Zpracování vět a definic ke zkoušce z Matematické analýzy 1

Matěj Foukal a Karel Velička

July 10, 2023

1. ročník bc. informatika
doc. RNDr. Martin Klazar, Dr.

Obsah

1 Definice **3**
1.1 Reálná čísla . . . 3
1.1.1 Definice funkce, funkce prostá, na a bijekce . . . 3
1.1.2 Supremum a infimum v lineárním uspořádání . . . 3
1.1.3 Nejvýše spočetná a nespčetná čísla . . . 3
1.2 Limity . . . 3
1.2.1 Vlastní a nevlastní limita posloupnosti, podposloupnost . . . 3
1.2.2 Liminf a limsup posloupnosti . . . 4
1.3 Řady . . . 4
1.3.1 Řada, částečný součet řady, součet řady . . . 4
1.3.2 Geometrická řada a její součet, absolutně konvergentní řada . . . 4
1.4 Funkce . . . 4
1.4.1 Limita funkce, jednostranná limita funkce . . . 4
1.4.2 Exponenciála, logaritmus, kosinus a sinus . . . 4
1.4.3 Spojitost funkce v bodě a jednostranná spojitost . . . 4
1.4.4 Asymptotické symboly . . . 5
1.4.5 Kompaktní, otevřená a uzavřená množina . . . 5
1.4.6 Lokální a globální a ostré extrémy . . . 5
1.5 Derivace . . . 5
1.5.1 Derivace funkce, jedonstranná derivace funkce . . . 5
1.5.2 Standardní definice tečny . . . 5
1.5.3 Derivace vyšších řádů . . . 6
1.5.4 Ryze konvexní a konkávní funkce . . . 6
1.5.5 Inflexní bod . . . 6
1.5.6 Svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu . . . 6
1.5.7 Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce . . . 6
1.6 Integrály . . . 6
1.6.1 Primitivní funkce . . . 6
1.6.2 Stejnoměrná spojitost . . . 6
1.6.3 Newtonův integrál funkce (nevlastní) . . . 7
1.6.4 Riemannův integrál funkce a množina míry O . . . 7
1.6.5 Henstock-Kurzweilův integrál . . . 7
1.6.6 Délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa . . . 7

2 Věty a tvrzení bez důkazu **8**
2.1 Reálná čísla . . . 8
2.1.1 Definice a vlastnosti reálných čísel . . . 8
2.2 Limity . . . 8
2.2.1 O podposloupnostech a existence monotónní posloupnosti . . . 8
2.2.2 Geometrická posloupnost a Liminf a limsup . . . 8
2.3 Řady . . . 8
2.3.1 O harmonických číslech a Riemannova věta . . . 8
2.4 Funkce . . . 9
2.4.1 O Riemannově funkci a Limita složené funkce . . . 9
2.4.2 Heineho definice spojitosti, Blumbergova definice spojitosti a počet spojitých funkcí . . . 9

2.5 Derivace . . . 9
2.5.1 Derivace složené funkce a derivace inverzní funkce . . . 9
2.5.2 l'Hospitalovo pravidlo a konvexivita a konkavita f" . . . 9
2.6 Integrály . . . 10
2.6.1 Lagrangeův a Cauchyův zbytek Taylorova polynomu a Bellova čísla . . . 10
2.6.2 Riemann = Newton a integrace substitucí . . . 10
2.6.3 Per partes a int(r(x)) . . . 10
2.6.4 O restrikcích, Lebesgueova věta a ZVA 2 . . . 11
2.6.5 Riemann = Darboux a HK. int a N. int . . . 11
2.6.6 Délka grafu a Integrální kritérium . . . 11

3 Věty a tvrzení s důkazem **12**
3.1 Reálná čísla . . . 12
3.1.1 Odmocnina ze dvou není racionálních a Cantorova věta . . . 12
3.2 Limity . . . 12
3.2.1 Jendoznačnost limity a Bolzano-Weierstrassova věta . . . 12
3.2.2 Limita a uspořádání a Cauchyova podmínka . . . 12
3.3 Řady . . . 13
3.3.1 Nutná podmínka konvergence řady a Harmonická řada . . . 13
3.4 Funkce . . . 13
3.4.1 Heineho definice a Aritmetika limit funkcí . . . 13
3.4.2 Nabývání mezihodnot a Princip minima a maxima . . . 14
3.5 Derivace . . . 15
3.5.1 Nutná podmínka extrému a Leibnizův vzorec . . . 15
3.5.2 Lagrangeova věta a Derivace a monotonie 1 . . . 15
3.5.3 Taylorův polynom a Nejednoznačnost primitivní funkce . . . 16
3.6 Integrály . . . 17
3.6.1 Monotonie Newtonova integrálu a Derivace jsou Darbouxovy . . . 17
3.6.2 Bachetova identita . . . 17
3.6.3 Neomezené funkce jsou špatné a Baireova věta . . . 18
3.6.4 Dolní součet je menší než horní a ZVA 1 . . . 18
3.6.5 Abelova sumace . . . 19

1 Definice

1.1 Reálná čísla

1.1.1 Definice funkce, funkce prostá, na a bijekce

- **Funkce (zobrazení):** Funkce f z množiny A do množiny B, neboli $f : A \to B$, je uspořádaná trojice (A, B, f), kde $f \subseteq A \times B$ a $\forall a \in A, \exists! b \in B : afb$, neboli $f(a) = b$. *(Platí: $\mathbb{D}_f = A$, $\mathbb{H}_f = B$)*
- **Funkce prostá (injektivní):** Funkce $f : X \to Y$ pro $\forall x, x' \in X$ je prostá $\iff$ $f(x) = f(x') \implies x = x'$. *Dvěma různým x nepřiřadíme stejné y. Takže $\forall y$ existuje nejvýše jedno x.*
- **Funkce na (surjektivní):** Funkce $f : X \to Y$ je na $\iff$ $f[X] = Y$. *$\forall y$ existuje alespoň jedno x.*
- **Funkce bijektivní:** Funkce $f : X \to Y$ je bijektivní $\iff$ je *prostá* i *na*. *($\exists! x$)*

Obraz množiny $C \subseteq A$ je $f[C] := \{f(a) \mid a \in C\} \subseteq B$.

1.1.2 Supremum a infimum v lineárním uspořádání

Nechť A je množina s uspořádáním $(A, <)$ a B je množina, t.ž.: $B \subseteq A$. Prvky $a \in A$ jsou *supremem* (resp. *infimem*) množiny B, když splňují $\sup(B) := \min(\mathcal{H}(B))$ a $\inf(B) := \max(\mathcal{D}(B))$ v A.

1. Množina *horních mezí* $\mathcal{H}(B) := \{\exists h \in A, \forall b \in B \mid b \leq h\}$
2. Množina *dolních mezí* $\mathcal{D}(B) := \{\exists d \in A, \forall b \in B \mid b \geq d\}$

1.1.3 Nejvýše spočetná a nespčetná čísla

Nechť X je množina, potom X je:

- *spočetná* $\iff$ existuje bijekce $f : \mathbb{N} \to X$.
- *nejvýše spočetná* $\iff$ je konečná nebo spočetná.
- *nespočetná* $\iff$ není nejvýše spočetná.

Nekonečná $\iff$ existuje prostá funkce $f : \mathbb{N} \to X$.
Konečná $\iff$ není nekonečná.

