线性代数

（整理）

By 李松铮

目录

一、各章小节（每节由定义，公式，例题组成）

第一章 矩阵与行列式

1.1 矩阵的定义与常用矩阵

1.1.1 矩阵的定义

1.1.2 常用矩阵

1.1.3 本节公式

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的线性运算

1.2.2 矩阵的乘法

1.2.3 矩阵的迹

1.3 矩阵的行列式

1.3.1 排列

1.3.2 行列式的定义

1.3.3 行列式的转置（性质一）

1.3.4 行列式的行线性性和列线性性（性质二）

1.3.5 行列式的初等变换（性质三）

1.3.6 行列式的展开

1.3.7 行列式的计算

1.3.8 行列式的乘法

1.4 可逆矩阵

1.4.1 可逆矩阵及其求法

1.4.2Cramer 法则

1.5.分块矩阵

1.5.1 分块矩阵的分块

1.5.2 分块矩阵的运算

第一章

矩阵与行列式

1.1 矩阵的定义与常用矩阵

1.1.1 矩阵的定义

定义 1.1.1:

由 m × n 个数，排成的 m 行 n 列的表$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$称为一个 m × n 的矩阵，记为 **A**; 若 m=n，则称为 n 阶方阵；其中a_{ij}是 **A** 中的一个元素。

定义 1.1.2:

设 **A**=（a_{ij}）$_{m\times n}$

B =（b_{ij}）$_{s\times t}$

若 m=s,n=t,并且当 1≤i≤m, 1≤j≤n 时都有a_{ij}=b_{ij},则称矩阵 **A** 与矩阵 **B** 相等，记作 **A**=**B**.

1.1.2 常用矩阵

（1）零矩阵：每个元素都是 0 的矩阵，记为 $\mathbf{0}$ 或$\mathbf{0}_{m\times n}$.

（2） 对角矩阵：除主对角线以外的元素全为零.

（3） 纯量矩阵：主对角线元素均为 k，其余元素全为零的 n 阶方阵

特别地，当 k=1 时，该矩阵为 n 阶单位矩阵，记为 E 或E_n

（4） 上（下）三角阵：主对角线以下（以上）元素全为 0.

（5）对称矩阵与反对称矩阵：设 A=（a_{ij}）$_{m\times n}$，B =（b_{ij}）$_{n\times m}$，若a_{ij}=b_{ji}，$1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$，B 为 A 的转置矩阵，记作$\mathbf{A}^T$或$\mathbf{A}'$.

若$\mathbf{A}^T$=A，则 A 为对称矩阵；

若$\mathbf{A}^T$=-A，则 A 为反对称矩阵；

（5） 向量：

行向量与列向量.

1.1.3 本节公式

$(\mathbf{A}^T)^T$= A；即转置的转置为本身.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的线性运算

@1 定义部分：

定义一：矩阵的加法

加法运算【同型且对应元素相加】：设 **A**=（a_{ij}）$_{m\times n}$，**B** =（b_{ij}）$_{m\times n}$，

C=（c_{ij}）$_{m\times n}$；其中c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}，1≤i≤m, 1≤j≤n，则称矩阵 **C** 为矩阵 **A** 与矩阵 **B** 的和，记作 **C**=**A**+**B**.

定义二：矩阵的纯量乘法

数乘运算【数 k 乘每一个元素】：设 **A**=（a_{ij}）$_{m\times n}$, 令 **C**=（c_{ij}）$_{m\times n}$, 其中c_{ij}=ka_{ij}, 1≤i≤m, 1≤j≤n，则称矩阵 **C** 为矩阵 **A** 的纯量积，记作 **C**=k**A**.

