Dr. Arne Nägel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2012/2013

Lösungsvorschlag der 11. Übung

Aufgabe 1 Modellierung mittels eines Differentialgleichungssystems (10 Punkte)

Wir betrachten ein Kind, welches an einem Stab ein Spielzeug hinter sich hinter sich her zieht (bzw. vor sich her schiebt). Kind und Spielzeug werden als Punkte in der x_1x_2-Ebene modelliert: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ bezeichnet die Position des Kindes, $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$ bezeichnet die Position des Spielzeugs. Der Stab kann über den Vektor

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t) - x_1(t) \\ X_2(t) - x_2(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Der Abstand zwischen Kind und Spielzeug ist konstant und ergibt sich aus der Länge $L := \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)}$ des Stabes.

Exemplarisch betrachten wir den Fall, dass Kind und Spielzeug an den Positionen $(x_1(0), x_2(0))^T = (5, 0)^T$ bzw. $(X_1(0), X_2(0))^T = (10, 0)^T$ starten. Das Kind bewege sich mit der Geschwindigkeit $u_1(t) = -5 \sin t$ in x_1-Richtung und $u_2(t) = 5 \cos t$ in x_2-Richtung.

a) Beschreiben Sie die Bahn des Kindes. Formulieren Sie dazu aus den obigen Vorgaben eine Differentialgleichung für x_1 und x_2 und geben Sie deren Lösung an.

b) Die Bewegung des Kindes wird nun als vorgegebene Kontrolle betrachtet[1]. Leiten Sie nun in einem nächsten Schritt eine Bewegungsgleichung für das Spielzeug in den Unbekannten X_1 und X_2 her. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeiten, wie in Abbildung 1 dargestellt ist, über den Stab gekoppelt sind. Die (vektorwertige!) Geschwindigkeit des Spielzeugs ergibt sich, indem man nur den Geschwindigkeitsanteil berücksichtigt, der über den Stab weitergegeben wird. Der Stab wird dabei durch den Vektor $\mathbf{d}$ beschrieben.

c) Leiten Sie aus den Gleichungen eine Bedingung für eine Ruhelage des Spielzeugs her. Welche geometrische Bedeutung hat dies?

d) Bestimmen Sie $(X_1, X_2)^T$ numerisch. Führen Sie dazu fünf Schritte mit dem expliziten Eulerverfahren mit einer konstanten Zeitschrittweite $h = 0.5$ durch und stellen Sie diese in einer Skizze dar. Ermitteln Sie für diese Schritte den Abstand der sich zwischen Spielzeug und Kind ergibt. Ist dieser konstant? Geben Sie eine Begründung für Ihre Beobachtung.

Lösungsvorschlag

a) Ausgangsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 = -5 \sin t,\ x_1(0) = 5 \\ \dot{x}_2 &= u_2 = 5 \cos t,\ x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

[1] Bem: Im Rahmen der Vorlesung ist eine Kontrolle keine Unbekannt des zu modellierenden Systems.

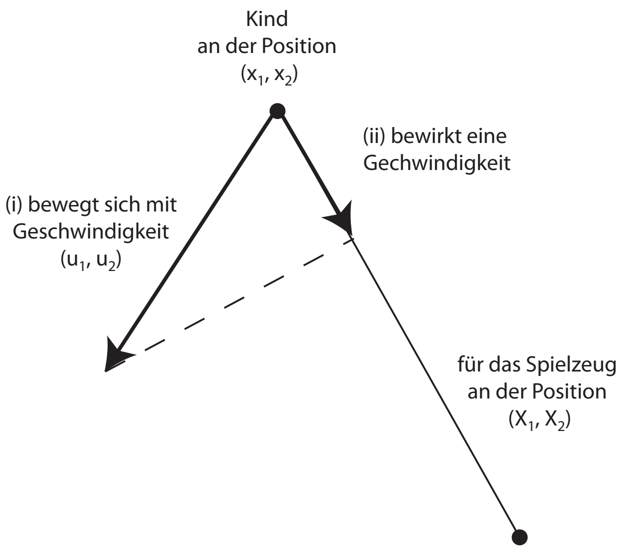


Abbildung 1: Skizze der Geschwindigkeitsübertragung zwischen Kind und Spielzeug.

