线性变化中的不变量——从“翻棋游戏”谈起

首先介绍翻棋游戏的规则：有一个n\*n的棋盘，其中布满了棋子，棋子的正面为白色（下用数字1)来表示，反面为黑色（下用-1）来表示，每次翻转一个棋子，同时它的同一行（或同一列）均会翻转，目的是通过翻转来使棋盘中所有的棋子均正面朝上。

首先以1\*1的棋盘为例：

|  |
| --- |
| -1 |

只需翻转一次便可使棋子均正面朝上。

2\*2的情况：

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| -1 | 1 |

显然无论通过什么变化，上述棋盘中棋子均有一个与其他三个不同，故不能满足所有棋子的朝向相同。

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| -1 | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | -1 |
| -1 | 1 |

这两类情况均可已通过有限次的变化，使得所有棋子均正面朝上

所以我们不妨思考是否有一种翻转方式，通过有规律的有限次翻转，使我们将所有棋子翻转至朝向同一方向，或者得出否定的结论。此时我们可以引入标准型的概念，即将棋盘的第一行和第一列的棋子翻转，朝向同一方向，形式如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |

首先确定任意棋子摆放情况下，均可以把它转变为标准型：通过下翻转方法，将第一行的所有反面朝上的棋子，及它的所在列均翻转，这样第一行所有的棋子均正面朝上；然后对第一列所有反面朝上的棋子进行翻转，由于第一个棋子一定为正面朝上，所以不会对第一行产生影响，所以可以保证通过翻转使第一行和第一列的棋子均为正面朝上。

其次我们可以确定标准型的唯一性：通过上述变化我们可以得到标准型A，若存在标准型B和A不同，由于A和B均有同一情况变化而来，且变化可逆，所以B可由A进行有限次翻转，由于让保持标准型，所以每一列和每一列只可能进行偶数次变化，所以从每一颗棋子的角度来看，每一颗棋子只可能进行了偶数次变化，或保持不变，所以从变化整个过程的结果来看，A的每一位置上的棋子没有发生变化，所以A=B。由此我们可以得出标准型唯一的结论。

标准型为我们判断能否将棋盘所有的棋子翻转至同一方向提供了一般性思路，及通过上述变化方法将棋子的排列方式转化为标准型，如果标准型中所有棋子朝向均相同，则能满足通过有限次变化使棋子的朝向相同；如果标准型中存在棋子朝向不同，则显然不能满足通过有限次翻转，是所有棋子的朝向相同。

翻棋游戏中得到的标准型，我们可以自然联想到矩阵的标准型，矩阵通过一系列的初等变化（与棋子的翻转类似），均能得到标准型，与上述标准型相似，矩阵通过初等变换得到的标准型有且仅有一个。

|  |  |
| --- | --- |
| Er | 0 |
| 0 | 0 |

Er为单位矩阵，其阶数为矩阵的秩。

在矩阵的初等变化过程中所有的矩阵，都可以化为相同的标准型，所以秩为矩阵的一个不变量，不因为线性变化而发生改变。

从矩阵的之中我们可以得到矩阵的很多性质，而得到这些性质的基础可以由——秩，这一不变量为依据。我们都知道高斯消元法解方程，我以此为例来介绍不变量——秩的应用。对于一个线性方程组，我们可以有如下表示形式AX==B：A为系数矩阵，X为变量，B为常数构成的列向量。而X有解的充要条件为系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。我们不妨借助标准型来思考。对于一个增广矩阵我们对（n+1）行，和（n）列进行行列初等变换，是的系数矩阵部分为标准型，若增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩显然有非零常数对应着一行零向量，所以方程组无解。

同时秩在除矩阵外，如线性方程组等线性代数更多领域有着广泛应用，而线性变化中这一不变量，为我们解决矩阵的性质，方程组的解，线性空间提供了更多的思路。所以通过zhe'yi