定义三：矩阵的加法与矩阵的纯量乘法统称为矩阵的线性运算

@2 定理（公式）与例题部分：

定理一：线性运算具有的性质

1、　加法交换律; **A**+**B**= **B**+ **A;**

2、 加法结合律：(**A**+**B**)+**C**= **A**+(**B**+**C**);

3、 零元存在性：**0**+ **A** = **A**+**0**= **A**；

4、 负元存在性：对任意 **A** 存在 **X** 使得 **A**+**X**=**X**+**A**=**0**；

X 叫做 **A** 的负矩阵，记作-**A**；

5、 1**A**=**A**；

6、 (kl) **A** =k(l**A**)=l(k**A**);

7、 K(**A**+**B**)=k **A** +k**B**;

8、 (k+l) **A** =k **A** +l **A**;

Eg:

下证明性质 4：设 **A**=（a_{ij}）$_{m\times n}$，**B** =（b_{ij}）$_{m\times n}$，其中$a_{ij}=-b_{ij}$，1≤i≤m，1≤j≤n，

则 **A**+**B**=$(a_{ij}+(-a_{ij}))_{m\times n}$=**0**=$(-a_{ij}+a_{ij})_{m\times n}$= **B**+**A**;

定理二：

$(A+B)^T=A^T+B^T$; $(kA)^T=kA^T$.

Eg:

证明 A 可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和，且表法唯一。

Pf: $(A+A^T)^T=A^T+(\mathbf{A}^T)^T=A^T+\mathbf{A}=\mathbf{A}+A^T$,

$(A-A^T)^T=A^T-(\mathbf{A}^T)^T=A^T-\mathbf{A}=-\mathbf{A}+A^T$,

所以$A=\frac{1}{2}$（**A**+A^T）$+\frac{1}{2}$（$A-A^T$）;

下证明唯一性;

若 A=B+C

其中$\mathbf{B}^T$=B,$\mathbf{C}^T$=-C

$\mathbf{A}^T=(\mathbf{B}+\mathbf{C})^T=\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T$=B-C

从而 B=$\frac{1}{2}$（A+A^T）；C=$\frac{1}{2}$（$A-A^T$）得证唯一性.

1.2.2 矩阵的乘法

@1 定义部分：

定义一：矩阵的乘法

设 A=（a_{ij}）$_{m\times n}$，B =（b_{ij}）$_{n\times s}$，C =（c_{ij}）$_{m\times s}$

其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，1≤i≤m, 1≤j≤s

则称 C 为 A 与 B 的乘积，记作 C=AB

关键：A 的列数等于 B 的行数，矩阵才可以做乘法

@2 定理（公式）与例题部分：

（1）k(**AB**)=(k**A**)**B**= **A**(k**B**)

（2）**(AB)C=A(BC)**

（3）**A(B+C)=AB+AC;(B+C)A=BA+CA**

注意：1. 存在矩阵 A≠ 0,B≠ 0,但是 AB=0;

2. 矩阵乘法一般不满足交换律

3. 消去律一般也不成立【|A|≠0 时成立】

（4）$(AB)^T = B^T A^T$

Pf：关键分为两步 首先，证明左右两边矩阵的行列对应相等；

其次，再证明第 i 行第 j 列的元素对应相等即可；

推广：上述结论可以推广到多个矩阵相乘

Eg：$(ABC)^T = C^T B^T A^T$ …可以推广到多个矩阵相乘

1.2.3 方阵的迹

@1 定义部分：

设 **A**=（a_{ij}）$_{m\times n}$，则其主对角线上的元素之和为 **A** 的迹，记作 tr(**A**),即

tr(**A**)=$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

@2 定理（公式）与例题部分：

(1) tr(A^T)=tr(**A**).

(2) tr(**A**+**B**)=tr(**A**)+tr(**B**).

(3) tr(k**A**)=ktr(**A**).

(4) tr(**AB**)=tr(**BA**).