1.2 Limity

1.2.1 Vlastní a nevlastní limita posloupnosti, podposloupnost

Reálná posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}$ je funkce $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Limita posloupnosti Nechť (a_n) je reálná posloupnost a $L \in \mathbb{R}^*$, kde $\mathbb{R}^*$ je $\mathbb{R}$ spolu s $\pm\infty$. Potom L je limita posloupnosti (a_n), pokud:

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in U(L, \varepsilon).$$

Píšeme $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

- *Okolí bodu $b \equiv U(b, \varepsilon) := (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$*
- *Prstencové okolí bodu $b \equiv P(b, \varepsilon) := U(b, \varepsilon) \setminus \{\varepsilon\} = (b - \varepsilon, b) \cup (b, b + \varepsilon)$*

Vlastní a nevlastní limita Pokud $L \in \mathbb{R}$, pak konverguje a mluvíme o limitě *vlastní*, pokud $L = \pm\infty$, pak diveguje a mluvíme o limitě *nevlastní.*

Podposloupnost (b_n) je podposloupností posloupnosti (a_n), pokud existuje taková posloupnost

$$\forall m \in \mathbb{N} : m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N},$$

kde $\forall n : b_n = a_{m_n}$. *Značíme jako $(b_n) \prec (a_n)$.*

1.2.2 Liminf a limsup posloupnosti

Limes inferior (resp. superior) reálné posloupnosti (a_n) definujeme jako $\liminf a_n$, resp. $\limsup a_n$.

- *Hromadný bod* A posloupnosti (a_n), pokud je limitou nějaké podposloupnosti posloupnosti (a_n).
- $\mathcal{H}$ definujeme jako množinu hromadných bodů, neboli $\mathcal{H}(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \textit{ je hromadný bod } (a_n)\}$.

1.3 Řady

1.3.1 Řada, částečný součet řady, součet řady

Řada je posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$.

Částečný součet řady (a_n) je $(s_n) := (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

Součet řady je limita $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots := \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim s_n \in \mathbb{R}^*$.

1.3.2 Geometrická řada a její součet, absolutně konvergentní řada

Geometrická řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \ldots$, kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient.

Součet geometrické řady je $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$

Absolutně konvergentní řada Řada $\sum a_n$ je AK, pokud konverguje řada $\sum |a_n|$.
Tvrzení: Každá AK konverguje. Důkaz: $\sum a_n$ *má* (s_n)*. Ukážeme, že* (s_n) *je Cauchyova...*

1.4 Funkce

1.4.1 Limita funkce, jednostranná limita funkce

Limita funkce Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$, kde a je limitní bod množiny M, limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in P(a,\delta) \cap M : f(x) \subseteq U(A,\varepsilon), \textit{ tedy } \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Limitní body množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ *prvku* $L \in \mathbb{R}^* \equiv \forall \varepsilon : P(L,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.

Jednostranná limita funkce Podobně, jen $\forall x \in P^{\pm}(a,\delta) \cap M$...

1.4.2 Exponenciála, logaritmus, kosinus a sinus

Exponenciála $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} + \cdots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Eulerovo číslo $\equiv e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in \mathbb{I}$ *a je rovno* ≈ 2.718...

Logaritmus $\log x$ je inverzní funkce k exponenciále, tedy $\log := \exp^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$
Platí důležité vztahy: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, $\log(1) = 0$, *atd.*

Cosinus a sinus $\forall t \in \mathbb{R} : \cos t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ a $\sin t := \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jdoucí z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.4.3 Spojitost funkce v bodě a jednostranná spojitost

Spojitost funkce v bodě Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a, když

$$\forall \varepsilon, \exists \delta, \forall x \in U(a,\delta) \cap M : f(x) \subseteq U(f(a),\varepsilon).$$

Neboli funkce f *je v bodě* a *spojitá, pokud* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Jednostranná spojitost Podobně, jen je zleva ($-$) resp. zprava ($+$) spojitá a pro $\forall x \in U^{\pm}(a,\delta) \cap M$..

1.4.4 Asymptotické symboly

Symbol O Nechť je $M \subseteq \mathbb{R}$, $N \subseteq M$ a $f, g : M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Potom pokud $\exists c \geq 0, \forall x \in N : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, pak píšeme $f(x) = O(g(x))$, pro $x \in N$. *(Nesmí nastat* $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$*.)*

Symbol o **a** $\sim$ Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f, g : M \to \mathbb{R}$ jsou funkce, kde

$$\exists \delta \forall x \in P(A,\delta) \cap M(g(x) \neq 0) \text{ potom pro}$$

- *malé o:* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$,
- *asymptotickou rovnost* $\sim$: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim g(x)$ pro $x \to a$.

1.4.5 Kompaktní, otevřená a uzavřená množina

Kompaktní množina Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *kompaktní*, když $\forall (a_n) \subseteq M$ má konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} \in M$. *(Když je M omezená a uzavřená.)*

Otevřená množina Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *otevřená*, když $\forall a \in M, \exists \delta : U(a,\delta) \subseteq M$.

Uzavřená množina Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *uzavřená*, když $\forall (a_n) \subseteq M : \lim a_n = a \implies a \in M$.

1.4.6 Lokální a globální a ostré extrémy

Globální extrém Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f má na M v bodě a *globální maximum* (resp. *minimum*), když $\forall x \in M : f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$.

Lokální extrém Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f má na M v bodě a *lokální maximum* (resp. *minimum*), když $\exists \delta, \forall x \in U(a,\delta) \cap M : f(x) \leq f(a)$, resp $f(x) \geq f(a)$.

Ostrý extrém Pokud platí ostré nerovnosti v definici o lokálním/globálním extrému, jedná se o *ostrý extrém.*

1.5 Derivace

Oboustranný limitní bod (OLB) množiny M je $\forall \delta : P^-(a,\delta) \cap M \neq 0 \neq P^+(a,\delta) \cap M$.

1.5.1 Derivace funkce, jedonstranná derivace funkce

Funkce f je diferencovatelná, pokud á vlastní limitu, tedy pokud je spojitá.

Derivace funkce Nechť bod $a \in M$ je limitní bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f = f(x) : M \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom derivace f v bodě a je limita

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Jedonstranná derivace funkce Nechť bod $a \in M$ je *levý ($-$)*, resp. *pravý ($+$)*, limitní bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f = f(x) : M \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom derivace funkce f v bodě a *zleva*, resp. *zprava* je limita

$$f'_{\pm}(a) := \lim_{x\to a^{\pm}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1.5.2 Standardní definice tečny

Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M a $f : M \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v a. *Tečnou* ke grafu G_f funkce f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímku l definovanou:

$$l : y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Je to jediný přímka se sklonem (směrnicí) $f'(a)$ procházející bodem $(a, f(a))$.

1.5.3 Derivace vyšších řádů

Nechť $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina a $f : M \to \mathbb{R}$, $f_0 := f$ a pro $i = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}$ platí, že $D(f_{i-1}) = M$ a $f_i := (f_{i-1})'$. Pak každou funkci $f^{(i)} := f_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nazveme *derivací řádu i*.
Alternativně:
Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, pokud $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ na $U(a, \delta)$ má derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n - 1$, potom derivace řádu n je

$$f^{(n)}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

1.5.4 Ryze konvexní a konkávní funkce

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *konvexní (resp. konkávní)*, pokud

$$\forall a, b, c \in I, a < b < c : (b, f(b) \leq \mathcal{K}(a, f(a), c, f(c)). \textit{ (resp. } \geq \textit{)}$$

Pro ostré nerovnosti je ryze konvexní/ ryze konkávní.

