# 翻棋游戏引起的思考

大多数人都玩过翻棋游戏：一个n\*n的棋盘，通过对一行或一列的棋子进行反转希望使所有棋子同一面朝上。在这个游戏中，我们会很明显地发现有一部分初始状态经过几次操作后可以互相转化。这不仅让我们思考怎样的初始状态能够相互转化？能否将所有可以互相转化的状态用同一种状态表示？

首先，对于1\*1的棋盘，显然只有两种状态且二者可以互相转化。

而对于2\*2的棋盘，情况就略显复杂。对于每一个棋子都有两种状态——朝上或朝下，因此我们共有2^4=16种情况，但通过观察我们不难发现：我们可以将这十六种情况大致分为两类，每一类中的状况都可以互相转化。我们将正面朝上记为1，反面则为-1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | -1 | 1 |  | -1 | -1 |
| 1 | 1 |  | -1 | -1 |  | -1 | 1 |  | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | -1 |  | -1 | 1 |  | 1 | -1 |  | -1 | -1 |
| 1 | -1 |  | 1 | -1 |  | -1 | 1 |  | -1 | -1 |

和

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 1 | -1 |  | 1 | 1 |  | -1 | -1 |
| 1 | -1 |  | 1 | 1 |  | -1 | 1 |  | 1 | -1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| -1 | 1 |  | -1 | -1 |  | 1 | -1 |  | -1 | 1 |
| -1 | -1 |  | -1 | 1 |  | -1 | -1 |  | 1 | 1 |

由上分类可以看出,对于2\*2方格,如果正面朝上的棋子个教是偶数个，相应的图形可以经过是可以经过有限次变化互相转化为全部正面朝上的，否则，正面朝上的棋子个数是奇数个的时候,相应的图形是不可能经过有限次T操作变成全部正面朝上的,，但是我们发现它们总可以变成第一行第一列正面朝上，其余正面朝下的情况。

于是，这时，我们就把全部正面朝上当成了第一类中所有图形的代表，第一行第一列正面朝上，其余正面朝下当成了第二类中所有图形的代表，我们将这两种情况称为标准型。

由上述观察可猜测，对于翻棋游戏，我们可以确定一个标准型使所有状况都可以且只能转化为一种标准型。

对于3\*3的方格，有2^9种可能性，我们显然不能一一列出，但我们根据上面的思考，可以通过标准型来研究：我们可以证明通过反转，我们可以将第一列和第一行都转化成正面朝上的情况，将其记为标准型，我们就可以实现对这些情况的分类。

同理，对于n\*n的棋盘，其有不止一种标准型，其中有一种就是所有棋子都正面朝上，所以包括在这一类标准型中的状态可以通过操作实现所有棋子正面朝上，而对于其他状况，我们不能通过这种操作来实现所有棋子都正面朝上。

于是我们发现在研究翻棋问题的过程中，我们通过将能够相互转化的情况分为一类，如此大大减少了情况的种类数并让我们对问题的本质有了更深刻的理解。而在线性代数的学习中我们以可以用这种方法来进行学习和探讨。

我们现在知道矩阵可以进行初等变换，而初等变换的一部分就是对某一行乘-1，这正是我们以上翻棋游戏中反复进行的操作，于是我们思考如果将矩阵行列进行初等变换看作一种变换，那么变换得到的种种矩阵我们是否也可以将其转化为标准型来进行研究？答案是肯定的。

|  |  |
| --- | --- |
| E | 0 |
| 0 | 0 |

事实上，我们可以通过行列的初等变换将矩阵转化为类似右图的矩阵，我们称其为相抵标准型。于是，在矩阵的初等变换中，我们就有了刚才在翻棋游戏中研究的“标准型”。我们同时得到以下性质：标准型相同的矩阵一定可以通过矩阵的初等变换相互转化，并且对于每个矩阵，其对应的标准型唯一。我们将E的阶数叫做矩阵的秩，因此我们不然发现，矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。秩在线性代数中是一个很重要的定义，通过定义这样一个标准型，我们可以简化许多问题。

例如：我们知道对矩阵进行初等变换，我们也对矩阵的行列式进行了初等变换。而行列式经过初等变换后是否为零的性质不会改变，而矩阵的秩也不会改变，因此我们可以通过矩阵的初等变换判断矩阵的秩是否为零；矩阵的秩在解方程组中也有很大作用，对于一个线性方程组，我们可以表示成形式AX==B，其中A为系数矩阵，X为变量，B为列向量，这样，X有解的充要条件为系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，这也有助于帮助我们判断方程组是否有解。

当然，需要指出的是对于矩阵的初等变换我们定义的标准型不一定要如上所示，但上面这种定义显相对简洁，对我们研究方程组问题有很大的帮助，而当我们定义其他标准型时，我们也可能得到更有趣的结论。

事实上，在人类科学的发展中，标准型的定义十分重要。我们学过二次函数，其中我们定义了多种标准型如一般式，交点式等等，通过将一个二次函数变化为相应的形式，我们可以研究其不同性质；我们通过泰勒展开将一个函数模拟为多项式函数，以此研究其性质；同样的，在化学中我么将原子序数相同的核素定义为同位素，认为他们都是一种元素，这样就可以确定这一系列核素的化学性质；而在物理研究中我们常常建立几个确定的模型，在遇到不同问题时将其转化为不同的模型。

翻棋游戏只是一个小游戏，但我们应该从中学到建立标准型的思想并将其推广到其他领域甚至学习生活，这种方式可以帮我们很大程度地简化问题。事实上，我们在学习中学到的知识点是有限的，而题目的种类是无限的，只有将一部分问题根据他们考察的思想或知识点归到一类“标准型”中我们才能以不变应万变，在学习生活中取得更好的成绩！