Prof. Dr. Oskar von Stryk
FG Simulation, Systemoptimierung und Robotik
FB Informatik, Technische Universität Darmstadt

Blatt 11 - Probeklausur

Prüfungsfach: Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Beginn (Uhrzeit): ....

Dauer: 60 Minuten

Hörsaal: C205

Datum: 30.06.2008

Bemerkungen: ....

....

Note:		
Aufgabe (Punkte)	Punkte	
	Korrektur	Unterschrift
1 (15)		
2 (8)		
3 (6)		
4 (5)		
5 (8)		
6 (4)		
7 (11)		
8 (5)		
9 (5)		
Summe (67)		

....
Unterschrift

Ich beantrage, dass nach Fertigstellung der Korrektur mein Klausurergebnis im **Webreg**-System veröffentlicht wird. Dabei kann nur ich nach Authentifizierung nur meine eigene Note einsehen.

....
Unterschrift

Die insgesamt zu vergebende Punktezahl beträgt **67** Punkte.
Zum Bestehen (Note 4.0) reichen **27** Punkte aus.
Zum Erreichen der Note 1.0 sind maximal **54** Punkte notwendig.

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 60 Minuten.
- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus. Tragen Sie auf allen Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Dieses Aufgabenheft umfaßt **10** nummerierte Seiten mit Aufgaben. Trennen Sie die Prüfungsbögen nicht auf.
- Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Papier.
- Lesen Sie die Fragen vor der Beantwortung sorgfältig und in Ruhe durch und beantworten Sie sie genau. Bearbeiten Sie die Aufgaben in für Sie günstiger Reihenfolge.
- Kommentieren Sie alle Ihre Ergebnisse bzw. Rechenschritte **kurz** und **stichwortartig**.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind ein beidseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4, eine mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und bei Bedarf ein Wörterbuch für Deutsch als Fremdsprache erlaubt.
- Schreiben Sie nur mit Kugelschreiber (blau oder schwarz) und nicht mit rotem oder grünem Stift oder Bleistift.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon, PDA, o.ä. aus!
- Geben Sie beim Verlassen des Hörsaals alle Prüfungsunterlagen bei der Aufsicht ab.

Viel Erfolg!

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung (Hausaufgabe, Programmierprojekt, Diplomarbeit etc.) bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Falls ihnen die Verwendung von Fremdmaterial gestattet war, so müssen Sie dessen Quellen deutlich zitiert haben. Weiterführende Informationen finden Sie unter: `http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarismus`.

1. *Allgemeine Fragen* (15 Punkte)

Hinweis: Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Punkt Abzug. Nicht beantwortete Fragen geben weder Punkte noch führen sie zu Punktabzug. Falls Sie in dieser Aufgabe weniger positive Punkte als negative Punkte sammeln, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet, es werden also keine negativen Punkte als Gesamtbewertung dieser Aufgabe vergeben.

☐richtig ☐falsch Bei ereignisdiskreten Modellen ändern sich Zustandsgrößen immer stetig.

☐richtig ☐falsch Dynamische Modelle können in die Kategorien instationär, stationär und quasistationär eingeteilt werden.

☐richtig ☐falsch Die Genauigkeit einer Simulation ist unabhängig von den Eingabedaten.

☐richtig ☐falsch Das Gesetz von Little kann nicht für Warteschlangensysteme gelten, die einen stationären Zustand erreichen.

☐richtig ☐falsch Die Wartezeit in einem Warteschlangenmodell nimmt zu, wenn σ bei konstantem μ wächst.

☐richtig ☐falsch Zu jedem Petrinetz gibt es genau eine Inzidenzmatrix.

☐richtig ☐falsch Beim Berechnen der Jacobi-Matrix durch automatisches Differenzieren treten keine Rundungsfehler auf.

☐richtig ☐falsch Die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens kann man daran erkennen,dass sich die Anzahl der korrekten Ziffern in der berechneten Näherung pro Iterationsschritt ungefähr verdoppelt.

☐richtig ☐falsch Die Lipschitz-Konstante einer eindeutig lösbaren Differentialgleichung kann vom Anfangswert abhängig sein.

☐richtig ☐falsch Das explizite Euler-Verfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung löst mit geringem Rechenaufwand steife Differentialgleichungen.

