ij}$所在的第$i$行和第$j$列后，余下的元素按原来的顺序组成的$n-1$阶行列式称为$D$中元素$a_{ij}$的余子式，记作$M_{ij}$.

**定义** 记$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式，有

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

**性质：行列式的按行展开**

$$D=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

**性质：行列式的按列展开**

$$D=a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

**推论：** 设$D=|a_{ij}|_n$，则

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases}D,\ i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

### 1.4.5 *Laplace* 定理

**定义** 与按行按列展开类似地，我们有子式（$M$）与余子式（$M'$）的定义：设$D$为$n$阶行列式，$1\leqslant k\leqslant n$，在$D$中取定序号互不相同的$k$行于$k$列，将它们交点上的元素依原来顺序组成一个$k$阶子式$M$.当$k<n$时，在$D$中划去这$k$行$k$列后余下的元素依原来顺序组成的$n-k$阶行列式$M'$称为$M$的余子式.

**定义** 代数余子式$A$:

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'$$

**定理** 在$n$阶行列式$D$中任意取定$k$行，其所组成的全体$k$阶子式记作$M_1,M_2,\cdots,M_t$，$t=C_n^k$.对$1\leqslant i\leqslant t$，令$M_i$的代数余子式为$A_i$，则:

$$D=\sum_{i=1}^{t}M_iA_i=M_1A_1+\cdots+M_tA_t$$

**推论：** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

### 1.4.6 行列式的性质

1. $|k\boldsymbol{A}|=k^{n}|\boldsymbol{A}|$
2. $|\boldsymbol{A}^{*}|=(|\boldsymbol{A}|)^{n-1}$
3. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$
4. $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$
5. $|\boldsymbol{A}^{m}|=|\boldsymbol{A}|^{m}$

## 1.5 行列式的计算

### 1.5.1 按行列式定义

### 1.5.2 三角化

### 1.5.3 降阶法（按行按列展开或$Laplace$定理）

### 1.5.4 镶边法 (处理某行或某列相同的元素)

### 1.5.5 化为典型行列式

（1）范德蒙德行列式

（2）爪型行列式

### 1.5.6 递推法

### 1.5.7 拆分法

### 1.5.8 利用克莱姆法则及其推论

### 1.5.9 特征值法

## 1.6 可逆矩阵

### 1.6.1 可逆矩阵的定义

**定义** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$若

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称$\boldsymbol{A}$为$n$阶可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，记为$\boldsymbol{A}^{-1}$；

可知$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$互为逆矩阵.

### 1.6.2 伴随矩阵法求逆矩阵

（1）**定义** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$，$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式，令

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^{*}$叫做$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵.

（2）由矩阵的按行按列展开

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases} D,\ i=j, \\ 0,\ i\neq j. \end{cases}$$

我们可以推得

$$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & & & \\ & D & & \\ & & \ddots & \\ & & & D \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

同理有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

所以我们有**定理**

$$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

（3）**定理** $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}$$

可证得逆矩阵是唯一的.

### 1.6.3 伴随矩阵和逆矩阵的性质

**（1）伴随矩阵的性质**

1. $|\boldsymbol{A}^{*}|=(|\boldsymbol{A}|)^{n-1}$

2. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$

3. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，有 $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

**（2）逆矩阵的性质**

1. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$

逆矩阵的逆矩阵等于原矩阵.

2.若 $k\neq 0$，则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$

3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

由数学归纳法我们可以推出 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$

4.$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$

### 1.6.4 因式分解求逆矩阵

**定理** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in K^{n\times n}$且

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$$

再设$c\in K$

$$f(x)=(x-c)g(x)+f(c)\quad f(c)\neq 0$$

有

$$(\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{g(\boldsymbol{A})}{f(c)}$$

其中

$$g(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

### 1.6.5 矩阵运算的一些性质

（1）

1.$(\boldsymbol{A}^T)^*=(\boldsymbol{A}^*)^T$

2. $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$

3. $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$

4. $(\boldsymbol{A}^T)^m=(\boldsymbol{A}^m)^T$

5. $(\boldsymbol{A}^m)^*=(\boldsymbol{A}^*)^m$

6. $(\boldsymbol{A}^m)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^m$

所以-1、T、*、$m$（矩阵的幂）均可交换.

（2）

## 1.7 $\boldsymbol{Cramer}$ 法则

**1.7.1 定理** 对线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，设其系

数行列式为$\boldsymbol{A}$，当$D=|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，有

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

其中$D_j$为用常数列替换系数行列式中的第$j$列得到的行列式.

### 1.7.2 非齐次线性方程组

**定义** 若线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 常数项不全为

零，则称其为非齐次线性方程组.

### 1.7.3 齐次线性方程组

**定义** 若线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 常数项全为零，

则称其为齐次线性方程组..

### 1.7.2 判断线性方程组的解的个数

**定理** 如果线性方程组的系数行列式$D\neq 0$则其一定有解,且解唯一.

**推论** 若线性方程组无解或有两个不同的解，则线性方程组的系数行列式$D=0$.

**推论** 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$ 则其仅有零解.

**推论** 如果齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

## 1.8 分块矩阵

**1.8.1 定义** 将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的一个子块，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}$$

### 1.8.2 常用的分块方式

**（1）按行分块** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}$

**（2）按列分块** $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n]$

**（3）两矩阵相乘的分块**

### 1.8.3 分块矩阵的运算

**注意分块矩阵整体与小块都要符合矩阵运算的规律.**

**（1）加法**

设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$，且对任意的$\boldsymbol{A}_{ij},\boldsymbol{B}_{ij}$，它们行数与列数均相等，则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})$

**（2）数乘**

利用矩阵数乘规律即可

**（3）乘法**

注意分块矩阵整体前一个矩阵的列数与后一个矩阵的行数要相等，每一个小块相乘时前一个矩阵的列数与后一个矩阵的行数也要相等即可

**（4）转置**

设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}})_{t\times s}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

1.8.4 分块对角矩阵

（1）定义

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$

（2）运算（设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为分块矩阵）

1. $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n\end{pmatrix}$$

2. $$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$$

3. $$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n^{-1}\end{pmatrix}$$ （当$\boldsymbol{A}_i$均可逆时）

4. $$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{A}_1) & & & \\ & f(\boldsymbol{A}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{A}_s)\end{pmatrix}$$