1.5.5 Inflexní bod

Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, kde a je OLB množiny M; $f : M \to \mathbb{R}$ a l je tečna ke G_f v $(a, f(a))$. Tento bod je potom *inflením bodem* grafu funkce f, pokud:

$$\exists \delta, \forall x \in P^-(a, \delta) \cap M \wedge \forall x' \in P^+(a, \delta) \cap M \implies (x, f(x)) \leq l \wedge (x', f(x')) \geq l,$$

(= bod, ve kterém $f'' = 0$ a $f' = 0$ nebo f' neexistuje; dochází ke změně směru funkce).

1.5.6 Svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu

Svislé asymptoty Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý *(resp. pravý)* limitní bod množiny M a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom když $\lim\limits_{x \to b^{\mp}} f(x) = \pm\infty$, nazveme přímku $x = b$ levou *(resp. pravou)* svislou asymptotou funkce f.

Asymptoty v nekonečnu Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$; $\pm\infty$ je limitní bod množiny M; $a, b \in \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom když $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, nazveme přímku $y = ax + b$ *asymptotou* funkce f v $\pm\infty$.

1.5.7 Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce

Taylorův polynom funkce Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : f, f', f'', \ldots, f^{n-1} : U(b, \delta) \to \mathbb{R}$ a $\exists f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Potom polynom

$$T_n^{f,b}(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}(x - b)^j,$$

nazveme Taylorovým polynomem funkce f řádu n se středem v b.
Příklady důležitých Taylorových polynomů: $e^x = T_n^{f,0}(x)$, $\sin(x) = T_{2n+1}^{f,0}(x)$.

Taylorova řada funkce Nechť $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)} : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$. Pokud $\forall x \in U(a, \delta)$ platí

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n,$$

pak řekneme, že funkce f na $U(a, \delta)$ je součtem své *Taylorovy řady* se středem v a.

1.6 Integrály

1.6.1 Primitivní funkce

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální interval a $F, f : I \in \mathbb{R}$. Potom F je primitivní funkce k f, neboli $F = \displaystyle\int f$, pokud $F' = f$ na celém I.

1.6.2 Stejnoměrná spojitost

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$, potom f na M je *stejnoměrně spojitá*, pokud:

$$\forall \varepsilon, \exists \delta : \forall a, b \in M \wedge |a - b| \leq \delta \implies |f(a) - f(b) \leq \varepsilon.$$

Platí, že každá spojitá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je pro kompaktní $M \subseteq \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

1.6.3 Newtonův integrál funkce (nevlastní)

Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$, má primitivní funkci F a existují vlastní limity $F(a) := \lim_{x \to a} F(x)$ a $F(b) := \lim_{x \to b} F(x)$, potom Newtonův integrál funkce f na intervalu (a, b) definujeme jako:

$$\int_a^b f := F(b) - F(a) = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x).$$

1.6.4 Riemannův integrál funkce a množina míry O

Riemannův integrál funkce Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$, je riemannovsky integrovatelná, neboli $f \in R(a, b)$, pokud $\exists c, \forall \varepsilon, \exists \delta, \forall (\overline{a}, \overline{t})$ platí, že: $||\overline{a}|| < \delta \implies |R(\overline{a}, \overline{t}, f) - C| < \varepsilon$..
Píšeme také jako:

$$(R) \int_a^b f = c \text{ nebo jako } (R) \int_a^b f(x)dx = c.$$

Množina míry O Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má míru 0, pokud platí:

$$\forall \varepsilon, \exists [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}, \textit{ kde } a_n < b_n : M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \wedge \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

1.6.5 Henstock-Kurzweilův integrál

Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je HK-integrovatelná, neboli $f \in \mathrm{HK}(a, b)$, pokud $\exists c, \forall \varepsilon, \exists \delta_c$, kalibr na $[a, b]$, že pro $\forall$ dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a, b]$ platí, že $(\overline{a}, \overline{t})$ je δ_c-jemné $\implies |R(\overline{a}, \overline{t}, f) - c| < \varepsilon$.
Píšeme také jako:

$$(HK) \int_a^b f = c \text{ nebo jako } (HK) \int_a^b f(x)dx = c$$

1.6.6 Délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa

Délka grafu funkce Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má ratifikovatelný graf, pokud:

$$\ell(G_f) := \sup(\{L(\overline{a}, f) \mid \overline{a} \textit{ je dělení intervalu } [a, b]\}).$$

Plocha mezi grafy Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $f \leq g$. Plocha útvaru $G_{f,g}$ je potom:

$$A(G_{f,g}) := \inf(\{M(f, g, \overline{a}) \mid \overline{a} \textit{ je dělení intervalu } [a, b]\}).$$

Vzorec pro výpočet plochy mezi grafy je: $A(G_{f,g}) := \int_a^b (g - f)$.

Objem rotačního tělesa Nechť funkce $f : [a, b] \to [0, +\infty)$. Objem útvaru T_f je:

$$V(T_f) := \inf(\{K(f, \overline{a}) \mid \overline{a} \textit{ je dělení intervalu } [a, b]\}).$$

K definujeme jako součet a $T_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \wedge y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$.
Vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa je: $V(a, b, f) = V(T_f) := \pi \int_a^b f^2$.

2 Věty a tvrzení bez důkazu

2.1 Reálná čísla

2.1.1 Definice a vlastnosti reálných čísel

Reálná čísla tvoří množinu $\mathbb{R} := C/\sim$, kde C je množina všech Cauchyových posloupností a $\sim$ je relace shodnosti na C. *Kde pro* $k, n_0, m, n \in \mathbb{N}$ *je:*

- *Cauchyova posloupnost* $(a_n) \subseteq \mathbb{Q} : \forall k \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| \leq \frac{1}{k}$.
- *Relace shodnosti* $(a_n) \sim (b_n) \iff \forall k \exists n_0 : n \geq n_0 \implies |a_n - b_n| \leq \frac{1}{k}$

Vlastnosti reálných čísel Na množině $\mathbb{R}$ je dána binární relace $(<) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, operace sčítání $(+)$, násobení $(\cdot)$ a význačné prvky $0, 1$, tedy uspořádané těleso $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$.
(Platí komutativita, distributivita, asociativita, existence $0, 1$*, atd.)*

2.2 Limity

2.2.1 O podposloupnostech a existence monotónní posloupnosti

O podposloupnostech Nechť (a_n) je libovolná reálná posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

1. (a_n) má podposloupnost, která má limitu.
2. (a_n) nemá limitu $\iff$ (a_n) má dvě podposloupnosti s dvěma různými limitami.
3. $\lim a_n \neq A \iff (a_n)$ má podposloupnost, která má limitu různou od A.

Existence monotónní posloupnosti Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

2.2.2 Geometrická posloupnost a Liminf a limsup

Limita geometrická posloupnosti Nechť $q \in \mathbb{R}$, potom

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \textit{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}.$$

Liminf a limsup Pro každou $(a_b) \subseteq \mathbb{R}$ je množina $H(a_n)$ neprázdná. V lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ má minimum i maximum.

2.3 Řady

2.3.1 O harmonických číslech a Riemannova věta

O harmonických číslech Nechť $h_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ jsou harmonická čísla, potom $\exists c > 0$, t.ž.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : h_n = \log n + \gamma + \Delta_n,$$

kde c je konstanta, $|\Delta_n| \leq \frac{c}{n}$, a $\gamma = 0.57721\ldots$ je tzv. Eulerova konstanta.
Harmonická čísla jsou (s_n) *harmonické řady. Eulerova konstanta* $\gamma := \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$.

