

Zpracování vět a definic ke zkoušce z Matematické analýzy 1

Karel Velička a Matěj Foukal

10. Července 2023

1. ročník bc. informatika
doc. RNDr. Martin Klazar, Dr.

Obsah

1	Definice	3
1.1	Reálná čísla	3
1.1.1	Definice funkce, funkce prostá, na a bijekce	3
1.1.2	Supremum a infimum v lineárním uspořádání	3
1.1.3	Nejvýše spočetná a nespočetná čísla	3
1.2	Limity	3
1.2.1	Vlastní a nevlastní limita posloupnosti, podposloupnost	3
1.2.2	Liminf a limsup posloupnosti	4
1.3	Řady	4
1.3.1	Řada, částečný součet řady, součet řady	4
1.3.2	Geometrická řada a její součet, absolutně konvergentní řada	4
1.4	Funkce	4
1.4.1	Limita funkce, jednostranná limita funkce	4
1.4.2	Exponenciála, logaritmus, kosinus a sinus	4
1.4.3	Spojítost funkce v bodě a jednostranná spojitost	4
1.4.4	Asymptotické symboly	5
1.4.5	Kompaktní, otevřená a uzavřená množina	5
1.4.6	Lokální a globální a ostré extrémy	5
1.5	Derivace	5
1.5.1	Derivace funkce, jednostranná derivace funkce	5
1.5.2	Standardní definice tečny	5
1.5.3	Derivace vyšších řádů	6
1.5.4	Ryze konvexní a konkávní funkce	6
1.5.5	Inflexní bod	6
1.5.6	Svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu	6
1.5.7	Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce	6
1.6	Integrály	6
1.6.1	Primitivní funkce	6
1.6.2	Stejněměrná spojitost	6
1.6.3	Newtonův integrál funkce (nevlastní)	7
1.6.4	Riemannův integrál funkce a množina míry 0	7
1.6.5	Henstock-Kurzweilův integrál	7
1.6.6	Délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa	7
2	Věty a tvrzení bez důkazu	8
2.1	Reálná čísla	8
2.1.1	Definice a vlastnosti reálných čísel	8
2.2	Limity	8
2.2.1	O podposloupnostech a existenci monotónní posloupnosti	8
2.2.2	Geometrická posloupnost a Liminf a limsup	8
2.3	Řady	8
2.3.1	O harmonických číslech a Riemannova věta	8
2.4	Funkce	9
2.4.1	O Riemannově funkci a Limita složené funkce	9
2.4.2	Heineho definice spojitosti, Blumbergova definice spojitosti a počet spojitých funkcí	9

2.5	Derivace	9
2.5.1	Derivace složené funkce a derivace inverzní funkce	9
2.5.2	l'Hospitalovo pravidlo a konvexitata a konkavita f''	9
2.6	Integrály	10
2.6.1	Lagrangeův a Cauchyův zbytek Taylorova polynomu a Bellova čísla	10
2.6.2	Riemann = Newton a integrace substitucí	10
2.6.3	Per partes a $\int(r(x))$	10
2.6.4	O restrikcích, Lebesgueova věta a ZVA 2	11
2.6.5	Riemann = Darboux a HK. int a N. int	11
2.6.6	Délka grafu a Integrální kritérium	11
3	Věty a tvrzení s důkazem	12
3.1	Reálná čísla	12
3.1.1	Odmocnina ze dvou není racionálních a Cantorova věta	12
3.2	Limity	12
3.2.1	Jednoznačnost limity a Bolzano-Weierstrassova věta	12
3.2.2	Limita a uspořádání a Cauchyova podmínka	12
3.3	Řady	13
3.3.1	Nutná podmínka konvergence řady a Harmonická řada	13
3.4	Funkce	13
3.4.1	Heineho definice a Aritmetika limit funkcí	13
3.4.2	Nabývání mezihodnot a Princip minima a maxima	14
3.5	Derivace	15
3.5.1	Nutná podmínka extrému a Leibnizův vzorec	15
3.5.2	Lagrangeova věta a Derivace a monotonie 1	15
3.5.3	Taylorův polynom a Nejednoznačnost primitivní funkce	16
3.6	Integrály	17
3.6.1	Monotonie Newtonova integrálu a Derivace jsou Darbouxovy	17
3.6.2	Bachetova identita	17
3.6.3	Neomezené funkce jsou špatné a Baireova věta	18
3.6.4	Dolní součet je menší než horní a ZVA 1	18
3.6.5	Abelova sumace	19

1 Definice

1.1 Reálná čísla

1.1.1 Definice funkce, funkce prostá, na a bijekce

- **Funkce (zobrazení):** Funkce f z množiny A do množiny B , neboli $f : A \rightarrow B$, je uspořádaná trojice (A, B, f) , kde $f \subseteq A \times B$ a $\forall a \in A, \exists! b \in B : afb$, neboli $f(a) = b$. (Platí: $\mathbb{D}_f = A$, $\mathbb{H}_f = B$)
- **Funkce prostá (injektivní):** Funkce $f : X \rightarrow Y$ pro $\forall x, x' \in X$ je prostá $\iff f(x) = f(x') \implies x = x'$. Dvěma různými x nepřičítáme stejné y . Takže $\forall y$ existuje nejvýše jedno x .
- **Funkce na (surjektivní):** Funkce $f : X \rightarrow Y$ je na $\iff f[X] = Y$. $\forall y$ existuje alespoň jedno x .
- **Funkce bijektivní:** Funkce $f : X \rightarrow Y$ je bijektivní \iff je prostá i na. ($\exists! x$)

Obraz množiny $C \subseteq A$ je $f[C] := \{f(a) \mid a \in C\} \subseteq B$.

1.1.2 Supremum a infimum v lineárním uspořádání

Nechť A je množina s uspořádáním $(A, <)$ a B je množina, t.ž.: $B \subseteq A$. Prvky $a \in A$ jsou *supremem* (resp. *infimem*) množiny B , když splňují $\sup(B) := \min(\mathcal{H}(B))$ a $\inf(B) := \max(\mathcal{D}(B))$ v A .

1. Množina horních mezí $\mathcal{H}(B) := \{\exists h \in A, \forall b \in B \mid b \leq h\}$
2. Množina dolních mezí $\mathcal{D}(B) := \{\exists d \in A, \forall b \in B \mid b \geq d\}$

1.1.3 Nejvýše spočetná a nespočetná čísla

Nechť X je množina, potom X je:

- *spočetná* \iff existuje bijekce $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.
- *nejvýše spočetná* \iff je konečná nebo spočetná.
- *nespočetná* \iff není nejvýše spočetná.

Nekonečná \iff existuje prostá funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Konečná \iff není nekonečná.

1.2 Limity

1.2.1 Vlastní a nevlastní limita posloupnosti, podposloupnost

Reálná posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}$ je funkce $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Limita posloupnosti Nechť (a_n) je reálná posloupnost a $L \in \mathbb{R}^*$, kde \mathbb{R}^* je \mathbb{R} spolu s $\pm\infty$. Potom L je limita posloupnosti (a_n) , pokud:

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in U(L, \varepsilon).$$

Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

- *Okolí bodu* $b \equiv U(b, \varepsilon) := (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$
- *Prstencové okolí bodu* $b \equiv P(b, \varepsilon) := U(b, \varepsilon) \setminus \{b\} = (b - \varepsilon, b) \cup (b, b + \varepsilon)$

Vlastní a nevlastní limita Pokud $L \in \mathbb{R}$, pak konverguje a mluvíme o limitě *vlastní*, pokud $L = \pm\infty$, pak diverguje a mluvíme o limitě *nevlastní*.

