Formale Grundlagen der Informatik I
1. Übungsblatt

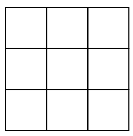
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

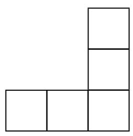
SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Transitionssysteme)
Betrachten Sie dass folgende Spiel. Das Spiel beginnt mit einer rechteckigen Tafel Schokolade, z.B. von folgender Form:

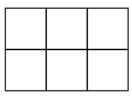


Zwei Spieler wählen nun abwechselnd ein Stück der Schokolade. Wer ein Stück gewählt hat, muss dieses Stück essen, sowie alle anderen Stücke, die sich weiter links, oberhalb oder weiter links und oberhalb von dem gewählten Stück befinden. Der Spieler darf keine anderen Stücke essen. Wenn man beispielsweise das mittlere Stück der oben abgebildeten Schokolade aussucht, bleibt folgender Rest übrig:



Jeder Spieler muss immer mindestens ein Stück Schokolade essen und wer das letzte Stück isst, hat verloren.

(a) Nehmen Sie an, das Spiel beginnt mit der folgenden Form:



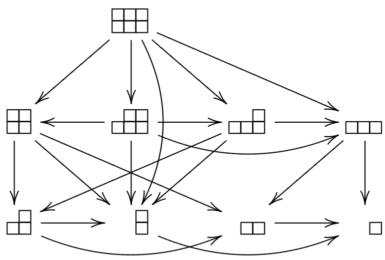
Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm, dessen Knoten die möglichen Positionen sind, die man von der Startposition aus erreichen kann. Die Kanten sollen die möglichen Übergänge darstellen, die einem Zug im Spiel entsprechen.

(b) Erklären Sie, wie man das Diagramm benutzen kann um die Positionen zu ermitteln, in denen der Spieler, der am Zug ist, Gewinn erzwingen kann (also eine *Gewinnstrategie* hat).

(c) Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie sieht seine Strategie aus?

Lösungsskizze:

(a)



Dazu gibt gibt es auch noch die leere Position $\emptyset$, die man aus jeder anderen Position erreichen kann.

(b) Nennen wir eine Position, in der der Spieler, der in dieser Position am Zug ist, eine Gewinnstrategie hat eine *Gewinnposition* und eine Positione, in der der Spieler, der nicht am Zug ist, eine Gewinnstrategie hat eine *Verlustposition*.

Die beide Klassen der Positionen lassen sich induktiv aus dem Diagramm ermitteln, da eine Position eine Gewinnposition ist, genau dann wenn es in dieser Position einen Zug gibt, der zu einer Verlustposition führt und eine Position eine Verlustposition ist, genau dann wenn alle mögliche Züge zu einer Gewinnposition führen. Dabei betrachten wir $\emptyset$ als eine Gewinnposition, da in dieser Position der Gegner soeben das letzte Stück gegessen haben muss.

So sieht man erstens ein, dass eine Verlustposition ist, da der einzig mögliche Zug in dieser Position daraus besteht das letzte Stück Schokolade zu essen. Damit sind dann alle Positionen, von denen es ein Übergang zu gibt, Gewinnpositionen, d.h. , , . Nun kann die Menge der Verlustpositionen mit erweitert werden, da alle mögliche Züge in dieser Position zu einer Gewinnposition führen. Fährt man so fort, dann ergibt sich, dass , , Verlustpositionen sind und der Rest Gewinnpositionen.

(c) Der erste Spieler gewinnt, da Gewinnpositionen ist. Die einzige Möglichkeit mit dem ersten Zug in eine Verlustposition für Spieler 2 zu kommen, besteht darin, die linke obere Ecke zu essen. In seinem zweiten Zug muss Spieler 1 entweder die Position oder die Position erreichen. Eines von beidem ist immer möglich. Falls Spieler 1 noch einen dritten Zug machen muss, kann er immer die Position erreichen.

Aufgabe G2 (Mengenoperationen)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

ii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

Lösungsskizze:

(a) i. Wir zeigen, dass $(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap B$ und $(A \cap B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cap B$.

