Formale Grundlagen der Informatik I
4. Übungsblatt

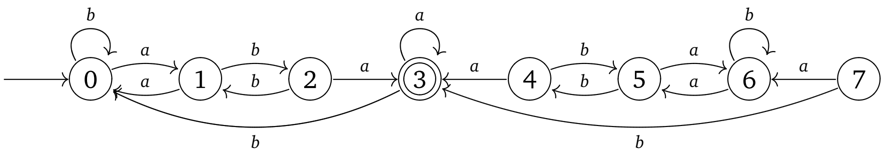
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
14. Mai 2014

Gruppenübung

Aufgabe G10 (DFA Minimierung)
Betrachten Sie den folgenden DFA:



Gegeben ist die folgende unvollständige Tabelle für die Relation $\nsim$. (Ein $\times$ an der Stelle p, q in der Tabelle bedeutet, dass $p \nsim q$.) Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie ggf. ein Wort an, für das diese Unterscheidung notwendig ist, d.h. ein Wort w, das zu L_q gehört, aber nicht zu $L_{q'}$ (oder umgekehrt), wobei $L_q := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \in A\}$.

$\nsim$	0	1	2	3	4	5	6	7
0			×	×	×			×
1			×	×	×			×
2	×	×		×		×	×	×
3	×	×	×		×	×	×	×
4	×	×		×		×	×	×
5			×	×	×		×	×
6			×	×	×	×		×
7	×	×	×	×	×	×	×	

Lösung:

$\nsim$	0	1	2	3	4	5	6	7
0		×	×	×	×	×		×
1	×		×	×	×		×	×
2	×	×		×		×	×	×
3	×	×	×		×	×	×	×
4	×	×		×		×	×	×
5	×		×	×	×		×	×
6		×	×	×	×	×		×
7	×	×	×	×	×	×	×	

(p, q)	w
$(0, 1)$	ba
$(0, 5)$	aba
$(1, 6)$	ba

Die Diagonale in der Tabelle bleibt frei, da $\sim$ reflexiv ist

Aufgabe G11 ((Nicht-)Regularität von Sprachen)

(a) Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Formal geschrieben lautet das Pumping-Lemma wie folgt (vgl. Skript Lemma 2.5.2):

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in L \left(|x| \geq n \implies \exists u, v, w \in \Sigma^* \left(x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall m \in \mathbb{N} (u v^m w \in L) \right) \right) \tag{1}$$

Geben Sie die Negation von (1) an (d.h. die Aussage, dessen Korrektheit Sie beweisen müssen, wenn Sie mittels Pumping-Lemmas die *Nichtregularität* der Sprache L nachweisen wollen).

(b) Zeigen Sie mittels Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n\}$$

nicht regulär ist.

Lösung:

(a) Wir verwenden die Formeln

$$\begin{array}{rcl}
\neg\exists\, x \in X\ \phi & \leftrightsquigarrow & \forall\, x \in X\ \neg\phi \\
\neg\forall\, x \in X\ \phi & \leftrightsquigarrow & \exists\, x \in X\ \neg\phi \\
\neg(\phi \vee \psi) & \leftrightsquigarrow & \neg\phi \wedge \neg\psi \\
\neg(\phi \wedge \psi) & \leftrightsquigarrow & \neg\phi \vee \neg\psi \\
\phi \implies \psi & \leftrightsquigarrow & \neg\phi \vee \psi \\
\neg\neg\phi & \leftrightsquigarrow & \phi
\end{array}$$

Wir bekommen

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x \in L \left(|x| \geq n \wedge \forall\, u, v, w \in \Sigma^* \left(\neg(x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \vee \exists\, m \in \mathbb{N}(u \cdot v^m \cdot w \notin L)\right)\right),$$

was noch als

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x \in L \left(|x| \geq n \wedge \forall\, u, v, w \in \Sigma^* \left((x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \implies \exists\, m \in \mathbb{N}(u \cdot v^m \cdot w \notin L)\right)\right) \tag{2}$$

umgeschrieben werden kann.

(b) Wir verwenden die Formel aus (a).

Nehmen wir beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen ein $x \in L$ finden, für das die Aussage (2) gilt. Wir zeigen, dass $x = a^n b^n$ funktioniert. Weil $n =: m \geq n$, haben wir $x \in L$. Zudem gilt $|x| = 2n \geq n$. Wir müssen noch den Allquantor beweisen.

Nehmen wir beliebige $u, v, w \in \Sigma^*$. Weil wir eine Implikation zeigen möchten, verwenden wir die linke Seite als Premisse. Sei also $x = uvw$ eine beliebige Zerlegung von x mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$. Jetzt wollen wir noch den Existenzquantor beweisen, also sollen wir ein richtiges $m \in \mathbb{N}$ finden.

Da $|uv| \leq n$, enthält v nur a. Setzen wir nun den Exponenten in (2) gleich $n+1$, so erhalten wir das Wort $uv^{n+1}w = a^{|u|}a^{(n+1)\cdot|v|}b^n$. Dieses Wort ist aber nicht in L, da $|v| \geq 1$.

