Einführung in Computational Engineering
Grundlagen der Modellierung und Simulation

Dr. Arne Nägel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2012/2013
Lösungsvorschlag der 12. Übung

Aufgabe 1 Anwendung: Modellierung eines Räuber-Beute-Systems (10 Punkte)

Das Fressen und Gefressen werden in einem ökologischen Räuber-Beute-System sei durch das folgende System von Differentialgleichungen charakterisiert:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_1 - b_1 - c_1 x_2)x_1\,, \\ \dot{x}_2 &= (-b_2 + c_2 x_1)x_2\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $x_1(t)$ die Größe der Beutepopulation und $x_2(t)$ die Größe der Räuberpopulation zum Zeitpunkt t. Die Anzahl der Beute- und Räubertiere wird als groß angenommen, so dass die jeweiligen Populationen durch kontinuierliche Werte modelliert werden können. Dem Modell liegen folgende Annahmen zugrunde:

(i) Der Zuwachs der Beute pro Zeiteinheit durch Geburten ist proportional zur aktuellen Population der Beute.

(ii) Entsprechend ist die Abnahme pro Zeiteinheit durch natürliche Todesursachen proportional zur Population. Dies gilt sowohl für Beute als auch für Räuber.

(iii) Die Population der Beute nimmt durch die Räuber pro Zeiteinheit proportional zur Population der Räuber und auch proportional zur Population der Beute ab.

(iv) Die Population des Räubers nimmt pro Zeiteinheit proportional zur eigenen Population und proportional zur Population der Beute zu.

Die Parameter a_1, b_1, b_2, c_1 und c_2 seien alle positiv.[1] Bearbeiten Sie nun die folgenden Aufgaben:

a) Ordnen Sie die Parameter den o.g. Modellannahmen zu.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen $(x_{1,s}, x_{2,s})$ des Systems. Deuten Sie diese vor dem Kontext der Modellbeschreibung.

c) Linearisieren Sie das System um eine beliebige Ruhelage $(x_{1,s}, x_{2,s})$.

d) Untersuchen Sie das System in der Umgebung der Ruhelagen auf Stabilität.

e) Bestimmen Sie für alle stabilen Ruhelagen die Zeitcharakteristika des jeweiligen linearisierten Systems. Für welche Parameterwahlen ergibt sich ein steifes Differentialgleichungssystem?

[1] Für die Anwendung sinnvoll sind offensichtlich nur Lösungen $(x_1(t), x_2(t))$, die für alle Zeiten $t \geq 0$ nichtnegativ sind. Man kann für obiges Modell zeigen (nicht hier), dass diese Nichtnegativität der Lösung folgt, wenn die Anfangswerte $x_1(0) \geq 0$ und $x_2(0) \geq 0$.

Lösungsvorschlag

a) Es sind a_1, b_1 die Wachstums- und Sterberaten der Beute, b_2 die Sterberate der Räuber und c_1, c_2 die Raten mit denen Beutetiere gefressen werden bzw. durch das Fressen neue Räuber entstehen (1 Punkt).

b) Gleichgewichtslagen $(x_{1,s}, x_{2,s})$ erfüllen (1 Punkt)

$$\begin{aligned} 0 = &\quad (a_1 - b_1 - c_1 x_{2,s}) x_{1,s}\,, \\ 0 = &\quad (-b_2 + c_2 x_{1,s}) x_{2,s}\,. \end{aligned}$$

In jeder Gleichung muss also mindestens einer der beiden Faktoren Null sein. Damit ergeben sich als Gleichgewichtslagen (2 Punkte):

1. Sei $x_{1,s} = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung $x_{2,s} = 0$ und wir erhalten die triviale Gleichgewichtslage $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (0,0)$, d.h. es existieren weder Räuber noch Beute.
2. Seien $x_{1,s} \neq 0$ und $x_{2,s} = 0$. Dann muss wegen der ersten Gleichung $a_1 = b_1$ gelten, und damit sind alle $(x_{1,s}, 0)$ mit $x_{1,s} \neq 0$ Gleichgewichtslagen, d.h. in dem Fall existieren keine Räuber.
3. Seien $x_{1,s} \neq 0$ und $x_{2,s} \neq 0$. Falls $a_1 \neq b_1$, dann ergibt sich als eindeutige (nichttriviale) Gleichgewichtslage $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (\frac{b_2}{c_2}, \frac{a_1 - b_1}{c_1})$; falls $a_a = b_1$ dann gibt es keine Ruhelage der geforderten Form. Bemerkung: falls $a_1 > b_1$ gilt, dann gibt es im Ruhezustand eine positive Anzahl von Räubern und von Beute, die in Koexistenz leben.

