§2.4 随机变量$\boxed{\text{函数}}$的分布

问题 已知随机变量 X 的分布，$Y=g(X)$，求 Y 的分布

方法 将与 Y 有关的事件转化成 X 的事件

一 离散型的情形

案例 某人独立重复做某一个试验，每次有可能成功或失败，直到首次成功为止。设成功率为p，用X表示试验次数：如果$X \le 5$，则可获得奖励2000元；如果$5 < X \le 10$，则可获得奖励500元；如果$X > 10$，则没有奖励。用Y表示获得的奖励，求Y的分布。

解：① $Y = 0, 500, 2000$

② $P(Y=0) = P(X>10) = \sum_{k=11}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = p \times \frac{(1-p)^{10}}{1-(1-p)} = (1-p)^{10}$

$P(Y=500) = P(5<X\le 10) = \sum_{k=6}^{10}(1-p)^{k-1}p = p\times\frac{(1-p)^5-(1-p)^{10}}{1-(1-p)} = (1-p)^5-(1-p)^{10}$

$P(Y=2000) = P(1\le X\le 5) = 1-(1-p)^5$

Y	0	500	2000
P	$(1-p)^{10}$	$(1-p)^5-(1-p)^{10}$	$1-(1-p)^5$

一般地，设随机变量X的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

求出随机变量$Y=g(X)$的分布列，怎么求呢？

（1）求出随机变量$Y(=g(X))$的所有可能取值，

$Y=y_1, y_2, \cdots$

（2）求Y取这些值的概率：

$$P(Y=y_i)=\underline{P(g(X)=y_i)}$$

$$=\sum_{g(x_k)=y_i} p_k$$

例 已知 X 的概率分布为

求 $Y = X^2$ 的分布律

X	-1	0	1	2
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

二 连续型的情形

已知随机变量 X 的密度函数, 求 $Y = g(X)$ 的分布

方法:

- **从分布函数出发**
- **从密度函数出发**

例 根据热力学理论，气体分子的速度是随机的，其密度函数为

$$f_X(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma^3}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x>0$$

（**麦克斯韦尔Maxwell分布**，参数σ赖于气体温度）$Y=\frac{1}{2}mX^2$表示分子的动能（其中m是分子质量），求随机变量Y的分布。

已知随机变量 X 的密度函数$f_X(x)$，求 $Y = g(X)$ 的密度函数$f_Y(y)$

一般方法：

- 先求的分布函数$F_Y(y) = P(g(X) \le y)$;

- 再对y求导数，得到Y的密度函数:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

例 已知 X 密度函数为$f_X(x)$, $Y = aX + b$, a, b为常数，且 $a \neq 0$, 求 $f_Y(y)$

例如，设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = aX + b$, 则

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

特别地，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim$

重要结论：正态分布的线性函数仍然是正态分布.

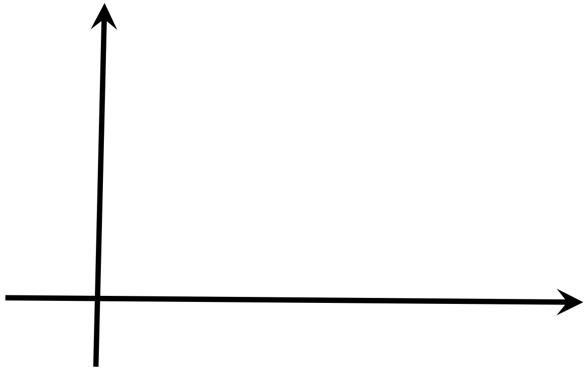
定理 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)\ (-\infty < x < +\infty)$，$g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的严格单调的可导函数，则 $Y = g(X)$ 的密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} & \alpha < y < \beta \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

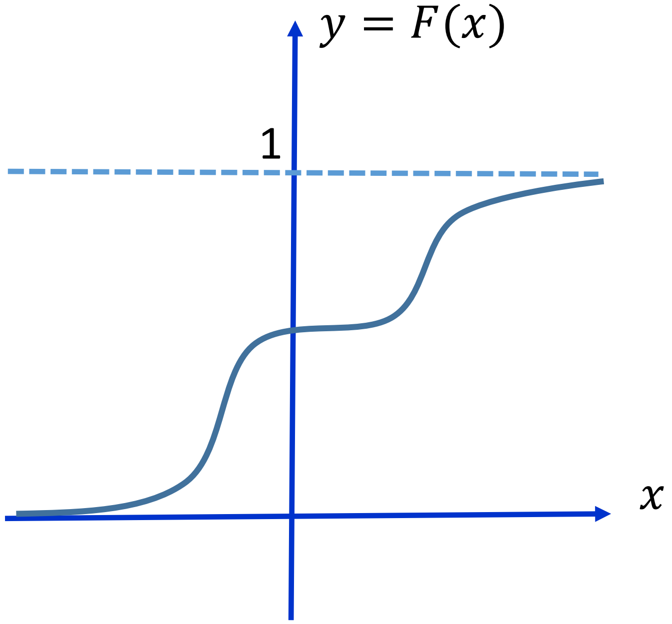
其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，

$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

例 设 $X \sim E(\lambda)$，求$Y = \max\{X, 2023\}$的分布。



例 若 X 的分布函数$F(x)$为单增的连续函数, 求$Y = F(X)$的分布函数



例 设$U \sim U(0,1)$， $F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x \geq 0)$， $Y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$，
证明：$Y \sim E(\lambda)$

一般地，设$\boldsymbol{U \sim U([0,1])}$， $\boldsymbol{F(y)}$为某个分布函数，

$$\boldsymbol{Y = F^{-1}(U)},$$

其中$\boldsymbol{F^{-1}(u) = inf\{y;\ F(y) \geq u\}}$。则$\boldsymbol{Y}$的分布函数为$\boldsymbol{F(y)}$.

可用于Monte-Carlo 仿真

作业 习题二

41， 42， 43， 45

- 开放式案例分析题