Podposloupnost (b_n) je podposloupností posloupnosti (a_n) , pokud existuje taková posloupnost

$$\forall m \in \mathbb{N} : m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N},$$

kde $\forall n : b_n = a_{m_n}$. Značíme jako $(b_n) \prec (a_n)$.

1.2.2 Liminf a limsup posloupnosti

Limes inferior (resp. superior) reálné posloupnosti (a_n) definujeme jako $\liminf a_n$, resp. $\limsup a_n$.

- *Hromadný bod* A posloupnosti (a_n) , pokud je limitou nějaké podposloupnosti posloupnosti (a_n) .
- \mathcal{H} definujeme jako množinu hromadných bodů, neboli $\mathcal{H}(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \text{ je hromadný bod } (a_n)\}$.

1.3 Řady

1.3.1 Řada, částečný součet řady, součet řady

Řada je posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$.

Částečný součet řady (a_n) je $(s_n) := (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

Součet řady je limita $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lim s_n \in \mathbb{R}^*$.

1.3.2 Geometrická řada a její součet, absolutně konvergentní řada

Geometrická řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$, kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient.

Součet geometrické řady je $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$

Absolutně konvergentní řada Řada $\sum a_n$ je AK, pokud konverguje řada $\sum |a_n|$.

Trzení: Každá AK konverguje. Důkaz: $\sum a_n$ má (s_n) . Ukážeme, že (s_n) je Cauchyova...

1.4 Funkce

1.4.1 Limita funkce, jednostranná limita funkce

Limita funkce Funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$, kde a je limitní bod množiny M , limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in P(a, \delta) \cap M : f(x) \subseteq U(A, \varepsilon), \text{ tedy } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Limitní body množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ prvku $L \in \mathbb{R}^* \equiv \forall \varepsilon : P(L, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.

Jednostranná limita funkce Podobně, jen $\forall x \in P^{\pm}(a, \delta) \cap M \dots$

1.4.2 Exponenciála, logaritmus, kosinus a sinus

Exponenciála $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Eulerovo číslo $\equiv e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in \mathbb{I}$ a je rovno $\approx 2.718\dots$

Logaritmus $\log x$ je inverzní funkce k exponenciále, tedy $\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Platí důležité vztahy: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, $\log(1) = 0$, atd.

Cosinus a sinus $\forall t \in \mathbb{R} : \cos t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ a $\sin t := \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jdoucí z $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.4.3 Spojitost funkce v bodě a jednostranná spojitost

Spojitost funkce v bodě Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a , když

$$\forall \varepsilon, \exists \delta, \forall x \in U(a, \delta) \cap M : f(x) \subseteq U(f(a), \varepsilon).$$

Neboli funkce f je v bodě a spojitá, pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Jednostranná spojitost Podobně, jen je zleva $(-)$ resp. zprava $(+)$ spojitá a pro $\forall x \in U^\pm(a, \delta) \cap M \dots$

1.4.4 Asymptotické symboly

Symbol O Nechť je $M \subseteq \mathbb{R}$, $N \subseteq M$ a $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Potom pokud $\exists c \geq 0, \forall x \in N : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, pak píšeme $f(x) = O(g(x))$, pro $x \in N$. (Nesmí nastat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.)

Symbol o a \sim Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, kde

$\exists \delta \forall x \in P(A, \delta) \cap M (g(x) \neq 0)$ potom pro

- *malé o* : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = o(g(x))$ pro $x \rightarrow a$,
- *asymptotickou rovnost \sim* : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim g(x)$ pro $x \rightarrow a$.

1.4.5 Kompaktní, otevřená a uzavřená množina

Kompaktní množina Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *kompaktní*, když $\forall (a_n) \subseteq M$ má konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} \in M$. (Když je M omezená a uzavřená.)

Otevřená množina Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *otevřená*, když $\forall a \in M, \exists \delta : U(a, \delta) \subseteq M$.

Uzavřená množina Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *uzavřená*, když $\forall (a_n) \subseteq M : \lim a_n = a \implies a \in M$.

1.4.6 Lokální a globální a ostré extrémy

Globální extrém Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f má na M v bodě a *globální maximum* (resp. *minimum*), když $\forall x \in M : f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$.

Lokální extrém Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f má na M v bodě a *lokální maximum* (resp. *minimum*), když $\exists \delta, \forall x \in U(a, \delta) \cap M : f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$.

Ostrý extrém Pokud platí ostré nerovnosti v definici o lokálním/globálním extrému, jedná se o *ostrý extrém*.

1.5 Derivace

Oboustranný limitní bod (OLB) množiny M je $\forall \delta : P^-(a, \delta) \cap M \neq \emptyset \neq P^+(a, \delta) \cap M$.

1.5.1 Derivace funkce, jednostranná derivace funkce

Funkce f je diferencovatelná, pokud á vlastní limitu, tedy pokud je spojitá.

Derivace funkce Nechť bod $a \in M$ je limitní bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f = f(x) : M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Potom derivace f v bodě a je limita

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Jednostranná derivace funkce Nechť bod $a \in M$ je *levý* $(-)$, resp. *pravý* $(+)$, limitní bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f = f(x) : M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Potom derivace funkce f v bodě a *zleva*, resp. *zprava* je limita

$$f'_{\pm}(a) := \lim_{x \rightarrow a^{\pm}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

1.5.2 Standardní definice tečny

Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v a . *Tečnou* ke grafu G_f funkce f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímkou l definovanou:

$$l : y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Je to jediná přímka se sklonem (směrnicí) $f'(a)$ procházející bodem $(a, f(a))$.

1.5.3 Derivace vyšších řádů

Nechť $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 := f$ a pro $i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ platí, že $D(f_{i-1}) = M$ a $f_i := (f_{i-1})'$. Pak každou funkci $f^{(i)} := f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ nazveme *derivací řádu i* .

Alternativně:

Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, pokud $f : U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ na $U(a, \delta)$ má derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n - 1$, potom derivace řádu n je

$$f^{(n)}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

1.5.4 Ryze konvexní a konkávní funkce

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je *konvexní* (resp. *konkávní*), pokud

$$\forall a, b, c \in I, a < b < c : (b, f(b) \leq K(a, f(a), c, f(c)). \text{ (resp. } \geq)$$

Pro ostré nerovnosti je ryze konvexní/ ryze konkávní.

1.5.5 Inflexní bod

Nechť $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, kde a je OLB množiny M ; $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a l je tečna ke G_f v $(a, f(a))$. Tento bod je potom *inflexním bodem* grafu funkce f , pokud:

$$\exists \delta, \forall x \in P^-(a, \delta) \cap M \wedge \forall x' \in P^+(a, \delta) \cap M \implies (x, f(x)) \leq l \wedge (x', f(x')) \geq l,$$

(= bod, ve kterém $f'' = 0$ a $f' = 0$ nebo f' neexistuje; dochází ke změně směru funkce).

