线代知识点总结

郑棋夫

2022 年 10 月 27 日

目录

1　第一章

1.1　多项式和数域

1.1.1　多项式的根

对于复数域上的多项式:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{C}(0 \leqslant i \leqslant n, i \in \mathbb{Z})$$

$p(x)$ 在复数域上有 n 个根

1.1.2　数域的特点

对四则运算封闭

1.2　矩阵的概念和运算

1.2.1　求和号的重要性质

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$$

1.2.2　矩阵的概念

$m \times n$ 个数排成的长方形数表，用圆括号或方括号括起来，称为矩阵，如:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.3　矩阵的运算

1. 矩阵相等：对应元素相等
2. 加减法：同型矩阵

   性质：交换律，结合律，存在加法单位元，存在加法逆元
3. 数乘: 若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则 $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$

   性质：$\mathrm{1 \times A = A : k(lA) = (kl)A; (k+1)A = kA + 1\ A \cdot k(A+B) = kA + kB}$
4. 乘法: 若 A=$(a_{ij})_{n \times p}$, $B = (b_{ij})_{p \times m}$

$$则 AB = (c_{ij})_{n \times m}, 其中 c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

5. 矩阵的转置: 若

$$A = (a_{ij})_{m \times n},\ A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

   性质：

$$(AB)^T = B^T A^T, (A+B)^T = A^T + B^T, \quad k(A)^T = (kA)^T$$

6. 一种特殊矩阵的幂：

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right),\boldsymbol{\beta}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right),A=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$$
$$\text{故}A^n=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})^n=\boldsymbol{\beta}^T\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\right)^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=|(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})|^{n-1}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$$

7. 一个结论：A 是实矩阵, 若对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $x^TAx=0,\Leftrightarrow$ A 是反对称矩阵

1.3 行列式的性质

1. $D=D^T$
2. 互换行列式两行（列），行列式变号
3. 用行列式中某一行（列）乘一个数加到另一行（列），值不变
4. 行列式中某一行（列）乘一个非 0 的数，值不变
   特别的，设 A 为 n 阶方阵，则 $|kA|=k^n|A|$

1.4 *Laplace* 定理

1.4.1 定理内容

设在 n 阶行列式 D 中, 取定某 k 行, 则 D 位于这 k 行的所有 k 阶子式与它们各自对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D, 即 $D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t=\sum\limits_{i=1}^{t}N_iA_i$

特别的，我们取 k 等于 1 时，即为行列式按行（列）展开

1.4.2 一个经典运用

$$\begin{vmatrix}X & O\\ A & Y\end{vmatrix}=\left|X\right|\left|Y\right|$$

1.5 可逆矩阵

1.5.1 定义

A 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B , 使得 $AB=BA=E$, 则称 A 可逆, 称 B 为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1}

1.5.2 对角矩阵的逆

若对角矩阵

$$\begin{pmatrix}k_1 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & 0\\ 0 & 0 & k_3\end{pmatrix}$$

可逆，则其可逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{k_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3}\end{pmatrix}$$

1.5.3 可逆矩阵的充要条件

$$A\text{ 的逆存在} \Leftrightarrow |A| = 0$$

1.5.4 伴随矩阵求逆

$$\text{若}A\text{可逆，则}A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

1.5.5 一个超级有用的定理

设 A 为方阵, 且 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, 若 $f(A) = 0$, 对任意满足 $f(c) \neq 0$, 则 $(A - cE)$ 可逆, 且 $(A - cE)^{-1} = -\frac{g(A)}{f(c)}$, 其中 $g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

证明：由带余除法：

$$\begin{aligned}
&f(x) = (x - c)g(x) + f(c)\\
&f(A) = (A - cE)g(A) + f(c)E = 0\\
&\text{由于}f(c) \neq 0\\
&\text{故}(A - cE)\text{可逆，且}(A - cE)^{-1} = -\frac{g(X)}{f(c)}
\end{aligned}$$

1.6 克莱姆法则

1.6.1 一道经典题目

$$\text{求}D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix} \tag{1}$$

下先提供老师的方法（笔者自己有种奇特的代数方法可见（1.8.1））, 考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_1 + x_1 a_2 + x_1^2 a_3 + \cdots + x_1^{n-2} a_{n-1} + x_1^{n-1} a_n = x_1^n \\ a_1 + x_2 a_2 + x_2^2 a_3 + \cdots + x_2^{n-2} a_{n-1} + x_2^{n-1} a_n = x_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 + x_n a_2 + x_n^2 a_3 + \cdots + x_n^{n-2} a_{n-1} + x_n^{n-1} a_n = x_n^n \end{cases}$$

