$\boxed{A=\alpha\beta^T \quad (\alpha,\beta\neq 0)}$

①等价命题　　a. $r(A)=1$

　　　　　　b. A 行之间（或列之间）只相差一个比例关系.

②基本性质　　$tr(A)=\beta^T\alpha$　　不可逆.

☆③特征值　　$\beta^T\alpha$ （1重）.　0 （$n-1$重）

特征向量　　$L(\alpha)$.　　齐次线性方程组 $Ax=0$ 解空间

④化零多项式　　$A^2-\beta^T\alpha A=0$

最小多项式　　$m_A(x)=x^2-\beta^T\alpha\cdot x$

若 $tr(A)=\beta^T\alpha=0$，则最小多项式有重根 $\Longrightarrow$ 不相似于对角阵. 但可相似于 $\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$

若 $tr(A)=\beta^T\alpha\neq 0$，则最小多项式无重根 $\Longrightarrow$ 相似于对角阵. $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$

* 若 $\alpha=\beta$. 则 $\beta^T\alpha=\alpha^T\alpha=\|\alpha\|$

常见考法：利用其构造多项式、求新矩阵性质.

1. 设 α 是 n 维非零实列向量，矩阵 $A=E+\alpha\alpha^T$，$n\geq 3$，则__________

C

(A) A 至少有 $n-1$ 个特征值为 1；　(B) A 只有 1 个特征值为 1；

(C) A 恰有 $n-1$ 个特征值为 1；　(D) A 没有 1 个特征值为 1。

A 特征值　1　（$n-1$重）　　$1<\alpha^T\alpha+1$　（1重）

4. 设 n 维向量 $\alpha=(1,1,\cdots,1)$，$n\geq 2$，矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha$，则 A^{-1} 为（　　）

B

(A) $E-(n-1)\alpha^T\alpha$；　(B) $E-\frac{1}{n-1}\alpha^T\alpha$；　(C) $E-n\alpha^T\alpha$；　(D) $E-\frac{1}{n}\alpha^T\alpha$。

$(\alpha^T\alpha)^2-n\cdot\alpha^T\alpha=0$　配方　　$(\alpha^T\alpha-E)(\alpha^T\alpha-(n-1)E)=(n-1)E$　　$(E-\alpha^T\alpha)(E-\frac{1}{n-1}\alpha^T\alpha)=E$

16. 设 α 是单位向量，矩阵 $A=E+k\alpha^T\alpha$，其中 $k\neq -1$。则（　　）

A

(A) A 为正交矩阵；(B) A 为正定矩阵；　(C) A 为可逆矩阵；(D) A 为反对称矩阵。

$AA^T=(E+k\alpha^T\alpha)\cdot(E+k\alpha^T\alpha)=E+(k^2\alpha\alpha^T+2k)\alpha^T\alpha=E+(k^2+2k)\alpha^T\alpha$.　不一定正交

A 特征值　1，　$1+k\neq 0$　一定可逆.　不一定正定.　且 A 为对称矩阵.

B 18. 设 $\alpha \neq 0$ 是 n 维单位实列向量，常数 $k \neq 0$，矩阵 $A = E - k\alpha\alpha^T$ 是正交阵。则（　　）

(A) $k=-2$；　(B) $k=2$；　(C) $k>0$；　(D) $k<0$。

$AA^T = E + (k^2\alpha^T\alpha - 2k)\alpha\alpha^T \xlongequal{\|\alpha\|=1} E + (k^2-2k)\alpha\alpha^T \Rightarrow k=2$

22. 已知 $\alpha \neq 0$ 是 n 维实列向量，矩阵 $A = E - k\alpha\alpha^T$，k 为非零常数，则 A 为正交矩阵的充分必要条件为 $k =$ $\underline{2(\alpha^T\alpha)^{-1}}$。

A, B 特征值 $2,0,0$　　$2A+E$: $5,1,1$.　　$|2A+E|=5$.

