Prof. Dr. Oskar von Stryk
FG Simulation, Systemoptimierung und Robotik
FB Informatik, Technische Universität Darmstadt

Blatt 11 - Probeklausur

Prüfungsfach: Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Beginn (Uhrzeit): ....

Dauer: 60 Minuten

Hörsaal: C205

Datum: 30.06.2008

Bemerkungen: ....

....

Note:		
Aufgabe (Punkte)	Punkte	
	Korrektur	Unterschrift
1 (15)		
2 (8)		
3 (6)		
4 (5)		
5 (8)		
6 (4)		
7 (11)		
8 (5)		
9 (5)		
Summe (67)		

Ich beantrage, dass nach Fertigstellung der Korrektur mein Klausurergebnis im **Webreg**-System veröffentlicht wird. Dabei kann nur ich nach Authentifizierung nur meine eigene Note einsehen.

....
Unterschrift

....
Unterschrift

Die insgesamt zu vergebende Punktezahl beträgt **67** Punkte.
Zum Bestehen (Note 4.0) reichen **27** Punkte aus.
Zum Erreichen der Note 1.0 sind maximal **54** Punkte notwendig.

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 60 Minuten.
- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus. Tragen Sie auf allen Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Dieses Aufgabenheft umfaßt **10** nummerierte Seiten mit Aufgaben. Trennen Sie die Prüfungsbögen nicht auf.
- Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Papier.
- Lesen Sie die Fragen vor der Beantwortung sorgfältig und in Ruhe durch und beantworten Sie sie genau. Bearbeiten Sie die Aufgaben in für Sie günstiger Reihenfolge.
- Kommentieren Sie alle Ihre Ergebnisse bzw. Rechenschritte **kurz** und **stichwortartig**.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind ein beidseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4, eine mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und bei Bedarf ein Wörterbuch für Deutsch als Fremdsprache erlaubt.
- Schreiben Sie nur mit Kugelschreiber (blau oder schwarz) und nicht mit rotem oder grünem Stift oder Bleistift.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon, PDA, o.ä. aus!
- Geben Sie beim Verlassen des Hörsaals alle Prüfungsunterlagen bei der Aufsicht ab.

Viel Erfolg!

---

1. *Allgemeine Fragen* (15 Punkte)

   Hinweis: Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Punkt Abzug. Nicht beantwortete Fragen geben weder Punkte noch führen sie zu Punktabzug. Falls Sie in dieser Aufgabe weniger positive Punkte als negative Punkte sammeln, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet, es werden also keine negativen Punkte als Gesamtbewertung dieser Aufgabe vergeben.

☐ richtig	☒ falsch	Bei ereignisdiskreten Modellen ändern sich Zustandsgrößen immer stetig.
☒ richtig	☐ falsch	Dynamische Modelle können in die Kategorien instationär, stationär und quasistationär eingeteilt werden.
☐ richtig	☒ falsch	Die Genauigkeit einer Simulation ist unabhängig von den Eingabedaten.
☐ richtig	☒ falsch	Das Gesetz von Little kann nicht für Warteschlangensysteme gelten, die einen stationären Zustand erreichen.
☒ richtig	☐ falsch	Die Wartezeit in einem Warteschlangenmodell nimmt zu, wenn σ bei konstantem μ wächst.
☒ richtig	☐ falsch	Zu jedem Petrinetz gibt es genau eine Inzidenzmatrix.
☐ richtig	☒ falsch	Beim Berechnen der Jacobi-Matrix durch automatisches Differenzieren treten keine Rundungsfehler auf.
☒ richtig	☐ falsch	Die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens kann man daran erkennen,dass sich die Anzahl der korrekten Ziffern in der berechneten Näherung pro Iterationsschritt ungefähr verdoppelt.
☒ richtig	☐ falsch	Die Lipschitz-Konstante einer eindeutig lösbaren Differentialgleichung kann vom Anfangswert abhängig sein.
☐ richtig	☒ falsch	Das explizite Euler-Verfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung löst mit geringem Rechenaufwand steife Differentialgleichungen.
☒ richtig	☐ falsch	Eine Differentialgleichung heißt *autonom*, wenn in ihr die Zeit t nicht explizit vorkommt.
☒ richtig	☐ falsch	Aus Effizienzgründen sollte man steife Differentialgleichungen numerisch stets mit impliziten Verfahren lösen.
☒ richtig	☐ falsch	Steife Komponenten von Differentialgleichungen sorgen in Bereichen, in denen sie kaum zur Lösung beitragen, für zu kleine Schritte bei adaptiver Schrittweitensteuerung.
☐ richtig	☒ falsch	Bei einer Linearisierung $\dot{x} = A \cdot x$ um eine Gleichgewichtslage läßt sich stets alleine anhand des Realteils $Re(\lambda_i)$ der Eigenwerte λ_i von A entscheiden, ob die Gleichgewichtslage stabil ist.
☒ richtig	☐ falsch	Eine Funktion $f(x) = x^3$ ist für $\|x\| \leq 1$ gut konditioniert.

