Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

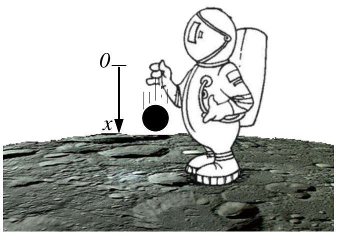
Wintersemester 2013/2014
Lösungsvorschlag der 10. Übung

Aufgabe 1 Validierung eines Modells (5 Punkte)

Betrachtet wird ein fallender Körper der Masse 1 kg auf dem Mond. Es wird vermutet, dass hier kein Luftwiderstand auftritt und sich das Verhalten sehr einfach durch

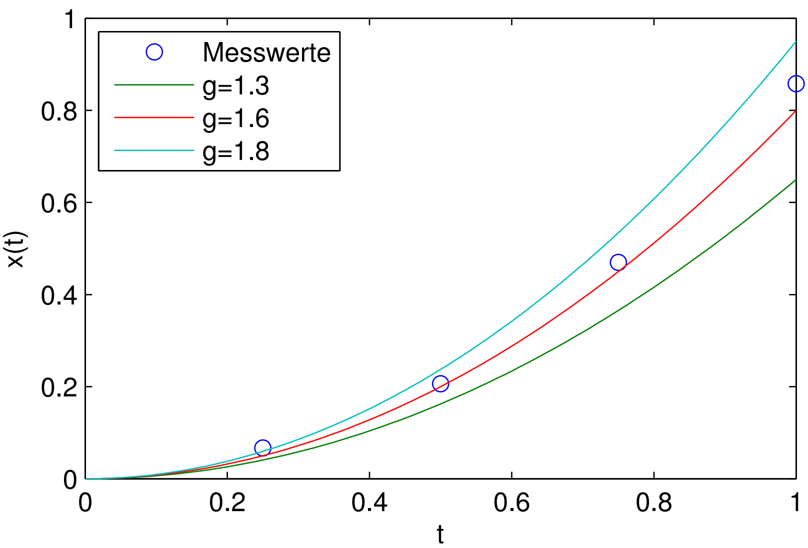
$$x(t, g_{\text{mond}}) = \frac{g_{\text{mond}}}{2} t^2$$

beschreiben lässt, wobei g_{mond} die Fallbeschleunigung ist.
In einem Versuch zur Bestimmung der Fallbeschleunigung werden folgende Werte x_j^M gemessen:



t_j [s]	0.25	0.50	0.75	1.00
x_j^M [m]	0.06	0.21	0.47	0.86

a) Die Messungen sind im folgenden Plot zu sehen. Dazu sind auch die Lösungen für g_{Mond} gleich 1.3, 1.6, und 1.9 gezeigt.



Welcher Wert für g_{Mond} passt am besten zu den Messungen? Passen die Messwerte zu dem angenommenen Modell?

b) Nennen Sie zwei verschiedene Aspekte, warum Detailliertheit und Parameter des Modells mit den gegebenen Messwerten noch nicht allgemein und ausreichend validiert werden können.

c) Benennen Sie eine gemachte Modellannahme und schlagen Sie eine Erweiterung des Versuchs vor, der zeigt, ob das Modell die Beobachtung korrekt abbildet.

Lösungsvorschlag

a) $g_{Mond} = 1.6$ kommt am Besten mit die Messwerte überein. Für diesen Wert liegen die Messwerte sehr na zu der Lösung der Modellgleichung: gegeben dieses Wertes ist das angenommene Modell plausibel. (1 Punkt).

b)
- Angabe zu Messaufbau und insbesondere zu den Messungenauigkeiten fehlen.
- Zu wenig Messwerte um eine verlässliche Aussage über das dynamische Verhalten zu rechtfertigen.
- Schmaler Messbereich (1 Sekunde, 1 m) erlaubt noch keine Aussage über ein Langzeitverhalten.

(2 Punkte)

c)
- Modellannahme, dass Luftwiderstand keine Rolle spielt könnte durch Vergleich verschieden geformter Gegenstände überprüft werden (z.B. Feder und Stahlkugel)
- Analytische Lösung zeigt ein Verhalten unabhängig von der Masse des Körpers: Prüfe Körper unterschiedlicher Massen (z.B. Feder und Stahlkugel)

(2 Punkte)

Aufgabe 2 Modellierung eines realen Systems (19 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen fallenden Ball auf der Erde, der von dem Boden abprallt. Unsere Aufgabe ist es, ein Model dieses Systems in Matlab zu programmieren. Die Parameter fuer diese Aufgabe sind wie folgt: wir nehmen den Ball als Punktmasse an, d.h. wir vernachlaessigen den Radius. Der Ball hat die Masse 0.1kg und wir nehmen eine Erdbeschleunigung von $10\frac{m}{s^2}$ an. Wir waehlen eine Zeitschrittweite von 0.01s und $t_{max} = 20s$. Wir ignorieren den Luftwiderstand des Balls und lassen den Ball von $100m$ Hoehe fallen.