c) Das um eine Ruhelage $(x_{1,s}, x_{2,s})$ linearisierte System ist

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 - c_1 x_{2,s} & -c_1 x_{1,s} \\ c_2 x_{2,s} & -b_2 + c_2 x_{1,s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

Die Systemmatrix ist die Jacobi-Matrix $J(x_1, x_2)$ des Ausgangssystems ausgewertet in der Ruhelage $(x_1, x_2) = (x_{1,s}, x_{2,s})$ (1 Punkt).

d) (je Fall 1 Punkt; insgesamt 3 Punkte)

1. Die Gleichgewichtslage $(0,0)$ führt auf die Jacobi-Matrix

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & 0 \\ 0 & -b_2 \end{pmatrix}$$

mit reellen Eigenwerten $\lambda_1 = a_1 - b_1$ und $\lambda_2 = -b_2$. Somit sind die zur Untersuchung der Stabilität zu betrachtenten Realteile der Eigenwerte gleich den Eigenwerten selbst. Der Eigenwert λ_2 ist immer negativ. Die Ruhelage ist also stabil, wenn auch $\lambda_1 < 0$, d.h. für $b_1 > a_1$. Für $b_1 < a_1$ ist $\lambda_1 > 0$ und somit ist die Ruhelage instabil. Für $b_1 = a_1$ haben wir den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ (mit Realteil Null).

2. Die Gleichgewichtslage $(x_{1,s}, 0)$ mit $x_{1,s} \neq 0$ existiert, falls $a_1 = b_1$ gilt, und führt auf die Jacobi-Matrix

$$J(x_{1,s}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 x_{1,s} \\ 0 & -b_2 + c_2 x_{1,s} \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -b_2 + c_2 x_{1,s}$.
Wenn $\lambda_2 > 0$ dann ist die betrachtete Ruhelage instabil (da es einen Eigenwert mit positivem Realteil gibt).

3. Die Gleichgewichtslage $(\frac{b_2}{c_2}, \frac{a_1-b_1}{c_1})$ mit $a_1 \neq b_1$ führt auf die Jacobi-Matrix

$$J(\frac{b_2}{c_2}, \frac{a_1-b_1}{c_1}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_1 b_2}{c_2} \\ \frac{c_2(a_1-b_1)}{c_1} & 0 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-b_2(a_1-b_1)}$. Falls $b_1 > a_1$, dann haben wir zwei reelle Eigenwerte und einer ist größer Null, d.h. das System ist instabil. Falls $b_1 < a_1$, dann haben wir zwei rein imaginäre Eigenwerte (Realteil gleich Null).

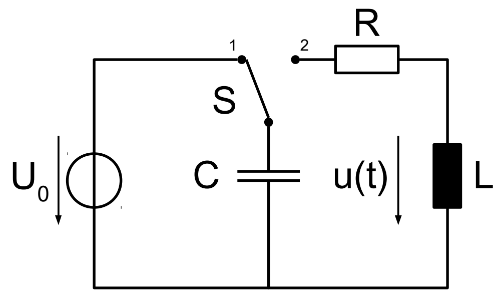
e) Die Zeitcharakteristika leiten sich aus den Eigenwerten des um eine Ruhelage linearisierten Systems ab. Sie interessieren nur für stabile Dgl.-Systeme und wir betrachten hier nur Systeme, in denen kein Eigenwert mit $Re(\lambda) = 0$ auftritt. Da im Fall der Ruhelage $(0,0)$ beide Eigenwerte reell sind, ergeben sich als Zeitcharakteristika

$$T_1 = \frac{1}{|a_1-b_1|} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{1}{b_2}.$$

Der zur Identifizierung steifer Dgl.-Systeme verwendete Quotient aus maximaler und minimaler Zeitcharakteristik, $T_{\max}/T_{\min}$ ist hier also parameterabhängig. Falls z.B. $a_1 \approx b_1$ und $b_2 \approx 1$, dann folgt $T_{\max}/T_{\min} \gg 1$ und das System wird als steif betrachtet. Ist hingegen $|a_1 - b_1| \approx b_2$, so wird $T_{\max}/T_{\min} \approx 1$ und wir betrachten das System als nicht steif (2 Punkte).