2. *Warteschlange* (8 Punkte)

Auf der Post am Bahnhof hat nur ein Schalter geöffnet. Die folgende Tabelle enthält die Ankunfts- und Bedienzeiten von 5 Kunden. Die Bedienzeit schwankt zwischen einer und vier Minuten je nach Umfang der Kundenwünsche.

Kunde	1	2	3	4	5
Ankunftszeit	10:10 Uhr	10:12 Uhr	10:14 Uhr	10:15 Uhr	10:19 Uhr
Bedienzeit	1 Minute	4 Minuten	2 Minuten	1 Minute	2 Minuten

(a) Zu welchen Uhrzeiten verlassen die einzelnen Kunden die Post?

Antwort: (2 Punkte)

Kunde 1 verlässt um 10:11 die Post
Kunde 2 verlässt um 10:16 die Post
Kunde 3 verlässt um 10:18 die Post
Kunde 4 verlässt um 10:19 die Post
Kunde 5 verlässt um 10:21 die Post

(b) Bestimmen Sie die mittlere Bedienzeit der Kunden?

Antwort: (1 Punkt)

$\frac{1+4+2+1+2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

(c) Wie viele Minuten verstreichen durchschnittlich zwischen der Ankunft zweier aufeinanderfolgender Kunden?

Antwort: (1 Punkt)

$\frac{2+2+1+4}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$

(d) Wie groß ist die mittlere Wartezeit der wartenden Kunden?

Antwort: (2 Punkte)

Kunde 3 wartet 2 Minuten
Kunde 4 wartet 3 Minuten
$\rightarrow$ Mittlere Wartezeit derer die warten ist $\frac{2+3}{2} = 2.5$ Minuten

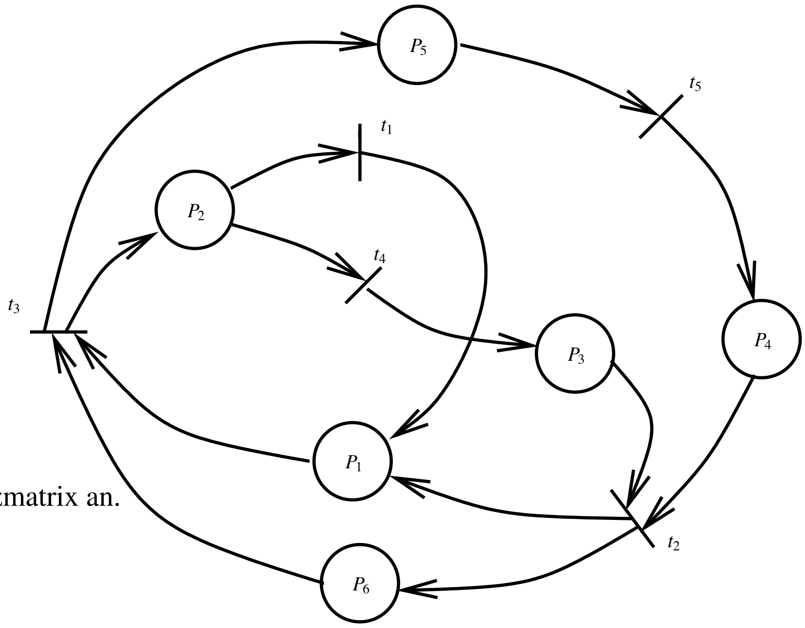
(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht warten muss.

