Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

Wintersemester 2013/2014
Lösungsvorschlag der 8. Übung

Aufgabe 1 Dynamische Systeme mit Unstetigkeiten (10 Punkte)

Betrachtet werden soll ein Heizungssystem. Zur Regulierung der Raumtemperatur werde ein Thermostat so eingestellt, dass eine Heizung sich einschaltet, sobald die Temperatur unter 17°C fällt. Sobald die Raumtemperatur den Wert 23°C übersteigt, wird die Beheizung abgeschaltet.

Bei konstanter Außentemperatur lässt sich das dynamische Verhalten des Temperaturverlaufs in grober Näherung wie folgt beschreiben:

- Ist die Heizung aus, gilt für die Temperatur $x(t)$ die Beschreibung $\dot{x}(t) = -0.5x(t)$.
- Ist die Heizung in Betrieb, gilt für die Raumtemperatur $\dot{x}(t) = -0.5x(t) + 20$.

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

a) Zeigen Sie: Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ ist durch

$$x(t) = e^{f(t)} \left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\, ds + x_0 \right], \quad f(t) := \int_{t_0}^{t} a(s) ds$$

gegeben. *Hinweis:* Differenzieren Sie dazu die rechte Seite der vorgeschlagenen Lösung und setzen Sie danach $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ in das originale Problem ein.

b) Wie lauten jeweils die Lösungen der Differentialgleichungen in den beiden diskreten Zuständen („Heizung an“ / „Heizung aus“) bei gegebenen Anfangswert $x(t_0) = x_0$?

c) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur $x(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = 3$ bei gegebenem Anfangswert $x(t_0) = 0$°C.

d) Geben Sie die Schaltfunktionen an, mit deren Hilfe Beginn und Ende der Beheizung in der Simulation der Temperatur berücksichtigt werden kann.

e) Betrachten Sie die Situation $x(1.6) = 22.0$°C bei eingeschalteter Heizung. Führen Sie einen Simulationsschritt der Länge $\Delta t = 0.2$ mit dem expliziten Euler-Verfahren durch.

f) Bestimmen Sie den aus (e) folgenden Schaltzeitpunkt und geben Sie Startwerte für den anschließenden Iterationsschritt der weiteren Simulation an.

g) Skizzieren Sie $x(1.6)$ und $x(1.6 + \Delta t)$ aus (e), den Schaltzeitpunkt aus (f), und den zeitlichen (analytischen) Verlauf der Temperatur zwischen $t = 1.5$ und $t = 2.0$ in einer Zeichnung.

Lösungsvorschlag

a)

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{d}{dt}\left(e^{f(t)}\left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right]\right)\\
&= \left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right]\frac{d}{dt}\left(e^{f(t)}\right) + e^{f(t)}\frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right]\\
&= \left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right] e^{f(t)}\frac{d}{dt}f(t) + e^{f(t)}\left[b(t)e^{-f(t)}\right]\\
&= a(t)e^{f(t)}\left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right] + b(t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Einsetzen in $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$:

$$
a(t)e^{f(t)}\left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right] + b(t) = a(t)e^{f(t)}\left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-f(s)}\,ds + x_0\right] + b(t)
$$

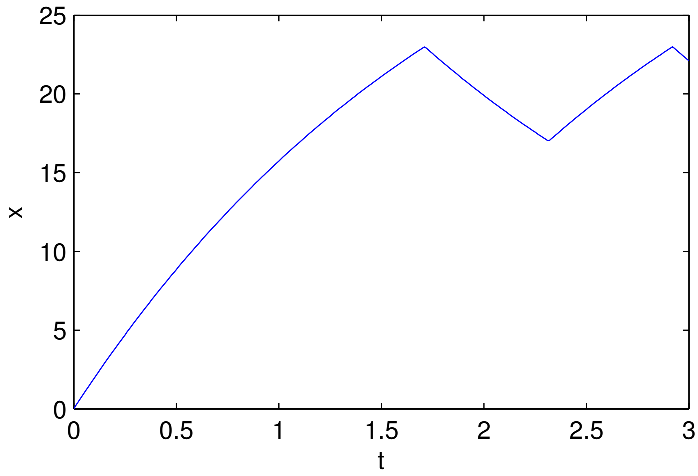
(2 Punkte)

b) Betrachte den Fall $a(t) = -0.5, b(s) = b$ (2 Punkte):

