Einführung in Computational Engineering
Grundlagen der Modellierung und Simulation

Dr. Arne Nägel

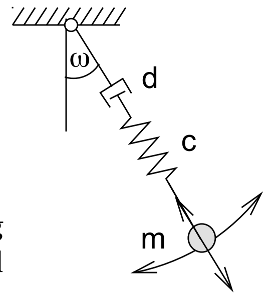
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2012/2013

Lösungsvorschlag der 4. Übung

Aufgabe 1 Steife Differentialgleichungssysteme (10 Punkte)

Wir betrachten ein pendelndes Feder-Dämpfer-System, von welchem angenommen sei, dass es sich in der folgenden Form beschreiben lässt:



$$\begin{aligned}
\ddot{\omega} &= -\frac{g}{(x_0+x)}\sin(\omega) \\
\ddot{x} &= (x_0+x)\dot{\omega}^2 + g\cdot\cos(\omega) - \frac{d}{m}\cdot\dot{x} - \frac{c}{m}\cdot x
\end{aligned}$$

Dabei beschreibt ω den Winkel der Pendelbewegung. x steht für die Auslenkung durch die Federschwingung, so dann der Schwerpunkt der Masse m den Abstand $x_0 + x$ vom Aufhängepunkt besitzt. Die Konstanten seien wie folgt gegeben:

Konstante	Wert	Name
m	1 kg	Pendelmasse
x_0	1 m	Pendellänge in Ruhelage
g	$10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$	Erdbeschleunigung
d	$100\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$	Dämpfungskonstante
c	$100\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$	Federkonstante

a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems.

b) Berechnen Sie die Linearisierung um die Ruhelagen und die zugehörigen Eigenwerte.

c) Ist das System in der Umgebung der stabilen Ruhelage steif? Betrachten Sie dazu die Zeitcharakteristiken.

Bemerkung: Da die obigen Gleichungen 2. Ordnung sind, ergibt sich eine 4x4-Matrix. Zur Berechnung der Eigenwerte (bzw. der Nullstellen des charakteristischen Polynoms) dürfen Sie bei Bedarf ein beliebiges Computeralgebrasystem zur Hilfe nehmen.

Lösungsvorschlag

a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems (4 Punkte). Zunächst schreibt man die Gleichungen vektorwertig als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot\omega \\ \ddot\omega \\ \dot x \\ \ddot x \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\omega, \dot\omega, x, \dot x) := \begin{pmatrix} \dot\omega \\ -\frac{g}{(x+x_0)} \sin\omega \\ \dot x \\ (x+x_0)\dot\omega^2 + g\cos\omega - \frac{d}{m}\dot x - \frac{c}{m}x \end{pmatrix}$$

In Gleichgewichtspunkten verschwindet die linke Seite, also gilt $\dot\omega = 0$, $\dot x = 0$ sowie

$$0 = \frac{-g}{x+x_0}\sin\omega$$

also $\sin\omega = 0$, d.h. $\omega = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Aus $\ddot x = 0$ folgt dann

$$g\cos\omega = \frac{c}{m}x$$

also $x = \frac{m}{c}g$ für $\omega = 2k\pi$ und $x = -\frac{m}{c}g$ für $\omega = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Die Ruhelagen $x_s := (\omega_s, \dot\omega_s, x_s, \dot x_s)^T$ sind somit:

$$\mathbf{x}_{unten} := (2k\pi, 0, \frac{m}{c}g, 0)^T, k \in \mathbb{Z}$$

sowie

$$\mathbf{x}_{oben} := ((2k+1)\pi, 0, -\frac{m}{c}g, 0)^T, k \in \mathbb{Z}$$

Im ersten Fall hängt das Pendel nach unten, im zweiten Fall steht es auf dem Kopf.

b) Berechnung der Linearisierung (4 Punkte): Die Jacobimatrix lautet allgemein:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}_{|\mathbf{x}_{unten}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g\frac{\cos\omega}{x+x_0} & 0 & g\frac{\sin\omega}{(x+x_0)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g\sin\omega & 2\dot\omega(x+x_0) & \dot\omega^2 - \frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix}$$

