3.3 随机变量的独立性

A, B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

（一） 随机变量相互独立的定义

设(X, Y)为二维随机变量，若对任何实数 x, y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X\le x)P(Y\le y) \quad \forall x, y$$

$$F(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y **相互独立**

注 $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y) \quad \forall x, y$ **X 和 Y 相互独立**

$F(x,y)$

$\Longleftrightarrow \quad P(a < X \le b, c < Y \le d) = \underline{P(a<X\le b)\,P(c<Y\le d)} \quad \forall a < b, c < d$

$\Longleftrightarrow \quad P(X > a, Y > c) = \underline{P(X>a)\,P(Y>c)} \quad \forall a, c \in R$

$\Longleftrightarrow \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}, \quad B_2 \in \mathcal{B}$

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$$

- 若 X、Y 相互独立，则 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也相互独立

$\forall z_1, z_2$

$$P(g(X) \le z_1, h(Y) \le z_2) = P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(g(X) \le z_1)P(h(Y) \le z_2)$$

$B_1 = \{x \mid g(x) \le z_1\}, \quad B_2$

（二） 二维离散型随机变量的独立性

设(X,Y)为二维离散型r. v. ，X与Y 相互独立，当仅当对任意 (x_i,y_j) 都有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\quad \forall i,j$$

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}\qquad \forall i,j$$

易知，二维离散型随机变量(X,Y)，如果X与Y独立，则

$$P(Y=y_j|X=x_i)=P(Y=y_j)$$ ⇒ 已知X取值不影响Y的分布

$$P(X=x_i|Y=y_j)=P(X=x_i)$$ ⇒ 已知Y取值不影响X的分布

例

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

同分布

X,Y 相互独立，问 X,Y 是否为同一个随机变量？

求 $P(X=Y)=$ $\boxed{0.5}$

X \ Y	-1	1	
-1	$\boxed{0.25}$	0.25	0.5
1	0.25	$\boxed{0.25}$	0.5
	0.5	0.5	

案例 设某购物网站有A和B两个品牌的服饰，据统计每个访问该网站的人会以概率p选择A品牌，概率q选择B品牌，概率$1-p-q$ 两个都不买，每个人的购买行为独立。假设在某购物节那天共有N人点击该网站，N服从参数为λ的Poisson分布。X 表示选择A品牌的人数；$\boxed{Y}$表示选择B品牌的人数。问X与Y是否相互独立？

解：

$$P(X=i,Y=j)=\sum_{n=i+j}^{+\infty}P(N=n)P(X=i,Y=j\mid N=n)\qquad i=0,1,2,\cdots\quad j=0,1,2,\cdots$$

$$=\sum_{n=i+j}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}e^{-\lambda}\times\frac{\cancel{n!}}{i!\,j!\,(n-i-j)!}p^i q^j(1-p-q)^{n-i-j}$$

$$=\frac{(\lambda p)^i(\lambda q)^j}{i!\,j!}e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{n=i+j}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-i-j}(1-p-q)^{n-i-j}}{(n-i-j)!}}_{e^{\lambda(1-p-q)}}=\frac{(\lambda p)^i}{i!}\frac{(\lambda q)^j}{j!}e^{-\lambda p-\lambda q}$$

$\Rightarrow X,Y$独立

（三） 连续型随机变量的独立性

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y), \quad \forall x, y$$

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，边缘密度函数为$f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，则X与Y相互独立，当仅当

$$f(x,y) = \quad f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

在$f(x,y)$的连续点都成立。

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

- ☐ 设(X,Y)为二维连续型随机变量，X与Y相互独立，则

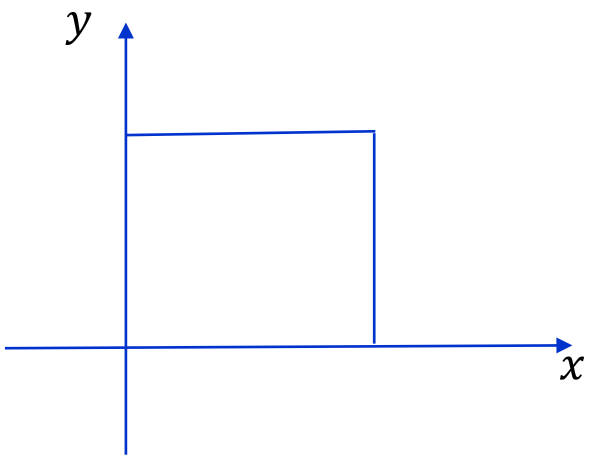
$$f_X(x\mid Y=y)=f_X(x)$$ $\Rightarrow$ 已知Y的取值，不影响X的分布

