第一章

1.0 预备知识

1.0.1 集合:
空集：不包含任何元素。
真子集：不同于自身的子集叫做真子集。
表示集合的方法：1.枚举法。2.描述法。
集合的交，并，差。
集合分为有限集和无限集。
1.0.2 数集：
N：全体自然数的集合；Z+：全体正整数的集合；Z：全体整数的集合；Q：全体有理数的集合；R：全体实数的集合；C：全体复数的集合。
1.0.3 数域：
数域：若 K 关于数的加法，乘法及其逆运算都封闭，则称 K 关于加法和乘法组成的代数结构为一个数域。
1.0.4 求和号

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

1.1 线性型和矩阵概念的引入

1.1.1 矩阵的定义

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

将这 mn 个系数写为下面长方形的表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1.2 常用矩阵：

(1) 零矩阵：任意的元素都是 0

(2) 对角矩阵：只有对角线可能非零，即 $i \neq j, a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} k & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & k \end{pmatrix}$$

(3) 纯量矩阵$\begin{pmatrix} k & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & k \end{pmatrix}$

(4) 三角形矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$(此为上三角矩阵)$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$（此为下三角矩阵）

(5) 对称矩阵：转置后矩阵不变。反对称矩阵：转置后矩阵与原来符号相反。

(6) 向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$此为列向量

1.2 矩阵的运算

1. 矩阵的加法 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$

令 C=A+B，$C=(c_{ij})_{m\times n}$

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

2. 矩阵的纯量乘法 B=kA

$b_{ij}=ka_{ij}$

矩阵加法和纯量乘法这两种运算统称为矩阵的线性运算。
线性运算有以下基本性质：
1.加法交换律：A+B=B+A；2.加法结合律 A+(B+C)=(A+B)+C；3.零元存在性 O+A=A+O=A；4.1A=A；5.(kl)A=k(lA)=l(KA)；6.k(A+B)=kA+kB；7.(k+l)A=kA+lA。

矩阵的乘法：

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \\ z_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1s}x_s \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2s}x_s \\ \\ y_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{ns}x_s \end{cases}$$

想要用 x_i 表示 z，考虑消元法把 y 消去。

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1s}x_s \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2s}x_s \\ \\ z_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{ms}x_s \end{cases}$$

经计算得

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kj}$$

矩阵的乘法性质：1.k(AB)=(kA)B=A(kB)；2.$O_{l\times m} A_{m\times n} = O_{l\times \mathrm{n}}$ ；3.EA=AE=A；4.A(B+C)=AB+AC，

(B+C)A=BA+CA；5.A(BC)=(AB)C

方阵的幂与方阵多项式

$$A^k = \begin{cases} E_n & 若\mathrm{k}=0 \\ A, & 若\mathrm{k}=1 \\ AA^{k-1} & 若\mathrm{k}\geq 1 \end{cases}$$

有以下几个性质：1. $A^l A^k = A^k A^l = A^{k+l}$ 2. $(A^l)^k = (A^k)^l$

若 A 与 B 可交换还有以下两个性质

$$(A+B)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i A^i B^{m-i}$$

$$A^m - B^m = (A-B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1})$$

方阵的迹 $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$，还有以下性质：

$$tr(A^T) = tr(A)$$
$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$
$$tr(kA) = ktr(A)$$
$$tr(AB) = tr(BA)$$

1.3 方阵的行列式

排列：设 S={1,2,3,….,n}，由集合 S 中全体元素所组成的有序 n 元组成为一个 n 级排列。

设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为 n 级排列，$1 \leq i < k \leq n$ 若 $i_j > i_k$ 则称其构成一个逆序，逆序的总个数成为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ ，逆序数为奇数的叫做奇排列，为偶数的叫做偶排列。

n 阶行列式定义：若 A 为 n 阶方阵，则 $|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

也写成$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式的计算：1.贡献法（可算三角形矩阵，或者零特别多的矩阵）

