Formale Grundlagen der Informatik I
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Reguläre Sprachen sind entscheidbar.

(b) Es gibt kontextfreie Sprachen, die regulär sind.

(c) Ist L_1 regulär und $L_2 \subseteq L_1$, so ist L_2 auch regulär.

(d) Ist L_1 regulär und L_2 beliebig, dann ist

$$L = \{x \in \Sigma^* \ : \ \text{es existiert ein } y \in L_2, \ \text{so dass } xy \in L_1\}$$

regulär.

(e) Das Komplement einer Sprache, die von einer Grammatik erzeugt wird, wird auch wieder von einer Grammatik erzeugt.

(f) Sind L_1 und L_2 kontextfrei, so ist $L_1 \backslash L_2$ entscheidbar.

(g) Die Sprache aller regulären Ausdrücke ist regulär.

Aufgabe G2
Zeigen Sie, dass die Klasse der rekursiv aufzählbaren Σ-Sprachen unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen ist.
Folgerns sie daraus, dass auch die Klasse der entscheidbaren Σ-Sprachen unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen sind.
Hinweis: Sie können dafür die Tatsache benutzten, dass es für zwei beliebige Turingmaschinen immer eine Turingmaschine gibt, die diese beiden parallel simuliert. Diese Turingmaschine kann man aus der Beschreibung der beiden anderen explizit konstruieren (was aufwendig ist). Unter Annahme der Church-Turing-These ist klar, dass eine solche Konstruktion existieren muss, denn auch ein Computer kann die Ausführung von zwei Programmen parallel simulieren.

Aufgabe G3
Bestimmen Sie eine kontextfreie Grammatik für die arithmetischen Terme über $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$, die minimal geklammert sind (d.h., wir berücksichtigen die Assoziativität der Addition und Multiplikation und geben der Multiplikation Priorität über die Addition).

Aufgabe G4
Sei $L \subseteq \{a\}^*$ eine kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet.

(a) Zeigen Sie, dass man L darstellen kann als endliche Vereinigung

$$L = L_0 \cup L_{k_1,p_1} \cup \cdots \cup L_{k_m,p_m} \,,$$

wobei L_0 eine endliche Sprache ist und

$$L_{k,p} := \{\, a^{k+ip} : i \in \mathbb{N} \,\} \,.$$

(b) Folgern Sie hieraus, dass jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet regulär ist.

Hinweis zu (a): Benutzen Sie das Pumping Lemma um zu zeigen, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$L = L_0 \cup L_{k_1,p_1} \cup L_{k_2,p_2} \cup \ldots \quad \text{mit } p_1, p_2, \ldots \leq n \,,$$

wobei Sie zunächst unendlich viele Sprachen der Form $L_{k,p}$ zulassen. Argumentieren Sie im zweiten Schritt, wieso Sie mit endlich vielen solchen Sprachen auskommen.

Hausübung

Aufgabe H1 (4+3+2+2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zur Erinnerung: Im Post'schen Korrespondenzproblem (PKP) ist eine *Instanz*, d.h. eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$, gegeben. Gefragt ist, ob es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $(n \geq 1)$ gibt, mit

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}.$$

Wenn eine solche Folge existiert, so heißt diese eine *Lösung* der PKP-Instanz $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$. Insbesondere ist die Frage, ob eine beliebige Instanz des PKP eine Lösung hat, semi-entscheidbar, aber *nicht* entscheidbar.

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Instanzen der PKP, ob es eine Lösung gibt. Falls es eine Lösung gibt, geben Sie diese an. Falls nicht, beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt.
   i. $(abba, a)$, $(aa, bbaa)$, $(bbbb, abb)$
   ii. (aa, a), (ba, ab), (b, abb)

(b) Geben Sie eine Grammatik an, die genau alle endlichen Folgen von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$ (d.h. die syntaktisch korrekten Instanzen des PKP) erzeugt.

(c) Gibt es eine Grammatik, die genau alle solcher Instanzen des PKP erzeugt, die eine Lösung haben?

(d) Gibt es eine Grammatik, die genau alle solcher Instanzen des PKP erzeugt, die *keine* Lösung haben?