Formale Grundlagen der Informatik I
3. Übungsblatt

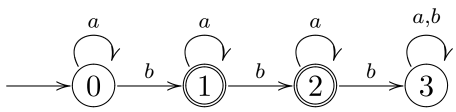
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
29. 04. 2013

Hausübung

Aufgabe H5 (Automaten und reguläre Ausdrücke) (5 Punkte)
Wir betrachten den folgenden deterministischen endlichen Automaten (DEA) $\mathcal{A}$:



(a) Welche der nachfolgenden Sprachen werden durch den Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert?

$$\mathtt{L}\,(\mathtt{aaa})\,,\quad \mathtt{L}\,(\mathtt{b}+\mathtt{bab}+\mathtt{baaab})\,,\quad \mathtt{L}\,(\mathtt{aaba}^*)\,,\quad \mathtt{L}\,(\mathtt{b}^*\mathtt{a}^*)\,,$$

$$\mathtt{L}\,((\mathtt{aa}+\mathtt{b})\mathtt{a}^*)\,,\quad \mathtt{L}\,(\mathtt{aabbaa}+\mathtt{baaba}+\mathtt{b}(\mathtt{aaa})^*)$$

(b) Beschreiben Sie den Automaten $\mathcal{A}$ formal, d. h. geben Sie (gemäß Skript, Definition 2.2.2) Σ, Q, q_0, δ und A formal an.

(c) Geben Sie einen regulären Ausdruck $\alpha \in \mathrm{REG}(\Sigma)$ an, dessen Sprache zu der Sprache des Automaten $\mathcal{A}$ äquivalent ist, d. h. für den $\mathtt{L}\,(\alpha) = \mathcal{L}\,(\mathcal{A})$ gilt.

(d) Geben Sie einen regulären Ausdruck $\beta \in \mathrm{REG}(\Sigma)$ für das Komplement der Sprache $\mathtt{L}\,(\alpha)$ an.

Lösung:

(a) Jede richtig charakterisierte Sprache: $\boxed{\text{0,25 P.}}$
Von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprachen: $\mathtt{L}\,(\mathtt{b}+\mathtt{bab}+\mathtt{baaab})$, $\mathtt{L}\,(\mathtt{aaba}^*)$, $\mathtt{L}\,(\mathtt{aabbaa}+\mathtt{baaba}+\mathtt{b}(\mathtt{aaa})^*)$.
Von $\mathcal{A}$ nicht akzeptierte Sprachen: $\mathtt{L}\,(\mathtt{aaa})$, $\mathtt{L}\,(\mathtt{b}^*\mathtt{a}^*)$, $\mathtt{L}\,((\mathtt{aa}+\mathtt{b})\mathtt{a}^*)$.

(b) $\Sigma = \{a, b\}$ $\boxed{\text{0,25 P.}}$
$Q = \{0, 1, 2, 3\}$ $\boxed{\text{0,25 P.}}$
$q_0 = 0$ $\boxed{\text{0,25 P.}}$
$\delta(0,a) = 0$, $\delta(0,b) = 1$, $\delta(1,a) = 1$, $\delta(1,b) = 2$, $\delta(2,a) = 2$, $\delta(2,b) = 3$, $\delta(3,a) = 3$, $\delta(3,b) = 3$ $\boxed{\text{0,5 P.}}$
$A = \{1, 2\}$ $\boxed{\text{0,25 P.}}$

(c) $\alpha = \mathtt{a}^*\mathtt{ba}^* + \mathtt{a}^*\mathtt{ba}^*\mathtt{ba}^*$ $\boxed{\text{1 P.}}$

(d) $\beta = \mathtt{a}^* + \mathtt{a}^*\mathtt{ba}^*\mathtt{ba}^*\mathtt{b}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$ $\boxed{\text{1 P.}}$

Aufgabe H6 (Sprachen und Automaten) (5 Punkte)

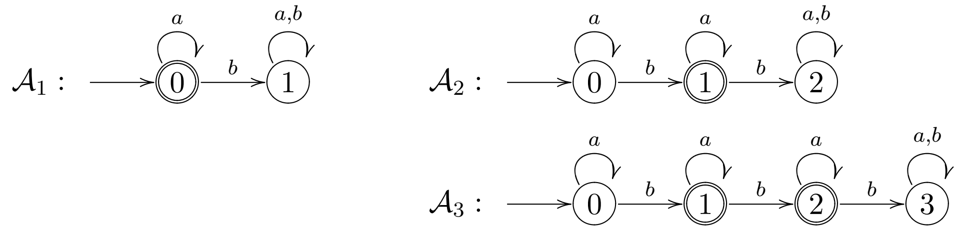
Im folgenden bestehe unser Alphabet Σ aus den Zeichen a und b.

(a) Zeichnen Sie einen DEA $\mathcal{A}$, der alle Σ-Wörter, die kein oder genau zwei b enthalten, akzeptiert.

