线性代数

期末复习 习题课

迹 （9.27 习题课）

- 迹的定义：方阵对角线上元素的和
- 计算
  - 按照定义 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
  - 按照和特征值的关系：$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- 性质
  - $tr(A)=tr(A^\top)$
  - $tr(mA+nB)=m\cdot tr(A)+n\cdot tr(B)$
  - $tr(AB)=tr(BA)$

行列式的计算 （10.11, 10.18 习题课）

- **基本方法** 按行（列）展开，行列式的初等变换等。
- **爪形行列式**
- **拆行－递推方法**（有明显递归构型）
- **镶边法**（行/列/全局有大量重复的数）
- **Laplace 定理**（稀疏，或可以分成若干明显块）
- **Vandemonde 行列式**（明显规律，套公式）

秩 （10.25, 11.1, 11.8 习题课）

向量组的秩 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s), B=(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

* 若 $r(A)=s$，则 A 线性无关（秩的定义）

(1) 若 A 可用 B 线性表出，$s>t$，则 A 线性相关;

(2) 若 A 可用 B 线性表出且 A 线性无关，则 $s\le t$;

(3) A 与 B 等价且均线性无关，则 $s=t$;

(4) A 中任意线性无关子集向量个数不超过 $r(A)$;

(5) 若 A 可用 B 线性表出，则 $r(A)\le r(B)$;

(6) 若 A 线性无关但 (A,β) 线性相关，则 β 可被 A 线性表出;

(7) A 可用 B 线性表出 $\Leftrightarrow r(B)=r(A\ \ B)$;

(8) A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A\ \ B)$.

矩阵的秩 $(A\in\mathbb{R}^{m\times n})$

(1) $0\le r(A)\le \min(n,m)$;

(2) $r(A^\top)=r(A), r(kA)=r(A)\ (k\ne 0)$;

(3) 方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow r(A)=n$;

(4) 若 A 可初等变换到 B，则 $r(A)=r(B)$;

(5) 若 $P\in\mathbb{R}^{m\times m}, Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 P,Q 可逆，则 $r(PAQ)=r(A)$;

(6) $0\le r(A+B)\le r(A)+r(B)$;

(7) $\max\big(r(A),r(B),r(A+B)\big)\le r(A\ \ B)\le r(A)+r(B)$;

(8) $r\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$;

(9) $r\begin{pmatrix}A & \\ C & B\end{pmatrix}\ge r(A)+r(B), r\begin{pmatrix}A & C\\ & B\end{pmatrix}\ge r(A)+r(B)$;

(10) $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\big(r(A),r(B)\big)$;

(11) $r(A^*)$ 的情况（若 $r(A)=n$ 则 n；$n-1$ 则 1；否则 0）;

(12) Frobenius 不等式：$r(ABC)\ge r(AB)+r(BC)-r(B)$;

(13) $r(A)=r(A^\top A)=r(AA^\top)=r(A^\top)$.

线性方程组同解

(1) 若 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}, B\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow A,B$ 行向量组等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$;

(2) $Ax=0$ 与 $A^\top Ax=0$ 同解.

相似于对角阵的条件 （11.29 习题课）

- （充要）有 n 个线性无关的特征向量；
- （充分）有 n 个不同的特征值；
- （充要）各特征值代数重数 = 几何重数；
- （充要）最小多项式无重根。

- **Tips: 选用最方便的方法进行证明。**

正定的等价条件 （12.6 习题课）

- （证明）定义：$\forall \alpha \neq 0, \alpha^\top A\alpha > 0$；
- （计算或明显涉及惯性指数的证明）正惯性指数 $p = n$；
- （证明）A 合同于单位阵 E；
- （证明）$\exists$ 可逆 D，$A = D^\top D$；
- （计算或明显涉及顺序主子式的证明）各阶顺序主子式均大于 0；
- （证明或简单计算）实对称矩阵 A 各特征值大于 0。
  - 前提：实对称矩阵，要用这个定理先证明实对称。

- Tips: 在证明矩阵正定前，先说明其实对称，必然不会出错。

线性空间相关整理 （12.20 习题课）

- 线性空间、子空间、线性空间的同构
- 线性空间的维数 —— 基的个数【基变换公式、坐标变换公式】
- 欧式空间（内积空间）、欧式空间的同构
  - 和线性空间有何异同
- 线性变换
  - 线性变换的值域 Im、核 Ker、维数 dim(Im)、零度 dim(Ker)
  - 以及它们之间的【性质】（书第 5.6 节）