Aufgabe 2 Anwendung: Parallelschwingkreis (10 Punkte)

Gegeben ist ein elektrischer Parallelschwingkreis bestehend aus einem Kondensator C, einer Induktivität L und einem Widerstand R. Im Initialzustand ist der Schalter S in Stellung 1 und der Kondensator C wird durch eine ideale Spannungsquelle voll auf die Spannung U_0 geladen. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ wird der Schalter S in Stellung 2 gebracht und es findet ein wechselnder Energieaustausch zwischen dem Kondensator C und der Induktivität L statt.



Der Verlauf der Spannung $u(t)$ wird durch die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{u}(t) + \frac{R}{L}\dot{u}(t) + \frac{1}{LC}u(t) = 0$$

beschrieben, wobei keiner der Parameter R, L und C negative Werte annimmt. Für die Anfangswerte des Systems gilt $u(t_0) = U_0$ und $\dot{u}(t_0) = 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$.

a) Transformieren Sie die angegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$ und bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems.

b) Geben Sie die Eigenschaften der Eigenwerte an, damit das System ungedämpft schwingt, gedämpft schwingt oder aperiodisch gedämpft ist. Nennen Sie jeweils die Bedingungen, die die Parameter R, C und L erfüllen müssen.

c) Für die Parameter des Parallelschwingkreis gelte nun $R = 50\,\Omega$, $L = 5\,\mathrm{H}$, $C = 500\,\mu\mathrm{F}$ und $U_0 = 10\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ des so definierten Anfangswertproblems.

d) Berechnen Sie für die o.g. Parametrisierung sinnvolle Werte für die Simulationsdauer t_f und die Diskretisierungsschrittweite h, wobei der Toleranzfaktor $\alpha = \frac{1}{10}$ gewählt werden soll.

Lösungsvorschlag

a) Mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) & \dot{u}(t) \end{bmatrix}^T$ kann die gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung in das System erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) \qquad \textit{(1.0 Punkt)}$$

mit der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ transformiert werden. Die Eigenwerte λ lassen sich nun durch Lösen von $\det(\lambda\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ bestimmen. Mit der hergeleiteten Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ gilt

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{LC} & \lambda + \frac{R}{L} \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$$

und die Eigenwerte λ ergeben sich zu

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \qquad \textit{(1.0 Punkt)}$$

b) Damit das System *ungedämpft schwingt*, müssen die Eigenwerte λ rein imaginär sein. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$R = 0\,\Omega \qquad \textit{(0.5 Punkt)}$$

gilt. Die Eigenwerte ergeben sich dann zu

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}i$$

mit $\mathrm{Re}\{\lambda_{1/2}\} = 0$ und $\mathrm{Im}\{\lambda_{1/2}\} = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}$ *(0.5 Punkt)*. Wenn das System *gedämpft schwingt*, haben die Eigenwerte λ einen negativen Realteil und einen konjugiert komplexen Imaginärteil. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \qquad \textit{(0.5 Punkt)}$$

gilt. Die Eigenwerte berechnen sich dann aus

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

mit $\mathrm{Re}\{\lambda_{1/2}\} = -\frac{R}{2L}$ und $\mathrm{Im}\{\lambda_{1/2}\} = \pm\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ *(0.5 Punkt)*. Bei aperiodischer Dämpfung sind die Eigenwerte λ rein real. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC} \qquad \textit{(0.5 Punkt)}$$

gilt. Die Eigenwerte bestimmen sich dann aus

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

mit $\mathrm{Re}\{\lambda_{1/2}\} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ und $\mathrm{Im}\{\lambda_{1/2}\} = 0$ *(0.5 Punkt)*.

c) Zunächst müssen die Einheiten passend berücksichtigt werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{R}{L} &= \frac{50\Omega}{5H} = 10\frac{V/A}{V/A}\frac{1}{s} = 10\frac{1}{s}\\ \frac{1}{LC} &= \frac{1}{5\cdot 500H\mu F} = \frac{1}{2500}10^6\frac{1}{HF} = 400\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Alle Zeiten werden im Folgenden in s betrachtet. Mit den gegebenen Werten für die Parameter R, L und C ergeben sich die Eigenwerte zu

$$\lambda_{1/2} = -5 \pm 5\sqrt{15}i$$

mit $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ (0.5 Punkte).

