Formale Grundlagen der Informatik I
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
23. April 2014

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Mengenoperationen)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$

ii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

Lösung:

(a) i. Wir zeigen, dass $(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap B$ und $(A \cap B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cap B$.

($\subseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \setminus C$. Dann ist $x \in A$, $x \in B$ und $x \notin C$. Also haben wir $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Daraus folgt, dass $x \in (A \setminus C) \cap B$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \setminus C) \cap B$. Dann ist $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Das erste bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin C$. Da $x \in A$ und $x \in B$, haben wir $x \in A \cap B$. Da also $x \notin C$, folgt $x \in (A \cap B) \setminus C$.

ii. Wir zeigen, dass $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ und $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \supseteq C \setminus (A \cap B)$.

($\subseteq$) Sei $x \in C \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in C$ und $x \notin A \cap B$. Da $x \notin A \cap B$, muss $x \notin A$ oder $x \notin B$ gelten (wäre beides falsch, so wäre $x \in A$ und $x \in B$ und damit $x \in A \cap B$). Falls $x \notin A$ gilt, dann $x \in C \setminus A$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Falls $x \notin B$ gilt, dann $x \in C \setminus B$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. In beiden Fällen gilt also $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Dann gilt entweder $x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$. (Hier sollten wir den Beweis also via Fallunterscheidung fortführen.) Im ersten Fall gilt $x \in C$ und $x \notin A$. Letzteres bedeutet, dass $x \notin A \cap B$. Also gilt $x \in C \setminus (A \cap B)$. Im zweiten Fall beweist man analog, dass $x \in C \setminus (A \cap B)$.

(b) Es gilt, dass $A \cap (M \setminus B) \subseteq A \setminus (B \cap C)$, $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Weiterhin sind sowohl $M \setminus (A \cup B)$ und $A \setminus (B \cup C)$ als auch $M \setminus (A \cup B)$ und $A \cap (M \setminus B)$ disjunkt.

Aufgabe G2 (Äquivalenzrelationen, Surjektivität, Injektivität)

(a) Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung. Die Relation $\sim$ sei auf A durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

für $x, y \in A$ definiert.

i. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

ii. Sei $q : A \to {}^{A}/_{\sim}$ durch $q(x) := [x]_\sim$ definiert. Zeigen Sie, dass q surjektiv ist.

iii. Geben Sie ein Beispiel von A, B und f an, sodass q nicht injektiv ist.

(b) Sei A eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass für jede Äquivalenzrelation $\approx$ auf A eine Menge B und eine Abbildung $f : A \to B$ existiert, sodass $x \approx y \iff f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in A$ gilt.

Lösung:

(a) i. Reflexivität von $\sim$ bedeutet $f(x) = f(x)$, Symmetrie bedeutet $f(x) = f(y) \implies f(y) = f(x)$ und Transitivität bedeutet $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \implies f(x) = f(z)$ für alle $x, y, z \in A$. Also folgen alle diese Eigenschaften für $\sim$ aus den entsprechenden Eigenschaften für $=$.

ii. Die Elemente von $A/_{\sim}$ sind die Äquivalenzklassen $[x]_\sim$, wobei $x \in A$. Um Surjektivität von q zu zeigen, müssen wir für jedes solche $[x]_\sim$ ein Element aus A finden, das mit q zu $[x]_\sim$ abgebildet wird. Das gilt, denn $q(x) = [x]_\sim$.

iii. Zum Beispiel $f : \{0,1\} \to \{0\}$, $f(x) = 0$. Weil f konstant ist, ist die einzige Äquivalenzklasse ganz $\{0,1\}$ und wir haben $q(0) = q(1)$. Da $0 \neq 1$, ist q nicht injektiv.

(b) Die vorherige Teilaufgabe suggeriert folgende Lösung: wir nehmen $B := A/_{\approx}$ und $f(x) := [x]_\approx$.

Aufgabe G3 (Transitionssysteme und Wahrheitswertetafeln)

(a) Modellieren Sie eine Verkehrsampel als endliches Transitionssystem.

(b) Zeigen Sie anhand von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln äquivalent sind:

$$\neg(p \to q), \qquad p \wedge \neg q, \qquad (p \vee q) \wedge \neg q.$$

Lösung:

(a) Unterscheide z.B. die folgenden fünf Zustände:

$$\{\text{rot}, \text{rot-gelb}, \text{grün}, \text{gelb}, \text{aus}\}.$$

Im Normalbetrieb wechselt die Ampel ihre Zustände in folgender Reihenfolge:

$$\text{rot} \to \text{rot-gelb} \to \text{grün} \to \text{gelb} \to \text{rot}.$$

Außerdem besitzt eine Ampel einen Nachtbetrieb:

$$\text{gelb} \to \text{aus} \to \text{gelb}.$$

(b)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0

Hausübung

Aufgabe H1 (Mengenoperationen) (12 Punkte)

Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

(d) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

Lösung:

(a) ($\subseteq$) Wenn $x \in A \cup (B \cap C)$, dann gilt $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Falls, $x \in A$, dann gilt auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Wenn $x \in B \cap C$, ist $x \in B$ und $x \in C$, also wiederum $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Also ist auch $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Also ist $x \in A$ oder $x \in B$ und $x \in C$. Damit ist $x \in B \cap C$ oder $x \in A$, was genau die Definition von $x \in A \cup (B \cap C)$ ist.