($\subseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \setminus C$. Dann ist $x \in A$, $x \in B$ und $x \notin C$. Also haben wir $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Daraus folgt, dass $x \in (A \setminus C) \cap B$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \setminus C) \cap B$. Dann ist $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Das erste bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin C$. Da $x \in A$ und $x \in B$, haben wir $x \in A \cap B$. Da also $x \notin C$, folgt $x \in (A \cap B) \setminus C$.

ii. Wir zeigen, dass $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ und $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \supseteq C \setminus (A \cap B)$.

($\subseteq$) Sei $x \in C \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in C$ und $x \notin A \cap B$. Da $x \notin A \cap B$, muss entweder $x \notin A$ gelten, oder $x \notin B$ (wäre beides falsches, dann gilt $x \in A$ und $x \in B$ und damit $x \in A \cap B$).

Falls $x \notin A$ gilt, dann $x \in C \setminus A$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Falls $x \notin B$ gilt, dann $x \in C \setminus B$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. In beiden Fällen gilt also $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Dann gilt entweder $x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$. Im ersten Fall gilt $x \in C$ und $x \notin A$. Letzteres bedeutet, dass $x \notin A \cap B$. Also gilt $x \in C \setminus (A \cap B)$. Im zweiten Fall beweist man analog, dass $x \in C \setminus (A \cap B)$.

(b) Es gilt, dass $A \cap (M \setminus B) \subseteq A \setminus (B \cap C)$, $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Weiterhin sind sowohl $M \setminus (A \cup B)$ und $A \setminus (B \cup C)$ als auch $M \setminus (A \cup B)$ und $A \cap (M \setminus B)$ disjunkt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Transitionssysteme)

Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

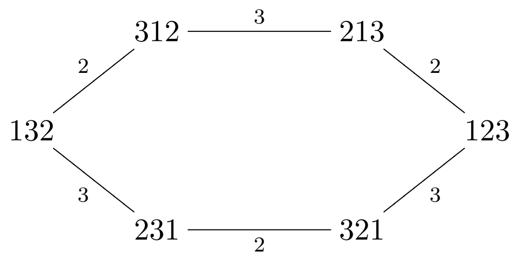
entsprechen.

(a) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

(b) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen zu 1234 sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

Lösungsskizze:

(a)



(b)

$$\begin{array}{rc}
0: & 1234 \\
1: & 2134, 3214, 4321 \\
2: & 3124, 4312, 2314, 4123, 3421, 2341 \\
3: & 1324, 4213, 3412, 1342, 4132, 1423, 2143, 2431, 1243, 3241, 1432 \\
4: & 4231, 2413, 3142
\end{array}$$

$$1324 \xrightarrow{2} 3124 \xrightarrow{3} 2134 \xrightarrow{2} 1234$$

$$1324 \xrightarrow{3} 2314 \xrightarrow{2} 3214 \xrightarrow{3} 1234$$

Aufgabe H2

Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

Lösungsskizze:

(a) ($\subseteq$) Wenn $x \in A \cup (B \cap C)$, dann gilt $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Falls $x \in A$, dann gilt auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Wenn $x \in B \cap C$, ist $x \in B$ und $x \in C$, also wiederum $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Also ist auch $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Aus $x \notin A$ würde dann folgen, dass $x \in B$ und $x \in C$. Damit ist $x \in A$ oder $x \in B \cap C$, was genau die Definition von $x \in A \cup (B \cap C)$ ist.

(b) ($\subseteq$) Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Also ist $x \in B$ oder $x \in C$. Damit ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Somit ist $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Also ist $x \in A$ und $x \in B$ oder $x \in A$ und $x \in C$. Damit ist in jedem Fall $x \in A$ und $x \in B$ oder $x \in C$, also $x \in B \cup C$. Damit ist aber auch $x \in A \cap (B \cup C)$.

(c) ($\subseteq$) Sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin A \cup B$. Also ist $x \notin A$ und $x \notin B$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Damit ist aber auch $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Also ist $x \in M$ und $x \notin A$ und $x \notin B$. Damit ist $x \notin A \cup B$, also $x \in M \setminus (A \cup B)$.