Integration:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5+\int_0^t -5\sin s\,ds = 5+(5\cos t-5) = 5\cos t\\
x_2 &= 0+\int_0^t 5\cos s\,ds = 5\sin t - 0 = 5\sin t
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Kreis um Ursprung mit Radius 5 (1 Punkt).

b) Vektorwertig erhalten wir:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{d}\rangle}{||\mathbf{d}||^2}\mathbf{d}$$

bzw. komponentenweise:

$$
\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= \frac{u_1 d_1 + u_2 d_2}{d_1^2 + d_2^2} d_1,\\
\dot{X}_2 &= \frac{u_1 d_1 + u_2 d_2}{d_1^2 + d_2^2} d_2
\end{aligned}
$$

(3 Punkte)

c) Wir erhalten die Bedingungen (1 Punkt)

$$0 = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{d}\rangle}{||\mathbf{d}||^2} d_1 \text{ und } 0 = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{d}\rangle}{||\mathbf{d}||^2} d_2.$$

Da hier immer $\mathbf{d} \neq 0$ gilt, folgt also $\langle \mathbf{u}, \mathbf{d}\rangle = u_1 d_1 + u_2 d_2 = 0$. In diesem Fall ist $\mathbf{u}$ orthogonal zu $\mathbf{d}$ (1 Punkt). Das ist z.B. bei der Kreisbewegung der Fall.

d) Eine Tabelle der Iterationen findet sich in Tabelle 1. Hierbei wurde die Position $\mathbf{x}$ analytisch berechnet. Der Abstand bleibt nicht konstant, da er nur implizit in den Modellgleichungen enthalten ist. (Andere Modelle sind jedoch durchaus denkbar!).

Tabelle 1: Ergebnisse für expliziten Euler ($dt = 0.5$, $L = 5$).

	Kind				Spielzeug		Gesamt							
t	x_1	x_2	u_1	u_2	X_1	X_2	d_1	d_2	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle$	$\|\mathbf{d}\|$	f_1	f_2	$X_1^{(NEU)}$	$X_2^{(NEU)}$
0	5.0000	0.0000	0.0000	5.0000	10.0000	0.0000	5.000	0.000	0.000	5.000	0.000	0.000	10.0000	0.0000
0.5	4.3879	2.3971	-2.3971	4.3879	10.0000	0.0000	5.612	-2.397	-23.971	6.103	-3.612	1.543	8.1938	0.7715
1	2.7015	4.2074	-4.2074	2.7015	8.1938	0.7715	5.492	-3.436	-32.390	6.479	-4.239	2.652	6.0745	2.0973
1.5	0.3537	4.9875	-4.9875	0.3537	6.0745	2.0973	5.721	-2.890	-29.555	6.409	-4.116	2.079	4.0167	3.1369
2	-2.0807	4.5465	-4.5465	-2.0807	4.0167	3.1369	6.097	-1.410	-24.789	6.258	-3.859	0.892	2.0871	3.5830
2.5	-4.0057	2.9924	-2.9924	-4.0057	2.0871	3.5830	6.093	0.591	-20.598	6.121	-3.349	-0.325	0.4125	3.4207
3	-4.9500	0.7056	-0.7056	-4.9500	0.4125	3.4207	5.362	2.715	-17.223	6.011	-2.556	-1.294	-0.8657	2.7735
3.5	-4.6823	-1.7539	1.7539	-4.6823	-0.8657	2.7735	3.817	4.527	-14.505	5.921	-1.579	-1.873	-1.6551	1.8370

Aufgabe 2 Wiederholung: Steife Differentialgleichungen (10 Punkte)

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

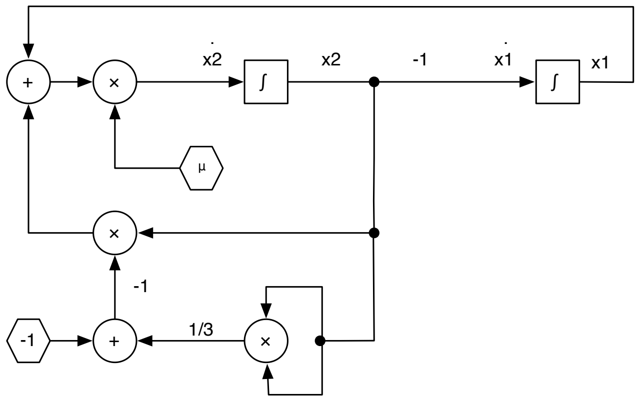
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \mu\left(x_1(t) - \frac{x_2(t)^3}{3} + x_2(t)\right) \end{aligned}$$

mit $\mu > 10^3$.

a) Geben Sie eine Blockdiagrammdarstellung für dieses System an.

b) Untersuchen Sie die Jacobi-Matrix der rechten Seite des Differentialgleichungssystems und begründen Sie anhand eines Steifigkeitsmaßes, warum dieses Differentialgleichungssystem im Bereich $x_2 \approx 0$ als steif gilt.