Als Lösungsansatz für das Anfangswertproblem wird $\boldsymbol{x}(t) = c\ e^{\lambda t}$ gewählt. Die Eigenvektoren $\boldsymbol{x}$ können durch die Lösung des Gleichungssystems $(\lambda_i\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ bestimmt werden, wobei $\boldsymbol{x}_1 = \overline{\boldsymbol{x}_2}$ gilt. Mögliche Lösungen für die Eigenvektoren sind

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5+5\sqrt{15}i \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5-5\sqrt{15}i \end{bmatrix}. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Der Ansatz $\boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t) = \boldsymbol{x}_1\, e^{\lambda_1 t}$ liefert die zwei reelle Lösungen $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t)\}$ und $\mathrm{Im}\{\boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t)\}$ mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t) &= \boldsymbol{x}_1\, e^{\lambda_1 t}\\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -5+5\sqrt{15}i \end{bmatrix} e^{\left(-5+5\sqrt{15}i\right)t}\\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -5+5\sqrt{15}i \end{bmatrix} e^{-5t}\ e^{5\sqrt{15}it}\\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -5+5\sqrt{15}i \end{bmatrix} e^{-5t}\ \left(\cos\left(5\sqrt{15}t\right) + i\sin\left(5\sqrt{15}t\right)\right)\\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\cos\left(5\sqrt{15}t\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{15} \end{bmatrix}\sin\left(5\sqrt{15}t\right)\right.\\ &\qquad \left. +i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\sin\left(5\sqrt{15}t\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{15} \end{bmatrix}\cos\left(5\sqrt{15}t\right)\right)\right) e^{-5t}. \qquad \textit{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

Die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ setzt sich aus den gefundenen reellen Lösungen zusammen und lautet

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = \Bigg(&c_1\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\cos\left(5\sqrt{15}t\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{15} \end{bmatrix}\sin\left(5\sqrt{15}t\right)\right\}\\ &+c_2\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\sin\left(5\sqrt{15}t\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{15} \end{bmatrix}\cos\left(5\sqrt{15}t\right)\right\}\Bigg) e^{-5t}\end{aligned}$$

mit den Konstanten c_1 und c_2, die durch die Anfangswerte $\boldsymbol{x}(t_0)$ bestimmt sind. Mit den gegeben Anfangswerten lässt sich das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -5c_1 + 5\sqrt{15}c_2 \end{bmatrix}$$

aufstellen. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert $c_1 = 10$ und $c_2 = \frac{10}{\sqrt{15}}$ *(1 Punkt)*. Damit ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) = \Bigg(10\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\cos\left(5\sqrt{15}t\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{15} \end{bmatrix}\sin\left(5\sqrt{15}t\right)\right\} \\ + \frac{10}{\sqrt{15}}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\sin\left(5\sqrt{15}t\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{15} \end{bmatrix}\cos\left(5\sqrt{15}t\right)\right\}\Bigg)e^{-5t}. \end{aligned}$$

d) Die Zeitkonstante T des Systems kann bei konjugiert komplexen Eigenwerten mit

$$T = \min\left\{\frac{1}{|\mathrm{Re}\{\lambda\}|}; \frac{2\pi}{|\mathrm{Im}\{\lambda\}|}\right\} = \min\left\{\frac{1}{5}\,\mathrm{s}; \frac{2\pi}{5\sqrt{15}}\,\mathrm{s}\right\} = \frac{1}{5}\,\mathrm{s} \qquad \textit{(0.5 Punkt)}$$

bestimmt werden. Die Simulationsdauer t_f für ein stabiles System kann nun mit der Faustformel

$$t_f = 5T = 1\,\mathrm{s} \qquad \textit{(0.5 Punkt)}$$

berechnet werden. Für die Diskretisierungsschrittweite h gilt

$$h \leq \alpha T = \frac{1}{50}\,\mathrm{s} \qquad \textit{(0.5 Punkt)}$$

mit $\alpha = \frac{1}{10}$.