Eg:证明：tr(**AB**)=tr(**BA**)

A=（a_{ij}）$_{n\times n}$，**B** =（b_{ij}）$_{n\times n}$，**AB** =（c_{ij}）$_{n\times n}$，**BA** =（d_{ij}）$_{n\times n}$

则 **AB** =（c_{ij}）$_{n\times n}$=$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，**BA** =（$d_{ij}$）$_{n\times n}$=$\sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{lj}$

因为 tr(**AB**)=$\sum_{l=1}^{n} c_{ll}$==$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}b_{kl}$

tr(**BA**)=$\sum_{k=1}^{n} d_{kk}$=$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}b_{kl}$

得证 tr(**AB**)=tr(**BA**)

1.3 矩阵的行列式

1.3.1 排列

@1 定义部分：

定义一：设$S=\{1,2,\cdots,n\}$，由集合S中全体元素所组成的序n元组称为一个n**级排列**.

可知级排列共有$n!$ 个.

定义二：设$i_1 i_2\cdots i_n$为一个n级排列，$1\leqslant j<k\leqslant n$，若$i_j>i_k$，则称序对$i_j i_k$构成一个逆序.排列$i_1 i_2\cdots i_n$中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记作$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定义三：对一个n级排列，若只交换其中两个数的位置而保持其余位置的数不动，则称为对原排列做了一次对换.

Eg:排列 32514 中 3 2 5 1 4

0 1 0 3 1

故此排列的逆序数为（32541)=0+1+0+3+1=5.

@2 定理（公式）与例题部分：

定理一：

在全部$n(n\geqslant 2)$级排列中，奇排列数与偶排列数相等，都是$\frac{n!}{2}$.

定理二：

一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性 .

推论：奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

Eg1：

试求$\tau(12\cdots n)$， $\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)$

显然 0 $\frac{((n-1)+1)\times(n-1)}{2}$

1.3.2 行列式的定义

@定义部分：

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有
取自不同行不同列的 n 个元素的乘积
的代数和 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

$$\text{记作}\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$.数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

注意

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的;

2、一阶行列式不要与绝对值记号相混淆;

1.3.3 行列式的转置

@1 定义部分:

定义:

若满足:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

@2 定理（公式）与例题部分：

行列互换，行列式的值不变，即$\boldsymbol{D}^T=\boldsymbol{D}$；

*行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立

1.3.4 行列式的行线性性和列线性性

@1 定理（公式）与例题部分：

定理一：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推广：

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意：由于行列式中行与列等价，因此对列同样成立

定理二：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & \cdots & \cdots & c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.3.5 行列式的初等变换

性质一:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

两行列式互为相反数（即互换行列式的两行（两列），行列式变号.）

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质二:

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Eg：

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{7}{2} & -\dfrac{5}{2} \\ 2 & -14 & 10 \end{vmatrix}$$

由于行列式的第二行与第三行成倍数关系，因此行列式为 0

性质三：

把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} \underline{\underline{r_i+kr_j}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

小结：行列式的初等变换中

(1)交换行列式的两行(列)

行列式要变号

(2)行列式的一行(列)同乘以一个不等于 0 的数 k

行列式值变为:k 乘以原行列式值

(3)行列式的一行(列)乘以一个数以后加至行列式的另一行(列),

行列式值不变

1.3.6 行列式的展开

@1 定义部分：

定义一： 在 n 阶行列式 Dn 中，划掉元素 aij 所在的行与列中的所有元素，余下的元素按原来的次序构成的 n-1 阶行列式，称为元素 aij 的余子式，记作 Mij ，称$(-1)^{i+j}$Mij 为元素 aij 的代数余子式，记作 Aij

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

进而得到

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

@2 定理（公式）与例题部分：

1、推论：n 阶行列式 D 的任一行（列）的各元素与另一行（列）对应的各元素的代数余子式的乘积之和等于零。

即：$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

2、拉普拉斯展开定理:

在 N 阶行列式 D 中，任取 1 行 1 列,位于这 1 行 1 列交叉位置的元素按原行列式 D 中的相对位置排成的 1 阶行列式 N 称为行列式 D 的一个 1 阶子式.

在行列式 D 中,划去 1 阶子式 N 所在的 1 行 1 列,剩余元素按原行列式 D 中的相对位置排成的 N-1 阶行列式 M 称为 1 阶子式 N 的余子式.