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{t_0}^{t} -0.5\,ds = 0.5(t_0 - t)\\
x(t) &= e^{0.5(t_0-t)}\left[\int_{t_0}^{t} be^{-0.5(t_0-s)}\,ds + x_0\right]\\
&= e^{0.5(t_0-t)}\left[b\int_{t_0}^{t} e^{0.5(s-t_0)}\,ds + x_0\right]\\
&= e^{0.5(t_0-t)}\left[b\int_{t_0}^{t} e^{0.5(s-t_0)}\,ds + x_0\right]\\
&= e^{0.5(t_0-t)}\left[b(2e^{0.5(t-t_0)} - 2) + x_0\right]\\
&= 2b + (x_0 - 2b)e^{0.5(t_0-t)}
\end{aligned}
$$

Insbesondere folgt (1 Punkt): Heizung aus: $x(t) = x_0 e^{0.5(t_0-t)}$, Heizung an: $x(t) = 40 + (x_0 - 40)e^{0.5(t_0-t)}$.

c) Starte bei $x = 0$. Darstellung (1 Punkt):



d) Mögliche Schaltfunktionen sind (1 Punkt):

$$q_1(x) := x - 23,\ q_2(x) := x - 17$$

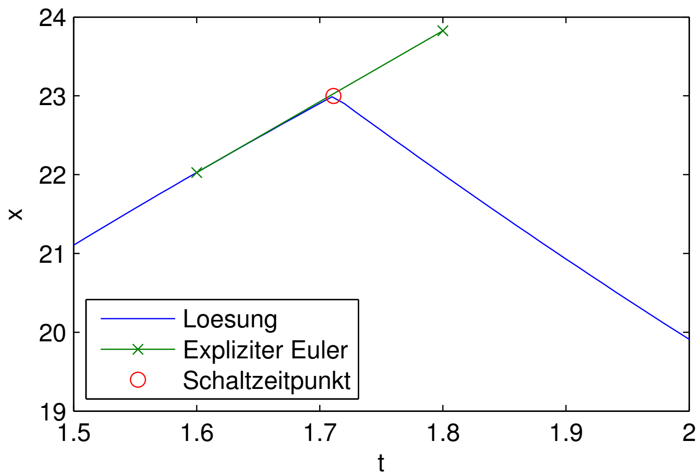
e) Starte bei $x(1.6) = 22$, mit Zustand „Heizung an“. Nächster Schritt mit explizitem Euler: $x(1.8) = 22 + 0.2(-0.5 * 22 + 20) = 23.8$ (1 Punkt).

f) Zwischen $t_k = 1.6$ ($x_k = 22.0$) und $t_{k+1} = 1.8$ ($x_{k+1} = 23.8$) erfolgt ein Schaltvorgang. Gesucht ist der Zeitpunkt $t^*_{k+1} = t_k + h^*$ für den die Relation

$$23 = x^*_{k+1} = x_k + h^*(-0.5x_k + 20) = 22.0 + h^*(-0.5 * 22.0 + 20)$$

gilt. Auflösen ergibt $h^* = 1/9$. Für Zustand „Heizung aus“ starte man also idealerweise mit $(t^*_{k+1}, x^*_{k+1})^T = (1.71, 23)^T$ (1 Punkte).

g) (1 Punkt)



Aufgabe 2 Numerische Integrationsverfahren (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie verschiedene numerische Integrationsverfahren kennengelernt. Implementieren Sie nun das Explizite Eulerverfahren, das Heunverfahren und das Runge-Kuttaverfahren vierter Ordnung in Matlab. Vervollstaendigen Sie dazu den Matlabcode den Sie auf der Moodle Seite finden koennen.

a) Implementieren Sie das Explizite Eulerverfahren (0 Punkte)

b) Implementieren Sie das Heunverfahren (0 Punkte)

c) Implementieren Sie das Runge-Kuttaverfahren vierter Ordnung (0 Punkte)

d) Loesen Sie das Problem, das Sie als Loesung zur Aufgabe aus Uebung 4.1.a kennen.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{ml^2}\left(ml\sin(\theta)g + d\dot{\theta}\right) \end{pmatrix}$$

mit $m = 3$ kg, $g = 10$ m/s^2, $d = 2$ Nms, $l = 2$ m, $\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ in einem Zeitraum von 100 Sekunden, aufgeteilt in $1e4$ Teilschritte, TNS $= 10$ und DIRSCALE $= 1$.

Plotten Sie hierzu sowohl das Richtungsfeld als auch den Phasenplot. Erklaeren Sie was in den Plots zu sehen ist.

e) Um den Effekt einer steifen Differentialgleichung anschaulich zu machen, implementieren Sie das auf
`http://www.mathworks.de/company/newsletters/articles/stiff-differential-equations.html` gegebene Problem. mit $\delta_0 = 1e-5$, $7e4$ Teilschritten, TNS $= 1$ und DIRSCALE $= 0.08$. Da Ihr ODE solver eine zweidimensionale Gleichung erwartet, koennen sie die zweite Ableitung einfach auf konstant 0 setzten. Plotten Sie *nur* den Phasenraum und nicht das Richtungsfeld. Erklaeren Sie was in den Plots zu sehen ist, und wie die Probleme behoben werden koennten.