Riemannova věta Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada typu $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \ldots$, tedy nechť platí:

1. $\lim a_n = 0$,
2. $\sum a_{k_n} = +\infty$, kde a_{k_n} jsou kladné sčítance řady,
3. $\sum a_{z_n} = -\infty$, kde a_{z_n} jsou záporné sčítance řady,

potom pro každé $S \in \mathbb{R}^*$ existuje bijekce $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, t.ž.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$.

2.4 Funkce

2.4.1 O Riemannově funkci a Limita složené funkce

O Riemannově funkci *Riemannova funkce* je spojitá právě a jenom v iracionálních číslech.

Riemannova funkce $r : \mathbb{R} \to \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, *tedy* $r(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ a } \frac{m}{n} \text{ je zlomek v základním tvaru.} \end{cases}$

Limita složené funkce Nechť $a, b, L \in \mathbb{R}^*$, $M, N \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod M, b je limitní bod N a nechť funkce $g : M \to N$ a $f : N \to \mathbb{R}$ mají limity $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ a $\lim\limits_{x \to b} f(x) = L$.
Složená funkce $f(g) : M \to \mathbb{R}$ má potom limitu $\lim_{x \to A} f(g)(x) = L \iff$ platí jedna z podmínek:

$$\begin{cases} b \in N \implies f(b) = L \ldots\ldots\ldots\ldots f(x) \text{ je spojitá v } L \\ \exists \delta, \forall x \in P(A, \delta) \cap M : b \notin g(x) \ldots \text{ na nějakém prstencovém okolí funkce nenabývá hodnotu } b \end{cases}.$$

2.4.2 Heineho definice spojitosti, Blumbergova definice spojitosti a počet spojitých funkcí

Heineho definice spojitosti Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$\forall (a_n) \subseteq M : \lim a_n = a \implies \lim f(a_n) = f(a).$$

Blumbergova definice spojitosti $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists M \subseteq \mathbb{R}$, t.ž.: M je hustá v $\mathbb{R}$ a restrikce $f|M$ je spojitá funkce.

- *Hustá množina N v M:* $\forall a \in M, \forall \delta : U(a, \delta) \cap N \neq 0$
- *Restrikce (zúžení):* $A \subseteq B, C; f : B \to C$. Restrikce na A je funkce $f|A : A \to C \equiv \forall x \in A : (f|A)(x) := f(x)$

Počet spojitých funkcí $\exists$ bijekce $h : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$, kde $C(M)$ definujeme pro $M \subseteq \mathbb{R}$ jako

$$C(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\}.$$

2.5 Derivace

2.5.1 Derivace složené funkce a derivace inverzní funkce

Derivace složené funkce Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $g : M \to N$ je spojitá v a s derivací $g'(a) \in \mathbb{R}^*$; $g(a) \in N$ je limitní bod množiny $N \subseteq \mathbb{R}$. Nechť $f : N \to \mathbb{R}$ je funkce s derivací $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$, potom složená funkce $f(g) : M \to \mathbb{R}$ má derivaci

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a), \text{ pokud je součin napravo definován.}$$

Alternativně:
Nechť f má derivaci v bodě b, funkce g má derivaci v bodě a, $b = g(a)$ a g je spojitá v a. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Derivace inverzní funkce Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f : M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce s derivací $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a inverzní funkce $f^{-1} : f[M] \to M$ je spojitá v $b := f(a)$, potom když:

1. $f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$
2. $f'(a) = 0$ a f roste (resp. klesá) v bodě a, pak $(f^{-1})'(b) = \pm\infty$
3. $f'(a) = \pm\infty$ a b je limitní bod množiny $f[M]$, pak $(f^{-1})'(b) = 0$.

2.5.2 l'Hospitalovo pravidlo a konvexivita a konkavita f"

l'Hospitalovo pravidlo Nechť $a \in \mathbb{R}; f, g : P^+(a, \delta) \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivace, $g' \neq 0$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, potom:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ pokud poslední limita existuje.}$$

Věta platí i pro $P^-(a, \delta), P(a, \delta)$ a pro $a = \pm\infty$.

Konvexivita a konkavita f'': Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, $D(f) = I^0, \forall c \in I^0, \exists f''(c) \in \mathbb{R}^*$.

1. $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$) $\implies$ f je *konvexní* (resp. *konkávní*)
2. $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$) $\implies$ f je *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*).

2.6 Integrály

2.6.1 Lagrangeův a Cauchyův zbytek Taylorova polynomu a Bellova čísla

Nechť $f, f', f'', \ldots, f^{(n+1)} : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Lagrangeův zbytek $\forall x \in P(a, \delta) \exists c$ mezi a a x, t.ž.:

$$R_n^{f,a}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Cauchyův zbytek $\forall x \in P(a, \delta) \exists c$ mezi a a x, t.ž.:

$$R_n^{f,a}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!} \cdot (x-a)$$

Bellova čísla $\forall x \in (-1, 1)$ platí: $e^{e^x - 1} = \exp(\exp(x) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$, *kde B_n je počet rozkladů množiny.*

2.6.2 Riemann = Newton a integrace substitucí

Riemann = Newton Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je k ní primitivní, potom

$$\lim_{||\overline{a}|| \to 0} R(\overline{a}, \overline{t}, f) = F(b) - F(a).$$

Riemannův součet: $R(\overline{a}, \overline{t}, f) := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-2}) \cdot f(t_i)$, kde $\overline{a}$ *je dělení intervalu I, tedy* $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$.

Integrace substitucí Nechť $I, J \subseteq \mathbb{R}$ jsou netriviální intervaly; $g : I \to J$; $g' : I \to \mathbb{R}$ a $f : J \to \mathbb{R}$. Potom

1. $F = \int f$ na J $\implies$ $F(g) = \int f(g) \cdot g'$ na I
2. pokud g je surjekce $\wedge$ $g' \neq 0$ na I, pak platí: $G = \int f(g) \cdot g'$ na I $\implies$ $G(g^{-1}) = \int f$ na J.

2.6.3 Per partes a int(r(x))

Per partes Nechť $f, g, F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b \in \mathbb{R}^*$; F (resp. G) je primitivní k f (resp. ke g). Potom, když jsou definovány dva ze tří členů T_i, pak platí:

$$\underbrace{(N) \int_a^b fG}_{T_1} = \underbrace{[FG]_a^b}_{T_2} - \underbrace{(N) \int_a^b Fg}_{T_3}.$$

(= pro neurčitý integrál: $\int f'g = fg - \int fg'$ *)*

Integrál r(x): $\forall$ racionální funkce $r(x)$, kde $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} : \mathbb{R} \setminus Z(r) \to \mathbb{R}$, existuje funkce $R(x)$ ve tvaru:

$$R(x) = r_0(x) + \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x - \alpha|) + \sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \arctan(b_i(x)),$$

kde $r_0(x)$ je racionální funkce; $k, l, m \in \mathbb{N}_0$; prázdné $\sum := 0$; $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$; $\alpha_i \in Z(r(x))$; $a_i(x)$ jsou ireducibilní trojčleny a $b_i \in \mathbb{R}[x]$ jsou nekonstantní lineární polynomy, t.ž.: na každém $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R} \setminus Z(r(x))$ platí $R(x) = \int r(x)$. *Platí, že Ireducibilní trojčlen je polynom stupně 2 a* $Z(r) := \{a \in \mathbb{R} \mid q(a) = 0\}$.