如果子式 N 的 K 行 K 列在 D 中的行标与列标分别为

$$i_1, i_2, \cdots, i_k, j_1, j_2, \cdots, j_k$$

则

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$$

1.3.7 行列式的计算

方法一：利用行列式定义计算行列式(贡献法)

Eg：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

显然第一行只能取 1，第二行只能取 2，第 3 行只能取 3，第四行只能取 4；

否则若取其他数，则为 0（看哪些可以做“贡献”）

同理可做:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

方法二：化三角形法

Eg：对角线元素相同，其他位置元素完全相同

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

从而再使用定义进行运算

方法三：递推法（行列的 M 阶和 M-1 阶形状相同）

例如：

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

通过递推找规律（可采用数学归纳法）

方法四：消去法（n 阶三对角线型行列式的值）

利用行列式的性质将一些非 0 元素化为 0

例如：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

后一列乘以 m（递推变化的）加到前一列，后可得到一个上三角矩阵

方法五：拆元法

例如：

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a-a & a & \cdots & a \\ 0-a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0-a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & a & \cdots & a \\ -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -2a & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n}$$

同理，再对第一行进行拆元，容易得到：

$$=(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{n}$$

联立两式子，容易解出（n-1）阶的行列式，进而可以得到 n 阶

方法六：加边法（这样的行列式行(列)有重复出现的元素）

例如：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & -a_1b_3 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & -a_2b_3 & \cdots & -a_2b_n \\ -a_3b_1 & -a_3b_2 & 1-a_3b_3 & \cdots & -a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & -a_nb_3 & \cdots & 1-a_nb_n \end{vmatrix}$$

其中, $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \neq 0$

方法七：数学归纳法

例如：范德蒙行列式（想办法得到递推公式）

$$\text{行列式}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n \xrightarrow[r_2-a_1r_1]{\substack{r_n-a_1r_{n-1}\\ r_{n-1}-a_1r_{n-2}\\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n^{n-1}-a_2^{n-2}a_1 & \cdots & a_n^{n-1}-a_n^{n-2}a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按}c_1\text{展开}} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

上式$=(a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$

仿上做法, 有 $D_{n-1}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)D_{n-2}$

再递推下去, 直到 $D_1=1$. 故

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$$
$$=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

1.3.8 行列式的乘法

@定理（公式）与例题部分：

1.两个 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|_n$ ， $B=|b_{ij}|_n$ 的乘积等于一个 n 阶行列式 $C=|c_{ij}|_n$, 其中 C 的第 i 行第 j 列元素 cij 是 A 的第 i 行各元素与 B 的第 j 行对应元素之和，即满足下式：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

2.行列式乘法法则:

$$\left|A_n B_n\right| = \left|A_n\right|\left|B_n\right|$$

3.运算性质

|AT|=|A|;

|AB|=|A||B|;

由上式推广得出：|A1A2⋯Am|=|A1||A2|⋯|Am|;

$|A^k|=|A|^K$;

$|cA|=c^n|A|$,注意|cA|,c|A|,cA 的不同

1.4.1 可逆矩阵及其求法

@1 定义部分：

定义一（可逆矩阵）：

设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB=BA=E$则称A是n阶可逆矩阵，或可逆阵，称B是A的逆矩阵。A的逆矩阵记作A^{-1}。

如果不存在满足$AB=BA=E$的矩阵B,则称A是不可逆矩阵，或A不可逆。

由于$E_nE_n=E_n$,所以单位矩阵E_n是可逆矩阵，且E_n的逆矩阵仍为E_n,是它自身。

由可逆矩阵的定义, A 和 B 互为逆矩阵

$$A^{-1}=B, B^{-1}=A$$

定义二（伴随矩阵）：

定义：设矩阵$A=(a_{ij})_n$是n阶方阵，令矩阵A的行列式$|A|$中，第i行第j列元素a_{ij}对应的代数余子式为A_{ij},那么我们称矩阵$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$为矩阵$A$的伴随矩阵，记作$A^*$。

注意：伴随矩阵第 i 行第 j 列的元素是矩阵 A 中元素 aji 的代数余子式 Aji

@2 定理（公式）与例题部分：

定理:(1)n阶方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$;

(2)若矩阵A可逆，则$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$。

(求可逆矩阵的方法:伴随矩阵法.)