1.4 行列式的基本性质：

1 .D=$|A|$ ，$D^T=|A^T|$，$D=D^T$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ =k $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

初等变换

(1) 交换行列式的某两行（列），行列式的值会变为其相反数。

(2) 用 k（不能是 0）去乘某一行（列），行列式值会变为 k 倍。

(3) 将某一行（列）乘以 k 倍后加到另外一行（列），行列式的值不变。

推论：行列式某两行（列）相同或者是某个倍数关系，行列式的值为 0。

行列式的按行（列）展开（Laplace 定理的一种特殊情况）

定义：在 n 阶行列式 D 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行，和第 j 列后，余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序组成的 n-1 阶行列式称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。又称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}

性质：$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ 。

Laplace 定理

若把 a_{ij} 看作为一个矩阵，那么可以选取 2*2，或者 3*3....等矩阵（称为子式 M），去除其所在的行和列，剩下的元素重新组成一个矩阵，那么剩下的叫作余子式，同样也有代数余子式

$$A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots i_n)+(j_1+j_2+\cdots+j_n)}M'$$

设 D 为 n 阶行列式，可以任意选定 k 行（列）展开。

$$t = C_n^k$$

$$D = \sum_{i=}^{t} M_i A_i = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t$$

应用 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} & \cdots & a_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,k+1} & a_{n,k+2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A 与 B 都必须是方阵

$$|AB| = |A||B|$$

1.5 行列式的计算

以下是三角化的例子

例 1
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -a & -a & 0 & 0 \\ -a & 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2 \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2$$

例 2
$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a \\ a & \lambda & a & \cdots & a \\ a & a & \lambda & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ \lambda+(n-1)a & \lambda & a & \cdots & a \\ \lambda+(n-1)a & a & \lambda & \cdots & a \\ \lambda+(n-1)a & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda+(n-1)a & a & a & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & \lambda-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix} = [\lambda+(n-1)a](\lambda-a)^{n-1}$$

例 3
$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c_2 & b_2 & & & \\ c_3 & & b_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{j=2}^{n}(\frac{a_jc_j}{b_j}) & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & & & \\ 0 & & b_3 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 0 & & & & b_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_jc_j}{b_j})b_2b_3\cdots b_n$$

以下是降阶法和镶边法（镶边法经常用于某个元素重复出现很多次）

$C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$

例 1

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} & C_{2n-3}^{n-2} \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} & C_{2n}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-2}^1 & C_{n-1}^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n-1}^2 & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-5}^{n-2} & C_{2n-4}^{n-2} \\ 0 & 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-4}^{n-1} & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$

不断以此类推

$$D_n = 1$$

例 2

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x & -y & -z \\ 0 & a+x & a+y & a+z \\ 0 & b+x & b+y & b+z \\ 0 & c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x & -y & -z \\ 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & c & c & c \end{vmatrix} = 0$$

例 3

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda_2 + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \lambda_n + a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ 1 & a_1 & \lambda_2 + a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & \lambda_n + a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

以下是范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-2}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^x\end{vmatrix}\text{化为}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 & x^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} & x^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x_n^n & x^n\end{vmatrix}$$

观察到原来的行列式是对x^{n-1}展开，应用范德蒙行列式并把x^{n-1}的系数挑出来取绝对值

$$D=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

以下是递推

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1}\\ & & & c_n & a_n\end{vmatrix}\text{对最后一行展开}$$

$D_n=a_nD_{n-1}-c_nb_{n-1}D_{n-2}$，若$a_n,c_n,b_n$是常数则可以用特征值法解

还有拆元法。

1.6 可逆矩阵

单位矩阵 $E_n=\begin{vmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{vmatrix}$