2.6.4 O restrikcích, Lebesgueova věta a ZVA 2

O restrikcích Pokud $a < b < c \in \mathbb{R}$ a $f : [a, c] \to \mathbb{R}$, pak: $f \in R(a, c) \iff f \in R(a, b) \wedge f \in R(b, c)$, neboli

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Lebesgueova věta Pro každou $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí, že $f \in R(a, b) \iff f$ je omezená a nespojitá (*) s mírou 0. (*) $BN(f) := \{x \in M \mid f \textit{ je nespojitá v } x\}$.

Základní věta analýzy 2 Nechť $f, F : (a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$; F je primitivní k f a $f \in R(a, b)$. Potom existují vlastní limity $F_a := \lim_{x \to a} F(x)$ a $F_b := \lim_{x \to b} F(x)$ a platí:

$$(R) \int_a^b f = F_b - F_a = (N) \int_a^b f.$$

2.6.5 Riemann = Darboux a HK. int a N. int

Riemann = Darboux Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, potom:

$$f \in R(a, b) \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}.$$

Pokud platí obě strany ekvivalence, pak: $(R) \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

HK. $\int$ a N. $\int$: Nechť $a < b$; $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde F je spojitá a $F' = f$ na (a, b). Pak $f \in HK(a, b)$ a platí

$$(HK) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (N) \int_a^b f.$$

2.6.6 Délka grafu a Integrální kritérium

Délka grafu Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f' \in R(a, b)$, potom:

$$\ell(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \in (0, +\infty).$$

Integrální kritérium Nechť $m \in \mathbb{Z}$ a $f : [m, +\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí funkce. Potom

$$\text{řada } \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ konverguje } \iff \lim_{n \to \infty} \int_m^n f < +\infty.$$

3 Věty a tvrzení s důkazem

3.1 Reálná čísla

3.1.1 Odmocnina ze dvou není racionálních a Cantorova věta

Věta ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$): Rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru $\mathbb{Q}$ řešení.

Proof. Pro spor předpokládejme, že $\exists a, b \in \mathbb{N}$, t.ž.: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Máme tedy $a^2 = 2b^2$, kde a^2 je sudé. Neboli $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Dostáváme $(2c)^2 = 2b^2 \iff 4c^2 = 2b^2 \iff b^2 = 2c^2$, neboli b^2 je sudé, proto i b je sudé, což je spor s nesoudělností a, b. $\lightning$ ■

Cantorova věta: Pro žádnou množinu X neexistuje surjekce $f : X \to \mathcal{P}(X)$ z X na její potenci.

Proof. Pro spor předpokládejme, že $f : X \to \mathcal{P}(X)$ je surjektivní, kde $X \neq \emptyset$. Dále uvažme:

$$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subseteq X.$$

Protože f je *surjektivní*, tak $\exists y \in X$ t.ž. $f(y) = Y$.
(a) Pokud $y \in Y$, pak podle definice množiny Y platí, že $y \notin f(y) = Y$.
(b) Pokud $y \notin Y = f(y)$, má y vlastnost definující množinu Y a $y \in Y$.
V obou připadech se jedná o spor. $\lightning$ ■

3.2 Limity

3.2.1 Jendoznačnost limity a Bolzano-Weierstrassova věta

Věta (Jendoznačnost limity): Limita posloupnosti je *jednoznačná* $\equiv \lim a_n = K \wedge \lim a_n = L \implies K = L$. *(Neboli když má nejvýše jednu limitu.)*

Proof. Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a nechť $\exists \varepsilon$.
Podle *definice limity posloupnosti* $\exists n_0$, t.ž.: $n \geq n_0 \implies a_n \in U(K, \varepsilon)$ i $a_n \in U(L, \varepsilon)$.
Dostáváme $\forall \varepsilon : U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \neq \emptyset$. Tedy $K = L$. ■

Věta (Bolzano-Weierstrassova): Omezená posloupnost reálných čísel má vždy konvergentní podposloupnost.

Proof. Nechť (a_n) je omezená posloupnost a (b_n) je monotónní podposloupností (a_n), neboli $(b_n) \preceq (a_n)$.
(b_n) je tak zjevně je omezená a podle *věty o robustně monotónní posloupnosti* má vlastní limitu. ■

3.2.2 Limita a uspořádání a Cauchyova podmínka

Věta (Limita a uspořádání): Nechť (a_n) a $(b_n) \in \mathbb{R}$ s $\lim a_n = K \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = L \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

1. $K < L \implies \exists n_0 : \forall m, n \geq n_0$ je $a_m < b_n$.
2. $\forall n_0, \exists m, n \geq n_0 \wedge a_m \geq b_n \implies K \geq L$.

Proof.

1. Nechť $K < L$, pak $\exists \varepsilon : U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Podle *definice limity* máme $\exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies a_m \in U(K, \varepsilon)$ a $b_n \in U(L, \varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \implies a_m < b_n$.
2. Triviálně obměnou implikace.

■

Věta (Cauchyova podmínka): Posloupnost reálných čísel (a_n) je konvergentní $\iff$ (a_n) je Cauchyova.

Proof. $\implies$ Nechť ε je dáno a $\lim a_n = a$.
Potom $\exists n_0 : n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy:

$$m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pak (a_n) je Cauchyova posloupnost.

$\impliedby$ Nechť (a_n) je Cauchyova posloupnost. Víme, že (a_n) je omezená a proto má podle *Bolzano-Weierstrassovy věty* konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou a. Pro dané ε tak máme $n_0 : n \geq n_0 \implies |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a zároveň $n \geq n_0 \implies |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dostáváme tedy, že $a_n \to a$. ■

(Použili jsme vyjádření $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$ a trojúhelníkovou nerovnost $|c + d| \leq |c| + |d|$.)

3.3 Řady

3.3.1 Nutná podmínka konvergence řady a Harmonická řada

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence řady): Když řada $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.

Proof. Když $\sum a_n$ konverguje, pak $S := \lim s_n \in \mathbb{R}$, kde $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$.
Podle výsledků o limitě podposloupnosti a podle aritmetiky limit dostáváme:

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Využíváme platnosti $\lim(s_n) = \lim(s_{n-1}) = S$.

Tvrzení (Harmonická řada): Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ diverguje a má součet $+\infty$.

Proof. Nechť (h_n) jsou částečné součty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a (s_n) jsou částečné součty $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Potom platí $\forall n : \frac{1}{n} > a_n$, tedy i $\forall n : h_n > s_n$. Protože podle *věty o jednom strážníkovi* se $\lim s_n = +\infty$, pak i $\lim h_n = +\infty$ a proto je $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. ■

Proof. (Alternativně)
Pro částečné součty n a $2n$ platí:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \wedge s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$
$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \cancel{n} \cdot \frac{1}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}.$$

Proto $\forall n \in \mathbb{N} : s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ a posloupnost (s_n) tím splňuje Cauchyovu podmínku a diverguje.

■

3.4 Funkce

3.4.1 Heineho definice a Aritmetika limit funkcí

Věta (Heineho definice): Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, K, L jsou prvky $\mathbb{R}^*$, K je limitní bod množiny M a $f : M \to \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x \to K} f(x) = L \iff \forall (a_n) \subseteq M \setminus \{K\} : \lim a_n = K \implies \lim f(a_n) = L.$$

Tedy L je limita funkce f v K $\iff$ pro každou posloupnost (a_n) v M, která má limitu K, ale nikdy se K nerovná, funkční hodnoty $(f(a_n))$ mají limitu L.

Proof.

