Formale Grundlagen der Informatik I
4. Übungsblatt

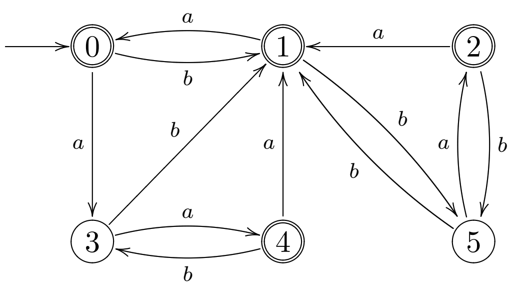
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Finden Sie einen äquivalenten DFA minimaler Größe für den folgenden DFA:



Geben Sie jedesmal, wenn Sie feststellen, dass zwei Zustände q und q' nicht identizifiert werden können, ein Wort w an, für das diese Unterscheidung notwendig ist, d.h. ein Wort w, das zu L_q gehört, aber nicht zu $L_{q'}$ (oder umgekehrt), wobei:

$$L_q = \{w \in \Sigma^* \; : \; \hat{\delta}(q, w) \in A\}.$$

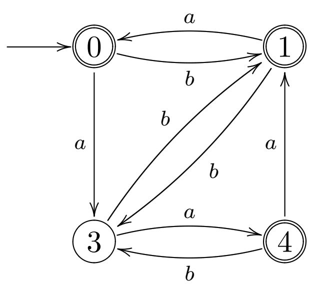
Lösungsskizze:
Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$\not\sim_0$	0	1	2	3	4	5
0				×		×
1				×		×
2				×		×
3	×	×	×		×	
4				×		×
5	×	×	×		×	

$\not\sim_1$	0	1	2	3	4	5
0		×	×	×	×	×
1	×			×		×
2	×			×		×
3	×	×	×		×	
4	×			×		×
5	×	×	×		×	

$\not\sim_2$	0	1	2	3	4	5
0		×	×	×	×	×
1	×		×	×	×	×
2	×	×		×		×
3	×	×	×		×	
4	×	×		×		×
5	×	×	×		×	

In Schritt 0 macht jedes mal das leere Wort ε einen Unterschied, in Schritt 1 jedesmal das Wort a und in Schritt 2 jedesmal das Wort aa (andere Lösungen gibt es selbstverständlich auch!).
Da $\not\sim_2 = \not\sim_3$, ist die Relation $\not\sim$ durch die letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände 2 und 4, bzw. 3 und 5 identifizieren können. Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



Aufgabe G2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{a^n b^m \in \{a,b\}^* \,:\, n < m\}$

(b) $L_2 = \{a^{n^2} \in \{a\}^* \,:\, n \geq 0\}$

(c) $\textsc{Palindrom} = \{w \in \{a,b\}^* : w = w^{-1}\}$ (Dies ist Übung 2.5.4 im Skript.)

Lösungsskizze:

(a) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geq n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$ schreiben lässt, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine solche natürliche Zahl. Wir betrachten das Wort

$$x = a^n b^{n+1}.$$

Offensichtlich ist $x \in L_1$ und $|x| \geq n$. Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot v^2 \cdot w = a^{n+k} b^{n+1}$ nicht mehr b als a enthält. Das widerspricht $u \cdot v^2 \cdot w \in L_1$. Wir schließen, dass L_1 nicht regulär ist.

(b) Wir verwenden hier, dass

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Wort

$$x = a^{(n+1)^2}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$ und $|x| = (n+1)^2 \geq n$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_2$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $n \geq k > 0$. Das heißt, dass wir die folgende Abschätzungen haben für die Länge von $u \cdot w = a^{(n+1)^2 - k}$:

$$(n+1)^2 > (n+1)^2 - k = |u \cdot w| \geq (n+1)^2 - n > n^2.$$

Da es keine Quadratzahlen zwischen n^2 und $(n+1)^2$ gibt, ist $|u \cdot w|$ keine Quadratzahl und es gilt $u \cdot w \notin L_2$. Da dieses Argument für jedes $n \in \mathbb{N}$ funktioniert schließen wir, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

(c) Nehmen wir an, dass PALINDROM regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Palindrom x mit $|x| \geq n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w$ ein Palindrom ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ also diese natürliche Zahl. Wir betrachten das Wort

$$x = a^n b a^n.$$

Offensichtlich ist x ein Palindrom mit $|x| \geq n$. Jetzt sollte es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w$ ein Palindrom ist. Insbesondere soll für $m = 0$ das Wort $u \cdot w$ ein Palindrom sein. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w = a^{n-k} b a^n$ für ein $k > 0$, und damit also kein Palindrom. Widerspruch!

Also ist das Pumping Lemma verletzt und wir dürfen schließen, dass die Sprache der Palindrome nicht regulär sein kann.

Aufgabe G3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{x \in \Sigma^* \, : \, 2|x|_a = |x|_b\}$

(b*) Zusatzaufgabe:
$L_2 = \{a^n b^m \in \Sigma^* \, : \, \mathrm{ggT}(n, m) = 1\}$

Hinweise:

- $\mathrm{ggT}(n, m)$ bezeichnet den grßten gemeinsamen Teiler von n, m.
- Verwenden Sie in Aufgabe (b*), dass es beliebig große Primzahlen gibt (wobei eine Primzahl eine Zahl größer als 1 ist, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist).

