Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

Wintersemester 2012/2013
4. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Lernportal Informatik** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt.

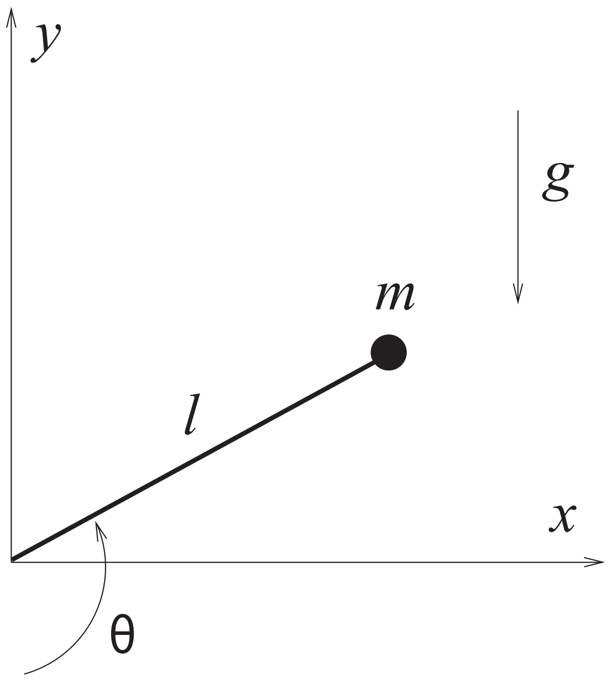
- **Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben:** In der Vorlesung, oder bis Montag, den 18.11.2012, um 13:15 Uhr im Briefkasten unseres Fachgebietes neben dem Sekretariat in Raum S2|02/E314.

Aufgabe 1 Steife Differentialgleichungssysteme (10 Punkte)

Wir betrachten ein stark vereinfachtes Modell einer Schiffsschaukel. Eine punktförmige Masse m repräsentiere den Schaukelkorb, der mit einem starren, masselosen Stab der Länge l aufgehängt ist. Für die Auslenkung $\theta = 0$ hängt die Schiffsschaukel senkrecht nach unten. Die Schwingungen der Schaukel sind im Drehgelenk gedämpft mit einer zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ proportionalen Dämpfung. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Als Differentialgleichung für den Winkel $\theta(t)$ ergibt sich damit

$$ml \sin(\theta) g + d\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = 0\,.$$

(a) Transformieren Sie die gegebene DGL auf ein System erster Ordnung. Bestimmen Sie alle Ruhelagen und zeichnen Sie diese in eine Skizze der Modells ein. Sind die berechneten Positionen plausibel? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.



Zu betrachten sei jetzt das spezielle System mit:

$m = 3$ kg, $g = 10$ m/s^2, $d = 2$ Nms, und $l = 2$ m.

(b) Bestimmen Sie die Jacobimatrix an den Gleichgewichtspunkten und nennen Sie die um die Gleichgewichtslagen linearisierten Systeme.

(c) Ist das linearisierte System stabil in der Nähe aller Gleichgewichtspunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Ist das System in der Umgebung der unteren Ruhelage ($\theta = 0$) steif? Betrachten Sie dazu die Zeitcharakteristiken.

Aufgabe 2 Linearisierung um eine Referenztrajektorie (10 Punkte)

Die Gleichungen die die Bewegungsbahn eines Satelliten in einer Bahn um einen Planeten M beschreiben sind

$$\ddot{d} = d\dot{\alpha}^2 - \mu/d^2$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2\dot{d}\dot{\alpha}}{d}$$

wobei d die Distanz zwischen Satellit und M beschreibt, α die Winkel, und μ das Produkt der Gravitationskonstante G und der Masse von M. (Die Beschleunigung in Richtung $\boldsymbol{r}$ ist gleich der Anziehungskraft geteilt durch die Satellitmasse m_s: $\ddot{d} - d\dot{\alpha}^2 = m_s\mu/(d^2 m_s)$, die Beschleunigung in Richtung $\boldsymbol{\theta}$: $d\ddot{\alpha} + 2\dot{d}\dot{\alpha} = 0$.)

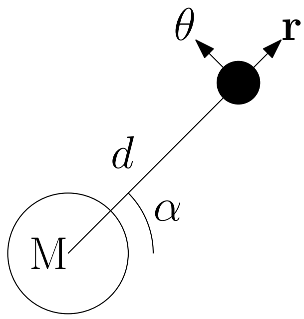


Abbildung 1: Planet M, Satellit, und die Polarkoordinate d, α.

a) Transformieren Sie das Gleichungssystem in ein System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{d} \\ \ddot{d} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(d, \dot{d}, \dot{\alpha})$$

b) Linearisieren Sie das erhaltene System. Das heißt, schreiben sie

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{d} \\ \Delta\ddot{d} \\ \Delta\ddot{\alpha} \end{pmatrix} = J(d, \dot{d}, \dot{\alpha}) \begin{pmatrix} \Delta d \\ \Delta\dot{d} \\ \Delta\dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

wobei $J(d, \dot{d}, \dot{\alpha})$ die Jacobimatrix von $\boldsymbol{f}$ ist.

c) Eine kreisförmige Bahn ist eine mögliche Lösung des Systems. Die entsprechenden Sollwerte sind $d_s = d_0$, $\dot{d} = 0$, $\dot{\alpha} = \omega$, und $\mu = d_0^3 \omega^2$. Linearisieren Sie das System um die Referenztrajektorie.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $J(d, \dot{d}, \dot{\alpha})$. Was können Sie über die Stabilität des Systems sagen?

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung für eine schriftliche Aufgabe oder eine Programmieraufgabe bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Falls die Verwendung von Fremdmaterial gestattet ist, so müssen Quellen korrekt zitiert werden. Weiterführende Informationen finden Sie auf der Internetseite des Fachbereichs Informatik:

`http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarismus`