Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2013/2014
Lösungsvorschlag der 11. Übung

Aufgabe 1 Linear Least Squares (10 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir den linear least squares Algorithmus in Matlab implementieren. Fuer diese Aufgabe gibt es kein Code Skeleton, stellen Sie sicher, dass Ihr Code gut leserlich und verstaendlich ist. Fuer schlecht strukturierten Code koennen Punkte abgezogen werden.

a) Erstellen Sie eine Funktion *[w] = LeastSquares(phi,y)* die features *phi* und beobachtete Werte y entgegennimmt und den errechneten Parametervektor w zurueckgibt.

b) Wir nehmen folgende funktion an

$$f(x) = 3x$$

Wahelen sie 100 zufaellige (gleichverteilte) Werte fuer x im Bereich [0, 100] aus und simulieren Sie rauschbelastete Messsensoren durch hinzufuegen von normalverteiltem Rauschen mit einem Mittelwert von 0 und einer Standardabweichung von 10. Plotten Sie die erzeugten Werte als Punktwolke und die least Squares Loesung als Gerade.

c) Linear Least Squares setzt voraus, dass unsere Funktion linear in den Features ist, nicht aber, dass die Funktion selbst linear ist. Wenn wir also nicht x als Feature benutzen, sondern kompliziertere Features, koennen wir mit der Least Squares Methode auch kompliziertere Funktionen fitten. Ein Beispiel fuer ein Polynom zweiter Ordnung waere

$$y = w_0\phi_0 + w_1\phi_1 + w_2\phi_2,$$

mit

$$\phi_i = x^i.$$

Dies bedeutet, dass wir in einem ersten Schritt unsere Features $\phi_i(x)$ berechen muessen und dann den linear least squares Algorithmus aus der ersten Teilaufgabe benutzen koennen um die Gewichte w zu berechnen. Denken Sie daran, dass ϕ in diesem Fall eine Matrix ist.

Laden Sie den Datensatz *Uebung-11-1c* fuer diese Uebung herunter und fitten Sie Polynome der Ordnung $0, 5, 10, 15, 20$. Plotten Sie Ihre Ergebnisse und empfehlen Sie ein Polynom der Ordnung x. Ist es immer Sinnvoll die Ordnung des Polynoms so hoch wie moeglich zu waehlen? Begruenden Sie Ihre Antworten.

Lösungsvorschlag

a)

b)

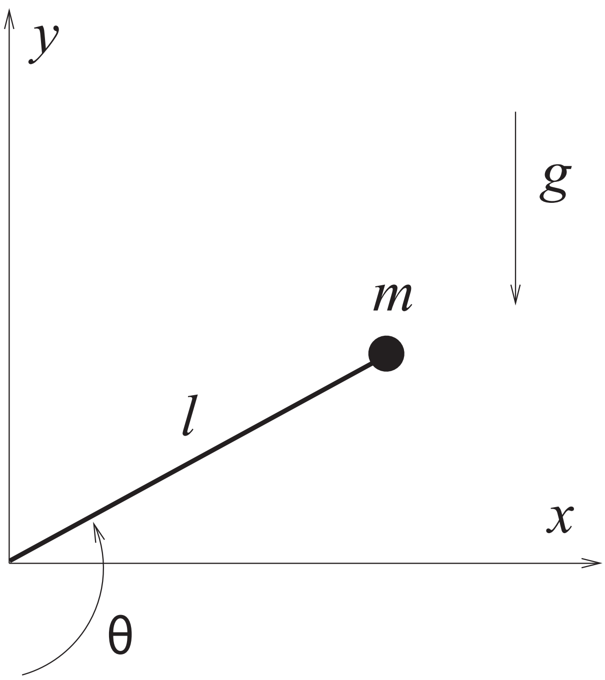
c) Das Polynom zehnter oder 15. Ordnung ist wahrscheinlich das Beste. Polynome hoeherer Ordnung neigen zu sogenanntem Overfitting und sind zu vermeiden.

