期末复习

一、选择题

1. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵, α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 ( )

   A. $P^{-1}\alpha$　　B. $P^{\mathrm{T}}\alpha$　　C. $P\alpha$　　D. $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$

2. 2 是可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一特征值等于 ( )

   A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵, 则 $a=$ ( )

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B, 则秩 $(A-2E)$ 与秩 $(A-E)$ 之和等于 ( )

   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是 ( )

   A. $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A 与 B ( )

A. 合同且相似　　B. 合同但不相似　　C. 不合同但相似　　D. 不合同且不相似

7. 设 A, B 为 n 阶正交矩阵, 且 $|A| \neq |B|$. 则 $|A+B|=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解都是线性方程组 $BX=\mathbf{0}$ 的解, 则 ( )

A. $r(A)<r(B)$　　B. $r(A)>r(B)$　　C. $r(A)\geq r(B)$　　D. $r(A)\leq r(B)$

9. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $0,2,-2$, 则下列结论不正确的是 ( )

A. 矩阵 A 是不可逆矩阵

B. 矩阵 A 的迹为 0

C. 特征值 2 和 -2 所对应的特征向量是正交的

D. $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系由一个向量组成

10. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的 ( )

A. 充分必要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

11. 设 A 是 3 阶方阵, 且 $E-A, 2E-A, -3E-A$ 都不可逆, 则下列结论错误的是 ( )

A. A 可对角化　　B. A 为可逆矩阵

C. $A+E$ 不可逆　　D. $|A|=-6$

12. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3$ 是 ( )

A. 正定　　B. 负定　　C. 不定　　D. 不知道

13. 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 是正定二次型的充要条件是 ( )

A. 负惯性指数为零

B. $X^{\mathrm{T}}AX>0,\quad \forall\, X\neq\mathbf{0}$

C. $|A|>0$

D. 存在 n 阶方阵 P, 使得 $A=P^{\mathrm{T}}P$

14. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a+b & 5 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 ( )

A. $a=1, b=2, c=1$ B. $a=1, b=1, c=-1$

C. $a=3, b=-1, c=2$ D. $a=-1, b=3, c=8$

15. 设 A 为 n 阶正定矩阵, B 为 n 阶实反对称矩阵, 则 $A-B^2$ 是 ( )

A. 正定 B. 负定 C. 不定 D. 不知道

16. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维线性空间 V 的一组基, 则 V 的基还可以是 ( )

A. $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$

B. $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$

C. $\alpha_1, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4$

D. $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

17. 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ \beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

则基 α_1, α_2 到基 β_1, β_2的过渡矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

18. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为线性空间 $\mathbb{R}^n$ 的两组基, 且

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=(\beta_1, \cdots, \beta_n)A.$$

又对 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+\cdots+y_n\beta_n.$$

记 $(x_1, \cdots, x_n)=(y_1, \cdots, y_n)B$, 则 ( )

A. $B=A^{\mathrm{T}}$ B. $B=A^*$ C. $B=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ D. $B=A$

19. 设 V 是所有实系数多项式所构成的线性空间, 以下子集是 V 的子空间的是 ( )

A. 所有 5 次多项式　　B. 所有常数项为 0 的多项式

C. 所有正系数多项式　　D. 所有系数非负的多项式

20. 线性空间 $\mathbb{R}^4$, 定义内积:

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i,\quad \forall\,\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4),\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4.$$

则 $\alpha=(1,2,2,3)$ 与 $\beta=(3,1,5,1)$的夹角为 ( )

A. 0　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

21. V 表示实数域上所有 3 阶实反对称矩阵构成的线性空间, 则 $\dim V=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

22. 在内积空间 V 中, α,β 是相互正交的向量, 则下列结论错误的是 ( )

A. $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　　B. $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$

C. $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　　D. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

23. 以下哪一个是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 ( )

A. $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_3\\x_2+x_2\\x_3-x_1\end{pmatrix}$　　B. $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+3\\x_2+2\\x_3-1\end{pmatrix}$

C. $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^3\\x_2^2\\x_3\end{pmatrix}$　　D. $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x_3\\2+x_2\\3-x_1\end{pmatrix}$

24. $A=\mathrm{diag}\{1,2,3\}$ 是向量空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵, $\mathscr{A}$ 在另一组基下的矩阵是 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&1&3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

25. 向量空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 的秩和零度分别是 ( )

A. $1, 2$

B. $2, 1$

C. $1, 1$

D. $2, 2$

二、填空题

1. 设 4 阶矩阵 A 和 B 相似, 若 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则 $|B^{-1}-E|$=_________.