Fuer diese Aufgabe gibt es kein Matlab Skeleton, achten Sie darauf, dass Sie Ihren Code vor der Abgabe refactoren um die Verstaendlichkeit zu maximieren. Mit jedem Teilschritt der Aufgabe werden wir unser Modell verbessern. Stellen Sie sicher, dass die Komplexitaet des Modells ueber die switch Anweisungen *contactTime, contactModel, integrationModel* gesteuert wird. Benutzen Sie sinnvolle Variablennamen (z.B. *x, xd, xdd*).

Plotten Sie fuer jeden Teilschritt die Trajektorie des Balls. Beschreiben Sie Phaenomene die von der Wirklichkeit abweichen und erklaeren Sie fuer jedes Modell moegliche Gruende fuer diese.

a) (3 Punkte) Erstellen Sie eine Funktion *integrate* mit der switch Anweisung *integrationMethod*. Errechnen Sie die Position des Balls durch doppelte Eulerintegration (berechnen Sie xd durch integration von xdd und x durch integration von xd). Wenn der Ball den Boden durchschlaegt, invertieren wir die Geschwindigkeit um einen Aufprall zu simulieren.

b) (3 Punkte) Da unser erstes Modell noch nicht zufriedenstellend ist, aendern wir unsere Integrationsmethode. Schreiben Sie die analytische Loesung fuer x auf und implementieren Sie diese (Aehnlich wie in Aufgabe 1, nur mit Startgeschwindigkeit). Stellen Sie sicher, dass sie fuer die Loesung das xd aus dem richtigen Zeitschritt benutzen.

c) (2 Punkte) Unser Ball faellt jetzt korrekt, durchschlaegt aber immer noch den Boden bevor er abprallt. Finden Sie zwei moegliche Wege dieses Problem zu beheben (Die beiden Loesungen sind aehnlich, unterscheiden sich aber in der Komplexitaet der Berechnung).

d) (3 Punkte) Mittlerweile hat sich unser Ball bereiterklaert vernuenftig zu fallen und den Boden zu respektieren. Leider sieht die Trajektorie immer noch nicht wie die eines Balles aus, der Ball springt jedes mal zurueck zur Decke. Wir nehmen einen richtigen Ball zur Hand und stellen fest, dass dies tatsaechlich kein zu erwartendes Verhalten ist. Stattdessen beobachten wir, dass unser Ball nach jedem Aufprall immer nur zu 80% der vorherigen Hoehe springt. Passen Sie Ihr Modell entsprechend an. (Hinweis: Gehen Sie ueber die potentielle und kinetische Energie des Balls um einen Restitutionsfaktor r zu berechnen. Aendern Sie nun die Geschwindigkeit nach dem Aufprall entsprechend.)

e) (3 Punkte) Unser Ball benimmt sich mittlerweile sehr wohlerzogen, allerdings sind wir immer noch nicht gluecklich. Unser Modell besagt, dass der Ball durch den Stoss Beschleunigt wird, aber wir wollen wissen was genau in dieser Zeit passiert. Um dies herauszufinden, modellieren wir den Ball als Feder-Daempfersystem solange er in Kontakt mit dem Boden ist, d.h. wir modellieren den Stossvorgang nun nicht mehr als Impuls sondern als ein System ueber die Zeit des Fortgangs mit sehr kleiner Zeitschrittweite. Nutzen Sie in diesem Zustand eine Zeitschrittweite von $1e-5$. Nutzen Sie eine Federkonstante k von $1e3$ und eine Daempferkonstante d von 1. Plotten Sie fuer diese Aufgabe x, xd, xdd in einem extra Plot waehrend des Stossvorganges. Was sind Vor- und Nachteile dieses Modells?

f) (3 Punkte) Nachdem wir das System in sehr verschiedenen Komplexitaetsstufen modelliert haben, schlagen Sie vor welches Modell Sie empfehlen wuerden und warum.

g) (2 Punkte) Code Refactoring. Stellen Sie sicher, dass Sie lesbaren und gut strukturierten und kommentierten Code abgeben, ansonsten koennen Punkte abgezogen werden.

Lösungsvorschlag

a) Simulationsfehler: Geschwindigkeit zum Aufprallzeitpunkt stimmt nicht mit realem Verhalten ueberein, ausserdem durchschlaegt der Ball den Boden und fliegt wieder bis zur Ausgangshoehe.

b) Simulationsfehler wie in a), aber die Geschwindigkeit zum Aufprallzeitpunkt stimmt jetzt.

c) Berechnung entweder ueber lineare Interpolation oder durch aufloesen der analytischen Formel mittels PQ-Formel.

d) Die Simulation berechnet nun auch den Stossvorgang physikalisch korrekt und wir koennen zB den Zeitlichen Verlauf der Kraefte auf den Boden extrahieren. Allerdings muessen wir dafuer neue Parameter einfuehren, deren Werte wir nicht einfach an reale Beobachtungen anpassen koennen. Deswegen muessen wir in dieser Simulation die Parameter von Hand anpassen und der Ball fliegt nicht auf die exakte Ausgangshoehe zurueck.

e) Abhaengig von den Anforderungen (verfuegbare Rechenkraft, muessen wir die Bodenkraefte kennen, muss der Ball genau auf die beobachtete Hoehe zurueckspringen) sind andere Modelle vorteilhaft. Generell ist das Modell aus Aufgabenteil d) eine guter Kompromiss zwischen Komplexitaet und Genauigkeit.