Lösungsvorschlag



a) (4 Punkte):

b) Die Jacobi-Matrix lautet (1 Punkt):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \mu & \mu(1 - x_2^2) \end{pmatrix}$$

Eigenwertgleichung (1 Punkt):

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \mu(x_2^2 - 1)\lambda + \mu = 0$$

liefert

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\mu\left(1 - x_2^2 \pm \sqrt{(x_2^2 - 1)^2 - 4/\mu}\right)$$

Damit besitzt der Steifigkeitskoeffizient im betrachtetem Gebiet folgende Darstellung (1 Punkt):

$$\mathcal{K} = \frac{\max|Re(\lambda_i)|}{\min|Re(\lambda_i)|} = \frac{1 - x_2^2 + \sqrt{x_2^4 - 2x_2^2 + 1 - 4/\mu}}{1 - x_2^2 - \sqrt{x_2^4 - 2x_2^2 + 1 - 4/\mu}}$$

Für $x_2 \approx 0$ und $\mu > 10^3$ bedeutet dies

$$\mathcal{K} \approx \frac{1 + 0.998}{1 - 0.998} > 999$$

Ein Steifigkeitskoeffizient dieser Größe weist auf eine steife Differentialgleichung hin (1 Punkt).

Programmieraufgabe P5 Modulare Modellbildung mit Simulink (20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(t,x,y)\cdot f_1(t,x),\ x(0)=x_0,\\ \dot{y} &= f_0(t,x,y)\cdot f_2(t,y),\ y(0)=y_0.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}f_0(t,x,y) &:= \frac{-5\sin t\cdot f_1(t,x)+5\cos t\cdot f_2(t,y)}{f_1^2(t,x)+f_2^2(t,y)},\\ f_1(t,x) &:= (x-5\cos t),\\ f_2(t,y) &:= (y-5\sin t).\end{aligned}$$

a) Lösen Sie das o.g. Problem unter Verwendung von Simulink. Erzeugen Sie eine Datei `P5.mdl` und erstellen Sie darin alle benötigten Komponenten. Die Anfangswerte sollen frei wählbar sein. Die Simulationsergebnisse sollen als Tabelle in den Matlab-Workspace exportiert werden.

b) Testen Sie Ihr Programm für zwei verschiedene Anfangswertszenarien. Test 1 ist durch die Anfangswerte $x(0) = 10, y(0) = 0$ gegeben. Für Test 2 verwenden Sie bitte die Anfangswerte $x(0) = 0, y(0) = 10$. Die Simulation erfolge jeweils im Intervall $[0,100]$.

c) Stellen Sie beide erhaltenen Lösungen graphisch dar. Erzeugen Sie Dateien `P5Test1.pdf` und `P5-Test2.pdf`, welche eine graphische Darstellung der Lösung in der xy-Ebene enthält. Verwenden Sie hierzu Diagramme mit den Abmessungen $(-20,20)\times(-20,20)$. Die Graphen sollten Sie über ein Skript `P5Graph.m` als Matlab-Figures erzeugen und dann als PDF exportieren.

Hinweise zur Programmieraufgabe

- Für die Abgabe der Programmieraufgabe komprimieren Sie die von Ihnen erzeugten Dateien in einem unverschlüsselten `zip`-Archiv, das Sie mit dem ersten Buchstaben des Vornamens `V`, dem ersten Buchstaben des Nachnamens `N` und den letzten beiden Ziffern der Matrikelnummer `mm` jedes Gruppenmitglieds nach dem Muster `VNmm_VNmm_VNmm.zip` benennen. Eine korrekte Benennung könnte beispielsweise `AB12_CD34_EF56.zip` sein. Laden Sie das `zip`-Archiv im Lernportal Informatik über den zur Programmieraufgabe gehörenden Datei-Upload hoch.

Lösungsvorschlag