2. 设 $\alpha = (1,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (1,-1,2)^{\mathrm{T}}$, $B = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 A, B 相似, 则 $(2A+E)^*$ 的特征值为_________.

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $A^3 - 3A^2 + 3A - 2E = O$, 则 A 的特征值是_________.

4. 设 A, B 为 n 阶正交矩阵, 且 n 为奇数. 则 $|(A-B)(A+B)|$=_________.

5. 设 n 阶实矩阵 A 的秩是 r, 则 $A^{\mathrm{T}}A$ 的零特征值有_________个.

6. 设 n 阶方阵 A 的元素全是 1, 则 A 的 n 个特征值是_________.

7. 矩阵 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \ A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3,\ \ A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

若 3 阶矩阵 B 满足 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$, 则 B=_________.

8. 方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为_________.

9. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, 多项式 $F(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^3+11\lambda^2-15\lambda+29$, 则 $F(B)$=_________.

10. 已知有三个向量 $\xi_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 3 阶方阵 A 满足 $A\xi_1=\xi_1$, $A\xi_2=\mathbf{0}$, $A\xi_3=-\xi_3$, 则 A^n=_________.

11. 已知 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a=$_________.

12. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为 _________.

13. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 合同, 则二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的规范型为 _________.

14. 求二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{1\le j<k\le n}x_jx_k$ 的符号差 _________.

15. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$, 则 t 满足 _________时, 二次型是负定的.

16. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+x_3^2+2ax_1x_3+2bx_2x_3$ 经正交变换后化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$, 则 $a=b=$_________.

17. 设 A 为 m 阶实对称矩阵, B 为 $m\times n$ 阶实矩阵, 若 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵, 则 B 的秩 $r(B)=$_________.

18. 令 $V=\{(a+bi,c+di)\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$, V 在通常的加法和数乘下, 在复数域 $\mathbb{C}$ 上是_________维的. 在实数域 $\mathbb{R}$ 上是_________维的.

19. 所有二阶实矩阵构成的集合 $M_2(\mathbb{R})=\left\{A=(a_{ij})_{2\times 2}\,|\,a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$ 关于矩阵之间的加法和数乘运算构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 现有 $M_2(\mathbb{R})$ 的

两组基:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

则基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 到基 A_1,A_2,A_3,A_4的过渡矩阵_________.

20. 在实线性空间 $P[x]_3$ 中, 定义内积

$$(p,q)=\int_{-1}^{1}p\left(x\right)q\left(x\right)\mathrm{d}x,\quad p\left(x\right),q\left(x\right)\in P[x]_3.$$

将基 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$ 正交化(不需要单位化)_________.

21. 已知三维向量空间的基底为 $\alpha_1=(1,1,0)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(0,1,1)$, 则向量 $\beta=(2,0,0)$ 在此基底下的坐标是_________.

22. 设 $\mathbb{R}^3$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 3维向量空间. 线性变换 $\mathscr{A}$ 作用效果如下:

$$\mathscr{A}(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c),\quad\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

则值域 $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$ 的维数_________和一组基为_________; 核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数_________和一组基为_________.

23. 全体 n 阶实对称矩阵构成的线性空间 V 的维数是_________.

24. $P[t]_4$ 表示由所有次数不超过 3 的实系数多项式构成的集合, 这个集合在多项式的加法运算和数乘运算下构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 现已知线性变换 $\mathscr{A}$ 的作用效果如下:

$$\mathscr{A}(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3)=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)t+(a_2-a_0)t^2+(a_3-a_1)t^3,$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $1,t,t^2,t^3$ 下的矩阵为_________.

25. $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换, 满足

$$(\mathscr{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathscr{A}\beta), \quad \forall\, \alpha, \beta \in V.$$

若 λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 即 $\mathscr{A}(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$, 其中 $\varepsilon \neq 0$, 则 λ=_________.