计 算

1. 设 3 阶方阵 A,B,C 满足方程 $C(2A-B)=A$，试求矩阵 A，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

2. 已知3阶矩阵 A,B 满足方程 $AB=5B-4E$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A。

3. 已知 A,B 为3阶矩阵，且满足方程 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

4. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$。求矩阵 B。

5. 设矩阵 $C=A^{-1}B^T(B^{-1}+E)^T-A^{-1}$，试化简 C 的表达式，并求矩阵 C。其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\2&3&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}。$$

6. 已知 A，B 为 3 阶方阵。（1）化简矩阵方程 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；

（2）设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求满足以上方程的所有矩阵。

7. 已知 A,B 为3阶矩阵，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$。

（1） 化简等式 $A^*BA=BA-E$；（2）求满足（1）中等式的矩阵 B。

8. 已知A,B为3阶矩阵，满足方程 $2AB=B+4E$， $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$。

试求：（1）矩阵B^{-1}；（2）矩阵A。

9. 计算行列式$|A|,|B|,\begin{vmatrix}O & A\\ B & O\end{vmatrix}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x\\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n\\ 1+x & 2 & \cdots & n-1 & n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$$

10. 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+n\end{vmatrix}$

11. 求方程$f(x)=0$的根，其中 $f(x)=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1 & 3\\ 4 & x^2-5 & -2 & 6\\ -3 & 2 & -1 & x^2+1\\ 3 & -2 & 1 & -2\end{vmatrix}$；

12. 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & y+x_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & y+x_{n-1} & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & y+x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n\\ y+x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n\end{vmatrix}$。

13. 计算n阶行列式： $D=\begin{vmatrix}1-x & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2-x & \cdots & (n-1) & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)-x & n\\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-x\end{vmatrix}$ 。

14 设n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_{n-2} & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$，试求：

（1）试推导出行列式D_k与D_{k-1}，（$k=2,3,\cdots,n$） 之间的递推关系式；

（2）试求D_n的值。

15. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$。求行列式：$|B^2|$，$\dfrac{|A|}{|B^2|}$。

16. 设常数$k\neq 0$，向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$，$\beta=(1,1,\cdots,1)$，矩阵$A=kE+\beta^T\alpha$。

试求：（1）行列式$|A|$；（2）矩阵A的特征值。

17. 设实向量$\alpha=\left(a_1，a_2,\cdots，a_n\right)^T$，$n$阶矩阵$A=E+\alpha\alpha^T$，行列式$D_n=|A|$。

（1）计算D_3；　（2）证明：$D_n\geq D_{n-1}$。

18. 设矩阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，其中$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_n=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

（1）试求：行列式$|A|$；　（2）试讨论：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的线性相关性。

19. 设矩阵A的伴随矩阵　$A^*=\begin{pmatrix}4&3&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&3&-6\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$，且$AXA^{-1}=XA^{-1}+8E$。

试求：（1）行列式$|A|$；（2）矩阵X。

20. 线性方程组为　$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0\\2x_1+x_2+ax_3=1\\3x_1+2x_2+4x_3=b\end{cases}$，问$a,b$各取何值时，线性方程组无解，

有唯一解，有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

21. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$，其系数矩阵 A 的秩

$r(A) = 2$ 试求：常数 a, b 的值，以及该方程组的通解。

22. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶方阵，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维列向量，且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$。已知向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，试求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

23. 已知线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + (k-1)x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + kx_2 + x_3 = 2 \\ 2kx_1 + 2(k-1)x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$，试讨论：

(1) k 取何值时，方程组无解；　(2) k 取何值时,方程有唯一解，并求出其解；

(3) k 取何值时,方程有无穷多解，并求出其通解。

24. 设线性方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = b \end{cases}$，问 a,b 各取何值时，此方程组无解、有唯一解、有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

25. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b \end{cases}$，

（1）试问：常数 a, b 取何值时，方程组有无穷多解、唯一解、无解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解。

26. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$，有解

$\beta_1 = (2, -3, 0, 0)^T$，$\beta_2 = (4, -7, 1, 1)^T$。试求：常数 a, b 的值，以及该方程组的通解。

27. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_1 = a_4 \end{cases}$ 有解。

（1）试问 $a_i, i=1,2,3,4$ 满足什么关系；（2）试求该方程组的通解。

28. 已知线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 1 \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ ，

(1) a 取何值时，方程组无解； (2) a 取何值时，方程组有唯一解；

(3) a 取何值时，方程组有无穷多解，并求出其通解。

29. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解。

（1）试求其系数矩阵 A 的秩； （2）试求常数 a , b 的值，及方程组的通解。

30. 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 为 $\begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + kx_3 = l \end{cases}$ 。

（1）试求行列式 $|A|$；

（2）试问：常数 k，l 为何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解。

当方程组有无穷多解时，求出其通解

31. 设矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，其中 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_n=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

（1） 试求：行列式 $|A|$； （2）试讨论：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性相关性。

32. 已知A为三阶实对称矩阵，秩$r(A)=2$，$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$，是A对应特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$的特征向量，试求：

（1）A的另一个特征值λ_3及其特征向量α_3；　　（2）矩阵A，矩阵A^n。

33. 已知3阶方阵A的特征值1，2，3对应的特征向量分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

(1) 将向量β用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；　　(2)求$A^n\beta$，$n$为自然数。

其中：$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,4)^T$，$\alpha_3=(1,3,9)^T$，$\beta=(1,1,3)^T$。

34. 设列向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的对应特征值$\lambda$的一个特征向量.（1）求常数$\lambda,a,b$；　　（2）试问：矩阵$A$能否相似于对角矩阵？为什么？

35. 设n维行向量$\alpha=(1,1,\cdots,1)$，n阶矩阵$A=E-\alpha^T\alpha$。

(1) 求矩阵A的特征值和特征向量；

(2) 问矩阵A是否可相似于对角阵？若能，求出可逆阵P和对角阵Λ，使$P^{-1}AP=\Lambda$。若不能，请说明理由。

36. 设实向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}^T$，其中$a_1\neq0$，$\alpha^T\alpha=3$，矩阵$A=E-\alpha\alpha^T$

(1) 试说明矩阵A能相似于对角阵；　(2) 求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵，并写出此对角阵；　　(3) 求行列式$|A+E|$。

37. 设矩阵$A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-4\\2&-1\end{pmatrix}$，　　(1)　求可逆阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角阵；

(2)　求矩阵$B=27A^3+3A-E$；　　　　(3)　求$\lim\limits_{n\to+\infty}A^n$。

38. 设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，求：（1）可逆阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角阵；（2）$A^{100}$。

39. 设A为三阶实对称矩阵，且满足$A^2+A-2E=0$ 已知A对应特征值$\lambda=1$的特征向量有$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$。 试求：矩阵A，A^n。其中n为自然数。

40. 设列向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的对应特征值λ的一个特征向量。

（1）求常数 λ,a,b；　（2）试问：矩阵A能否相似于对角矩阵，为什么？

41. 设常数$k\neq 0$，向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$，$\beta=(1,1,\cdots,1)$，矩阵$A=kE+\beta^T\alpha$。

试求：（1）行列式$|A|$；（2）矩阵A的特征值。

42. 设A为n阶方阵，满足$A^2+A-6E=0$。证明

（1）$r(A+3E)+r(A-2E)=n$；

（2）A能相似于对角阵，并求行列式$|A^2-3E|$。

43. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$有 1 个特征值为3。（1）试求：常数$y$，以及矩阵$(A^TA)$的特征值；（2）试求：可逆矩阵$P$，使得矩阵$(AP)^T(AP)$为对角阵，并求出此对角阵。

44 设A为 3 阶实对称矩阵，行列式 $|A|=0$，且$A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。又设$B$为对角阵，

（2）　P为可逆阵，$P^{-1}AP=B$。试求：（1）矩阵B和P；（2）矩阵A。