Im Punkt $\mathbf{x}_{unten}$ gilt dann:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}_{|\mathbf{x}_{unten}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\frac{m}{c}+\frac{x_0}{g}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{100}{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & -100 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda \in \left\{ 10(-5-2\sqrt{6}), \frac{10\sqrt{11}}{11}i, -\frac{10\sqrt{11}}{11}i, 10(-5+2\sqrt{6}) \right\}$$

Analog im Punkt $\mathbf{x}_{oben}$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_{|\mathbf{x}_{oben}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{-\frac{m}{c}+\frac{x_0}{g}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{100}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & -100 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda \in \left\{10(-5-2\sqrt{6}), -10/3, 10/3, 10(-5+2\sqrt{6})\right\}$$

c) Steifheit erfolgt durch Berechnung der Zeitcharakteristiken (2 Punkte). Diese müssen nur in der stabilen unteren Ruhelage betrachtet werden:

$$T_i \in \left\{\frac{1}{|10(-5-2\sqrt{6})|} \approx 0.0101, \frac{2\pi\sqrt{11}}{10} \approx 2.084, \frac{1}{|10(-5+2\sqrt{6})|} \approx 0.9899\right\}$$

Folglich ist $T_{max}/T_{min} \approx 100$. Man kann durchaus von einem steifen System sprechen.

Aufgabe 2 Linearisierung um eine Referenztrajektorie (10 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x,z) := x(1-x^2-y^2)+y \\ \dot{y} &= f_2(x,z) := y(1-x^2-y^2)-x \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $x_s(t) = \cos t$, $y_s(t) = -\sin t$ eine zum obigen System passende Referenztrajektorie darstellt. Diese stellt sich z.B. für $x(0) = 1, y(0) = 0$ ein.

b) Führen Sie eine Stabilitätsuntersuchung für diese Referenztrajektorie durch. Linearisieren Sie dazu das Gleichungssystem um x_s, y_s und bewerten Sie die Stabiliät anhand der Eigenwerte der Jacobimatrix.

c) Bestimmen Sie ferner eine Ruhelage des obigen Systems. Welche Stabilitätseigenschaften liegen dort vor?

d) Wie ändern sich die Ergebnisse aus b) und c), wenn man statt des ursprünglichen Systems die folgenden Gleichungen betrachtet:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1-x^2-y^2)+y \\ \dot{y} &= -y(1-x^2-y^2)-x \end{aligned}$$

Eine kurze Begründung ohne weitere Rechnung reicht hier aus.

Lösungsvorschlag

a) (2 Punkte) Differenzieren liefert $\dot{x}_s(t) = -\sin t$, $\dot{y}_s(t) = -\cos t$. Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ folgt die Behauptung durch einsetzen.

b) (4 Punkte) Die Jacobi-Matrix in einem beliebigen Punkt $(x, y)^T$ lautet:

$$J(x,y) := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(x,y) = \begin{pmatrix} (1-x^2-y^2)-2x^2 & 1-2xy \\ -1-2xy & (1-x^2-y^2)-2y^2 \end{pmatrix}$$

also insbesondere

$$J_s := J(x_s, y_s) = \begin{pmatrix} -2x_s^2 & 1-2x_s y_s \\ -1-2x_s y_s & -2y_s^2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte über das den Ansatz $|J - \lambda Id| = 0$:

$$\begin{aligned} |J-\lambda Id| &= (-2x^2-\lambda)(-2y^2-\lambda)+(1+2xy)(1-2xy) \\ &= \lambda^2+\lambda(2x^2+2y^2)+4x^2y^2+1-4x^2y^2 \\ &= \lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

Folglich ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$ und die Referenztrajektorie ist stabil.

c) (2 Punkte) Offenbar löst x=y=0 stationäre System. Für die Jacobimatrix gilt:

$$J_0 = J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich aus $|J_0 - \lambda| = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Wegen des positiven Realteils ist die Ruhelage ist somit instabil.

d) (2 Punkte) Ändert man das Vorzeichen, so läuft alles von der Referenztrajektorie weg (wie man sich z.B. über ein Phasendiagramm überlegt). Damit wird die Referenztrajektorie instabil und die Ruhelage stabil.