1.5.6 Svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu

Svislé asymptoty Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý (resp. pravý) limitní bod množiny M a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Potom když $\lim_{x \rightarrow b^\mp} f(x) = \pm\infty$, nazveme přímkou $x = b$ levou (resp. pravou) svislou asymptotou funkce f .

Asymptoty v nekonečnu Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$; $\pm\infty$ je limitní bod množiny M ; $a, b \in \mathbb{R}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Potom když $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, nazveme přímkou $y = ax + b$ *asymptotou* funkce f v $\pm\infty$.

1.5.7 Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce

Taylorův polynom funkce Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : f, f', f'', \dots, f^{n-1} : U(b, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ a $\exists f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Potom polynom

$$T_n^{f,b}(x) := \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(b)}{j!} (x - b)^j,$$

nazveme Taylorovým polynomem funkce f řádu n se středem v b .

Příklady důležitých Taylorových polynomů: $e^x = T_n^{f,0}(x)$, $\sin(x) = T_{2n+1}^{f,0}(x)$.

Taylorova řada funkce Nechť $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)} : U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Pokud $\forall x \in U(a, \delta)$ platí

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n,$$

pak řekneme, že funkce f na $U(a, \delta)$ je součtem své *Taylorovy řady* se středem v a .

1.6 Integrály

1.6.1 Primitivní funkce

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální interval a $F, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom F je primitivní funkce k f , neboli $F = \int f$, pokud $F' = f$ na celém I .

1.6.2 Stejnomořná spojitost

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, potom f na M je *stejnomořně spojitá*, pokud:

$$\forall \varepsilon, \exists \delta : \forall a, b \in M \wedge |a - b| \leq \delta \implies |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon.$$

Platí, že každá spojitá funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je pro kompaktní $M \subseteq \mathbb{R}$ *stejnomořně spojitá*.

1.6.3 Newtonův integrál funkce (nevlastní)

Nechť $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a < b$, má primitivní funkci F a existují vlastní limity $F(a) := \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ a $F(b) := \lim_{x \rightarrow b} F(x)$, potom Newtonův integrál funkce f na intervalu (a, b) definujeme jako:

$$\int_a^b f := F(b) - F(a) = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x).$$

1.6.4 Riemannův integrál funkce a množina míry O

Riemannův integrál funkce Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a < b$, je riemannovsky integrovatelná, neboli $f \in R(a, b)$, pokud $\exists c, \forall \varepsilon, \exists \delta, \forall (\bar{a}, \bar{t})$ platí, že: $\|\bar{a}\| < \delta \implies |R(\bar{a}, \bar{t}, f) - c| < \varepsilon$.
Píšeme také jako:

$$(R) \int_a^b f = c \text{ nebo jako } (R) \int_a^b f(x) dx = c.$$

Množina míry O Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má míru 0, pokud platí:

$$\forall \varepsilon, \exists [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}, \text{ kde } a_n < b_n : M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \wedge \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

1.6.5 Henstock-Kurzweilův integrál

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je HK-integrovatelná, neboli $f \in HK(a, b)$, pokud $\exists c, \forall \varepsilon, \exists \delta_c$, kalibr na $[a, b]$, že pro \forall dělení s body (\bar{a}, \bar{t}) intervalu $[a, b]$ platí, že (\bar{a}, \bar{t}) je δ_c -jemné $\implies |R(\bar{a}, \bar{t}, f) - c| < \varepsilon$.
Píšeme také jako:

$$(HK) \int_a^b f = c \text{ nebo jako } (HK) \int_a^b f(x) dx = c$$

1.6.6 Délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa

Délka grafu funkce Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má ratifikovatelný graf, pokud:

$$\ell(G_f) := \sup(\{L(\bar{a}, f) \mid \bar{a} \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}).$$

Plocha mezi grafy Nechť $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $f \leq g$. Plocha útvaru $G_{f,g}$ je potom:

$$A(G_{f,g}) := \inf(\{M(f, g, \bar{a}) \mid \bar{a} \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}).$$

Vzorec pro výpočet plochy mezi grafy je: $A(G_{f,g}) := \int_a^b (g - f)$.

Objem rotačního tělesa Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$. Objem útvaru T_f je:

$$V(T_f) := \inf(\{K(f, \bar{a}) \mid \bar{a} \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}).$$

K definujeme jako součet a $T_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \wedge y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$.

Vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa je: $V(a, b, f) = V(T_f) := \pi \int_a^b f^2$.

2 Věty a tvrzení bez důkazu

2.1 Reálná čísla

2.1.1 Definice a vlastnosti reálných čísel

Reálná čísla tvoří množinu $\mathbb{R} := C / \sim$, kde C je množina všech Cauchyových posloupností a \sim je relace shodnosti na C . Kde pro $k, n_0, m, n \in \mathbb{N}$ je:

- *Cauchyova posloupnost* $(a_n) \subseteq \mathbb{Q} : \forall k \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| \leq \frac{1}{k}$.
- *Relace shodnosti* $(a_n) \sim (b_n) \iff \forall k \exists n_0 : n \geq n_0 \implies |a_n - b_n| \leq \frac{1}{k}$.

Vlastnosti reálných čísel Na množině \mathbb{R} je dána binární relace $(<) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, operace sčítání $(+)$, násobení (\cdot) a význačné prvky $0, 1$, tedy uspořádané těleso $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$.
(Platí komutativita, distributivita, asociativita, existence $0, 1$, atd.)

2.2 Limity

2.2.1 O podposloupnostech a existence monotónní posloupnosti

O podposloupnostech Nechť (a_n) je libovolná reálná posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

1. (a_n) má podposloupnost, která má limitu.
2. (a_n) nemá limitu $\iff (a_n)$ má dvě podposloupnosti s dvěma různými limitami.
3. $\lim a_n \neq A \iff (a_n)$ má podposloupnost, která má limitu různou od A .

Existence monotónní posloupnosti Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

2.2.2 Geometrická posloupnost a Liminf a limsup

Limita geometrická posloupnosti Nechť $q \in \mathbb{R}$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}.$$

Liminf a limsup Pro každou $(a_b) \subseteq \mathbb{R}$ je množina $H(a_n)$ neprázdná. V lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ má minimum i maximum.

2.3 Řady

2.3.1 O harmonických číslech a Riemannova věta

O harmonických číslech Nechť $h_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ jsou harmonická čísla, potom $\exists c > 0$, t.ž.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : h_n = \log n + \gamma + \Delta_n,$$

kde c je konstanta, $|\Delta_n| \leq \frac{c}{n}$, a $\gamma = 0.57721 \dots$ je tzv. Eulerova konstanta.

Harmonická čísla jsou (s_n) harmonické řady. Eulerova konstanta $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$.

Riemannova věta Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada typu $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$, tedy nechť platí:

1. $\lim a_n = 0$,
2. $\sum a_{k_n} = +\infty$, kde a_{k_n} jsou kladné sčítance řady,
3. $\sum a_{z_n} = -\infty$, kde a_{z_n} jsou záporné sčítance řady,

potom pro každé $S \in \mathbb{R}^*$ existuje bijekce $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, t.ž.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$.

2.4 Funkce

2.4.1 O Riemannově funkci a Limita složené funkce

O Riemannově funkci Riemannova funkce je spojitá právě a jenom v iracionálních číslech.