由克莱姆法则知 $D = a_n \times V_n$, 其中 V_n 为 n 阶范德蒙行列式

考虑 n 次方程组

$$x^n - a_n x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} - \cdots a_1 = 0 \tag{2}$$

则 x_i 为方程（2）的 n 个根

又由根与系数的关系：$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a_n$

故

$$D = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

1.7 分块矩阵

1.7.1 定义

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的一个子块，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵

1.7.2 基本原则

不管整体，还是局部小块，都必须符合矩阵运算规则

1.7.3 分块矩阵的转置

设

$$A=(A_{ij})_{s\times t}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}_{s\times t}$$

则

$$A^T=(B_{ij})_{t\times s}=\left(A_{ji}^T\right)_{t\times s}=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}_{t\times s}$$

1.8 一些好题

1. 我们先介绍1.6.1中笔者的做法我们直接对第 n 列展开

   则

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} x_i^n(-1)^{n+i}\cdot \prod_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant n \\ j,k\neq i}}(x_k-x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_k-x_j)\cdot\frac{x_i^n}{\prod\limits_{\substack{t=1\\t\neq i}}^{n}(x_i-x_t)} \end{aligned}$$

   下证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^n}{\prod\limits_{\substack{t=1\\t\neq i}}^{n}(x_i-x_t)}=\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{3}$$

   考虑 $f(x)=x^n-\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$ ，由 $lagrange$ 插值公式及 $f(x_i)=x_i^n(\forall i\in\{1,2\cdots n\})$

   知

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}x_i^n$$

   比较 x^{n-1} 的系数，知 (3) 成立

2. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times m$ 阶矩阵, 且 E_m-AB 可逆试证: E_n-BA 可逆, 并求其逆矩阵表达式

证明:

$$
\begin{aligned}
&(E_n-BA)\left(E_n+B\left(E_m-AB\right)^{-1}A\right)\\
&=E_n-BA+B\left(E_m-AB\right)^{-1}A-BAB\left(E_m-AB\right)^{-1}A\\
&=E_n-BA+B(E-AB)\left(E_m-AB\right)^{-1}A\\
&=E_n-BA+BA\\
&=E_n\\
&\text{所以}\,(E_n-BA)^{-1}=\left(E_n+B\left(E_m-AB\right)^{-1}A\right)
\end{aligned}
$$

事实上，本题从分块矩阵角度可以很快解决，将在第二章第三章着重提到。

3. 设 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots a_nx^{n-1}$, 求证

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2\\
a_2 & a_1 & a_n & \cdots & a_4 & a_3\\
a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & a_5 & a_4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_n\\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1
\end{vmatrix}
=\prod_{k=0}^{n-1}f\left(\omega_k\right)
$$

其中 w_i 为 n 次单位根

证明：

$$
\begin{aligned}
&\text{易知}\\
&f(\omega)=a_1\omega^0+a_2\omega^1+\cdots+a_n\omega^{n-1}\\
&f\left(\omega_k\right)=a_1{\omega_k}^0+a_2{\omega_k}^1+\cdots+a_n{\omega_k}^{n-1}\\
&=\left({\omega_k}^0,{\omega_k}^1,\cdots,{\omega_k}^{n-1}\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\\
&\text{又由于}a_n{\omega_k}^0+a_1{\omega_k}^1+\cdots+a_{n-1}{\omega_k}^{n-1}=\omega_k\left(a_1{\omega_k}^0+a_2{\omega_k}^1+\cdots+a_n{\omega_k}^{n-1}\right)\\
&=\omega_k\left({\omega_k}^0,{\omega_k}^1,\cdots,{\omega_k}^{n-1}\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\\
&\text{故}\left({\omega_k}^0,\omega_k^1,\cdots,{\omega_k}^{n-1}\right)\begin{pmatrix}
a_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2\\
a_2 & a_1 & a_n & \cdots & a_4 & a_3\\
a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & a_5 & a_4\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_n\\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \left(f(\omega_k) \quad \omega_k^1 f(\omega_k) \quad \cdots \quad {\omega_k}^{n-1} f(\omega_k)\right)$$

$$= \left(\omega_k^0, \omega_k^1, \cdots, {\omega_k}^{n-1}\right) f(\omega_k)$$

所以 $\begin{vmatrix} 1 & \omega_1^1 & \cdots & {\omega_1}^{n-1} \\ 1 & \omega_2^1 & \cdots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^1 & \cdots & {\omega_n}^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \omega_1^1 & \cdots & {\omega_1}^{n-1} \\ 1 & \omega_2^1 & \cdots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^1 & \cdots & {\omega_n}^{n-1} \end{vmatrix} \prod_{k=0}^{n-1} f(\omega_k)$

即 $\begin{vmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} f(\omega_k)$