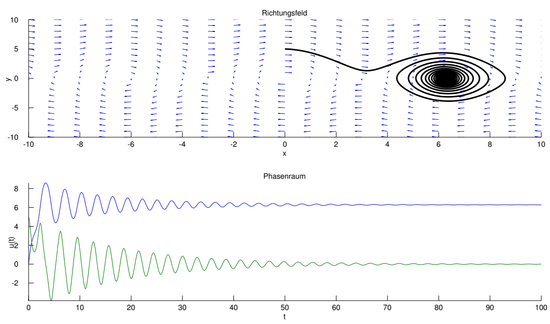
Lösungsvorschlag

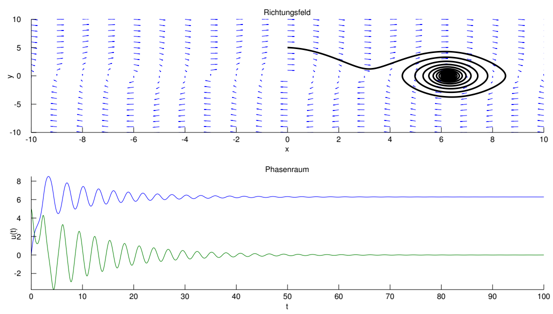
a) Siehe Matlab code (0 Punkte)

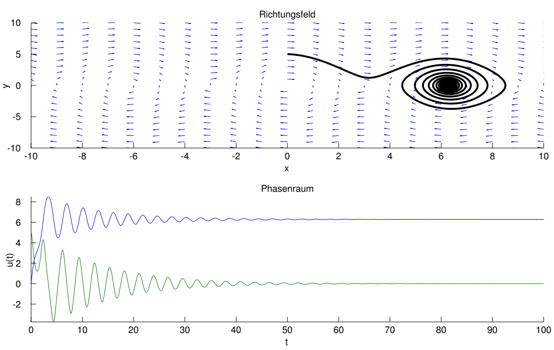
b) Siehe Matlab code (0 Punkte)

c) Siehe Matlab code (0 Punkte)

d) Das Pendel ueberschwingt einmal und kommt dann in der stabilen Gleichgewichtslage zur Ruhe.

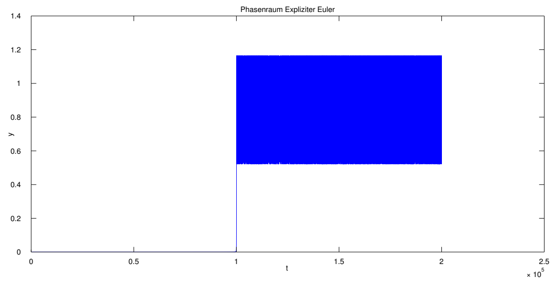


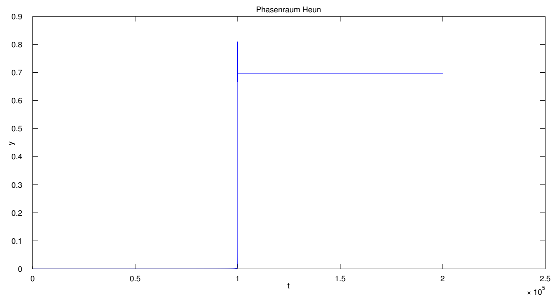


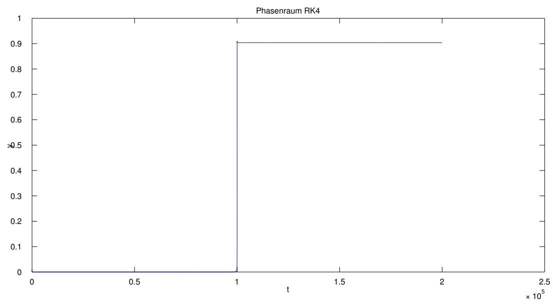


(3 Punkte)

e) Der Explizite Euler kann das Problem mit dieser Schrittweite nicht loesen, auch das Heunverfahren hat Probleme die richtige Loesung zu finden, nur das Runge Kutta Verfahren findet die richtige Loesung. Um das Problem mit allen Methoden loesen zu koennen muesste die Schrittweite verkleinert werden.







(3 Punkte)