Aus zwei Automaten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ über dem gleichen Alphabet Σ lassen sich neue Automaten für den Schnitt und die Vereinigung der Sprachen $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{L}(\mathcal{A}')$, sowie für die Komplementsprache von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ konstruieren. Wir definieren:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \sqcap \mathcal{A}' \quad & \text{gemäß der Konstruktion für Lemma 2.2.11(a)},\\
\mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}' \quad & \text{gemäß der Konstruktion für Lemma 2.2.11(b)},\\
\neg\mathcal{A} \quad & \text{gemäß der Konstruktion für Lemma 2.2.11(c)}.
\end{aligned}
$$

Betrachten Sie nun die nachfolgenden DEAs:

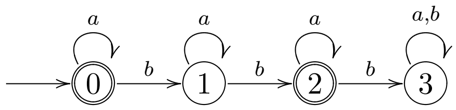


(b) Konstruieren Sie die Automaten $\neg\mathcal{A}_2$, $(\neg\mathcal{A}_2) \sqcap \mathcal{A}_3$ und $\mathcal{B} := \big((\neg\mathcal{A}_2) \sqcap \mathcal{A}_3\big) \sqcup \mathcal{A}_1$.

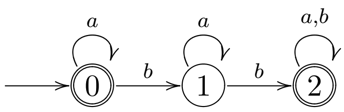
(c) Geben Sie die durch $\mathcal{B}$ akzeptierte Sprache an.

Lösung:

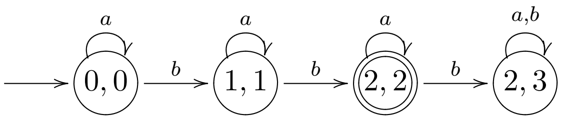
(a) $\boxed{1\text{ P.}}$



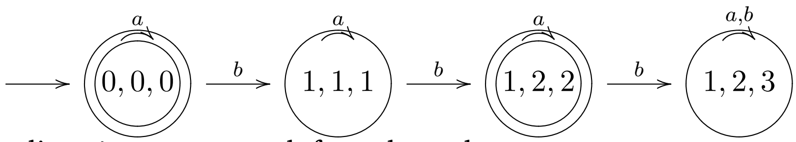
(b) $\boxed{1\text{ P.}}$ $\neg\mathcal{A}_2$:



$\boxed{1\text{ P.}}$ $(\neg\mathcal{A}_2) \sqcap \mathcal{A}_3$:



$\boxed{1\text{ P.}}$ $\mathcal{B}$:



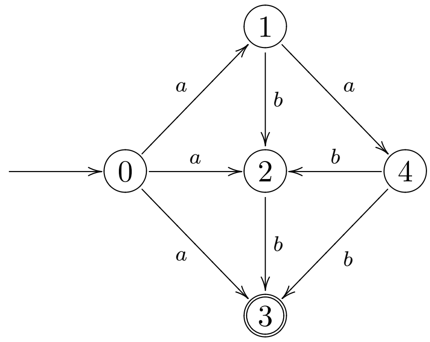
Man kann diese Automaten auch formal angeben.

In den obigen Automaten haben wir all die Zustände, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind, ausgelassen.

(c) $\boxed{1\text{ P.}}$ Einerseits akzeptiert $\mathcal{B}$ alle Wörter mit nicht genau einem b, aber mit genau einem oder zwei b, und anderseits auch die Wörter mit keinem b. Also akzeptiert $\mathcal{B}$ die gleiche Sprache wie in (a): alle Wörter mit keinem oder genau zwei b.

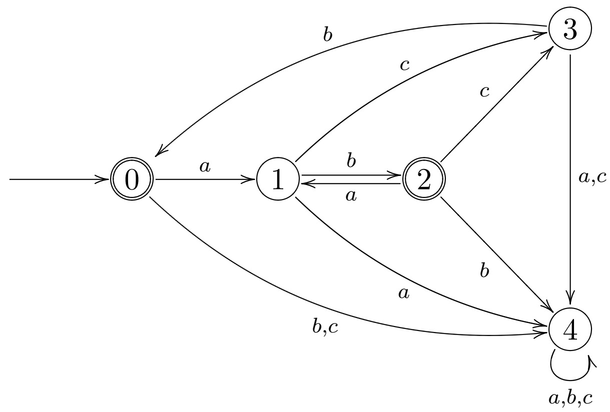
Aufgabe H7 (Deterministische und nichtdeterministische Automaten) (5 Punkte)

(a) Gegeben sei der folgende NEA über das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von diesem Automaten erkannte Sprache beschreibt. Danach geben Sie einen DEA an, der dieselbe Sprache erkennt.

(b) Betrachten Sie den folgenden DEA über das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

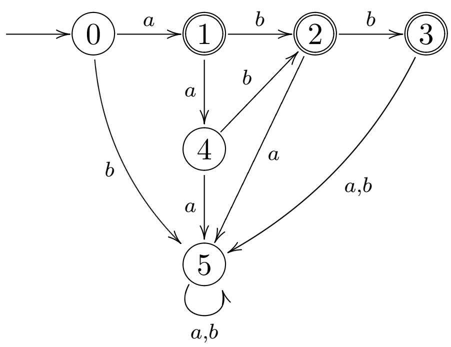


Geben Sie einen einfacheren (mit weniger Zuständen und Übergängen) NEA an, der dieselbe Sprache erkennt.