Lösungsskizze:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Wort

$$x = a^n b^{2n}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$ und $|x| \geq n$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_2$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Also ist $u \cdot w = a^{n-k} b^{2n}$ und da $k > 0$, gilt $u \cdot w \notin L_1$. Da diese Argumentation für alle n gilt, schließen wir, dass L_1 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

(b) Nehmen wir an, dass L_2 regulär sei. Wegen des Pumping Lemmas gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_2$ mit $|x| \geq n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine solche natürliche Zahl. Zu einer eine Primzahl $p > n + 1$ betrachte das Wort

$$x = a^p b^{(p-1)!}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$ und $|x| \geq n$. Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_2$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $0 < k \leq n < p - 1$. Das heißt, dass $u \cdot w = a^{p-k} b^{(p-1)!}$, also teilt $(p - k) > 1$ sowohl die Anzahl von a als die Anzahl von b in $u \cdot w$. Das widerspricht $u \cdot w \in L_2$. Wir schließen, dass L_2 nicht regulär ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (2+2+2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Σ-Sprachen regulär sind. Falls die Sprache regulär ist, so geben Sie sowohl einen endlichen Automaten (NFA oder DFA), als auch einen regulären Ausdruck an. Falls nicht beweisen Sie, dass die Sprache nicht regulär ist.

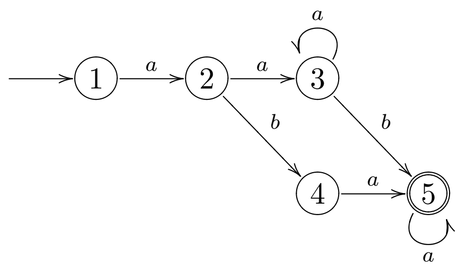
(a) Alle Σ-Wörter, die mit „a“ anfangen, insgesamt mindestens zwei „a“ enthalten und *genau* ein „b“ enthalten.

(b) Alle Σ-Wörter w, so dass gilt $|w|_b \leq |w|_a \leq 2 \cdot |w|_b$.

(c) Alle Σ-Wörter w, die mit „a“ anfangen und für die gilt, dass $|w| = 4$ und $|w|_a = |w|_b$.

Lösungsskizze:

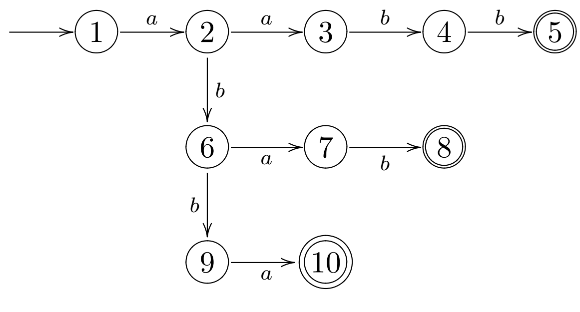
(a) $a(aa^*ba^* + baa^*)$



(b) *Pumping-Lemma:* Angenommen die Sprache aus (b) (=: L_b) sei regulär. Sei dann n die Konstante des Pumping-Lemmas dann gilt $x := a^n b^n \in L_b$. Zerlegung: $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Es gibt demnach k, l mit $n \geq k + l$ und $l \geq 1$ so dass $u = a^k$, $v = a^l$, $w = a^{n-k-l} b^n$. Es folgt $uv^0 w = a^{n-k} b^n \notin L_b$, da $n - k < n$.

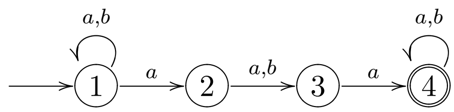
Myhill-Nerode: Definiere $x_n := a^{2n}$. Für die Äquivalenzklassen $[x_n]_{\sim_L}$ bedeutet das, dass $\{a^{2n} b^m \mid n \leq m \leq 2n\} \subset [x_n]_{\sim_L}$. Folglich ist $x_{n+1} b^{2n+1} \in L_b$, aber $x_n b^{2n+1} \notin L_b$, womit die Äquivalenzklassen $[x_n]_{\sim_L}$ und $[x_{n+1}]_{\sim_L}$ disjunkt sind. Da dies unendlich viele sind folgt nach dem Satz von Myhill-Nerode (Satz 2.4.7 im Skript), dass L_b nicht regulär ist.

(c) $aabb + abab + abba$

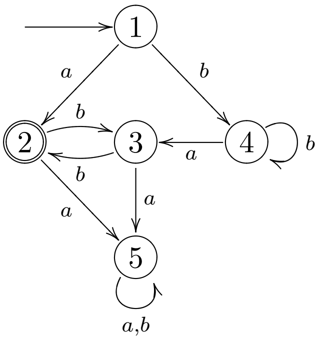


Aufgabe H2 (2+2 Punkte)

(a) Geben Sie für den folgenden NFA einen DFA an, der die gleiche Sprache erkennt.



(b) Zeigen Sie, dass der folgende DFA minimal ist.



Hinweis: Ein DFA ist minimal, wenn für alle Zustände x, y gilt, dass $x \not\sim y$.

Lösungsskizze:

(a)

δ	a	b
$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3\}$
$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1\}$
$\{1,2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$
$\{1,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$

Startzustand: $\{1\}$
akzeptierende Zustände: $\{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}$.

(b)

$\not\sim_0$	1	2	3	4	5
1		$\times$			
2	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
3		$\times$			
4		$\times$			
5		$\times$			

$\not\sim_1$	1	2	3	4	5
1		$\times$	$\times_a$	$\times_a$	$\times_a$
2	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
3	$\times_a$	$\times$		$\times_b$	$\times_b$
4	$\times_a$	$\times$	$\times_b$		
5	$\times_a$	$\times$	$\times_b$		

$\not\sim_2$	1	2	3	4	5
1		$\times$	$\times_a$	$\times_a$	$\times_a$
2	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
3	$\times_a$	$\times$		$\times_b$	$\times_b$
4	$\times_a$	$\times$	$\times_b$		$\times_a$
5	$\times_a$	$\times$	$\times_b$	$\times_a$	