Riemannova funkce $r : \mathbb{R} \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, tedy $r(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ a } \frac{m}{n} \text{ je zlomek v základním tvaru.} \end{cases}$

Limita složené funkce Nechtě $a, b, L \in \mathbb{R}^*$, $M, N \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod M , b je limitní bod N a nechtě funkce $g : M \rightarrow N$ a $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ mají limity $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ a $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$.

Složená funkce $f(g) : M \rightarrow \mathbb{R}$ má potom limitu $\lim_{x \rightarrow a} f(g)(x) = L \iff$ platí jedna z podmínek:

$$\begin{cases} b \in N \implies f(b) = L \dots \dots \dots f(x) \text{ je spojitá v } L \\ \exists \delta, \forall x \in P(A, \delta) \cap M : b \notin g(x) \dots \text{ na nějakém prstencovém okolí funkce nenabývá hodnotu } b \end{cases}.$$

2.4.2 Heineho definice spojitosti, Blumbergova definice spojitosti a počet spojitých funkcí

Heineho definice spojitosti Funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M \subseteq \mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$\forall (a_n) \subseteq M : \lim a_n = a \implies \lim f(a_n) = f(a).$$

Blumbergova definice spojitosti $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists M \subseteq \mathbb{R}$, t.ž.: M je hustá v \mathbb{R} a restrikce $f|_M$ je spojitá funkce.

- *Hustá množina* N v M : $\forall a \in M, \forall \delta : U(a, \delta) \cap N \neq \emptyset$
- *Restrikce (zúžení)*: $A \subseteq B, C; f : B \rightarrow C$. Restrikce na A je funkce $f|_A : A \rightarrow C \equiv \forall x \in A : (f|_A)(x) := f(x)$

Počet spojitých funkcí \exists bijekce $h : \mathbb{R} \rightarrow C(\mathbb{R})$, kde $C(M)$ definujeme pro $M \subseteq \mathbb{R}$ jako

$$C(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\}.$$

2.5 Derivace

2.5.1 Derivace složené funkce a derivace inverzní funkce

Derivace složené funkce Nechtě $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M , $g : M \rightarrow N$ je spojitá v a s derivací $g'(a) \in \mathbb{R}^*$; $g(a) \in N$ je limitní bod množiny $N \subseteq \mathbb{R}$. Nechtě $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce s derivací $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$, potom složená funkce $f(g) : M \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a), \text{ pokud je součin napravo definován.}$$

Alternativně:

Nechtě f má derivaci v bodě b , funkce g má derivaci v bodě a , $b = g(a)$ a g je spojitá v a . Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Derivace inverzní funkce Nechtě $a \in M \subseteq \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je prostá funkce s derivací $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a inverzní funkce $f^{-1} : f[M] \rightarrow M$ je spojitá v $b := f(a)$, potom když:

1. $f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$
2. $f'(a) = 0$ a f roste (resp. klesá) v bodě a , pak $(f^{-1})'(b) = \pm\infty$
3. $f'(a) = \pm\infty$ a b je limitní bod množiny $f[M]$, pak $(f^{-1})'(b) = 0$.

2.5.2 l'Hospitalovo pravidlo a konvexitá a konkavitá f"

l'Hospitalovo pravidlo Nechtě $a \in \mathbb{R}; f, g : P^+(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mají vlastní derivace, $g' \neq 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, potom:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ pokud poslední limita existuje.}$$

Věta platí i pro $P^-(a, \delta), P(a, \delta)$ a pro $a = \pm\infty$.

Konvexitá a konkavitá f'' : Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, $D(f) = I^0, \forall c \in I^0, \exists f''(c) \in \mathbb{R}^*$.

1. $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$) $\implies f$ je *konvexní* (resp. *konkávní*)
2. $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$) $\implies f$ je *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*).

2.6 Integrály

2.6.1 Lagrangeův a Cauchyův zbytek Taylorova polynomu a Bellova čísla

Nechť $f, f', f'', \dots, f^{(n+1)} : U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Lagrangeův zbytek $\forall x \in P(a, \delta) \exists c$ mezi a a x , t.ž.:

$$R_n^{f,a}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Cauchyův zbytek $\forall x \in P(a, \delta) \exists c$ mezi a a x , t.ž.:

$$R_n^{f,a}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!} \cdot (x-a)$$

Bellova čísla $\forall x \in (-1, 1)$ platí: $e^{e^x-1} = \exp(\exp(x)-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$, kde B_n je počet rozkladů množiny.

2.6.2 Riemann = Newton a integrace substitucí

Riemann = Newton Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je k ní primitivní, potom

$$\lim_{||\bar{a}|| \rightarrow 0} R(\bar{a}, \bar{t}, f) = F(b) - F(a).$$

Riemannův součet: $R(\bar{a}, \bar{t}, f) := \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-2}) \cdot f(t_i)$, kde \bar{a} je dělení intervalu I , tedy $\bar{a} = (a_0, \dots, a_k)$.

Integrace substitucí Nechť $I, J \subseteq \mathbb{R}$ jsou netriviální intervaly; $g : I \rightarrow J$; $g' : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

1. $F = \int f$ na $J \implies F(g) = \int f(g) \cdot g'$ na I
2. pokud g je surjekce $\wedge g' \neq 0$ na I , pak platí: $G = \int f(g) \cdot g'$ na $I \implies G(g^{-1}) = \int f$ na J .

2.6.3 Per partes a int(r(x))

Per partes Nechť $f, g, F, G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a < b \in \mathbb{R}^*$; F (resp. G) je primitivní k f (resp. ke g). Potom, když jsou definovány dva ze tří členů T_i , pak platí:

$$(N) \underbrace{\int_a^b fG}_{T_1} = \underbrace{[FG]_a^b}_{T_2} - (N) \underbrace{\int_a^b Fg}_{T_3}.$$

(= pro neurčitý integrál: $\int f'g = fg - \int fg'$)

Integrál $r(x)$: \forall racionální funkce $r(x)$, kde $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} : \mathbb{R} \setminus Z(r) \rightarrow \mathbb{R}$, existuje funkce $R(x)$ ve tvaru:

$$R(x) = r_0(x) + \sum_{i=1}^k s_i \cdot \log(|x - \alpha|) + \sum_{i=1}^l t_i \cdot \log(a_i(x)) + \sum_{i=1}^m u_i \cdot \arctan(b_i(x)),$$

kde $r_0(x)$ je racionální funkce; $k, l, m \in \mathbb{N}_0$; prázdné $\sum := 0$; $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$; $\alpha_i \in Z(r(x))$; $a_i(x)$ jsou ireducibilní trojčleny a $b_i \in \mathbb{R}[x]$ jsou nekonstantní lineární polynomy, t.ž.: na každém $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R} \setminus Z(r(x))$ platí $R(x) = \int r(x)$.
Platí, že *Ireducibilní trojčlen je polynom stupně 2 a* $Z(r) := \{a \in \mathbb{R} \mid q(a) = 0\}$.

2.6.4 O restrikcích, Lebesgueova věta a ZVA 2

O restrikcích Pokud $a < b < c \in \mathbb{R}$ a $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$, pak: $f \in R(a, c) \iff f \in R(a, b) \wedge f \in R(b, c)$, neboli

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Lebesgueova věta Pro každou $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí, že $f \in R(a, b) \iff f$ je omezená a nespojitá (*) s mírou 0.
(*) $BN(f) := \{x \in M \mid f \text{ je nespojitá v } x\}$.

