1 Motywacja

Motywacją do rozważania równań różniczkowych będzie zagadnienie rozpadu promieniotwórczego. Eksperymentalnie sprawdzono, że tempo rozpadu jest wprost proporcjonalne do masy pierwiastka promieniotwórczego. Czyli dla pewnej $k > 0$ mamy $x'(t) = -kx(t)$, gdzie $x(t)$ to masa pierwiastka w chwili t. Szukamy funkcji masy zależnej od czasu $m(t)$, pomijać będziemy oznaczenie argumentu, oraz będziemy pisać $x = m$ oraz $\dot{x} := m'$.

Zgadnąć możemy, że rozwiązaniem są funkcje postaci $x(t) = e^{-kt} \cdot x(0)$. Powstaje naturalne pytanie – czy wszystkie rozwiązania są takiej postaci? W tym przypadku możemy wykonać przejścia równoważne:

$$\begin{aligned} \dot{x} + kx &= 0 \\ \dot{x}e^{kt} + ke^{kt}x &= 0 \\ \left(xe^{kt}\right)^{\cdot} &= 0. \end{aligned}$$

Zatem xe^{kt} jest stałą, więc $x(t) = c \cdot e^{-kt} = x(0) \cdot e^{-kt}$.

2 Definicja

Układem równań równiczkowych zwyczajnych m-tego rzędu nazywamy wyrażenie:

$$F\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(m)}\right) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} x:&\quad \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ F:&\quad \mathbb{R}^{1+(m+1)n} \longrightarrow \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Zazwyczaj udaje się wyrazić najmniejszą pochodną w postaci rozwikłanej: $x^{(m)} = f\left(t, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}\right)$. Zwykle zakłada się różniczkowalność lub lipschitzowskość funkcji f.

3 Redukcja do układu równań pierwszego rzędu

Jeżeli mamy $x^{(m)} = f\left(t, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}\right)$, to położywszy $y_k = x^{(k)}$, otrzymamy

$$\dot{y_0} = y_1, \ldots, \quad \dot{y_{m-2}} = y_{m-1}, \quad \dot{y_{m-1}} = y_m = x^{(m)} = f\left(t, y\right)$$

dla $y = \left(y_0, ..., y_{m-1}\right) \in \mathbb{R}^m$. A zatem mamy $\dot{y} = g\left(t, y\right)$.

4 Badanie roztworów nasyconych

Kolejny przykład zastosowania równań różniczkowych. Stwierdzono, że w cieczy można rozpuścić ilość soli, która zwiększa się proporcjonalnie do zmiany temperatur: $\Delta s = k\Delta T$, a więc $\frac{\Delta s}{\Delta T} = kS$, czyli w granicy $\frac{dS}{dt} = kS$. Znamy rozwiązanie tego równania, $S(T) = S(0)$. Biorąc $s_0 = S(T_0), s_1 = S(T_1)$, dostaniemy coś, co chętnie bym opisał, ale nie mam notatek. Niech ktoś podeśle. Serio dajcie. :(

5 Metoda rozdzielania zmiennych

Załóżmy, że mamy do czynienia z równaniem postaci $x'(t) = g(t)f(x(t))$, albo pisząc zwięźlej: $x' = g(t)f(x)$, gdzie $x : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, $f : x[I] \to \mathbb{R}$. Załóżmy też, że $f(x) \neq 0$ dla wszystkich argumentów. Ponadto, niech dany będzie nam warunek początkowy: $x(t_0) = x_0$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$
$$F(x) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(s)}ds$$

Wówczas równanie $G(t) = F(x)$ zadaje zależność między $x(t)$ a t, będącą rozwiązaniem równania. Nie zawsze z takiej zależności możemy 'odczytać' jawny wzór, ale z twierdzenia o funkcji uwikłanej często możemy wnioskować istnienie rozwiązań, choćby lokalnych. Równania postaci $x' = f(x)g(t)$ nazywamy równaniami **o rozdzielonych zmiennych**.

Przykład. Rozważmy równanie $e^{-x}(1 + x') = 1$. Prostymi przekształceniami algebraicznymi sprowadzamy równanie do postaci $x' = \frac{1-e^{-x}}{e^{-x}} = e^x - 1$. W tym przypadku $f(x) = e^x - 1$, $g(t) = 1$. Stąd wynika, że:

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} 1ds = t - t_0 + c_1$$
$$F(x) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{e^s - 1}ds = \log|e^{-s} - 1|\Big|_{x_0}^{x(t)} = \log\left|\frac{e^{-x(t)} - 1}{e^{-x_0} - 1}\right| + c_2$$

Zatem $x(t)$ możemy zapisać jako funkcję uwikłaną za pomocą następującego równania:

$$t - t_0 + C = \log\left|\frac{e^{-x(t)} - 1}{e^{-x_0} - 1}\right|$$

Stała $C = c_1 - c_2$ jest dowolna, natomiast zadając stałe t_0 oraz x_0 sprawiamy, że tak otrzymane rozwiązanie równania różniczkowego będzie spełniać równość $f(t_0) = x_0$. W istocie w tym przypadku możemy wyliczyć $x(t)$ i wyrazić w jawny sposób, jednak nie jest to ani konieczne, ani wygodne.