2. 设 $\alpha = (1,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (1,-1,2)^{\mathrm{T}}$, $B = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 A, B 相似, 则 $(2A+E)^*$ 的特征值为 $\underline{1, 5, 5}$.

$(2A+E)^* = |2A+E|(2A+E)^{-1} = 5(2A+E)^{-1}$

29. 设 A 是秩为 1，迹为 0 的 3 阶方阵，则 A 的 Jordan 标准形为 $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

$\boxed{\text{线性空间相关}}$

C 21. V 表示实数域上所有 3 阶实反对称矩阵构成的线性空间, 则 $\dim V =$ (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

D 22. 在内积空间 V 中, α, β 是相互正交的向量, 则下列结论错误的是 (　)

A. $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$　　B. $|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$

C. $|\alpha-\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$　　D. $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

内积空间: 欧式空间

正交: "垂直"

A 23. 以下哪一个是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 (　)

A. $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ x_2+x_2 \\ x_3-x_1 \end{pmatrix}$　　B. $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+3 \\ x_2+2 \\ x_3-1 \end{pmatrix}$

C. $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^2 \\ x_3 \end{pmatrix}$　　D. $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x_3 \\ 2+x_2 \\ 3-x_1 \end{pmatrix}$

线性变换定义

C 24. $A = \mathrm{diag}\{1,2,3\}$ 是向量空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵, $\mathscr{A}$ 在另一组基下的矩阵是 (　)

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

线性变换在不同基下矩阵关系:

$B = C^{-1}AC$

相似, 特征值相同

线性变换的值域 $\mathcal{A}(V)=\{\mathcal{A}(\xi)\mid \xi\in V\}$ 映射到哪些元素上 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 秩 $r(\mathcal{A})=\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))$ $r(A)$

核 $\mathcal{A}^{-1}(0)=\{\xi\in V\mid \mathcal{A}(\xi)=0\}$ 哪些元素被映射为0 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ 零度 $r(\mathcal{A}^{-1}(0))=\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))$ $n-r(A)$

$\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))+\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))=\dim V$

B 25. 向量空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&5&8\\2&1&2\end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 的秩和零度分别是 ( )

A. 1, 2 B. 2, 1

C. 1, 1 D. 2, 2

$r(A)=2$

$n-r(A)=1$

22. 设 $\mathbb{R}^3$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的3维向量空间. 线性变换 $\mathscr{A}$ 作用效果如下:

$$\mathscr{A}(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c),\quad \forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

则值域 $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$ 的维数__2__和一组基为_____; 核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数__1__和一组基为_____.

取 $\mathbb{R}^3$ 一组基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T$ $\varepsilon_2=(0,1,0)^T$ $\varepsilon_3=(0,0,1)^T$

$\mathcal{A}\varepsilon_1=(1,0,1)^T$ $\mathcal{A}\varepsilon_2=(2,1,1)^T$ $\mathcal{A}\varepsilon_3=(-1,1,-2)^T$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$ $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ $r(A)=2$

$\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))=r(A)=2$ 一组基可以为 $\mathcal{A}\varepsilon_1$, $\mathcal{A}\varepsilon_2$

$\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))=n-r(A)=1$ $Ax=0$ 基础解系

23. 全体 n 阶实对称矩阵构成的线性空间 V 的维数是__$\frac{n(n+1)}{2}$__. 对角线及其一半元素

24. $P[t]_4$ 表示由所有次数不超过 3 的实系数多项式构成的集合, 这个集合在多项式的加法运算和数乘运算下构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 现已知线性变换 $\mathscr{A}$ 的作用效果如下:

$$\mathscr{A}(\overset{1}{a_0}+\overset{0}{a_1}t+\overset{0}{a_2}t^2+\overset{0}{a_3}t^3)=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)t+(a_2-a_0)t^2+(a_3-a_1)t^3,$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $1,t,t^2,t^3$ 下的矩阵为_____.