Základní věta analýzy 2 Nechtě $f, F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a < b$; F je primitivní k f a $f \in R(a, b)$. Potom existují vlastní limity $F_a := \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ a $F_b := \lim_{x \rightarrow b} F(x)$ a platí:

$$(R) \int_a^b f = F_b - F_a = (N) \int_a^b f.$$

2.6.5 Riemann = Darboux a HK. int a N. int

Riemann = Darboux Nechtě $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, potom:

$$f \in R(a, b) \iff \int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R}.$$

Pokud platí obě strany ekvivalence, pak: $(R) \int_a^b f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$.

HK. \int a N. \int : Nechtě $a < b$; $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde F je spojitá a $F' = f$ na (a, b) . Pak $f \in HK(a, b)$ a platí

$$(HK) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (N) \int_a^b f.$$

2.6.6 Délka grafu a Integrální kritérium

Délka grafu Nechtě $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $f' \in R(a, b)$, potom:

$$\ell(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \in (0, +\infty).$$

Integrální kritérium Nechtě $m \in \mathbb{Z}$ a $f : [m, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí funkce. Potom

$$\text{řada } \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_m^n f < +\infty.$$

3 Věty a tvrzení s důkazem

3.1 Reálná čísla

3.1.1 Odmocnina ze dvou není racionálních a Cantorova věta

Věta ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$): Rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru \mathbb{Q} řešení.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\exists a, b \in \mathbb{N}$, t.ž.: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Máme tedy $a^2 = 2b^2$, kde a^2 je sudé. Neboli $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Dostáváme $(2c)^2 = 2b^2 \iff 4c^2 = 2b^2 \iff b^2 = 2c^2$, neboli b^2 je sudé, proto i b je sudé, což je spor s nesoudělností a, b . \nmid ■

Cantorova věta: Pro žádnou množinu X neexistuje surjekce $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ z X na její potenci.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je surjektivní, kde $X \neq \emptyset$. Dále uvažme:

$$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subseteq X.$$

Protože f je *surjektivní*, tak $\exists y \in X$ t.ž. $f(y) = Y$.

(a) Pokud $y \in Y$, pak podle definice množiny Y platí, že $y \notin f(y) = Y$.

(b) Pokud $y \notin Y = f(y)$, má y vlastnost definující množinu Y a $y \in Y$.

V obou případech se jedná o spor. \nmid ■

3.2 Limity

3.2.1 Jendoznačnost limity a Bolzano-Weierstrassova věta

Věta (Jendoznačnost limity): Limita posloupnosti je *jednoznačná* $\equiv \lim a_n = K \wedge \lim a_n = L \implies K = L$. (Neboli když má nejvýše jednu limitu.)

Důkaz. Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a nechť $\exists \varepsilon$.

Podle *definice limity posloupnosti* $\exists n_0$, t.ž.: $n \geq n_0 \implies a_n \in U(K, \varepsilon)$ i $a_n \in U(L, \varepsilon)$.

Dostáváme $\forall \varepsilon : U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \neq \emptyset$. Tedy $K = L$. ■

Věta (Bolzano-Weierstrassova): Omezená posloupnost reálných čísel má vždy konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Nechť (a_n) je omezená posloupnost a (b_n) je monotónní podposloupností (a_n) , neboli $(b_n) \preceq (a_n)$.

(b_n) je tak zjevně je omezená a podle *věty o robustně monotónní posloupnosti* má vlastní limitu. ■

3.2.2 Limita a uspořádání a Cauchyova podmínka

Věta (Limita a uspořádání): Nechť (a_n) a $(b_n) \in \mathbb{R}$ s $\lim a_n = K \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = L \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

1. $K < L \implies \exists n_0 : \forall m, n \geq n_0$ je $a_m < b_n$.
2. $\forall n_0, \exists m, n \geq n_0 \wedge a_m \geq b_n \implies K \geq L$.

Důkaz.

1. Nechť $K < L$, pak $\exists \varepsilon : U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Podle *definice limity* máme $\exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies a_m \in U(K, \varepsilon)$ a $b_n \in U(L, \varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \implies a_m < b_n$.
 2. Triviálně obměnou implikace.
-

Věta (Cauchyova podmínka): Posloupnost reálných čísel (a_n) je konvergentní $\iff (a_n)$ je Cauchyova.

Důkaz. \implies Nechť ε je dáno a $\lim a_n = a$.

Potom $\exists n_0 : n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy:

$$m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pak (a_n) je Cauchyova posloupnost.

\impliedby Nechť (a_n) je Cauchyova posloupnost. Víme, že (a_n) je omezená a proto má podle *Bolzano-Weierstrassovy věty* konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou a . Pro dané ε tak máme $n_0 : n \geq n_0 \implies |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a zároveň $n \geq n_0 \implies |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dostáváme tedy, že $a_n \rightarrow a$. ■

(Použili jsme vyjádření $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$ a trojúhelníkovou nerovnost $|c + d| \leq |c| + |d|$.)

3.3 Řady

3.3.1 Nutná podmínka konvergence řady a Harmonická řada

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence řady): Když řada $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Když $\sum a_n$ konverguje, pak $S := \lim s_n \in \mathbb{R}$, kde $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$.

Podle výsledků o limitě podposloupnosti a podle aritmetiky limit dostáváme:

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0.$$

Využíváme platnosti $\lim(s_n) = \lim(s_{n-1}) = S$.

Tvrzení (Harmonická řada): Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ diverguje a má součet $+\infty$.

Důkaz. Necht' (h_n) jsou částečné součty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a (s_n) jsou částečné součty $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Potom platí $\forall n : \frac{1}{n} > a_n$, tedy i $\forall n : h_n > s_n$. Protože podle věty o jednom strážníkově se $\lim s_n = +\infty$, pak i $\lim h_n = +\infty$ a proto je $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Důkaz. (Alternativně)

Pro částečné součty n a $2n$ platí:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \wedge s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \\ s_{2n} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Proto $\forall n \in \mathbb{N} : s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ a posloupnost (s_n) tím splňuje Cauchyovu podmínku a diverguje.

3.4 Funkce

3.4.1 Heineho definice a Aritmetika limit funkcí

Věta (Heineho definice): Necht' $M \subseteq \mathbb{R}$, K, L jsou prvky \mathbb{R}^* , K je limitní bod množiny M a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow K} f(x) = L \iff \forall (a_n) \subseteq M \setminus \{K\} : \lim a_n = K \implies \lim f(a_n) = L.$$

Tedy L je limita funkce f v $K \iff$ pro každou posloupnost (a_n) v M , která má limitu K , ale nikdy se K nerovná, funkční hodnoty $(f(a_n))$ mají limitu L .

Důkaz.

\implies Předpokládáme, že $\lim_{x \rightarrow K} f(x) = L$, že $(a_n) \subseteq M \setminus \{K\}$ má limitu K a že ε je dáno. Potom

$$\exists \delta : \forall x \in M \cap P(K, \delta) \text{ je } f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Pro toto δ zároveň $\exists n_0 : n \geq n_0 \implies a_n \in P(K, \delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \implies f(a_n) \in U(L, \varepsilon)$ a $f(a_n) \rightarrow L$.