定理二：

设矩阵$A=(a_{ij})_n$是n阶方阵，A^*是矩阵A的伴随矩阵，

那么 $AA^*=A^*A=|A|E_n$

$$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

定理三：

如果n阶方阵A是可逆的，那么
A存在唯一的一个逆矩阵

推论：对n阶方阵A,若存在n阶方阵B,
使得$AB=E_n$(或者$BA=E_n$),则
$\mathrm{BA}=\mathrm{E}$(或者$\mathrm{AB}=\mathrm{E}$);
矩阵A可逆，且$A^{-1}=B$。

可逆矩阵的性质:

命题：设矩阵A是n阶可逆矩阵，那么

(1)$(A^{-1})^{-1}=A$; (2)若$k\neq 0$,则$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

(3)$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,更一般地,$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$;

(4)$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$; (5)$|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

(6)$(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$; (7)$|A^*|=|A|^{n-1}$。

1.4.2Cramer 法则

@1 定义部分：

克莱姆法则:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

那么非齐次线性方程组有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

@2 定理（公式）与例题部分：

定理：如果线性方程组(1)的系数行列式 $D\neq 0$,则(1)一定有解,且解是唯一的 .

推论：如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

注意：非齐次线性方程组在系数行列式等于 0 的时候，不能由克莱姆法则判别方程组是否有解(方程组可能有解也可能无解)

1.5.1 分块矩阵的分块

@1 定义部分：

定义：将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的一个子块，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

@2 定理（公式）与例题部分：

分块矩阵的转置：

设$A=(A_{ij})_{s\times t}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$,

那么$A^T=(B_{ij})_{t\times s}=(A_{ji}^T)_{t\times s}=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}_{t\times s}$

@3 常用的矩阵分块

情况一：转换为列矩阵与（或）行矩阵

例如:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_2 & \cdots & \beta_1\gamma_n \\ \beta_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \cdots & \beta_2\gamma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_m\gamma_1 & \beta_m\gamma_2 & \cdots & \beta_m\gamma_n \end{pmatrix}$$

其中 A 转换为行向量，B 转换为列向量

情况二：转换为零矩阵与其他矩阵

作用：可以达到简化运算的效果

1.5.2 分块矩阵的运算

@定理（公式）与例题部分：

分块矩阵的加法：

设$A=(A_{ij})_{s\times t},B=(B_{ij})_{s\times t}$，对任意的$i$和$j,A_{ij}$和$B_{ij}$

都是同类型矩阵(有相同行数和列数的矩阵),那么

$A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{s\times t}$。

分块矩阵的数乘：

$A=(A_{ij})_{s\times t},k$是一个数，那么$kA=(kA_{ij})_{s\times t}$。

分块矩阵的乘法：

$A=(A_{ij})_{s\times t},B=(B_{kl})_{r\times t}$,且$A_{im}$的列数等于$B_{mj}$的行数，

那么$AB=C=(C_{ij})_{s\times t}$,其中$C_{ij}=\sum_{m=1}^{r}A_{im}B_{mj}$

关键：外矩阵的类型与内部小矩阵的类型一样

即不管整体，还是局部小块，都必须符合矩阵运算规则

例如：

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_2 & \cdots & \beta_1\gamma_n \\ \beta_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \cdots & \beta_2\gamma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_m\gamma_1 & \beta_m\gamma_2 & \cdots & \beta_m\gamma_n \end{pmatrix}$$

外部矩阵的形式符合矩阵相乘（或做其他类型运算）的条件；同时，分块矩阵的形式同样符合矩阵相乘（或做其他类型运算）的条件