$\implies$ Předpokládáme, že $\lim_{x \to K} f(x) = L$, že $(a_n) \subseteq M \setminus \{K\}$ má limitu K a žě ε je dáno. Potom

$$\exists \delta : \forall x \in M \cap P(K, \delta) \text{ je } f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Pro toto δ zároveň $\exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in P(K, \delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \implies f(a_n) \in U(L, \varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

$\impliedby$ Za pomoci obměny $\neg \implies \neg$. Předpokládáme, že $\lim_{x \to K} f(x) = L$ neplatí a proto ani pravá strana ekvivalence neplatí. Tedy pro bod b:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists b = b(\delta) \in M \cap P(K, \delta), \text{ t.ž.: } f(b) \notin U(L, \varepsilon).$$

Položíme pro $n \in \mathbb{N} : \delta = \frac{1}{n}$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ vybereme bod:

$$b_n := b\left(\frac{1}{n}\right) \in M \cap P\left(K, \frac{1}{n}\right), \text{ t.ž.: } f(b_n) \notin U(L, \varepsilon).$$

Posloupnost (b_n) leží v $M \setminus \{K\}$ a konverguje ke K, ale posloupnost hodnot $(f(b_n))$ nekonverguje k L. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. ↯

■

Věta (Aritmetika limit funkcí): Nechť $M \in \mathbb{R}$, nechť $a, K, L \in \mathbb{R}^*$, kde a je limitní bod množiny M a nechť funkce $f, g : M \to \mathbb{R}$ mají limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = K$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

$$\text{Potom platí} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = K + L \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = K \cdot L \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{K}{L}, \text{ kde pro } g(x) = 0 \text{ definujeme } \dfrac{f(x)}{g(x)} := 0. \end{cases}$$

Proof. Z důvodu podobnosti probereme jen podíl.
Nechť $(a_n) \subseteq M \setminus \{aA\}$ s $\lim a_n = a$. Podle *Heineho definice* limity funkce platí:

$\implies$ Nechť $\lim f(a_n) = K$, $\lim g(a_n) = L$ a předpokládejme, že $L \neq 0$, proto i $\forall n \geq n_0 : g(a_n) \neq 0$. Zároveň předpokládejme, že $K, L \neq \pm\infty$, tedy že konvergují. Podle věty o AK posloupností se pak limity rovnají:

$$\lim \left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)} \right) = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L}.$$

$\impliedby$ Protože tento vztah platí pro každou posloupnost $\left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)}\right)$ s (a_n) jako výše, tak podle *Heineho definice* je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{K}{L}$.

■

3.4.2 Nabývání mezihodnot a Princip minima a maxima

Věta (Nabývání mezihodnot): Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. Potom $\exists d \in (a, b) : f(d) = c$.

Proof. Předpokládejme, že $f(a) < c < f(b)$ *(pro opačnou nerovnost obdobně).*
Nechť $A := \{x \in [a, b] \mid f(x) < C\}$ a $d := \sup(A) \in [a, b]$.
Číslo d je korektně definované, protože množina $A \neq \emptyset$ ($a \in A$) a je shora omezená (b).
Ukážeme, že ke sporu vede $f(d) < c$ i $f(d) > c$, proto $f(d) = c$. Ze spojitosti funkce f v a a v b plyne, že $d \in (a, b)$.

(*a*) Pro $f(d) < c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že $\exists\delta : x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \implies f(x) < c$. Pak ale A obsahuje větší čísla než d. Dostáváme spor, protože d je horní mez množiny A.

(*b*) Pro $f(d) > c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že $\exists\delta : x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \implies f(x) > c$. Pak ale $\forall x \in [a, d)$ dostatečně blízké d leží mimo A, což je ve sporu d, jakožto nejmenší horní mezí množiny A.

■

Věta (Princip minima a maxima): Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je *neprázdná kompaktní* množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $\exists a, b \in M, \forall x \in M : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

$$\text{Řekneme, že } f \text{ nabývá na } M \begin{cases} \text{v bodu } a \text{ minimum (nejmenší hodnotu) } f(a) \\ \text{v bodu } b \text{ maximum (největší hodnotu) } f(b). \end{cases}$$

Proof. Dokážeme existenci maxima *(pro minimum obdobně).*
Zjevně platí, že $\forall x \in M : f(x) \neq \emptyset$. Ukážeme, že M je shora omezená sporem.

Kdyby nebyla, tak $\exists (a_n) \subseteq M : \lim f(a_n) = +\infty$.
Podle kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim(a_{m_n}) \in M$. Pak i $\lim f(a_{m_n}) = +\infty$, což je spor, protože podle *Heineho definice* je $\lim f(a_{m_n}) = f(a)$. ↯

Lze definovat $\forall x \in M : s := \sup(f(x)) \in \mathbb{R}$ a podle definice suprema $\exists (a_n) \subseteq M$ s $\lim f(a_n) = s$.
Díky kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim a_{m_n} \in M$.
Podle *Heineho definice* je $\lim f(a_{m_n}) = f(b) = s$. Protože $s = f(b)$ je horní mezí, tak $\forall x \in M : f(b) \geq f(x)$.

■

3.5 Derivace

3.5.1 Nutná podmínka extrému a Leibnizův vzorec

Věta (Nutná podmínka extrému): Nechť $b \in M$ je OLB $M \subseteq \mathbb{R}, f : M \to \mathbb{R}, \exists f'(b) \in \mathbb{R}^*$ a $f'(b) \neq 0$. Potom

$$\forall \delta \exists c, d \in U(b, \delta) \cap M : f(c) < f(b) < f(d).$$

Tedy funkce f nemá v bodě b lokální extrém, nemá v b ani lokální minimum ani lokální maximum.

Proof. Nechť $b \in M \subseteq \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$ a δ je dáno. Nechť $f'(b) < 0$ *(opačná nerovnost obdobně).*
Vezmeme tak malé ε, že $\exists y \in U(f'(b), \varepsilon) \implies y < 0)$. Nyní podle *definice derivace funkce v bodě*:

$$\exists \theta : x \in P(b, \theta) \cap M \implies \overbrace{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}^{<0} \in U(f'(b), \varepsilon).$$

Tedy když $P^-(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$.
Podobně když $x \in P^+(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) < f(b)$.
Předpokládejme, že $\theta < \delta$ a $\exists c \in P^+(b, \theta) \cap M$ a $d \in P^-(b, \theta) \cap M$. Prvky c, d existují, protože b je OLB M.
Proto platí $c, d \in U(b, \delta) \cap M \implies f(c) < f(b)$ a $f(d) > f(b)$. ■

Věta (Leibnizův vzorec): Nechť $b \in M \subseteq \mathbb{R}$, b je LB množiny M, $f, g : M \to \mathbb{R}$ a f nebo g je spojitá v b. Potom

$$(fg)'(b) = f'(b) \cdot g(b) + f(b) \cdot g'(b),$$

když pravá strana není neurčitý výraz.

Proof. Nechť je g spojitá v b *(druhý případ obdobně).* Podle podle AL funkcí platí

$$\begin{aligned}
(fg)'(b) &= \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x - b} = \\
&= \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(x) \overbrace{- f(b)g(x) + f(b)g(x)}^{0} - f(b)g(b)}{x - b} = \\
&= \lim_{x \to b} \frac{(f(x) - f(b))\, g(x) + f(b)\, (g(x) - g(b))}{x - b} = \\
&= \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \cdot \lim_{x \to b} (g(x) + f(b)) \cdot \lim_{x \to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = \\
&\overset{spojitost}{=} f'(b) \cdot g(b) + f(b) \cdot g'(b).
\end{aligned}$$

■

3.5.2 Lagrangeova věta a Derivace a monotonie 1

Věta (Lagrangeova): Pokud f je hezká funkce, pak $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} =: z.$
Hezká funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá.

