Einführung in Computational Engineering
Grundlagen der Modellierung und Simulation

Dr. Arne Nägel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2012/2013
Lösungsvorschlag der 0. Übung

Aufgabe 1 System, Modell, Simulation

a) In der Vorlesung wurden die Begriffe System und Modell eingeführt und näher erläutert. Welche Möglichkeiten zur Klassifikation von Modellen anhand

(i) der Beschreibung des Zustands,
(ii) des zeitlichen Verlaufs und
(iii) der zeitlichen Charakteristik der Zustandsübergänge

werden vorgestellt? Welche weiteren Unterteilungen gibt es bei dynamischen Modellen?

b) Aus dem System und dem Modell ergibt sich die Simulation.

1. Nennen Sie drei verschiedene allgemeine Beispiele aus der Vorlesung für den Zweck, für den eine Simulation eingesetzt werden könnte.
2. Wie genau müssen die Ergebnisse einer Simulation sein? Gibt es ein Kriterium dafür?
3. Welche Möglichkeiten zur Validierung von Simulation (und Modell) haben Sie kennengelernt?

c) Sie wollen einen gehenden Menschen simulieren. Nennen sie jeweils drei (physikalische) Größen, die ihnen für Ihr Modell am wichtigsten erscheinen, wenn Sie sich für

1. das Wohlbefinden des Menschen oder für
2. Schäden am Untergrund interessieren.

Begründen Sie dabei kurz Ihre Auswahl.

Lösungsvorschlag

a) (i) Klassifikation anhand der *Art des Zustandsraums*: diskret / kontinuierlich oder
Klassifikation anhand der *Art der Zustandsübergänge*: deterministisch / stochastisch

(ii) Klassifikation anhand der *Art der Zeitachse*:
kontinuierlich / diskret äquidistant / diskret nicht äquidistant / kontinuierlich diskret

(iii) Klassifikation anhand der *zeitlichen Charakteristik der Zustandsübergänge*:
zeitdiskret / ereignisdiskret / zeitkontinuierlich

Weiterhin ist z.B. eine Klassifikation anhand der *Art der Dynamik* möglich:
instationär ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$) / stationär ($0 = \mathbf{f}(\mathbf{x})$) / quasi-stationär

b) 1. Siehe Folie 13: Szenario verstehen & nachvollziehen, optimieren, vorhersagen.
2. Siehe Folie 42: Dies ist immer abhängig von den Eingabedaten und der Problemstellung. Kriterien für die Genauigkeit sind stets problemspezifisch.

3. Siehe Folie 41: Vergleich mit Experimenten, A-posteriori Beobachtungen, Plausibilitäts-Test, Modellvergleich

c) 1. Mögliche Größen: Außentemperatur, Laufgeschwindigkeit, Elastizität des Bodens, Steigung des Untergrunds, aktuelle Körpertemperatur, Alter des Menschen, Blutdruck, Herzfrequenz, ...
   2. Zum Beispiel: die Masse des Menschen, die Druckverteilung an den Fußsohlen, Materialeigenschaften der Schuhe, Bodenbeschaffenheit (Elastizität, Material (Erde/Glas/Parkett), dessen Feuchtigkeit...)

Aufgabe 2 Wiederholung Differentialgleichungen (wichtig für Kapitel 3 der Vorlesung)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) - 7x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= 14x_1(t) + 11x_2(t).\end{aligned}$$

b) Welche spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems aus Aufgabenteil a) gehört zum Anfangswert

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}?$$

Lösungsvorschlag

a) Eigenwerte der Systemmatrix sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 4$ (ausrechnen über das charakteristische Polynom). Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\mathsf{v}_1 = (1, -1)^T$ und $\mathsf{v}_2 = (1, -2)^T$. Somit ergibt sich als allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Einsetzen von $t = 1$ in die allgemeine Lösung führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{-3} & e^{4} \\ -e^{-3} & -2e^{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit eindeutiger Lösung $c_1 = \mathrm{e}^3 (\approx 20.0855)$, $c_2 = -3\mathrm{e}^{-4} (\approx -0.0549)$. Die Lösung des AWP ist also

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} - 3\mathrm{e}^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t}.$$