Antwort: (2 Punkte)

Kunden 1, 2 und 5 müssen nicht warten.

$$\frac{\text{Anzahl der Kunden, die nicht warten}}{\text{Anzahl aller Kunden}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

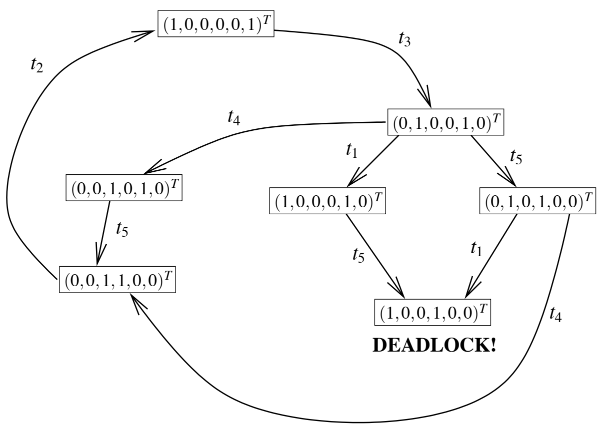
3. *Petrinetze* (6 Punkte)
Gegeben ist das folgende Petrinetz:



(a) Geben Sie die zugehörige Inzidenzmatrix an.
Antwort: (3 Punkte)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

(b) Zeichnen Sie ausgehend von der Markierung $m(0) = (1,0,0,0,0,1)^T$ den Ereichbarkeitsgraphen. Welche problematische Situation lässt sich erkennen?
Antwort: (3 Punkte)



Es kann sich also eine Verklemmung ergeben.

4. *Lösen von Gleichungssystemen* (5 Punkte)

Für die Funktion

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 \\ \sin(x_1) + 0.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

soll der Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ so bestimmt werden, dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (0,0)^T$ gilt.

(a) Das gestellte Problem läßt sich mit dem Fixpunkt-Verfahren lösen. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des Fixpunkt-Verfahrens.
Antwort: (3 Punkte)

gelöst wird Problem $\tilde{f}(x) = f(x) + x = x$, Problem muss dafür also geeignet umgeschrieben werden
neuer Schritt: $x_{i+1} = \tilde{f}(x_i)$
Verfahren konvergiert, falls $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_s)$ im Einheitskreis

(b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das gestellte Problem mit dem Fixpunkt-Verfahren auf.
Antwort: (2 Punkte)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ g(x) = f(x) + x &= x \\ g(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1^3 - 3 \cdot x_2 + x_1 \\ \sin(x_1) + 1.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ x_{i+1} &= g(x_i) \end{aligned}$$

5. *Räuber–Beute–Modell: Modellierung* (8 Punkte)

Wir betrachten eine Räuberpopulation $r(t)$ und eine Beutepopulation $b(t)$. Die Populationen entwickeln sich entsprechend folgender Vorgaben:

- Die Anzahl der Geburten der Räuber je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Räuber. Im zu betrachtenden Zeitrahmen kann das Absterben von Räubern vernachlässigt werden.
- Die Anzahl der Geburten und der Todesfälle der Beute je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Beutetiere.
- Der Zuwachs der Räuberpopulation je Zeiteinheit durch die Jagd von Beute ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.
- Die Abnahme der Beutepopulation je Zeiteinheit durch die Jagd der Räuber ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.

(a) Stellen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen (Bilanzgleichungen) für die zeitliche Entwicklung der Räuber- und Beutepopulation auf. Wählen Sie geeignete Bezeichnungen für Geburts-, Sterbe- und Wachstumsraten.

Antwort: (4 Punkte)

$$\dot{r}(t) = G_R r(t) + W_R r(t) b(t)\,,$$
$$\dot{b}(t) = G_B b(t) - S_B b(t) - W_B r(t) b(t)\,.$$

(b) Geben Sie den nötigen Matlab- oder Scilab-Code an, um die Differentialgleichungen bei gegebenen Konstanten und Anfangswerten $y_0 = (r(t=0), b(t=0)) = (3,\ 1)$ für $t \in [0,\ 5]$ numerisch auszuwerten.

Antwort: (4 Punkte)

Funktion zur Auswertung der rechten Seite:

```
function f = RBeute (t,y)
%
G_R=1;
W_R=1;
G_B=1;
W_B=1;
S_B=1;

f1=G_R*y(1)+W_R*r*y(2);
f2=G_B*y(2)-S_B*b-W_B*y(1)*y(2);
f=[f1 f2]';
return
```

Aufruf in Matlab mit:

```
[t,y]=ode45(@RBeute,[0 5],[3 1]);
```

6. *Reduktion gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung* (4 Punkte)

   Geben Sie für folgende skalare Differentialgleichung 3. Ordnung ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung an:

$$\dddot{x}(t) + \sin(\ddot{x}(t)) + 3x(t) = 0\,.$$

   Welche Dimension hat dieses System erster Ordnung?