Lösung:

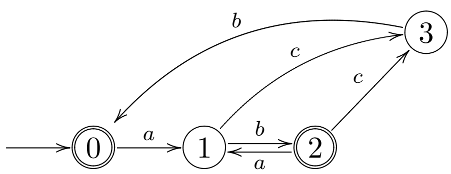
(a) $\boxed{\text{1 P.}}$ $\mathsf{a} + \mathsf{ab} + \mathsf{abb} + \mathsf{aab} + \mathsf{aabb}$

$\boxed{\text{2 P.}}$



(b) (Die erkannte Sprache is gegeben durch $\big(\mathsf{a}(\mathsf{ba})^*(\varepsilon+\mathsf{b})\mathsf{cb}\big)^*(\mathsf{ab})^* = \big((\mathsf{ab})^*(\mathsf{acb}+\mathsf{abcb})\big)^*(\mathsf{ab})^*$. Man könnte daraus einen NEA bauen, aber die einfachste Lösung ist einfach die Senke wegzunehmen.)

$\boxed{\text{2 P.}}$



Minitest

Aufgabe M7
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche Sprache beschreibt der folgende reguläre Ausdruck:

$$(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*(\mathtt{b} + \mathtt{a})^*$$

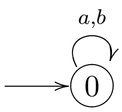
- ☐ Alle Wörter, die aus zwei Kopien eine Wortes bestehen, also Wörter der Form ww für ein $w \in \Sigma^*$.
- ☐ Alle Palindrome, d.h. alle Wörter der Form ww^{-1} für ein $w \in \Sigma^*$, wobei w^{-1} das Wort w umgedreht ist.
- ☐ Alle Wörter in Σ^*.

Lösung:

- ☐ Alle Wörter, die aus zwei Kopien eine Wortes bestehen, also Wörter der Form ww für ein $w \in \Sigma^*$.
- ☐ Alle Palindrome, d.h. alle Wörter der Form ww^{-1} für ein $w \in \Sigma^*$, wobei w^{-1} das Wort w umgedreht ist.
- ☒ Alle Wörter in Σ^*.

Sowohl $(\mathtt{a} + \mathtt{b})$ also auch $(\mathtt{b} + \mathtt{a})$ beschreiben die Sprache $\{a, b\}$. Damit beschreiben dann $(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$ und $(\mathtt{b} + \mathtt{a})^*$ jeweils Σ^*. Die Aussage folgt dann aus der Beobachtung, dass $\Sigma^* \cdot \Sigma^* = \Sigma^*$.

Aufgabe M8
Welcher reguläre Ausdruck beschreibt die gleiche Sprache wie der folgende Automat?



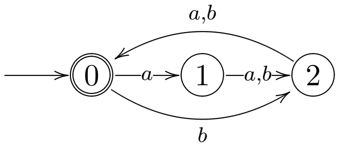
- ☐ $(\mathtt{ab})^*$
- ☐ $(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$
- ☐ $\emptyset$
- ☐ $\emptyset^*$

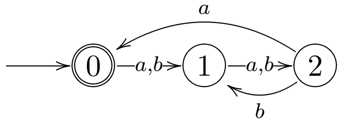
Lösung:

- ☐ $(\mathtt{ab})^*$
- ☐ $(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$
- ☒ $\emptyset$
- ☐ $\emptyset^*$

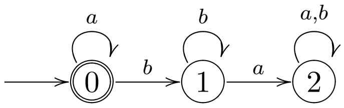
Der Automat hat keinen akzeptierenden Zustand, deshalb wird kein Wort akzeptiert, d.h. der Automat erkennt die leere Sprache $\emptyset$. Beachten Sie, dass $\mathtt{L}(\emptyset) = \emptyset$ aber $\mathtt{L}(\emptyset^*) = \{\varepsilon\}$, siehe Skript Beispiel 2.1.5.

Aufgabe M9
Ordnen Sie jedem der nachfolgenden Automaten den entsprechenden regulären Ausdruck zu, der die gleiche Sprache beschreibt.

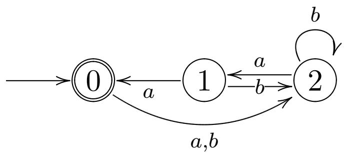
$\mathcal{A}_1$:


$\mathcal{A}_2$:


$\mathcal{A}_3$:



$\mathcal{A}_4$:



(a) $\mathtt{a}^*$

(b) $\big(\big(\mathtt{b} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})\big)(\mathtt{a} + \mathtt{b})\big)^*$

(c) $\big((\mathtt{a} + \mathtt{b})\big((\mathtt{ab})^*\mathtt{b}^*\big)^*\mathtt{aa}\big)^*$

(d) $\big((\mathtt{a} + \mathtt{b})\big((\mathtt{a} + \mathtt{b})\mathtt{b}\big)^*(\mathtt{aa} + \mathtt{ba})\big)^*$

Lösung: $\mathcal{A}_1$ – (b), $\mathcal{A}_2$ – (d), $\mathcal{A}_3$ – (a), $\mathcal{A}_4$ – (c)