§1.4 事件的独立性

引例 袋子中装有5只白球，3只黑球，分别有放回与无放回的抽取，每次抽一只。

A 表示第一次抽取的是白球；

B 表示第二次抽取的是白球。

有放回

$P(B|A)=\frac{5}{8}=P(B)$

不有放回

$P(B|A)=\frac{4}{7}\neq P(B)=\frac{5}{8}$

由此可得到什么结论？

一般地，如果$P(B|A)=P(B)$，则称A对B没有影响

- 若A对B没有影响，B对A有没有影响?

若 $P(B|A)=P(B)$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cancel{P(B|A)}}{\cancel{P(B)}}=P(A)$$

$\Rightarrow$ B对A也没有影响

— A,B彼此不影响

定义 设A、B为两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与B**相互独立**

若 $P(A)>0, P(B)>0$, $\Longleftrightarrow$ $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$

A,B 彼此互不影响

性质： ❑ Ω和$\emptyset$与任何事件相互独立

思考 如果事件A与任何事件都相互独立，事件A有什么性质？

$P(AA)=P(A)P(A) \Rightarrow P(A)=0$ 或 1

- 如果事件A,B相互独立，则 $A,\overline{B}$； $\overline{A},B$； $\overline{A},\overline{B}$也 都相互独立

- 当 A 与 B 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $P(B|A) = P(B|\overline{A})$ $= P(B)$ 证明？

- 若 $P(A) > 0, P(B) > 0,$

互不相容 $\Longrightarrow$ 不相互独立

$AB = \phi$

相互独立的判断：

① 由定义

② 由题意 —— 彼此没有影响

例　甲、乙两人（独立）同时向同一目标射击一次，甲的命中率为0.8，乙的命中率为0.6，已知目标上只有一个弹孔，求目标是被甲击中的概率。

解　$A=$"甲击中"，$B=$"乙击中"

由题意 A,B 独立

$$P(A\bar{B}\mid A\bar{B}\cup\bar{A}B)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)}$$

$$=\frac{0.8\times0.4}{0.8\times0.4+0.2\times0.6}=\frac{8}{11}$$

#

定义 三事件 A, B, C 相互独立是指下面的关系式同时成立：

两两独立

$$\left\{\begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

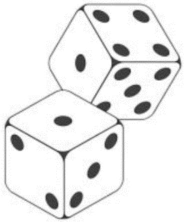
相互独立

思考1： 若 A, B, C 相互独立，我们可以得到什么结论？

$\bar{A}, B, C$；$A, \bar{B}, C$；……；$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 也都独立

思考2： “两两独立” $\overset{?}{\Rightarrow}$ 与 $\Leftarrow$ “相互独立” 间的关系？

例 随机地掷两枚骰子，令



$A =$ “第一枚点数为奇数”，

$B =$ “第二枚点数为奇数”，

$C =$ “两枚点数和为奇数”，

试判断A，B，C的独立性。

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$

$P(AB)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=\frac{1}{4}$, $P(AC)=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 两两独立

$P(ABC)=0 \neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ 不独立

相互

思考：如何定义n个随机事件的独立性？

定义 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **相互独立**是指下面的关系式同时成立：

$n=10$

$2^{10}-10-1$

$$2^n-n-1\left\{\begin{array}{ll} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\ 1\le i<j\le n & \leftarrow 两两独立 \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1\le i<j<k\le n & \leftarrow 三三独立 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) & \leftarrow nn独立 \end{array}\right.$$