\Leftarrow Za pomoci obměny $\neg \implies$. Předpokládáme, že $\lim_{x \rightarrow K} f(x) = L$ neplatí a proto ani pravá strana ekvivalence neplatí. Tedy pro bod b :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists b = b(\delta) \in M \cap P(K, \delta), \text{ t.ž.: } f(b) \notin U(L, \varepsilon).$$

Položíme pro $n \in \mathbb{N} : \delta = \frac{1}{n}$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ vybereme bod:

$$b_n := b\left(\frac{1}{n}\right) \in M \cap P\left(K, \frac{1}{n}\right), \text{ t.ž.: } f(b_n) \notin U(L, \varepsilon).$$

Posloupnost (b_n) leží v $M \setminus \{K\}$ a konverguje ke K , ale posloupnost hodnot $(f(b_n))$ nekonverguje k L . Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. \nexists

Věta (Aritmetika limit funkcí): Necht' $M \in \mathbb{R}$, necht' $a, K, L \in \mathbb{R}^*$, kde a je limitní bod množiny M a necht' funkce $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mají limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Potom platí
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = K + L \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = K \cdot L \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}, \text{ kde pro } g(x) = 0 \text{ definujeme } \frac{f(x)}{g(x)} := 0. \end{cases}$$

Důkaz. Z důvodu podobnosti probereme jen podíl.

Necht' $(a_n) \subseteq M \setminus \{a\}$ s $\lim a_n = a$. Podle *Heineho definice* limity funkce platí:

\Rightarrow Necht' $\lim f(a_n) = K$, $\lim g(a_n) = L$ a předpokládejme, že $L \neq 0$, proto i $\forall n \geq n_0 : g(a_n) \neq 0$. Zároveň předpokládejme, že $K, L \neq \pm\infty$, tedy že konvergují. Podle věty o AK posloupností se pak limity rovnají:

$$\lim \left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)} \right) = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L}.$$

\Leftarrow Protože tento vztah platí pro každou posloupnost $\left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)} \right)$ s (a_n) jako výše, tak podle *Heineho definice* je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}.$$

■

3.4.2 Nabývání mezíhodnot a Princip minima a maxima

Věta (Nabývání mezíhodnot): Necht' $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. Potom $\exists d \in (a, b) : f(d) = c$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f(a) < c < f(b)$ (pro opačnou nerovnost obdobně).

Necht' $A := \{x \in [a, b] \mid f(x) < c\}$ a $d := \sup(A) \in [a, b]$.

Číslo d je korektně definované, protože množina $A \neq \emptyset$ ($a \in A$) a je shora omezená (b).

Ukážeme, že ke sporu vede $f(d) < c$ i $f(d) > c$, proto $f(d) = c$. Ze spojitosti funkce f v a a v b plyne, že $d \in (a, b)$.

- (a) Pro $f(d) < c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že $\exists \delta : x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) < c$. Pak ale A obsahuje větší čísla než d . Dostáváme spor, protože d je horní mez množiny A .
- (b) Pro $f(d) > c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že $\exists \delta : x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) > c$. Pak ale $\forall x \in [a, d]$ dostatečně blízko d leží mimo A , což je ve sporu d , jakožto nejmenší horní mezí množiny A .

■

Věta (Princip minima a maxima): Necht' $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná kompaktní množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $\exists a, b \in M, \forall x \in M : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Řekneme, že f nabývá na M $\begin{cases} \text{v bodu } a \text{ minimum (nejmenší hodnotu) } f(a) \\ \text{v bodu } b \text{ maximum (největší hodnotu) } f(b). \end{cases}$

Důkaz. Dokážeme existenci maxima (pro minimum obdobně).

Zjevně platí, že $\forall x \in M : f(x) \neq \emptyset$. Ukážeme, že M je shora omezená sporem.

Kdyby nebyla, tak $\exists (a_n) \subseteq M : \lim f(a_n) = +\infty$.

Podle kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim(a_{m_n}) \in M$. Pak i $\lim f(a_{m_n}) = +\infty$, což je spor, protože podle *Heineho definice* je $\lim f(a_{m_n}) = f(b)$. \nmid

Lze definovat $\forall x \in M : s := \sup(f(x)) \in \mathbb{R}$ a podle definice suprema $\exists (a_n) \subseteq M$ s $\lim f(a_n) = s$.

Díky kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim a_{m_n} \in M$.

Podle *Heineho definice* je $\lim f(a_{m_n}) = f(b) = s$. Protože $s = f(b)$ je horní mezí, tak $\forall x \in M : f(b) \geq f(x)$.

■

3.5 Derivace

3.5.1 Nutná podmínka extrému a Leibnizův vzorec

Věta (Nutná podmínka extrému): Necht' $b \in M$ je OLB $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists f'(b) \in \mathbb{R}^*$ a $f'(b) \neq 0$. Potom

$$\forall \delta \exists c, d \in U(b, \delta) \cap M : f(c) < f(b) < f(d).$$

Tedy funkce f nemá v bodě b lokální extrém, nemá v b ani lokální minimum ani lokální maximum.

Důkaz. Necht' $b \in M \subseteq \mathbb{R}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a δ je dáno. Necht' $f'(b) < 0$ (opačná nerovnost obdobně). Vezmeme tak malé ε , že $\exists y \in U(f'(b), \varepsilon) \implies y < 0$. Nyní podle definice derivace funkce v bodě:

$$\exists \theta : x \in P(b, \theta) \cap M \implies \overbrace{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}^{<0} \in U(f'(b), \varepsilon).$$

Tedy když $P^-(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$.

Podobně když $x \in P^+(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) < f(b)$.

Předpokládejme, že $\theta < \delta$ a $\exists c \in P^+(b, \theta) \cap M$ a $d \in P^-(b, \theta) \cap M$. Prvky c, d existují, protože b je OLB M . Proto platí $c, d \in U(b, \delta) \cap M \implies f(c) < f(b)$ a $f(d) > f(b)$. ■

Věta (Leibnizův vzorec): Necht' $b \in M \subseteq \mathbb{R}$, b je LB množiny M , $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ a f nebo g je spojitá v b . Potom

$$(fg)'(b) = f'(b) \cdot g(b) + f(b) \cdot g'(b),$$

když pravá strana není neurčitý výraz.

Důkaz. Necht' je g spojitá v b (druhý případ obdobně). Podle AL funkcí platí

$$\begin{aligned} (fg)'(b) &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x - b} = \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)g(x) - \overbrace{f(b)g(x) + f(b)g(x) - f(b)g(b)}^0}{x - b} = \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{(f(x) - f(b))g(x) + f(b)(g(x) - g(b))}{x - b} = \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \cdot \lim_{x \rightarrow b} (g(x) + f(b)) \cdot \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = \\ &\stackrel{\text{spojitost}}{=} f'(b) \cdot g(b) + f(b) \cdot g'(b). \end{aligned}$$

3.5.2 Lagrangeova věta a Derivace a monotonie 1

Věta (Lagrangeova): Pokud f je hezká funkce, pak $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} =: z$.

Hezká funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá.