Aufgabe G12 (Grammatiken)
Geben Sie Grammatiken zu den folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$ an:

(a) $L\big((ab + bc)^* aa(b + c)^*\big)$

(b) $L := \{ubw \in \{a, b, c\}^* : |u|_a = |w|_a\}$

Lösung: Zum Beispiel:

(a)

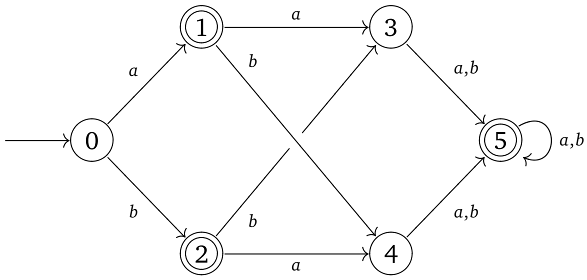
$$\begin{aligned}
X_0 &\to XaaY \\
X &\to \varepsilon \mid abX \mid bcX \\
Y &\to \varepsilon \mid bY \mid cY
\end{aligned}$$

(b)

$$X_0 \to b \mid bX_0 \mid cX_0 \mid X_0 b \mid X_0 c \mid aX_0 a$$

Hausübung

Aufgabe H10 (Minimalautomaten und Minimierung)
Finden Sie einen äquivalenten DFA minimaler Größe für den folgenden DFA:



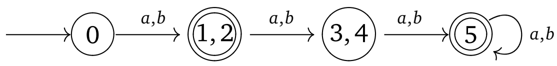
Lösung: Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$\not\sim_0$	0	1	2	3	4	5
0		×	×			×
1	×			×	×	
2	×			×	×	
3		×	×			×
4		×	×			×
5	×			×	×	

$\not\sim_1$	0	1	2	3	4	5
0		×	×			×
1	×			×	×	×
2	×			×	×	×
3		×	×			×
4		×	×			×
5	×	×	×	×	×	

$\not\sim_2$	0	1	2	3	4	5
0		×	×	×	×	×
1	×			×	×	×
2	×			×	×	×
3	×	×	×			×
4	×	×	×			×
5	×	×	×	×	×	

Da $\not\sim_2 = \not\sim_3$ ist die Relation $\not\sim$ durch die Letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände 1 und 2, bzw. 3 und 4 identifizieren können. Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



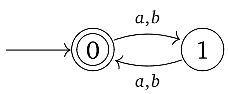
Aufgabe H11 (Chomsky-Hierarchie)
Bestimmen Sie für die folgenden Sprachen das Niveau der Chomsky-Hierarchie. Dazu gehört einerseits der Nachweis, dass die Sprache im entsprechenen Niveau liegt, und andererseits muss gezeigt werden, dass sie nicht zu einem höheren Niveau gehört, also etwa, dass sie kontextsensitiv aber nicht kontextfrei ist.

(a) $L_1 := \{ w \in \{a,b\}^* : |w|_a - |w|_b \text{ ist eine gerade ganze Zahl} \}$

(b) $L_2 := \{ w \in \{a,b\}^* : |w|_a - |w|_b \geq 0 \}$ *Hinweis.* Zerlegen Sie w in Teilworte, die jeweils gleichviele a wie b enthalten.

Lösung:

(a) Die Sprache ist regulär. Beachte, dass $w \in L_1$ genau dann gilt, wenn $|w|$ gerade ist. Als DFA kann man also



nehmen.

(b) Die Sprache ist kontextfrei, aber nicht regulär. Eine kontextfreie Grammatik ist:

$$X_0 \to \varepsilon \mid aX_0b \mid bX_0a \mid X_0X_0 \mid aX_0 \mid X_0a$$

Angenommen, L_2 wäre regulär. Dann liefert das Pumping Lemma eine Konstante n, so dass jedes Wort der Länge $\geq n$ gepumpt werden kann. Setze $x := b^n a^n \in L$. Nach dem Lemma gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Also ist $u = b^i$, $v = b^k$, und $w = b^{n-i-k}a^n$. Somit haben wir

$$uv^2w = b^i b^{2k} b^{n-i-k} a^n = b^{n+k} a^n \notin L\,.$$

Widerspruch.

Aufgabe H12 (Pumping Lemma)
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(i) $L_1 = \{a^n b^m \in \{a,b\}^* : n \geq m\}$

(ii) $L_2 = \{a^{n!} \in \{a\}^* : n \geq 0\}$

(iii) $L_3 = \{a^p \in \{a\}^* : p \text{ prim}\}$

Lösung:

(i) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geq n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort

$$x = a^n b^n.$$

Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_1$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ mehr b's (nämlich n) als a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_1$. Wir folgern, dass L_1 nicht regulär ist.

(ii) Wir verwenden hier, dass

$$(n+2)! - (n+1)! = (n+2)(n+1)! - (n+1)! = (n+1)(n+1)! > n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^{(n+2)!}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Dann ist v von der Form $v = a^k$ mit $0 < k \leq n$. Deshalb enthält $u \cdot w$ echt weniger als $(n+2)!$ Buchstaben, aber gleichzeitig echt mehr als $(n+1)!$ Buchstaben (weil $(n+2)! - k \geq (n+2)! - n > (n+1)!$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_2$. Wir folgern, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

(iii) Sei wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^l,$$

wobei $l > n + 1$ eine Primzahl ist. Offensichtlich $x \in L_3$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_3$. Aus $|u \cdot v| \leq n$ und $|x| > n + 1$ folgt, dass $|w| > 1$. Wählen wir $m = |u| + |w| > 1$ und $x' = u \cdot v^m \cdot w$. Wir bestimmen die Länge von x':

$$|x'| = |u \cdot v^m \cdot w| = |u| + m|v| + |w| = m(|v| + 1).$$

Da $m > 1$ und $|v| + 1 > 1$, ist $|x'|$ nicht prim. Das widerspricht $u \cdot v^m \cdot w \in L_3$. Wir folgern, dass L_3 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.