

# 1 Definicja

Niech  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  będzie zbiorem otwartym,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , oraz niech  $z \in \Omega$ . Mówimy, że  $f$  jest holomorficzna (różniczkowalna w sensie zespolonym) w punkcie  $z$  jeżeli granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

istnieje. Oznaczamy ją przez  $f'(z)$  i nazywamy wartością pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $z$ . Mówimy, że  $f$  jest holomorficzna w obszarze  $\Omega$  jeżeli jest holomorficzna w każdym punkcie tego obszaru. Fakt, że funkcja jest holomorficzna w  $\Omega$  oznaczamy także jako  $f \in H(\Omega)$  lub  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

## Przykłady

- Niech  $f(z) = z^2$ . Wówczas  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hz + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2z + h = 2z$ . Zatem funkcja jest holomorficzna w każdym punkcie  $\mathbb{C}$  i jej pochodna w punkcie  $z$  wynosi  $2z$ .
- Odnotujmy nieco ogólniejszy fakt. Jeżeli  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , a  $P, Q$  są wielomianami, wówczas taka funkcja jest holomorficzna w całej swojej dziedzinie. W szczególności biorąc  $Q(z) = 1$  wnioskujemy, że każdy wielomian jest holomorficzny w  $\mathbb{C}$ .
- Rozważmy  $f(z) = \bar{z}$ . Zauważmy, że  $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ . Jeżeli  $h \in \mathbb{R}$ , to  $\frac{\bar{h}}{h} = 1$ , natomiast jeżeli  $h \in i\mathbb{R}$ , to  $\frac{\bar{h}}{h} = -1$ . Z tego względu granica ilorazów różnicowych (w sensie zespolonym) funkcji  $f(z)$  nie istnieje w żadnym punkcie. Funkcja nie jest holomorficzna w żadnym punkcie.

## 1.1 Alternatywne definicje

Istnieje kilka równoważnych definicji holomorficzności w punkcie  $z$ .

- Istnieje  $d \in \mathbb{C}$  takie, że  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z+h) - f(z) - d \cdot h|}{|h|} = 0$ . W tej definicji moduł nie jest konieczny, jednak warto odnotować podobieństwo tego sformułowania ze sformułowaniem różniczkowalności funkcji  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .
- Istnieje  $d \in \mathbb{C}$  takie, że nasza funkcja dobrze przybliża się na pewnym otoczeniu punktu  $z$ , tj.  $f(z) = f(z) + dh + \Psi(h)h$  dla pewnej funkcji  $\Psi : B(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  takiej, że  $\lim_{h \rightarrow 0} \Psi(h) = 0$ .

## 1.2 Podstawowe własności

Zauważmy, że przykład pierwszy pokazuje nam, że dla wielomianów pochodna w sensie zespolonym funkcji zespolonej odpowiada pochodnej funkcji rzeczywistej. Prawdziwe są również następujące własności, które znamy z teorii funkcji rzeczywistej:

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$  (reguła Leibniza)
- $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$  (reguła łańcucha)

Ich dowód jest prostym ćwiczeniem i przebiega identycznie jak w przypadku funkcji zmiennej rzeczywistej.

## 2 Holomorficzność a różniczkowalność w sensie zespolonym

Możemy wprowadzić naturalne utożsamienie  $\mathbb{C}$  z płaszczyzną  $\mathbb{R}^2$  w taki sposób, że punktowi  $\mathbb{C} \ni x + iy$  odpowiada punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Funkcję  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  możemy utożsamzić z funkcją  $\mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $U$  - zbiór otwarty) i zapisać wprost  $f(x + iy) = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , gdzie  $u$  oraz  $v$  są takimi funkcjami, że w 'zespolonym zapisie' mamy  $f = u + iv$ . Przypomnijmy, że różniczkowalność funkcji traktowanej jako funkcję z jakiegoś podzbioru  $\mathbb{R}^2$  w  $\mathbb{R}^2$  definiujemy następująco:  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $z$ , jeżeli zachodzi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(z+h) - f(z) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

dla pewnego liniowego  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zwanego pochodną  $f$  (w punkcie  $z$ ) i oznaczanego  $Df_z$ . Zauważmy, że jeżeli  $f$  jest holomorficzna w punkcie  $z$ , to jest też różniczkowalna w sensie rzeczywistym w tym punkcie oraz  $Df_z$  jest mnożeniem przez  $f'(z)$  (por. pierwsza alternatywna definicja). Rodzi się naturalne pytanie, czy prawdziwa jest implikacja w drugą stronę, tzn. czy wiedząc, że  $f$  jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym w punkcie  $z$ , możemy powiedzieć, że jest ona na pewno holomorficzna?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy zobaczyć jak wygląda macierz przekształcenia  $Df_z$  funkcji holomorficznej, czyli jak wygląda macierz mnożenia przez liczbę zespoloną. Zauważmy, że  $(a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$ . Możemy zatem zapisać:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Widzimy zatem jak wygląda macierz mnożenia przez liczbę  $a + bi$ . Przypomnijmy, że z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej wiemy, że dla  $f = (u, v)$  mamy

$$m(Df_z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Porównując tę wiedzę z tym, jak powinna wyglądać macierz  $m(Df_z)$  dochodzimy do następującego...