   Antwort: (4 Punkte)

   Die Dimension des Systems ist drei. Wir führen neue Variablen $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) := (x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$ ein. Damit ergeben sich

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \text{und} \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

   und unter Verwendung der gegebenen Dgl. folgt

$$\dot{x}_3(t) = -\sin(\ddot{x}(t)) - 3x(t) = -\sin(x_3(t)) - 3x_1(t)\,.$$

   Wir erhalten also das System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ -\sin(x_3(t)) - 3x_1(t) \end{pmatrix}.$$

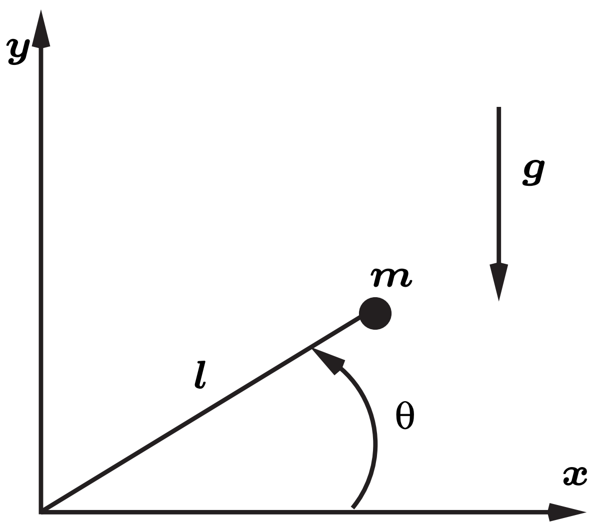
7. *Stabilität eines Pendels* (11 Punkte)

   Betrachtet wird ein Pendel mit einer punktförmigen Masse m, die an einem starren, masselosen Stab der Länge l aufgehängt ist. Für die Auslenkung $\theta_1 = 0$ hänge das Pendel senkrecht nach unten. Die Schwingungen des Pendels seien gedämpft mit der Reibungskonstanten d.

   Die ein solches Pendel beschreibende Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \frac{-d}{ml^2}\theta_2 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1) \end{pmatrix}$$

   mit stationären Lösungen für $\boldsymbol{\theta}_{s_1}^T := (\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ und $\boldsymbol{\theta}_{s_2}^T := (\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$. $(m, g, l, d > 0)$



(a) Wie lauten die um die Gleichgewichtslagen $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$ und $\boldsymbol{\theta}_{s_2}$ linearisierten Systeme?

Antwort: (5 Punkte)

$$\Delta\boldsymbol{\theta} := \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_s$$
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} cos(\theta_1) & \frac{-d}{ml^2} \end{pmatrix}$$

Formal lauten die gesuchten Systeme:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Delta\theta}} &= \dot{\boldsymbol{\theta}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\theta_s} \cdot \boldsymbol{\Delta\theta} \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\theta_s} \cdot \boldsymbol{\theta} - \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\theta_s} \cdot \boldsymbol{\theta}_s \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & \frac{-d}{ml^2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}$$

und für $\boldsymbol{\theta}_{s_2}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & \frac{-d}{ml^2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi g}{l} \end{pmatrix}$$

(b) Begründen Sie analytisch, ob die Gleichgewichtspunkte stabil sind.

Antwort: (6 Punkte)

Die charakteristische Gleichung $det(A - \lambda I) = 0$ zur Bestimmung der Eigenwerte des Systems lautet für den Punkt $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$:

$$\lambda^2 + \frac{d}{ml^2}\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{-d}{ml^2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{m^2l^4} - 4\frac{g}{l}})$ $\Rightarrow$ der Realteil der Eigenwerte ist stets negativ (der Wurzelterm liefert entweder einen imaginären Anteil oder ist kleiner als $\frac{+d}{ml^2}$!)

$\Rightarrow$ **Stabilität**

Für den Punkt $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$:

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{d}{ml^2}\lambda - \frac{g}{l} = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{-d}{ml^2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{m^2l^4} + 4\frac{g}{l}})$ $\Rightarrow$ die Eigenwerte sind reelwertig und genau einer von beiden ist positiv (der Wurzelterm ist betragsmäßig größer als $\frac{+d}{ml^2}$!)

$\Rightarrow$ **Instabilität**

8. *Steife Differentialgleichungen* (5 Punkte)

Betrachen Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -101 & 100 \\ 100 & -101 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)\,, \;\; \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das System analytisch mit dem gegebenen Anfangswert.

Antwort: (4 Punkte)

Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -101 & 100 \\ 100 & -101 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = -201$ und $\lambda_2 = -1$

Eigenvektor zu λ_1: $c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu λ_2: $c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anfangswert eingesetzt in $\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-201 \cdot t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1 \cdot t}$ liefert: $c_1 = -1,\ c_2 = 1$

$\Rightarrow$ Lösung:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-201 \cdot t} + e^{-t} \\ -e^{-201 \cdot t} + e^{-1t} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie den Steifigkeitskoeffizienten an.