$\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\mathcal{A}(1)=(1,0,-1,0)^T$

$\mathcal{A}(\varepsilon_2)=\mathcal{A}(t)=(0,1,0,-1)^T$

$\mathcal{A}(\varepsilon_3)=\mathcal{A}(t^2)=(-1,0,1,0)^T$

$\mathcal{A}(\varepsilon_4)=\mathcal{A}(t^3)=(0,-1,0,1)^T$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}=\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=\underbrace{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)}_{E}A=A$$

25. $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换, 满足

$$(\mathscr{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathscr{A}\beta), \quad \forall\, \alpha, \beta \in V.$$

若 λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 即 $\mathscr{A}(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$, 其中 $\varepsilon \neq 0$, 则 λ= $\underline{\quad 0 \quad}$.

设基 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$. $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 下矩阵为 A.

$\mathscr{A}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) \cdot A$

$(\mathscr{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\varepsilon_k, \varepsilon_j) = a_{ji}$

$(\varepsilon_i, \mathscr{A}\varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\varepsilon_k) = a_{ij}$

$(\mathscr{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -(\varepsilon_i, \mathscr{A}\varepsilon_j)$ 从而 $a_{ij} = -a_{ji}$ 从而 A 反对称阵

设 ε 坐标表示为 α. 则 $\mathscr{A}(\varepsilon)$ 坐标表示为 $A\alpha = \lambda\alpha$. $(\alpha \neq 0)$

$\lambda\alpha^T\alpha = \alpha^T(\lambda\alpha) = \alpha^T A\alpha = \alpha^T(-A^T)\alpha = -(\alpha^T A\alpha)^T = -\lambda(\alpha^T\alpha)^T = -\lambda\alpha^T\alpha$

$\Longrightarrow \lambda = 0 \quad (\alpha \neq 0)$

反对称相关 $A = -A^T$

* 反对称矩阵特征值为0或纯虚数 ki

设 $A\alpha = \lambda\alpha$. 则

$\lambda\alpha^T\alpha = \alpha^T(\lambda\alpha) = \alpha^T A\alpha = \alpha^T(-A^T)\alpha = -(\alpha^T A\alpha)^T = -(\lambda\alpha^T\alpha)^T = -\overset{\text{共轭}}{\bar{\lambda}}\alpha^T\alpha$

故 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ 即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = ki$

10. 设 A 实非零反对称矩阵，证明：(1) A^2 是半负定矩阵；(2) 行列式 $|E - A^2| > 1$。

(1) $\alpha^T A^2 \alpha = -\alpha^T A^T A\alpha = -(A\alpha)^T A\alpha \leq 0$ 半负定 且 A^2 显然对称

(2) 由(1). A^2 特征值均小于等于0.

$E - A^2$ 特征值均大于等于1. $\Longrightarrow |E - A^2| \geq 1$

下证 $|E - A^2| \neq 1$. 即 $E - A^2$ 特征值不全是1, A^2 特征值不全是0

(反证). 若 A^2 特征值只有0. 则对称阵 A^2 可相似对角化为 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 即 $A^2 = 0$

于是 $\forall\alpha$. $\alpha^T A^2 \alpha = -(A\alpha)^T A\alpha = 0$

即 $A\alpha=0$ 的解空间为 R^n. $n-r(A)=n \Rightarrow r(A)=0$. $A=0$. 矛盾.

其他习题

29. 设A为 n 阶实方阵，$r(A)=r$.

(1) 试证：存在秩为r的$n\times r$阵H和秩为r的$r\times n$阵L，使得$A=HL$.

(2) 试证：存在秩为r的 n 阶幂等矩阵B和可逆矩阵C，使得$A=BC$.

(3) 若A可逆，则存在正交矩阵Q，和上三角矩阵R，使得$A=QR$.