☐richtig ☐falsch Eine Differentialgleichung heißt *autonom*, wenn in ihr die Zeit t nicht explizit vorkommt.

☐richtig ☐falsch Aus Effizienzgründen sollte man steife Differentialgleichungen numerisch stets mit impliziten Verfahren lösen.

☐richtig ☐falsch Steife Komponenten von Differentialgleichungen sorgen in Bereichen, in denen sie kaum zur Lösung beitragen, für zu kleine Schritte bei adaptiver Schrittweitensteuerung.

☐richtig ☐falsch Bei einer Linearisierung $\dot{x} = A \cdot x$ um eine Gleichgewichtslage läßt sich stets alleine anhand des Realteils $Re(\lambda_i)$ der Eigenwerte λ_i von A entscheiden, ob die Gleichgewichtslage stabil ist.

☐richtig ☐falsch Eine Funktion $f(x) = x^3$ ist für $\|x\| \leq 1$ gut konditioniert.

2. *Warteschlange* (8 Punkte)

Auf der Post am Bahnhof hat nur ein Schalter geöffnet. Die folgende Tabelle enthält die Ankunfts- und Bedienzeiten von 5 Kunden. Die Bedienzeit schwankt zwischen einer und vier Minuten je nach Umfang der Kundenwünsche.

Kunde	1	2	3	4	5
Ankunftszeit	10:10 Uhr	10:12 Uhr	10:14 Uhr	10:15 Uhr	10:19 Uhr
Bedienzeit	1 Minute	4 Minuten	2 Minuten	1 Minute	2 Minuten

(a) Zu welchen Uhrzeiten verlassen die einzelnen Kunden die Post?

Antwort: (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die mittlere Bedienzeit der Kunden?

Antwort: (1 Punkt)

(c) Wie viele Minuten verstreichen durchschnittlich zwischen der Ankunft zweier aufeinanderfolgender Kunden?

Antwort: (1 Punkt)

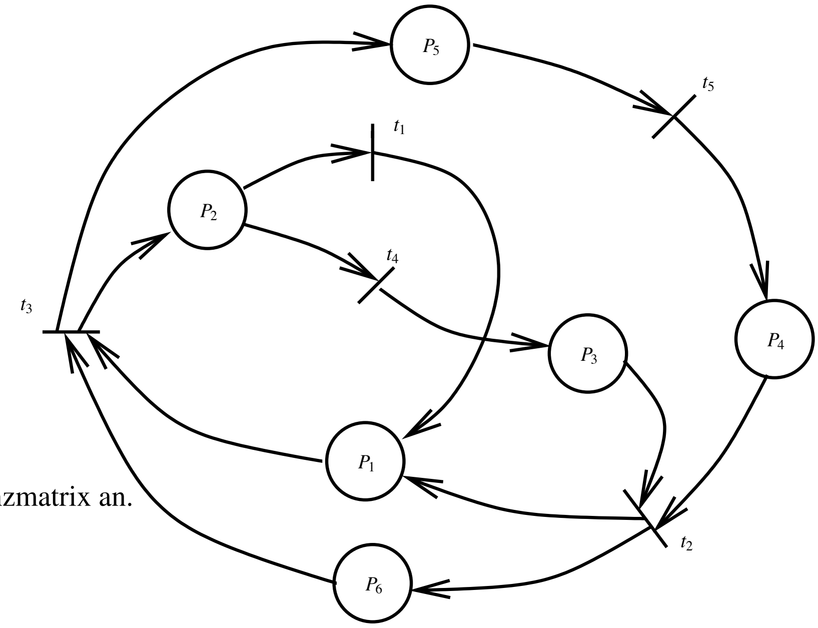
(d) Wie groß ist die mittlere Wartezeit der wartenden Kunden?

Antwort: (2 Punkte)

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht warten muss.

Antwort: (2 Punkte)

3. *Petrinetze* (6 Punkte)
   Gegeben ist das folgende Petrinetz:



   (a) Geben Sie die zugehörige Inzidenzmatrix an.
   Antwort: (3 Punkte)

   (b) Zeichnen Sie ausgehend von der Markierung $m(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ den Ereichbarkeitsgraphen. Welche problematische Situation lässt sich erkennen?
   Antwort: (3 Punkte)

4. *Lösen von Gleichungssystemen* (5 Punkte)

   Für die Funktion

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 \\ \sin(x_1) + 0.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   soll der Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ so bestimmt werden, dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (0,0)^T$ gilt.