Důkaz. Necht' $g(x) := f(x) - (x - a) \cdot z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje předpoklady Rolleovy věty, především $g(a) = g(b) = f(a)$, takže $0 = g'(c) = f'(c) - z$ pro nějaké $c \in (a, b)$. ■

Rolleova věta: f je hezká & $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Věta (Derivace a monotonie 1): Necht' $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $\forall c \in I^0, \exists f'(c)$. Potom

1. $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) na $I^0 \implies f$ na I neklesá (resp. neroste)
2. $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) na $I^0 \implies f$ na I roste (resp. klesá).

Kde $I^0 \subseteq I$ značí vnitřek intervalu I , tedy $I^0 = \{a \in I \mid \exists \delta : U(a, \delta) \subseteq I\}$.

Důkaz. Necht' je $f' < 0$ na I^0 (klesá) a $x < y$ jsou libovolná čísla v I .

Podle Lagrangeovy věty pro nějaké $z \in (x, y) \subseteq I^0$ je $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) < 0$.

Protože $y - x > 0$, je $f(x) > f(y)$ a f na I klesá. (Zbývající tři možnosti obdobně.) ■

3.5.3 Taylorův polynom a Nejednoznačnost primitivní funkce

Lemma (o polynomech): Necht $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg p \leq n$. Pak $\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \implies p(x) \equiv 0$.

Důkaz. Indukcí podle n .

- (i) Pro $n = 0$ platí. $p(x) = a_0$ a $\frac{a_0}{1} \rightarrow 0$ je $a_0 = 0$.
- (ii) Pro $n > 0$ předpokládejme, že platí $\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \implies p(x) \equiv 0$.

Potom $p(b) = \lim_{x \rightarrow b} p(x) = 0$, tedy b je kořenem $p(x) = (x-b) \cdot q(x)$, kde $q(x) \in \mathbb{R}$ je stupně nejvýše $n-1$.

Dostáváme tak z indukčního předpokladu

$$0 = \lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cancel{(x-b)} \cdot q(x)}{\cancel{(x-b)}^n} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$$

neboli, že $q(x) = 0$, proto i $p(x) = (x-b) \cdot 0 = 0$.

□

Věta (Taylorův polynom) Necht $n \in \mathbb{N}$ a $f : U(b, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou jako v definici *Taylorova polynomu*. $T_n^{f,b}(x)$ je jediný polynom $p(x) \in \mathbb{R}$ stupně nejvýše n , t.ž.:

$$f(x) = p(x) + o((x-b)^n) \text{ pro } x \rightarrow b.$$

Důkaz. Indukcí podle n dokážeme aproximaci $T_n^{f,b}$, tj. že $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0$.

- (i) Pro $n = 1$: podle AL funkcí je $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - T_1^{f,b}(x)}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} - \lim_{x \rightarrow b} f'(b) = f'(b) - f'(b) = 0$.
- (ii) Pro $n \geq 2$: podle L'Hospitalova pravidla a indukce máme, že:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{(f(x) - T_n^{f,b}(x))'}{((x-b)^n)'} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',b}(x)}{(x-b)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0.$$

Necht $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg(p) \leq n$ splňuje, že $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - p(x)}{(x-b)^n} = 0$, potom ale:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x) - f(x)}{(x-b)^n} + \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Podle předešlého *Lemmatu o polynomech* tak dostáváme $p(x) = T_n^{f,b}(x)$.

■

Věta (Nejednoznačnost primitivní funkce) Necht $I \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální interval; $F_1, F_2, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a F_1, F_2 je primitivní k f . Potom $\exists c \in \mathbb{R} : F_1 - F_2 = c$ na I .

Důkaz. Necht $\exists a, b \in I$, $a < b$.

Podle *Lagrangeovy věty o střední hodnotě*, použité pro funkci $F_1 - F_2$ a interval $[a, b]$ platí, že:

$$\exists c \in (a, b) : \frac{(F_1 - F_2)(b) - (F_1 - F_2)(a)}{b - a} = (F_1 - F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) = f(c) - f(c) = 0.$$

Dostáváme tedy pro nějaké c , že $\forall x \in I : F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a) \implies F_1(x) - F_2(x) = c$.

■

3.6 Integrály

3.6.1 Monotonie Newtonova integrálu a Derivace jsou Darbouxovy

Věta (Monotonie Newtonova integrálu): Pokud $f, g \in N(a, b)$ a $f \leq g$ na (a, b) , pak $(N) \int_a^b f \leq (N) \int_a^b g$.

Důkaz. Nechť F , resp. G , je primitivní k f , resp. ke g , a necht' čísla $c, d \in (a, b)$, kde $c < d$, jsou libovolná. Použijeme *Lagrangeovu větu o střední hodnotě* pro $F - G$ a interval $[c, d]$.

Pro nějaký bod $e \in (c, d)$ platí:

$$\begin{aligned}(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) &= (F - G)'(e) \cdot (d - c) = \\ &= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c) = \\ &= (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \leq 0.\end{aligned}$$

Proto platí $F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c)$.

Tato nerovnost se zachovává při lineárních přechodech $c \rightarrow a, d \rightarrow b$ a dostaneme tak $(N) \int_a^b f \leq (N) \int_a^b g$. ■

Věta (Derivace jsou Darbouxovy): Nechť $I \neq \emptyset$ je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má primitivní funkci $\implies f$ má Darbouxovu vlastnost.

Důkaz. Nechť $a < b$; $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; F je primitivní k f a $f(a) < c < f(b)$. Pro opačné nerovnosti obdobně. Uvažme funkci $G(x) := F(x) - cx : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Patrně $G' = F' - c = f - c$ na $[a, b]$ a G je proto spojitá.

Podle věty o Principu minima a maxima G nabývá v nějakém $d \in [a, b]$ minimum a podle tvrzení O derivaci a monotonii 2 plyne z

$$G'(a) = f(a) - c < 0 \text{ a } G'(b) = f(b) - c > 0, \text{ že } d \in (a, b).$$

Nakonec podle věty O nutné podmínce extrému se

$$G'(d) = f(d) - c = 0, \text{ takže } f(d) = c.$$

■

3.6.2 Bachetova identita

Tvrzení (Bachetova identita): Nechť $p, q \in \mathbb{R}[x]$ nemají společný kořen, tj.: pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí, že $p(z) = q(z) = 0$. Potom $\exists r, s \in \mathbb{R}[x]$, t.ž.:

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1.$$

Důkaz. Nechť $p, q \in \mathbb{R}[x]$ a $S := \{r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) \mid r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

Nechť polynom $0 \neq t(x) \in S$, má nejmenší stupeň.

Libovolný $a(x) \in S$ jím dělíme se zbytkem:

$$a(x) = t(x) \cdot b(x) + c(x),$$

kde $b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $\deg(c(x)) < \deg(t(x))$ nebo $c(x) = 0$.

Protože ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot t(x) \in S$, platí $c(x) = 0$ a $a(x) = b(x)t(x)$, takže $t(x)$ dělí každý prvek v S .

Ale $p(x), q(x) \in S$ a $t(x)$ je oba dělí.

Protože $p(x)$ a $q(x)$ nemají společný kořen, tak podle Zvalgovy věty * je $t(x)$ nenulový konstantní polynom.

B.Ú.N.O. je $t(x) = 1$. Tedy $1 \in S$ a máme uvedenou identitu. ■

* Zvalgova věta: $\forall p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}, \exists d \in \mathbb{C} : p(d) = 0$.