Proof. Nechť $g(x) := f(x) - (x - a) \cdot z : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňuje předpoklady *Rolleovy věty*, především $g(a) = g(b) = f(a)$, takže $0 = g'(c) = f'(c) - z$ pro nějaké $c \in (a, b)$. ■

Rolleova věta: f je hezká & $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Věta (Derivace a monotonie 1): Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\forall c \in I^0, \exists f'(c)$. Potom

1. $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) na $I^0 \implies f$ na I neklesá (resp. neroste)
2. $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) na $I^0 \implies f$ na I roste (resp. klesá).

Kde $I^0 \subseteq I$ značí vnitřek intervalu I, tedy $I^0 = \{a \in I \mid \exists \delta : U(a, \delta) \subseteq I\}$.

Proof. Nechť je $f' < 0$ na I^0 *(klesá)* a $x < y$ jsou libovolná čísla v I.
Podle *Lagrangeovy věty* pro nějaké $z \in (x, y) \subseteq I^0$ je $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) < 0$.
Protože $y - x > 0$, je $f(x) > f(y)$ a f na I klesá. *(Zbývající tři možnosti obdobně.)*

■

3.5.3 Taylorův polynom a Nejednoznačnost primitivní funkce

Lemma (o polynomech): Nechť $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg p \leq n$. Pak $\lim_{x \to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \implies p(x) \equiv 0$.

Proof. Indukcí podle n.

- (i) Pro $n = 0$ platí. $p(x) = a_0$ a $\frac{a_0}{1} \to 0$ je $a_0 = 0$.
- (ii) Pro $n > 0$ předpokládejme, že platí $\lim_{x \to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \implies p(x) \equiv 0$.

  Potom $p(b) = \lim_{x \to b} p(x) = 0$, tedy b je kořenem $p(x) = (x-b) \cdot q(x)$, kde $q(x) \in \mathbb{R}$ je stupně nejvýše $n-1$.

  Dostáváme tak z indukčního předpokladu

$$0 = \lim_{x \to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \to b} \frac{\cancel{(x-b)} \cdot q(x)}{\cancel{(x-b)}^n} = \lim_{x \to b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$$

  neboli, že $q(x) = 0$, proto i $p(x) = (x-b) \cdot 0 = 0$.

□

Věta (Taylorův polynom) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f : U(b, \delta) \to \mathbb{R}$ jsou jako v definici *Taylorova polynomu.* $T_n^{f,b}(x)$ je jediný polynom $p(x) \in \mathbb{R}$ stupně nejvýše n, t.ž.:

$$f(x) = p(x) + o((x-b)^n) \text{ pro } x \to b.$$

Proof. Indukcí podle n dokážeme aproximaci $T_n^{f,b}$, tj. že $\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0$.

- (i) Pro $n = 1$: podle AL funkcí je $\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T_1^{f,b}(x)}{x-b} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} - \lim_{x \to b} f'(b) = f'(b) - f'(b) = 0$.
- (ii) Pro $n \geq 2$: podle L'Hospitalova pravidla a indukce máme, že:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \to b} \frac{\left(f(x) - T_n^{f,b}(x)\right)'}{\left((x-b)^n\right)'} = \frac{1}{n} \lim_{x \to b} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',b}(x)}{(x-b)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0.$$

  Nechť $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg(p) \leq n$ splňuje, že $\lim_{x \to b} \frac{f(x) - p(x)}{(x-b)^n} = 0$, potom ale:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \to b} \frac{p(x) - f(x)}{(x-b)^n} + \lim_{x \to b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0 + 0 = 0.$$

  Podle předešlého *Lemmatu o polynomech* tak dostáváme $p(x) = T_n^{f,b}(x)$.

■

Věta (Nejednoznačnost primitivní funkce) Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální interval; $F_1, F_2, f : I \to \mathbb{R}$ a F_1, F_2 je primitivní k f. Potom $\exists c \in \mathbb{R} : F_1 - F_2 = c$ na I.

Proof. Nechť $\exists a, b \in I$, $a < b$.
Podle *Lagrangeovy věty o střední hodnotě*, použité pro funkci $F_1 - F_2$ a interval $[a, b]$ platí, že:

$$\exists c \in (a, b) : \frac{(F_1 - F_2)(b) - (F_1 - F_2)(a)}{b-a} = (F_1 - F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) = f(c) - f(c) = 0.$$

Dostáváme tedy pro nějaké c, že $\forall x \in I : F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a) \implies F_1(x) - F_2(x) = c$.

■

3.6 Integrály

3.6.1 Monotonie Newtonova integrálu a Derivace jsou Darbouxovy

Věta (Monotonie Newtonova integrálu): Pokud $f, g \in N(a, b)$ a $f \leq g$ na (a, b), pak $(N)\int_a^b f \leq (N)\int_a^b g$.

Proof. Nechť F, resp. G, je primitivní k f, resp. ke g, a nechť čísla $c, d \in (a, b)$, kde $c < d$, jsou libovnolná.
Použijeme *Lagrangeovu větu o střední hodnotě* pro $F - G$ a interval $[c, d]$.
Pro nějaký bod $e \in (c, d)$ platí:

$$\begin{aligned}(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) &= (F - G)'(e) \cdot (d - c) = \\ &= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c) = \\ &= (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \leq 0.\end{aligned}$$

Proto platí $F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c)$.

Tato nerovnost se zachovává při lineárních přechodech $c \to a$, $d \to b$ a dostaneme tak $(N)\int_a^b f \leq (N)\int_a^b g$. ■

Věta (Derivace jsou Darbouxovy): Nechť $I \neq \emptyset$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $\implies$ f má Darbouxovu vlastnost.

Proof. Nechť $a < b$; $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$; F je primitivní k f a $f(a) < c < f(b)$. *Pro opačné nerovnosti obdobně.*
Uvážme funkci $G(x) := F(x) - cx : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Patrně $G' = F' - c = f - c$ na $[a, b]$ a G je proto spojitá.
Podle *věty o Principu minima a maxima* G nabývá v nějakém $d \in [a, b]$ minimum a podle *tvrzení O derivaci a monotonii 2* plyne z

$$G'(a) = f(a) - c < 0 \textbf{ a } G'(b) = f(b) - c > 0, \text{ že } d \in (a, b).$$

Nakonec podle *věty O nutné podmínce extrému* se

$$G'(d) = f(d) - c = 0, \text{ takže } f(d) = c.$$

■

3.6.2 Bachetova identita

Tvrzení (Bachetova identita): Nechť $p, q \in \mathbb{R}[x]$ nemají společný kořen, tj.: pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí, že $p(z) = q(z) = 0$. Potom $\exists r, s \in \mathbb{R}[x]$, t.ž.:

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1.$$

Proof. Nechť $p, q \in R[x]$ a $S := \{r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) \mid r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.
Nechť polynom $0 \neq t(x) \in S$, má nejmenší stupeň.
Libovolný $a(x) \in S$ jím dělíme se zbytkem:

$$a(x) = t(x) \cdot b(x) + c(x),$$

kde $b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $\deg(c(x)) < \deg(t(x))$ nebo $c(x) = 0$.
Protože ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot t(x) \in S$, platí $c(x) = 0$ a $a(x) = b(x)t(x)$, takže $t(x)$ dělí každý prvek v S.
Ale $p(x), q(x) \in S$ a $t(x)$ je oba dělí.
Protože $p(x)$ a $q(x)$ nemají společný kořen, tak podle *Zvalgovy věty* * je $t(x)$ nenulový konstantní polynom.
B.Ú.N.O. je $t(x) = 1$. Tedy $1 \in S$ a máme uvedenou identitu. ■

