3.3 随机变量的独立性

（一） 随机变量相互独立的定义

设(X,Y)为二维随机变量，若对任何实数 x,y 都有

$$P(X\le x, Y\le y)=$$

则称随机变量 X 和Y **相互独立**

X 和 Y 相互独立

注 $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y) \quad \forall x, y$

$\Longleftrightarrow \quad P(a < X \le b, c < Y \le d) =$ ______________________ $\quad \forall a < b, c < d$

$\Longleftrightarrow \quad P(X > a, Y > c) =$ ____________________ $\quad \forall a, c \in R$

- 若 X、Y 相互独立，则 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也相互独立

（二） 二维离散型随机变量的独立性

设(X,Y)为二维离散型r. v.，X与Y 相互独立，当仅当对任意(x_i,y_j)都有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=$$

易知，二维离散型随机变量(X,Y)，如果X与Y独立，则

$$P(Y=y_j|X=x_i)=$$

$$P(X=x_i|Y=y_i)=$$

例

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X, Y 相互独立，问X, Y是否为同一个随机变量？

求 $P(X = Y) =$ ____________

X / Y	-1	1
-1		
1		

案例 设某购物网站有A和B两个品牌的服饰，据统计每个访问该网站的人会以概率p选择A品牌，概率q选择B品牌，概率$1-p-q$两个都不买，每个人的购买行为独立。假设在某购物节那天共有N人点击该网站，N服从参数为λ的Poisson分布。X表示选择A品牌的人数；Y表示选择B品牌的人数。问X与Y是否相互独立？

（三） 连续型随机变量的独立性

$$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y), \quad \forall x,y$$

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，边缘密度函数为$f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，则X与Y相互独立，当仅当

$$f(x,y) =$$

在$f(x,y)$的连续点都成立。

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

- 设(X,Y)为二维连续型随机变量，X与Y相互独立，则

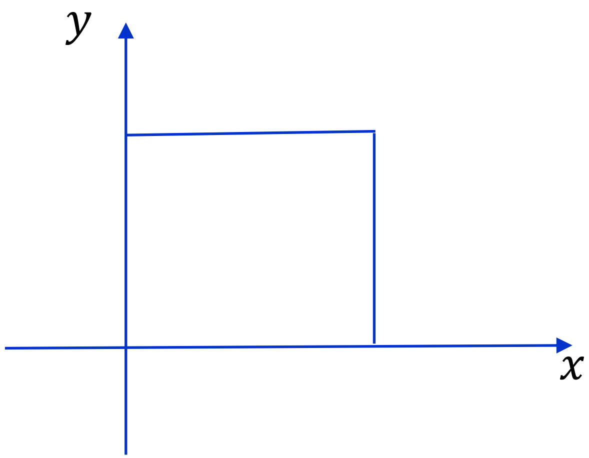
$$f_X(x \mid Y=y)=$$

$$f_Y(y \mid X=x)=$$

例 已知 (X,Y) 的联合密度函数为

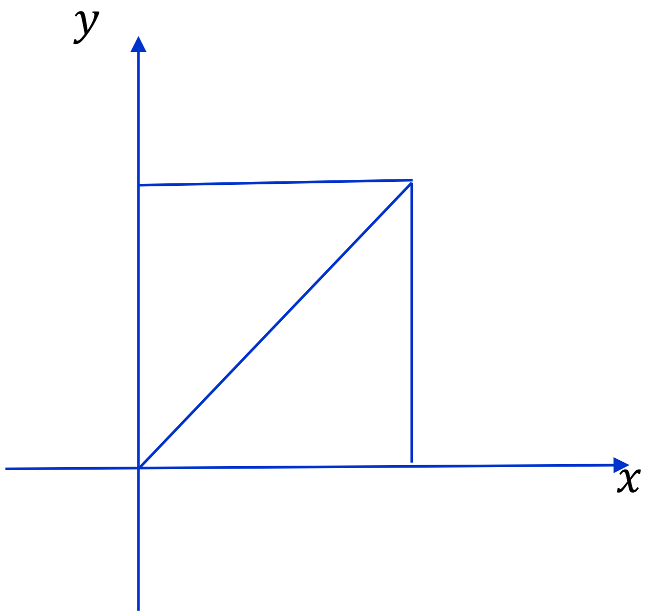
(1) $f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (2) $f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

讨论 X,Y 是否独立？



(2) $f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

讨论X ,Y 是否独立?



定理 设 $f(x,y)$ 是 (X,Y) 的联合密度函数，则X与Y相互独立的充分必要条件是存在非负可积函数$r(x)$, $g(y)$，使得

$$f(x,y)=r(x)g(y)\,,\ -\infty<x,y<+\infty,$$

在$f(x,y)$的一切连续点上成立。

推论 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$，则$X,Y$相互独立的充要条件是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

（四）多维随机变量的独立性

定义 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为n维随机变量，n元实函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

称为n维随机变量的**联合分布函数**

$\boxed{\text{边缘分布函数：}}$

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \le x_i) =$$

- ❑ 多维离散型联合分布列与边缘分布列
- ❑ 多维连续型联合分布密度函数与边缘分布密度函数

n个随机变量的相互独立性

设（$X_1, X_2, \ldots, X_n$）是n维随机变量，称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **相互独立：**

对于任何实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 都有

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) =$$

作业 习题三

20，22，24

补充题1（往年考题）： 设(X,Y) 在区域 $\{(x,y)\colon\ 0<x<1, 0<y<2\}$ 上服从均匀分布，令

$$U:=\begin{cases}1, & X<Y\\ 0, & X\geq Y\end{cases} \qquad V:=\begin{cases}1, & 2X<Y\\ 0, & 2X\geq Y\end{cases}$$

- 求 (U,V) 的联合分布列；
- 判断 U,V 是否独立？

补充题2（往年考题）： 设随机变量$X\sim E(\lambda)$（指数分布），令

$$U := [X], \qquad V := X - [X],$$

这里$[X]$表示X的整数部分。

1）求$P(U = k,\ V \le x)$；

2）判断U、 V是否相互独立？请说明理由。

补充题3　　设某购物网站有A和B两个品牌的服饰，据统计每个访问该网站的人会以概率p只买A，以概率q只买B，以概率r两个都买，以概率$1-p-q-r$ 两个都不买，每个人的购买行为独立。假设在某购物节那天共有N人点击该网站， N 服从参数为λ的Poisson分布。ξ_A 表示只买A的人数；ξ_B 表示只买B的人数；ξ_{AB}表示两个都买的人数。

证明：ξ_A，ξ_B,ξ_{AB}相互独立，即

$$P(\xi_A = i, \xi_B = j, \xi_{AB} = k) = P(\xi_A = i)P(\xi_B = j)(\xi_{AB} = k)$$