AE=EA=A。

若 AB=BA=E，则称 B 为 A 的逆矩阵。

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$ A^{*}称为A的伴随矩阵(注意下标比较奇怪)

$$AA^{*}=A^{*}A=\left\{\begin{matrix} d & & & \\ & d & & \\ & & \ddots & \\ & & & d \end{matrix}\right\}=dE$$

这个结果自己好好算一算（还原成没有展开前的矩阵结果会更显然）

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}, \left|A^{*}\right|=|A|^{n-1}$$

逆矩阵有以下性质：

$$(A^{-1})^{-1}=A$$
$$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$
$$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$$

Cramer 法则（常用于理论推导，计算太麻烦了）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$ 对于这个方程组

系数行列式 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$x_j=\dfrac{D_j}{D}$ 其中，D_j是将 D 的第 j 列用常数列 $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 代替得到的 n 阶行列式

当系数矩阵 D 不是 0 时，方程组有且仅有唯一解。但是当 D=0 时，情况有两种：1.有解，但是解不唯一（一般是无穷多解）2.无解。
AX=B 可以得到$X=A^{-1}B$

有一种特殊情况，当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ ，且 D 不是 0 时，有且只有零解。D 若为 0，必有无穷解，并且零解是其中一解！

1.7 分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{array}\right)$$

令 $$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}，A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}，A_{13}=\begin{pmatrix} a_{16} \\ a_{26} \end{pmatrix}$$
$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}，A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}，A_{23}=\begin{pmatrix} a_{36} \end{pmatrix}$$
$$A_{31}=\begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{pmatrix}，A_{32}=\begin{pmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}，A_{33}=\begin{pmatrix} a_{46} \\ a_{56} \end{pmatrix}$$

有 $$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

我们还可以把矩阵每一行当成一块，或者每一列当成一块，这样可以写成类似于向量的形式，以便于我们去运算。

例如$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$或者$A=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$

只要满足矩阵加法和矩阵乘法的规则，分块矩阵可以类似于普通矩阵一样进行运算。

$$A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{n1}^T\\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{n2}^T\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n}^T & A_{2n}^T & \cdots & A_{nn}^T\end{pmatrix}$$注意下标！

$$D=\begin{pmatrix}A & X\\ O & B\end{pmatrix}=|A||B|$$

X 可以是任何矩阵，它不影响最终计算结果！

分块对角矩阵

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1}\end{pmatrix}$$

若 AB=O，则矩阵 B 的每一个列都是齐次线性方程组 AX=0 的解。（吧这些解排列起来就可以是 B！）

此外：

还存在幂零矩阵，幂等矩阵，对元矩阵，周期矩阵

幂零矩阵：

设 A 为 n 阶幂零矩阵，使 A^m=0 的最小整数 m 称为 A 的幂零指数。

证：方程组 $x_1\alpha + x_2 A\alpha + x_3 A^2\alpha + \cdots + x_m A^{m-1}\alpha = 0$ 只有零解

可以将方程两边同时左乘 A^{m-1}，可以得到 $x_1 A^{m-1}\alpha = 0$，故 $x_1 = 0$

剩下的解每次都左乘的 A 的次方少一个，一个一个解出来为 0。故只有零解！

幂等矩阵 $A^2 = A$。

幂等矩阵就像是投影，一个物体投影一次是它的影子，它的影子再投影不会再变化，还是影子。

对合矩阵 $A^2 = E$。

对合矩阵就像是对称变换，变了两次后又变回去了。

周期矩阵 $A^n = E$。

相当于旋转变换，旋转角度不同，n 不同，但是旋转了一圈后总是会回到原来的样子。

设 A 是方阵。$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ 。f(A)=O。

若 f(c)不是 0。$g(x) = \dfrac{f(x)-c}{x-c}, (A-cE)^{-1} = -\dfrac{g(A)}{f(c)}$

证明与带余除法很像

f(x)=g(x)p(x)+r。f(c)=r

f(A)=(A-cE)g(A)+f(c)=0。下面就是计算得到结论。