* *Zvalgova věta:* $\forall p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}, \exists d \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0.$

3.6.3 Neomezené funkce jsou špatné a Baireova věta

Tvrzení (Neomezené funkce jsou špatné): Pokud funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neomezená, pak $f \notin R(a, b)$. *(Pokud je neomezená, pak není riemannovsky integrovatelná.)*

Proof. Předpokládáme, že $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neomezená. Ukážeme, že:

$$\forall n, \exists(\overline{a}, \overline{t}) : ||\overline{a}|| < \frac{1}{n} \wedge |R(\overline{a}, \overline{t}, f)| > n.$$

To je však v rozporu s *Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost* funkce f.
Z neomezenosti f a z kompaktnosti $[a, b]$ vyplývá, že existuje konvergentní posloupnost $(b_n) \subseteq [a, b]$ s limitou $\lim b_n = \alpha \in [a, b]$ a s $\lim |f(b_n)| = +\infty$.
Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$.
Jako $\overline{a}$ vezmeme libovolné dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ s $||\overline{a}|| < \frac{1}{n}$, ale t.ž.: $\exists j \in [k] : \alpha \in [a_{j-1}, a_j]$.
Pak vybereme libovolné body $\forall i \neq j : t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ a uvážíme neúplný *Riemannův součet*

$$s := \sum_{i=1, i\neq j}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(t_i).$$

Nyní vybereme zbývající bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, že:

$$|(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| > |s| + n.$$

To lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké n.
Pak definujeme $\overline{t}$ jako sestávající ze všech těchto bodů a pomocí trojúhelníkové nerovnosti dostaneme požadované:

$$|R(\overline{a}, \overline{t}, f)| \geq |(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| - |s| > n.$$

■

Věta (Baireova): Pokud $a < b \in \mathbb{R}$ a $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá množina M_n není řídká.

Proof. Nechť v $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je každá množina M_n řídká, odvodíme spor.
M_1 je řídká $\implies \exists [a_1, b_1] \subseteq [a, b]$, t.ž.: $a_1 < b_1$ a $[a_1, b_1] \cap M_1 = \emptyset$.
M_2 je řídká $\implies \exists [a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, t.ž.: $a_2 < b_2$ a $[a_2, b_2] \cap M_2 = \emptyset$, atd.
Takto získáme posloupnost vnořených intervalů:

$$[a, b] \supseteq [a_1, a_2] \supseteq [a_2, a_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots, \text{ t.ž.:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n \wedge [a_n, b_n] \cap M_n = \emptyset.$$

Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a, b]$.
(Limita existuje, protože $a \in [a, b]$, protože (a_n) je neklesající a je zdola omezená číslem a a shora číslem b.)
Dokonce $\forall m, n : a_n < b_m$, takže $\forall n : \alpha \in [a_n, b_n]$.
Potom ale $\forall n : \alpha \notin M_n$ dává spor, protože $\alpha \in [a, b]$. ■

3.6.4 Dolní součet je menší než horní a ZVA 1

Věta ($\underline{\int} \leq \overline{\int}$): Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pro každá dvě dělení $a, b \in \mathcal{D}(a, b)$ platí, že

$$s(\overline{a}, f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(\overline{b}, f),$$

Proof. Nechť $\overline{a}$ a $\overline{b}$ jsou dělení intervalu $[a, b]$.
Víme, že $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$. Pak totiž $\overline{a}, \overline{b} \subseteq \overline{c}$ a podle *tvrzení O monotonii dolního a horního součtu* je

$$s(\overline{a}, f) \leq s(\overline{c}, f) \leq S(\overline{c}, f) \leq S(\overline{b}, f) \text{ a dostáváme } s(\overline{a}, f) \leq S(\overline{b}, f).$$

■

Dolní součet: $s(\overline{a}, f)$
Horní součet: $S(\overline{a}, f)$

Věta (ZVA 1): Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $f \in R(a,b)$. Potom $\forall x \in (a,b]$ je $f \in R(a,x)$ a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, kde

$$F(x) := \int_a^x f, \text{ je lipschitzovsky spojitá.}$$

t.j.: spojitá v $x \in [a,b] \implies F'(x) = f(x)$.

Proof. Nechť $f \in R(a,b)$. Podle *tvrzení o restrikcích* je $f \in R(a',b')$ pro každé $a \le a' < b' \le b$.
Tedy F je správně definováno a $F(a) = 0$.
Protože f je omezená *(tvrzení, že neomezené funkce jsou špatné)*, vezmeme omezující konstantu $d > 0$.
Nechť $c := 1 + d$, nechť $x < y \in [a,b]$ a podle *definice Riemannova integrálu* nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ je takové s body intervalu $[x,y]$, že $\left| \int_x^y f - R(\overline{a}, \overline{t}, f) \right| < y - x$.
Podle *tvrzení o restrikcích* a *definice funkce* F platí, že:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \le y - x + |R(\overline{a}, \overline{t}, f)| \le y - x + c \cdot (y - x),$$

a tak $|F(y) - F(x)| \le c \cdot |y - x|$ a F je lipschitzovsky spojitá.

Nechť f je v $x_0 \in [a,b]$ spojitá a $\exists \varepsilon$. Vezmeme číslo δ, t.ž.:

$$x \in U(x_0, \delta) \cap [a,b] \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon).$$

Nechť $x \in P(x_0, \delta) \cap [a,b]$ je libovolné, řekněme, že $x > x_0$ *(pro* $<$ *obdobně)*.
Vezmeme dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[x_0, x]$, t.ž.: $\left| \int_{x_0}^x f - R(\overline{a}, \overline{t}, f) \right| < \varepsilon(x - x_0)$. Potom:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x f - f(x_0)$$

je menší, než:

$$\frac{R(\overline{a}, \overline{t}, f) + \varepsilon(x - x_0)}{x - x_0} - f(x_0) < \frac{\cancel{(x - x_0)}(\cancel{f(x_0)} + \varepsilon + \varepsilon)}{\cancel{x - x_0}} - \cancel{f(x_0)} = 2\varepsilon.$$

Podobně se dokáže, že je i větší, než -2ε a dostaneme tak $F'(x_0) = f(x_0)$.

■

3.6.5 Abelova sumace

Věta (Abelova sumace): Nechť $a < b \in \mathbb{Z}$ a $f, f' \in R(a,b)$ a f je spojitá v b. Potom

$$\sum_{a < n \le b} f(n) = \int_a^b f + \int_a^b \{x\} f'(x) =: \int_a^b T, \text{ je identita.}$$

Proof. Dokažme, že $b = a + 1$ (elmentární identita).
Identitu s mezemi $a < b$ pak dostaneme jako součet elem. identit s mezemi $\underline{a \text{ a } a+1}$, $\underline{a+1 \text{ a } a+2}$ ... $\underline{b-1 \text{ a } b}$.
Dokažme tedy elementární identitu. Podle integrace per partes pro $b = a + 1$ je

$$T = \int_a^{a+1} (x - a) f'(x) = [(x - a) f(x)]_a^{a+1} - \int_a^{a+1} f,$$

takže opravdu: $\sum_{a < n \le b} f(n) = [(x - a) f(x)]_a^{a+1} = f(a + 1)$. ■