### 2.1 Twierdzenie (równania Cauchy'ego-Riemanna)

Funkcja  $f$  jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym oraz zachodzi  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  (tak zwane równania Cauchy'ego-Riemanna).

#### Przykłady

- Rozważmy  $f(z) = z^2$ . Mamy wtedy  $f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ .  $u(x + iy) = x^2 - y^2, v(x + iy) = 2xy$ . Widzimy, że  $u_x = 2x, u_y = -2y, v_x = 2y, v_y = 2x$ . Równania C.-R. są spełnione w każdym punkcie, zatem w każdym punkcie funkcja jest holomorficzna.
- Rozważmy  $f(z) = \bar{z}$ , czyli  $f(x + iy) = x - iy$ .  $u(x + iy) = x, v(x + iy) = -y$ . Nietrudno sprawdzić, że  $v_x = -u_y = 0$ , ale  $1 = u_x \neq v_y = -1$ . Równania C.-R. nie są spełnione w żadnym punkcie, w żadnym punkcie funkcja ta nie jest holomorficzna.

### 3 Szeregi potęgowe

Omówione przez nas przykłady uwzględniały jedynie funkcje wymierne, w szczególności wielomiany. Na co dzień jednak posługujemy się ogromem innych funkcji, które chcielibyśmy przedłużyć do dziedziny zespolonej. Niestety naturalne definicje, na przykład geometryczne definicje funkcji trygonometrycznych, ciężko jest nam przenieść na dziedzinę zespoloną. W tym celu przyda nam się rozszerzenie teorii szeregów potęgowych znanych z dotychczasowej analizy.

Przypomnijmy, że **szeregiem potęgowym** nazywamy szereg postaci  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , gdzie  $a_n \in \mathbb{C}$ , a  $z$  jest zmienną.

- Analogicznie do przypadku rzeczywistego określamy promień zbieżności szeregu potęgowego,  $R = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ . Gdy granica pierwiastków wynosi  $\infty$  przyjmujemy  $R = 0$ , jeżeli granica wynosi 0, przyjmujemy  $R = \infty$ .
- Szereg potęgowy zbiega bezwzględnie i niemal jednostajnie w  $B(0, R)$ . Zbieżność jednostajna oznacza, że zbiega on na każdym zwartym podzbiórze  $B(0, R)$ .
- Szereg jest rozbieżny dla  $|z| > R$ .

#### Przykłady

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , wtedy  $R = 1$  oraz  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$  dla  $|z| < R = 1$ .
- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $R = \infty$
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ , w obu przypadkach mamy  $R = \infty$
- ...

Kolejnym ważnym faktem znanym z analizy matematycznej jest twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego. Okazuje się, że analizując funkcje zespolone możemy ten fakt uogólnić, co zrobimy w następnym paragrafie.

#### 3.1 Twierdzenie o holomorficzności szeregu potęgowego

Niech  $R$  będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , i niech  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  dla  $z \in B(0, R)$ . Wtedy  $f$  jest holomorficzna w  $B(0, R)$  a jej pochodna dana jest szeregiem  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ .

**Dowód:** analogicznie w przypadku zmiennej rzeczywistej, do znalezienia np. w skrypcie prof. R. Szwarcza.

Jako wniosek z tego twierdzenia płynie fakt, że różniczkowanie szeregu potęgowego wewnątrz  $B(0, R)$  odbywa się wyraz po wyrazie.

#### 3.2 Ważny szereg

Szczególnie istotnym dla nas szeregiem będzie  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  (czasem także  $\exp(z)$ ), czyli funkcja wykładnicza. Omówimy kilka własności tego szeregu.

- Promień zbieżności tego szeregu  $R = \infty$ . Oznacza to, że jest on dobrze określony na całym  $\mathbb{C}$ .
- Niech  $z, w \in \mathbb{C}$ . Wtedy  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ . Istotnie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = e^z \cdot e^w$$

- Funkcja  $e^z$  spełnia zależność  $(e^z)' = e^z$ . Rzeczywiście:

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = e^z$$

- Jako ćwiczenie pozostawiamy własność  $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$  (wzór Eulera).
- Wnioskiem z powyższego jest  $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$  (tożsamość Eulera).
- Ponadto warto zauważyć, że  $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = e^z$ , czyli funkcja  $e^z$  jest okresowa o okresie  $2\pi i$ .
- Przypomnijmy także związek między postacią wykładniczą, a postacią trygonometryczną liczby zespolonej:  $e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$  (również wniosek ze wzoru Eulera, tutaj  $a, b \in \mathbb{R}$ ).