(1) A 为n阶方阵秩为r. 则 A 可经初等变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 即

$$A = S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T = \underbrace{S\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}}_{H}\underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}T}_{L} = HL$$

(2) 观察到其标准形幂等. 由此出发构造与标准形相似矩阵同样幂等.

$$A = S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T = \underbrace{S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}}_{B}\underbrace{ST}_{C} = BC$$

其中 $B^2 = S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1} = S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1} = B$ 幂等

(3) Schmidt 正交化方法的矩阵表述

设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. 考虑对 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 标准正交化(已线性无关)

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n = \alpha_n - \dfrac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \dfrac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1} \end{cases}$$

且 $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$

即.

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\gamma_1 \\ \alpha_2 = k_{21}\gamma_1 + k_{22}\gamma_2 \\ \cdots \\ \alpha_n = k_{n1}\gamma_1 + k_{n2}\gamma_2 + \cdots + k_{nn}\gamma_n \end{cases}$$

令 $Q=(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

$$R = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

$A=QR$

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $A^3-3A^2+3A-2E=O$, 则 A 的特征值是 2.

特征值均为实数

化零多项式

$(A-2E)(A^2-A+E)=0$

实根 2 复数根

4. 设 A,B 为 n 阶正交矩阵, 且 n 为奇数. 则 $|(A-B)(A+B)|=$ 0.

$$
\begin{aligned}
|(A-B)(A+B)| &= |A-B||A+B| \\
&= |(A-B)^T||A+B| \\
&= |(A-B)^T(A+B)| \\
&= |A^TA-B^TB+A^TB-B^TA| \\
&= |E+E+A^TB-B^TA| \\
&= |\overset{C}{A^TB-B^TA}|
\end{aligned}
$$

$C^T=(A^TB-B^TA)^T=B^TA-A^TB=-C$

$|C|=|C^T|=|-C|=(-1)^n\cdot|C|=-|C|$

从而 $|C|=0$

即 $|(A-B)(A+B)|=|C|=0$

5. 设 n 阶实矩阵 A 的秩是 r, 则 A^TA 的零特征值有 $n-r$ 个.

A^TA 对称 $\quad r(A^TA)=r(A)=r$

$\to$ $\exists$ 正交 Q $\quad A^TA=Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q$. $\quad$ 从而 $r\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=r$

17. 设 A 为 m 阶实对称矩阵, B 为 $m\times n$ 阶实矩阵, 若 B^TAB 为正定矩阵, 则 B 的秩 $r(B)=$ n.

① B^TAB 正定 $\quad \forall x\neq 0 \quad x^TB^TABx>0$

即 $\forall x\neq 0$ 恒有 $Bx\neq 0$. $\quad Bx=0$ 只有零解. $r(B)=n$

② $n=r(B^TAB)\leq r(B)\leq \min(m,n)\leq n$. $\quad r(B)=n$.

9. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, 多项式 $F(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^3+11\lambda^2-15\lambda+29$, 则 $F(A)=$ $\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

$A^2+8E=0$

$$
\begin{aligned}
F(A) &= A^4-2A^3+11A^2-15A+29E \\
&= 64E+16A-88E-15A+29E \\
&= A+5E
\end{aligned}
$$

12. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a+1)\sum_{i=1}^{3}x_i^2+2\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_ix_j$ 秩为 2，则常数 $a=$（　　）

（A）1；　（B）-1；　（C）5；　（D）-5。

二次型 — 实对称矩阵 — 可对角化
秩为2
} 有一个特征值为0.

矩阵: $\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a+1\end{pmatrix}$

$=\underbrace{\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}}_{\text{特征值 }0,0,6}+(a+1)E$　　特征值 $a+1$, $a+1$, $a+7$.

只可能 $a+7=0$　$a=-7$.

题目有误. 要改题目使D正确怎么改? $i\neq j$

17. 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j$ 秩为 $n-1$，则常数 $a=$（　　）

（A）0；　（B）1；　（C）$n-1$；　（D）$1-n$。

与上题一样. 不改题目则答案为 $-n$.　改法相同