Antwort: (1 Punkt)

$\max \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|} = 201$

9. *Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten* (5 Punkte)

Wenn wir versuchen, einen abgeworfenen und danach wiederholt auf dem Boden auftreffenden Ball zu simulieren, stoßen wir schnell auf das Problem von Schaltpunkten, an denen sich das Systemverhalten unstetig ändert. An solchen Punkten würden numerische Standardverfahren alleine falsche Ergebnisse liefern.

Die Bahn eines Balles (mit leichter Dämpfung bei der Reflexion an der Ebene) ist in folgender Skizze veranschaulicht.

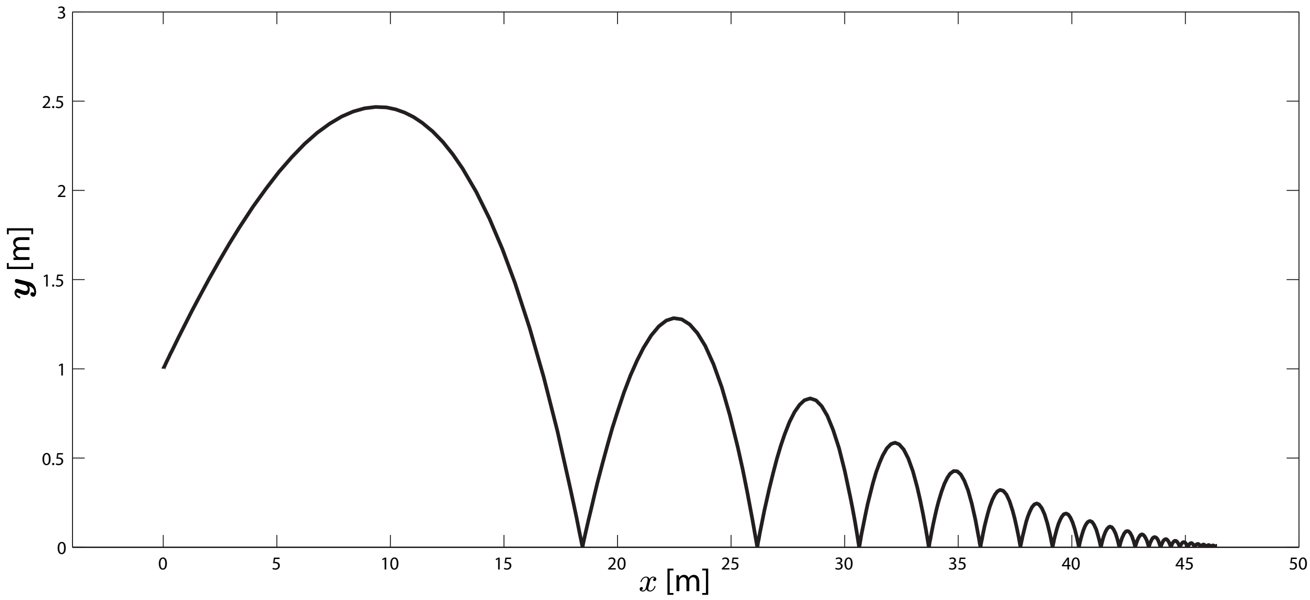


Abbildung 1: Beispiel einer Flugbahn eines geworfenen Balls

(a) Wie können Unstetigkeitsstellen (Schaltpunkte) in einem Differentialgleichungsmodell mit Hilfe von Schaltfunktionen geeignet charakterisiert werden?

Antwort: (1 Punkt)

Durch Nullstellen einer Schaltfunktion

(b) Wann (in welchem Zustand) treten Schaltpunkte im obigen Modell der Bewegung des Balls auf und welche Zustandsgrößen ändern sich an diesen sowie welche bleiben unverändert?

Antwort: (3 Punkte)

Schaltpunkte sind Zeitpunkte, in denen der Ball die Ebene berührt.
Die Position bleibt unverändert.
Die Geschwindigkeit ändert sich (je nach Modellierung nur in einer oder in beiden Komponenten).

(c) Geben Sie eine Schaltfunktion $q(x, y)$ an, die die Unstetigkeitsstellen in der Bewegung des Balls bestimmt.

Antwort: (1 Punkt)

Schaltpunkte $\Leftrightarrow\ y_s = 0$
Besipiel für eine Schaltfunktion: $q(x, y, u, v, t) = y - 0 = y$