- <u>Tips: 这部分题目以计算为主，证明为辅。需要证明的时候从定义入手，辅翼介绍的工具（两个公式、一条性质）进行破解。</u>

特殊性质

- 关于 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}$ 类矩阵（12.27 习题课）
  - 等价于 $r(A) = 1$；特征值为 $\beta^{\top}\alpha$，0（$n-1$ 重）。
- 关于 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$ 对合矩阵（12.6 习题课）
- 关于 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 幂等矩阵（11.29 习题课）
- 关于 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 的关系，以及可交换 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$（11.29 习题课）
  - AB 和 BA 有相同特征值；
  - 若 $AB = BA$，则 A 和 B 有公共特征向量
  - 若 $AB = BA$，则 A 和 B 可用相似变换同时化为上三角阵
  - 若 A 和 B 均相似于对角阵，则 $AB = BA$ 等价于 A 与 B 可用相似变换同时化为对角阵。

从条件出发，如何运用条件解题

- **1、寻找可能的角度：矩阵、线性方程组、特征值、二次型、以及我们习题课上提到过的各种性质应用等等。**
- [$Example$] $AB = 0$
  - （特征值）B 的每个列向量都是 A 属于特征值 0 的特征向量；
  - （线性方程组）B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解；
  - ……
- **2、从文字转化为符号（有用的信息）**
  - $\boldsymbol{A}$ 中每行元素的和相同为 $\boldsymbol{k}$：A 有一个特征值是 k，对应的特征向量为全 1 向量。
  - $\boldsymbol{A}$ 中所有元素都是 1：α,β 为全 1 向量，$A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$。

从条件出发，如何运用条件解题

- **3、对于一眼不知道如何运用的条件，想想它长得像什么？**
- [*Example*]（书上例题）$|xA-B|=0$ 的根为 1。
  - $|\lambda E-C|=0$ 的根为 1，即 C 的特征值为 1。
  - 转化成 $|\lambda E-C|=0$ 这样的形式，将条件用上。
- **4、不要漏掉任何一个小条件。**
- [*Example*]（复习题）<u>实对称矩阵 A</u>……
  - 可以正交相似对角化
  - 特征值都是实数
  - 属于不同特征值的特征向量相互正交
  - ……

从条件出发，如何运用条件解题

- **5、符号中隐藏着什么条件？**
- [*Example*]（复习题）……，$A^{\top}A$ 的零特征值有几个？
  - $A^{\top}A$ 本身是对称的。
  - $r(A^{\top}A) = r(A)$。
- **6、不要想当然，仔细看清楚所有条件。**
- [*Example*]（复习题）……，二次型 $\sum_{i,j} x_i x_j$ ……
  - 这个二次型只有交叉项吗？
  - 和 $\sum_{i<j} x_i x_j$，以及 $\sum_{i\neq j} x_i x_j$ 的区别。

从条件出发，如何运用条件解题

- **7、定义类证明题从定义入手，灵活运用判定条件/充要条件。**
- [*Example*]（期中考试）证明 …… 是子空间。
  - 子空间的定义：……
  - 逐条验证，证明完成。
- **8、遇到没见过的构造不要慌，想想标准形/规范形/对角化等能构造出矩阵的方法。**
- [*Example*]（期中考试）……，证明：存在 M，使得 $AMB=0$
  - 把 A 通过 PAQ 化为标准形；
  - 把 B 通过 RBS 化为标准形；
  - $PAQRBS=0$ 于是令 $M=QR$。

计算相关：了解方法，认真计算

- 行列式的计算
- 矩阵求逆（初等变换/伴随矩阵）
- 线性方程组解的结构（齐次/非齐次）
- 秩的计算（矩阵/向量组，定义/初等变换）
- 特征值、特征向量的计算、用特征值计算行列式与迹
- 二次型化为标准形/规范形（配方法）、正/负惯性指数与符号差的计算
- Schmidt 正交化方法、以及其在正交相似对角化中的使用
- 线性空间内基变换、坐标变换的计算
- 线性变换的计算、在不同基坐标下矩阵表示的相关计算
- ……

祝大家期末顺利！

习题课全部材料：https://jbox.sjtu.edu.cn/l/M1wpCp (校外访问可能需要交大 VPN)

微信联系我：18259025398【推荐】

电话联系我：18259025398

邮件联系我： galaxies@sjtu.edu.cn