$$f_Y(y\mid X=x)=f_Y(y)$$ $\Rightarrow$ 已知X的取值，、、、、Y……

例 已知 (X,Y) 的联合密度函数为

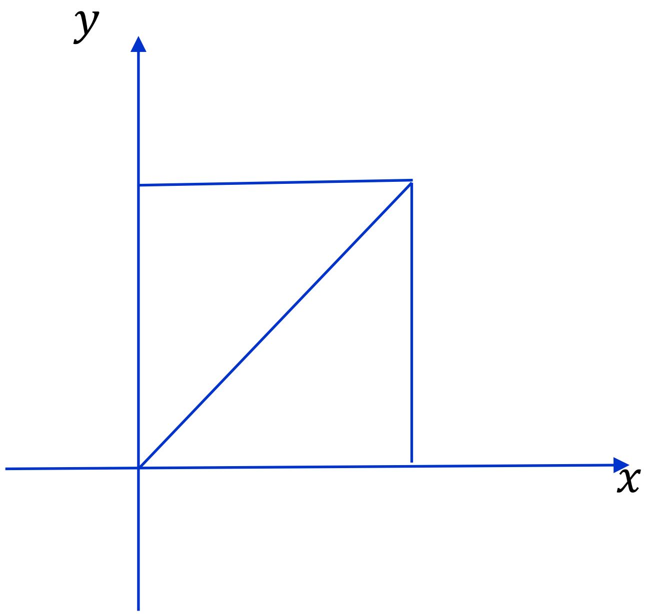
(1) $f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (2) $f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

讨论 X , Y 是否独立？



$$(2)\quad f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论$\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$ 是否独立?



定理 设 $f(x,y)$ 是 (X,Y) 的联合密度函数，则X与Y相互独立的充分必要条件是存在非负可积函数$r(x)$, $g(y)$，使得

$$f(x,y)=r(x)g(y),\ -\infty<x,y<+\infty,$$

在$f(x,y)$的一切连续点上成立。

推论 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$，则$X,Y$相互独立的充要条件是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

（四）多维随机变量的独立性

定义 设$(X_1, X_2, \dots, X_n)$为n维随机变量，n元实函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

称为n维随机变量的**联合分布函数**

$\boxed{\text{边缘分布函数：}}$

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \le x_i) =$$

- 多维离散型联合分布列与边缘分布列
- 多维连续型联合分布密度函数与边缘分布密度函数

n个随机变量的相互独立性

设（$X_1, X_2, \ldots, X_n$）是n维随机变量，称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **相互独立：**

对于任何实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 都有

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) =$$

作业 习题三

20，22，24

补充题1（往年考题）：设(X,Y) 在区域 $\{(x,y)\colon\ 0<x<1, 0<y<2\}$ 上服从均匀分布，令

$$U:=\begin{cases}1, & X<Y\\ 0, & X\geq Y\end{cases}\qquad\qquad V:=\begin{cases}1, & 2X<Y\\ 0, & 2X\geq Y\end{cases}$$

- 求 (U,V) 的联合分布列；
- 判断 U,V 是否独立？

补充题2（往年考题）： 设随机变量$\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\lambda})$（指数分布），令

$$\boldsymbol{U}\coloneqq[\boldsymbol{X}],\qquad \boldsymbol{V}\coloneqq\boldsymbol{X}-[\boldsymbol{X}],$$

这里$[\boldsymbol{X}]$表示$\boldsymbol{X}$的整数部分。

1）求$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{V}\leq\boldsymbol{x})$;

2）判断$\boldsymbol{U}$、 $\boldsymbol{V}$是否相互独立？请说明理由。

补充题3 设某购物网站有A和B两个品牌的服饰，据统计每个访问该网站的人会以概率p只买A，以概率q只买B，以概率r两个都买，以概率$1-p-q-r$两个都不买，每个人的购买行为独立。假设在某购物节那天共有N人点击该网站，N服从参数为λ的Poisson分布。ξ_A表示只买A的人数；ξ_B表示只买B的人数；ξ_{AB}表示两个都买的人数。

证明：ξ_A，ξ_B, ξ_{AB}相互独立，即

$$P(\xi_A = i, \xi_B = j, \xi_{AB} = k) = P(\xi_A = i)P(\xi_B = j)(\xi_{AB} = k)$$