1 Motywacja

Motywacją do rozważania równań różniczkowych będzie zagadnienie rozpadu promieniotwórczego. Eksperymentalnie sprawdzono, że tempo rozpadu jest wprost proporcjonalne do masy pierwiastka promieniotwórczego. Czyli dla pewnej $k > 0$ mamy $x'(t) = -kx(t)$, gdzie $x(t)$ to masa pierwiastka w chwili t. Szukamy funkcji m, pomijać będziemy oznaczenie argumentu, oraz będziemy pisać $\dot{x} := m'$.

Zgadnąć możemy, że rozwiązaniem są funkcje postaci $x(t) = e^{-kt} \cdot x(0)$. Powstaje naturalne pytanie – czy wszystkie rozwiązania są takiej postaci? W tym przypadku możemy wykonać przejścia równoważne:

$$\begin{aligned} \dot{x} + kx &= 0 \\ \dot{x}e^{kt} + ke^{kt}x &= 0 \\ \left(xe^{kt}\right)^{\cdot} &= 0. \end{aligned}$$

Zatem xe^{kt} jest stałą, więc $x(t) = c \cdot e^{-kt}$.

2 Definicja

Układem równań równiczkowych zwyczajnych m-tego rzędu nazywamy wyrażenie:

$$F(\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(m)}) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} x: &\quad \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n \\ F: &\quad \mathbb{R}^{1+(m+1)n} \to \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Zazwyczaj udaje się wyrazić najmniejszą pochodną w postaci rozwikłanej: $x^{(m)} = f\left(t, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}\right)$. Zwykle zakłąda się różniczkowalność lub lipschitzowskość funkcji f.

3 Redukcja do układu równań pierwszego rzędu

Jeżeli mamy $x^{(m)} = f(t, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}$, to położywszy $y_k = x^{(k)}$, otrzymamy

$$\dot{y_0} = y_1, \ldots, \quad \dot{y_{m-2}} = y_{m-1}, \quad \dot{y_{m-1}} = y_m = x^{(m)} = f\left(t, y\right)$$

dla $y = \left(y_0, ..., y_{m-1}\right) \in \mathbb{R}^m$. A zatem mamy $\dot{y} = g\left(t, y\right)$.

4 Badanie roztworów nasyconych

Kolejny przykład zastosowania równań różniczkowych. Stwierdzono, że w cieczy można rozpuścić ilość soli, która zwiększa się proporcjonalnie do zmiany temperatur: $\delta s = k\delta T$, a więc $\frac{\delta s}{\delta T} = kS$, czyli w granicy $\frac{dS}{dt} = kS$. Znamy rozwiązanie tego równania, $S(T) = S(0)$. Biorąc $s_0 = S(T_0), s_1 = S(T_1)$, dostaniemy