3.6.3 Neomezené funkce jsou špatné a Baireova věta

Tvrzení (Neomezené funkce jsou špatné): Pokud funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neomezená, pak $f \notin R(a, b)$.
(Pokud je neomezená, pak není riemannovsky integrovatelná.)

Důkaz. Předpokládáme, že $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neomezená. Ukážeme, že:

$$\forall n, \exists(\bar{a}, \bar{t}) : \|\bar{a}\| < \frac{1}{n} \wedge |R(\bar{a}, \bar{t}, f)| > n.$$

To je však v rozporu s *Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost* funkce f .

Z neomezenosti f a z kompaktnosti $[a, b]$ vyplývá, že existuje konvergentní posloupnost $(b_n) \subseteq [a, b]$ s limitou $\lim b_n = \alpha \in [a, b]$ a s $\lim |f(b_n)| = +\infty$.

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$.

Jako \bar{a} vezmeme libovolné dělení $\bar{a} = (a_0, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ s $\|\bar{a}\| < \frac{1}{n}$, ale t.ž.: $\exists j \in [k] : \alpha \in [a_{j-1}, a_j]$.

Pak vybereme libovolné body $\forall i \neq j : t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ a uvážíme neúplný *Riemannův součet*

$$s := \sum_{i=1, i \neq j}^k (a_i - a_{i-1})f(t_i).$$

Nyní vybereme zbývající bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, že:

$$|(a_j - a_{j-1})f(t_j)| > |s| + n.$$

To lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké n .

Pak definujeme \bar{t} jako sestávající ze všech těchto bodů a pomocí trojúhelníkové nerovnosti dostaneme požadované:

$$|R(\bar{a}, \bar{t}, f)| \geq |(a_j - a_{j-1})f(t_j)| - |s| > n.$$

■

Věta (Baireova): Pokud $a < b \in \mathbb{R}$ a $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá množina M_n není řídká.

Důkaz. Nechť v $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je každá množina M_n řídká, odvodíme spor.

M_1 je řídká $\implies \exists[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$, t.ž.: $a_1 < b_1$ a $[a_1, b_1] \cap M_1 = \emptyset$.

M_2 je řídká $\implies \exists[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, t.ž.: $a_2 < b_2$ a $[a_2, b_2] \cap M_2 = \emptyset$, atd.

Takto získáme posloupnost vnořených intervalů:

$$[a, b] \supseteq [a_1, a_2] \supseteq [a_2, a_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots, \text{ t.ž.:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n \wedge [a_n, b_n] \cap M_n = \emptyset.$$

Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a, b]$.

(Limita existuje, protože $a \in [a, b]$, protože (a_n) je neklesající a je zdola omezená číslem a a shora číslem b .)

Dokonce $\forall m, n : a_n < b_m$, takže $\forall n : \alpha \in [a_n, b_n]$.

Potom ale $\forall n : \alpha \notin M_n$ dává spor, protože $\alpha \in [a, b]$.

■

3.6.4 Dolní součet je menší než horní a ZVA 1

Věta ($\int \leq \bar{\int}$): Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pro každá dvě dělení $a, b \in \mathcal{D}(a, b)$ platí, že

$$s(\bar{a}, f) \leq \int_a^b f \leq \int_a^{\bar{b}} f \leq S(\bar{b}, f),$$

Důkaz. Nechť \bar{a} a \bar{b} jsou dělení intervalu $[a, b]$.

Víme, že $\bar{c} := \bar{a} \cup \bar{b}$. Pak totiž $\bar{a}, \bar{b} \subseteq \bar{c}$ a podle tvrzení o monotonii dolního a horního součtu je

$$s(\bar{a}, f) \leq s(\bar{c}, f) \leq S(\bar{c}, f) \leq S(\bar{b}, f) \text{ a dostáváme } s(\bar{a}, f) \leq S(\bar{b}, f).$$

■

Dolní součet: $s(\bar{a}, f)$

Horní součet: $S(\bar{a}, f)$

Věta (ZVA 1): Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $f \in R(a, b)$. Potom $\forall x \in (a, b)$ je $f \in R(a, x)$ a $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$F(x) := \int_a^x f, \text{ je lipschitzovsky spojitá.}$$

t.j.: *spojitá v* $x \in [a, b] \implies F'(x) = f(x)$.

Důkaz. Nechť $f \in R(a, b)$. Podle *tvrzení o restrikcích* je $f \in R(a', b')$ pro každé $a \leq a' < b' \leq b$.

Tedy F je správně definováno a $F(a) = 0$.

Protože f je omezená (*tvrzení, že neomezené funkce jsou špatné*), vezmeme omezující konstantu $d > 0$.

Nechť $c := 1 + d$, nechť $x < y \in [a, b]$ a podle *definice Riemannova integrálu* nechť (\bar{a}, \bar{t}) je takové s body intervalu $[x, y]$, že $\left| \int_x^y f - R(\bar{a}, \bar{t}, f) \right| < y - x$.

Podle *tvrzení o restrikcích* a *definice funkce F* platí, že:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq y - x + |R(\bar{a}, \bar{t}, f)| \leq y - x + c \cdot (y - x),$$

a tak $|F(y) - F(x)| \leq c \cdot |y - x|$ a F je lipschitzovsky spojitá.

Nechť f je v $x_0 \in [a, b]$ spojitá a $\exists \varepsilon$. Vezmeme číslo δ , t.ž.:

$$x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b] \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon).$$

Nechť $x \in P(x_0, \delta) \cap [a, b]$ je libovolné, řekněme, že $x > x_0$ (*pro < obdobně*).

Vezmeme dělení s body (\bar{a}, \bar{t}) intervalu $[x_0, x]$, t.ž.: $\left| \int_{x_0}^x f - R(\bar{a}, \bar{t}, f) \right| < \varepsilon(x - x_0)$. Potom:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x f - f(x_0)$$

je menší, než:

$$\frac{R(\bar{a}, \bar{t}, f) + \varepsilon(x - x_0)}{x - x_0} - f(x_0) < \frac{\cancel{(x - x_0)}(\cancel{f(x_0)} + \varepsilon + \varepsilon)}{\cancel{x - x_0}} - \cancel{f(x_0)} = 2\varepsilon.$$

Podobně se dokáže, že je i větší, než -2ε a dostaneme tak $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

3.6.5 Abelova sumace

Věta (Abelova sumace): Nechť $a < b \in \mathbb{Z}$ a $f, f' \in R(a, b)$ a f je spojitá v b . Potom

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f + \int_a^b \{x\} f'(x) =: \int_a^b T, \text{ je identita.}$$

Důkaz. Dokažme, že $b = a + 1$ (elementární identita).

Identitu s mezemi $a < b$ pak dostaneme jako součet elem. identit s mezemi a a $a + 1$, $a + 1$ a $a + 2$... $b - 1$ a b .

Dokažme tedy elementární identitu. Podle integrace per partes pro $b = a + 1$ je

$$T = \int_a^{a+1} (x - a) f'(x) = [(x - a) f(x)]_a^{a+1} - \int_a^{a+1} f,$$

takže opravdu: $\sum_{a < n \leq b} f(n) = [(x - a) f(x)]_a^{a+1} = f(a + 1)$. ■