(b) ($\subseteq$) Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Also ist $x \in B$ oder $x \in C$. Damit ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Somit ist $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Also ist $x \in A$ und $x \in B$ oder $x \in A$ und $x \in C$. Damit ist in jedem Fall $x \in A$ und $x \in B$ oder $x \in C$, also $x \in B \cup C$. Damit ist aber auch $x \in A \cap (B \cup C)$.

(c) ($\subseteq$) Sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin A \cup B$. Also ist $x \notin A$ und $x \notin B$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Damit ist aber auch $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Also ist $x \in M$ und $x \notin A$ und $x \notin B$. Damit ist $x \notin A \cup B$, also $x \in M \setminus (A \cup B)$.

(d) ($\subseteq$) Sei $x \in M \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin A \cap B$. Also ist $x \notin A$ oder $x \notin B$. Also ist $x \in M \setminus A$ oder $x \in M \setminus B$ und somit $x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Dann ist $x \in M \setminus A$ oder $x \in M \setminus B$. Also ist $x \in M$ und $x \notin A$ oder $x \in M$ und $x \notin B$. Also ist $x \notin A \cap B$ und somit $x \in M \setminus (A \cap B)$.

Bepunktung: $\boxed{3\text{ P.}}$ pro Teilaufgabe.

Aufgabe H2 (Bijektivität) (12 Punkte)

Definiere die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(x, y) := \frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} + x.$$

Beweisen Sie, dass f eine Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ ist.
Bemerkung: Wir betrachten 0 als natürliche Zahl.

Lösung: Tabelle für f:

f	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$\dots$
$y=0$	0	2	5	9	14	
$y=1$	1	4	8	13	$\dots$	
$y=2$	3	7	12	$\dots$		
$y=3$	6	11	$\dots$			
$y=4$	10	$\dots$				
$\vdots$						

Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn sie invertierbar ist. Wir definieren $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie folgt. Nehme ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wie aus den Matheveranstaltungen bekannt, gibt die Funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(k) := \frac{k\cdot(k+1)}{2}$ die Summe der Zahlen von 0 bis k an; weil $s(0) = 0$ gilt und s streng monoton wachsend ist, existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}$, sodass $s(k) \le n < s(k+1)$ gilt. Sei $g(n) := \big(n - s(k), k - n + s(k)\big)$.
Wir überprüfen, dass dieses g die Inverse zu f ist.

$$f\left(g(n)\right) = \frac{(n-s(k)+k-n+s(k))\cdot(n-s(k)+k-n+s(k)+1)}{2} + n - s(k) = \frac{k\cdot(k+1)}{2} + n - s(k) = s(k) + n - s(k) = n,$$

was Surjektivität beweist.

$$g(f(x,y)) = g\Big(\frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} + x\Big) =$$

(bemerke, dass $k = x + y$, weil $\frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} \leq \frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} + x < \frac{(x+y+1)\cdot(x+y+2)}{2}$)

$$= \Big(\frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} + x - s(x+y),\ x+y - \frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} - x + s(x+y)\Big) = (x,y),$$

was Injektivität beweist.

Bepunktung: $\boxed{6\text{ P.}}$ für Surjektivität, $\boxed{6\text{ P.}}$ für Injektivität.

Aufgabe H3 (Wahrheitswertetafeln) (12 Punkte)

Man betrachte die logischen Formeln

(i) $p \lor q$,

(ii) $(p \land q \land r) \to \neg p$,

(iii) $p \land (p \lor q \lor r)$,

(iv) $(p \to q) \leftrightarrow q$.

(a) Geben Sie die Wahrheitswertetafeln für diese Formeln an.

(b) Geben Sie für je zwei dieser Formeln an, ob sie logisch äquivalent sind.

Lösung:

(a)

p	q	r	$p \lor q$	$p \land q \land r$	$\neg p$	$(p \land q \land r) \to \neg p$	$p \lor q \lor r$	$p \land (p \lor q \lor r)$	$p \to q$	$(p \to q) \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Bepunktung: $\boxed{8\text{ P.}}$ ($\boxed{2\text{ P.}}$ pro Formel).

(b) Aus der Wahrheitswertetafel können wir ablesen, dass nur die Formeln (i) und (iv) logisch äquivalent sind. $\boxed{4\text{ P.}}$