§1.4 事件的独立性

引例 袋子中装有5只白球，3只黑球，分别有放回与无放回的抽取，每次抽一只。

A 表示第一次抽取的是白球；

B 表示第二次抽取的是白球。

有放回

$P(B|A) = \frac{5}{8} = P(B)$

不有放回

$P(B|A) = \frac{4}{7} \neq P(B) = \frac{5}{8}$

由此可得到什么结论?

一般地，如果$P(B|A)=P(B)$，则称A对B没有影响

- 若A对B没有影响，B对A有没有影响？

若$P(B|A)=P(B)$，

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cancel{P(B|A)}}{\cancel{P(B)}}=P(A)$$

$\Rightarrow$ B对A也没有影响

—— A,B彼互不影响

定义 设A、B为两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与B**相互独立** ⟷ 若 $P(A)>0$, $P(B)>0$,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$$

⟷ A, B 彼此互不影响

性质： ❑ Ω和$\emptyset$与任何事件相互独立

思考 如果事件A与任何事件都相互独立，事件A有什么性质？

$$P(AA)=P(A)P(A) \Rightarrow P(A)=0 \text{ 或 } 1$$

- 如果事件A,B相互独立，则 $A,\bar{B}$；$\bar{A},B$；$\bar{A},\bar{B}$也 都相互独立

- 当 A 与 B 相互独立 ⟺ $P(B|A)=P(B|\bar{A})$ = P(B)　证明？

- 若 $P(A)>0,P(B)>0$,

互不相容 $\Longrightarrow$ 不 相互独立

$AB=\phi$　A　B

相互独立的判断:

① 由定义

② 由题意 —— 彼此没有影响

例 甲、乙两人（独立）同时向同一目标射击一次，甲的命中率为0.8，乙的命中率为0.6，已知目标上只有一个弹孔，求目标是被甲击中的概率。

解 $A=$"甲击中"，$B=$"乙击中"

由题意 A,B 独立

$$P(A\bar{B} \mid A\bar{B}\cup\bar{A}B)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)}$$

$$=\frac{0.8\times0.4}{0.8\times0.4+0.2\times0.6}=\frac{8}{11}$$

#

定义 三事件 A, B, C 相互独立是指下面的关系式同时成立：

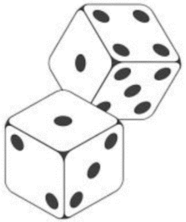
$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \qquad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

思考1： 若 A, B, C 相互独立，我们可以得到什么结论？

思考2： “两两独立” 与 “相互独立” 间的关系？

例 随机地掷两枚骰子，令



$$A = \text{“第一枚点数为奇数”},$$

$$B = \text{“第二枚点数为奇数”},$$

$$C = \text{“两枚点数和为奇数”},$$

试判断A，B，C的独立性。

思考：如何定义n个随机事件的独立性？

定义 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立是指下面的关系式同时成立：

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\ 1\le i<j\le n$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1\le i<j<k\le n$$

……………………………………………

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

◆事件独立性的判别：

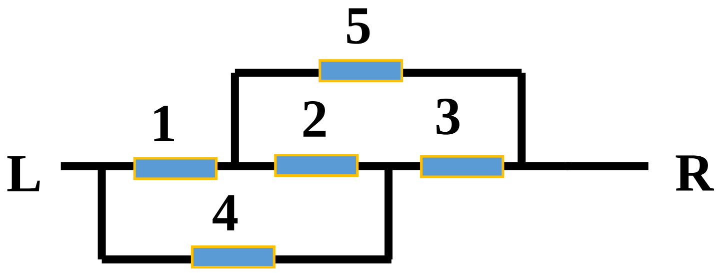
例　已知事件 A, B, C , D相互独立，证明事件 $\bar{A}D$ 与$B \cup C$也相互独立

你能得到什么结论?

□结论

若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，将这 n个事件任意分成 k 组，同一个事件不能同时属于两个不同的组，则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 k 个事件也相互独立

例 已知电路系统如图所示。设每个元件正常工作(如果不正常工作，电路在此处断开)的概率为 p ，且它们之间是相互独立的，求此电路从左到右是通路的概率。



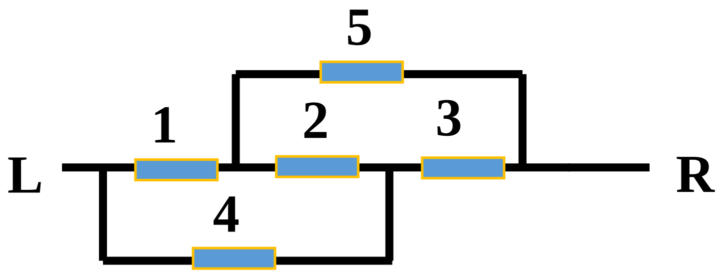
方法一 A="L到R通路"

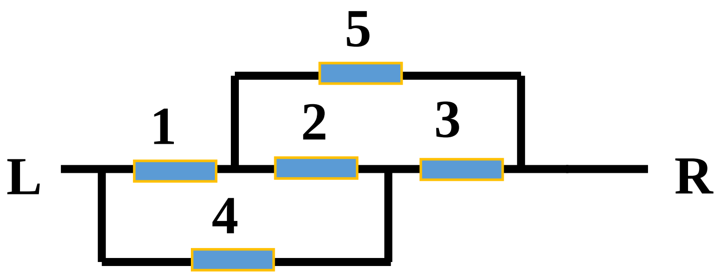
A_i="元件i正常工作"，$i=1,\ldots,5$

方法二

A=“L到R通路”

A_i=“元件i正常工作”， $i = 1, \ldots, 5$





作业 习题一

24，26，27

补充题

设$0 < P(A) < 1$，利用相互独立的定义证明：

$$A\text{ 与 }B\text{ 相互独立} \Leftrightarrow P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$$