◆**事件独立性的判别：**
① 由定义，$n=3,2,4$.
② 由题意，彼此有无影响

例 已知事件 A, B, C , D相互独立，证明事件 $\bar{A}D$ 与 $B\cup C$ 也相互独立

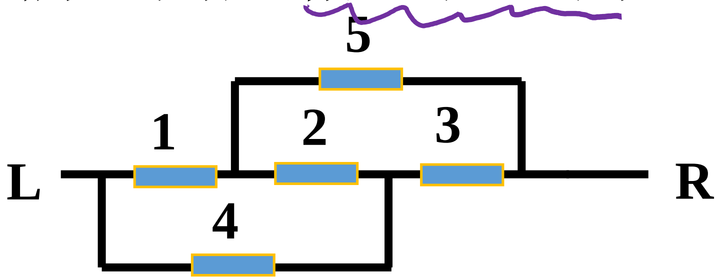
A, D　　　B, C

你能得到什么结论？

□结论

若 $\boldsymbol{n}$ 个事件 $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ 相互独立，将这 $\boldsymbol{n}$ 个事件任意分成 $\boldsymbol{k}$ 组，同一个事件不能同时属于两个不同的组，则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 $\boldsymbol{k}$ 个事件也相互独立

例 已知电路系统如图所示。设每个元件正常工作(如果不正常工作，电路在此处断开)的概率为 p，且它们之间是相互独立的，求此电路从左到右是通路的概率。



方法一　A="L到R通路"

A_i="元件i正常工作"，$i=1,\dots,5$

由题意，$A_1,\dots,A_5$独立

$$P(A)=P(A_1A_5\cup A_3A_4\cup A_1A_2A_3\cup A_2A_4A_5)$$

$$=\underbrace{P(A_1A_5)}_{p^2}+P(A_3A_4)+\underbrace{P(A_1A_2A_5)}_{p^3}+P(A_2A_4A_5)$$

$$-P(A_1A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_5)-P(A_1A_2A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4)$$

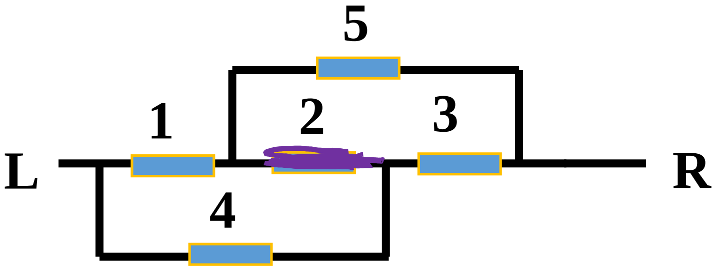
$$-P(A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)+4P(A_1A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$

$$=\cdots$$

方法二

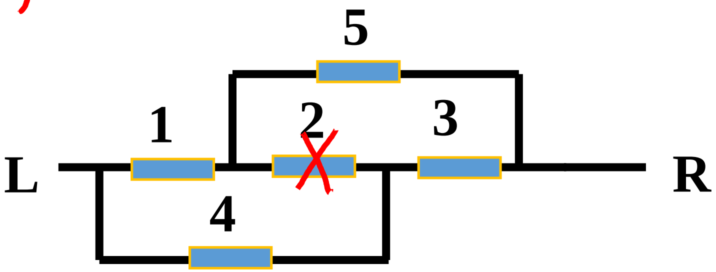
A="L到R通路"

A_i="元件i正常工作"，$i=1,\dots,5$



$$P(A) = P(A_2)\,P\big((A_1\cup A_4)(A_3\cup A_5)\,\big|\,A_2\big) + P(\bar A_2)\,P\big(A_1A_5 \cup A_3A_4\,\big|\,\bar A_2\big)$$

$$= p\,P\big(\underbrace{(A_1\cup A_4)}_{(2p-p^2)^2}(A_3\cup A_5)\big) + (1-p)\,P\big(\underbrace{A_1A_5\cup A_3A_4}_{2p^2-p^4}\big)$$



$$= p\,(2p-p^2)^2 + (1-p)(2p^2-p^4)$$

$$= \cdots$$

#

作业 习题一

24，26，27

补充题

设$0 < P(A) < 1$， 利用相互独立的定义证明：

$$A\text{与}B\text{相互独立} \Leftrightarrow P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A})$$