   (a) Das gestellte Problem läßt sich mit dem Fixpunkt-Verfahren lösen. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des Fixpunkt-Verfahrens.

   Antwort: (3 Punkte)

   (b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das gestellte Problem mit dem Fixpunkt-Verfahren auf.

   Antwort: (2 Punkte)

5. *Räuber–Beute–Modell: Modellierung* (8 Punkte)

   Wir betrachten eine Räuberpopulation $r(t)$ und eine Beutepopulation $b(t)$. Die Populationen entwickeln sich entsprechend folgender Vorgaben:

   - Die Anzahl der Geburten der Räuber je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Räuber. Im zu betrachtenden Zeitrahmen kann das Absterben von Räubern vernachlässigt werden.
   - Die Anzahl der Geburten und der Todesfälle der Beute je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Beutetiere.
   - Der Zuwachs der Räuberpopulation je Zeiteinheit durch die Jagd von Beute ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.
   - Die Abnahme der Beutepopulation je Zeiteinheit durch die Jagd der Räuber ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.

(a) Stellen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen (Bilanzgleichungen) für die zeitliche Entwicklung der Räuber- und Beutepopulation auf. Wählen Sie geeignete Bezeichnungen für Geburts-, Sterbe- und Wachstumsraten.

Antwort: (4 Punkte)

(b) Geben Sie den nötigen Matlab- oder Scilab-Code an, um die Differentialgleichungen bei gegebenen Konstanten und Anfangswerten $y_0 = (r(t=0), b(t=0)) = (3,\ 1)$ für $t \in [0,\ 5]$ numerisch auszuwerten.

Antwort: (4 Punkte)

6. *Reduktion gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung* (4 Punkte)

   Geben Sie für folgende skalare Differentialgleichung 3. Ordnung ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung an:

$$\dddot{x}(t) + \sin(\ddot{x}(t)) + 3x(t) = 0\,.$$

   Welche Dimension hat dieses System erster Ordnung?

   Antwort: (4 Punkte)

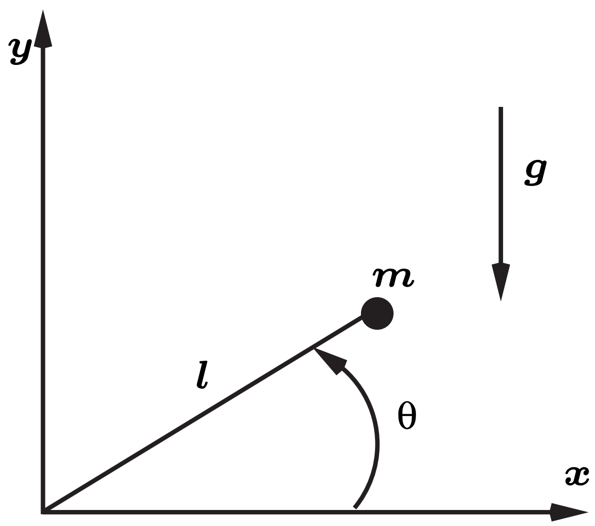
7. *Stabilität eines Pendels* (11 Punkte)

   Betrachtet wird ein Pendel mit einer punktförmigen Masse m, die an einem starren, masselosen Stab der Länge l aufgehängt ist. Für die Auslenkung $\theta_1 = 0$ hänge das Pendel senkrecht nach unten. Die Schwingungen des Pendels seien gedämpft mit der Reibungskonstanten d.

   Die ein solches Pendel beschreibende Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot\theta_1(t) \\ \dot\theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \frac{-d}{ml^2}\theta_2 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1) \end{pmatrix}$$

   mit stationären Lösungen für $\boldsymbol{\theta}_{s_1}^T := (\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ und $\boldsymbol{\theta}_{s_2}^T := (\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$. $(m, g, l, d > 0)$



(a) Wie lauten die um die Gleichgewichtslagen $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$ und $\boldsymbol{\theta}_{s_2}$ linearisierten Systeme?
Antwort: (5 Punkte)

(b) Begründen Sie analytisch, ob die Gleichgewichtspunkte stabil sind.
Antwort: (6 Punkte)

8. *Steife Differentialgleichungen* (5 Punkte)

   Betrachen Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -101 & 100 \\ 100 & -101 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)\,, \ \ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lösen Sie das System analytisch mit dem gegebenen Anfangswert.

   Antwort: (4 Punkte)

   (b) Geben Sie den Steifigkeitskoeffizienten an.

   Antwort: (1 Punkt)

9. *Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten* (5 Punkte)

Wenn wir versuchen, einen abgeworfenen und danach wiederholt auf dem Boden auftreffenden Ball zu simulieren, stoßen wir schnell auf das Problem von Schaltpunkten, an denen sich das Systemverhalten unstetig ändert. An solchen Punkten würden numerische Standardverfahren alleine falsche Ergebnisse liefern.

Die Bahn eines Balles (mit leichter Dämpfung bei der Reflexion an der Ebene) ist in folgender Skizze veranschaulicht.

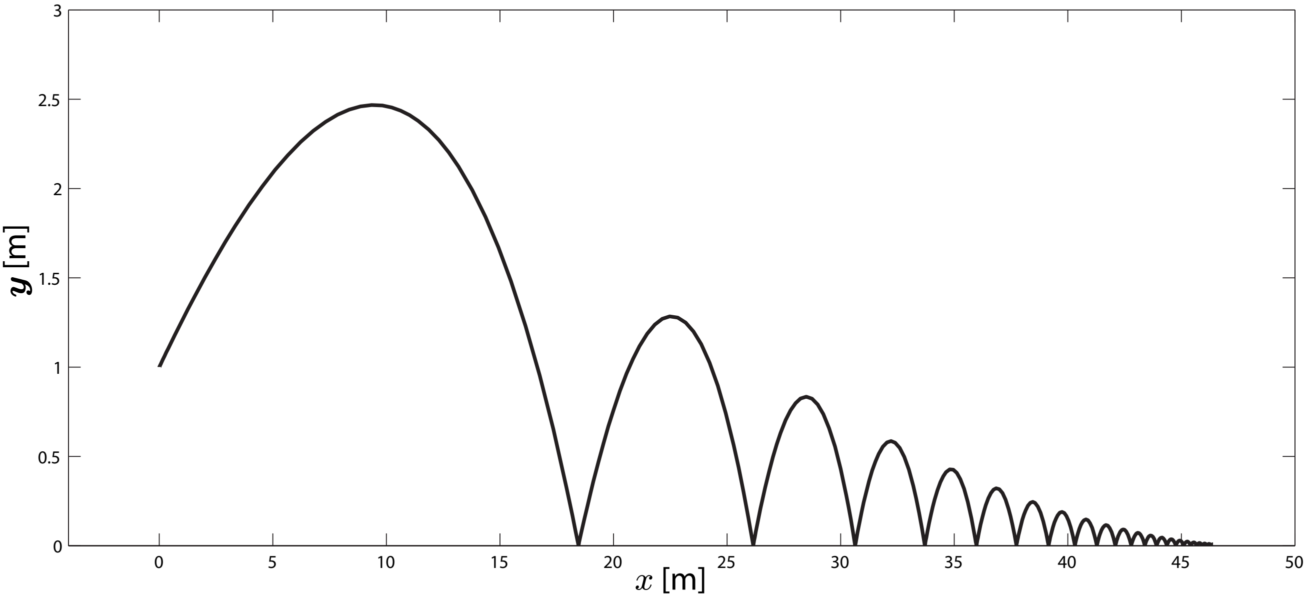


Abbildung 1: Beispiel einer Flugbahn eines geworfenen Balls

(a) Wie können Unstetigkeitsstellen (Schaltpunkte) in einem Differentialgleichungsmodell mit Hilfe von Schaltfunktionen geeignet charakterisiert werden?

Antwort: (1 Punkt)

(b) Wann (in welchem Zustand) treten Schaltpunkte im obigen Modell der Bewegung des Balls auf und welche Zustandsgrößen ändern sich an diesen sowie welche bleiben unverändert?

Antwort: (3 Punkte)

(c) Geben Sie eine Schaltfunktion $q(x, y)$ an, die die Unstetigkeitsstellen in der Bewegung des Balls bestimmt.

Antwort: (1 Punkt)