Aufgabe 2 Parameterbestimmung in dynamischen Systemen (10 Punkte)

Wir betrachten (wieder) ein stark vereinfachtes Modell einer Schiffsschaukel. Eine punktförmige Masse m repräsentiere den Schaukelkorb, der mit einem starren, masselosen Stab der Länge l aufgehängt ist. Für die Auslenkung $\theta = 0$ hängt die Schiffsschaukel senkrecht nach unten. Die Schwingungen der Schaukel sind im Drehgelenk gedämpft mit einer zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ proportionalen Dämpfung. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Als Differentialgleichung für den Winkel $\theta(t)$ ergibt sich damit

$$ml\sin(\theta)g + d\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = 0\,.$$

Wir haben die Masse gemessen ($m = 55\text{kg}$), und uns ist bekannt, dass $g = 9.81\text{ms}^{-2}$. Die Länge l und der Dämpfungskoeffizient d sind uns jedoch nicht bekannt, und wir wollen lineare Regression benutzen um diese Werte zu bestimmen.



a) Schreiben Sie die Differentialgleichung um in der Form $\ddot{\theta} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\phi}(\theta,\dot{\theta}) = \sum_{i=1}^{2} w_i\phi_i(\theta,\dot{\theta})$. *Hinweis:* Die *Features* (Merkmale) $\phi_i(\theta,\dot{\theta})$ sollen nur von bekannten Werten und $\theta,\dot{\theta}$ aber nicht von den unbekannten Werten abhängen! Die Elementen w_i von $\boldsymbol{w}$ hängen nur von unbekannten Werten ab.

Laden Sie den Datensatz von Moodle herunter. Der Datensatz enthält gemessene Werte von θ *(theta)*, $\dot{\theta}$ *(theta_d)* und $\ddot{\theta}$ *(theta_dd)*. Die gemessenen Werte von $\ddot{\theta}$ enhalten leider additives Rauschen. Berechnen Sie (z.B. in Matlab) die in (a) definierten *features* für jeden Datenpunkt $(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})$.

b) Wie können wir jetzt die Werte $\boldsymbol{w}$ mittels linearer Regression abschätzen? Schreiben Sie die bitte die algemeine Gleichung auf.

c) Welche Werte erhalten Sie für $\boldsymbol{w}$?

d) Benutzen Sie die in (a) bestimmte Definition von $\boldsymbol{w}^T$ um die Modellparameter l, d zu schätzen.

e) Plotten Sie die gemessenen Werte von $\ddot{\theta}$ zusammen mit den Voraussagen $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\phi}(\theta,\dot{\theta})$.

Lösungsvorschlag

a)

$$
\begin{aligned}
ml\sin(\theta)g + d\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} &= 0 && (1)\\
\ddot{\theta} &= -\frac{1}{l}\sin(\theta)g - \frac{1}{ml^2}d\dot{\theta} && (2)\\
&= \sum_{i=1}^{2} w_i\phi_i(\theta,\dot{\theta}), && (3)
\end{aligned}
$$

wobei $w_1 = \frac{1}{l}$, $\phi_1 = \sin(\theta)g$, $w_2 = \frac{d}{l^2}$, $\phi_2 = \frac{\dot{\theta}}{m}$. (3 Punkte)

b) Wir schreiben die berechneten Features in einer Matrix Φ. Element $[\Phi]_{i,j}$ ist der Wert von Feature ϕ_i, der zur Messung j von $(\theta,\dot{\theta})$ gehört. Ebenso ist $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ ein Vektor der als Element $[\ddot{\boldsymbol{\theta}}]_j$ Messung j von $\ddot{\theta}$ enthält. Jetzt gilt:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}^T \approx \boldsymbol{w}^T\Phi$$

Die Lösung der Methode der kleinsten Quadrate ist damit:

$$\boldsymbol{w} = (\Phi\Phi^T)^{-1}\Phi\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

oder in Matlab-notation:

$$\boldsymbol{w} = (\Phi\Phi^T)\backslash\Phi\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

(2 Punkt)

c)

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0.624 \\ 15.8 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

d)

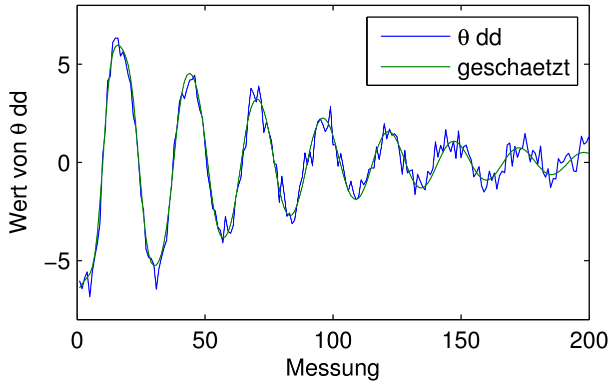
$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{l} && (4)\\
\frac{1}{l} &= 0.624 && (5)\\
l &= 1.6 && (6)
\end{aligned}
$$

(1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \frac{d}{l^2} && (7)\\
d &= w_2 \cdot l^2 && (8)\\
d &= 15.75 \cdot 1.6^2 = 40.5 && (9)
\end{aligned}
$$

(1 Punkt)

e) Der Plot der Winkelbeschleunigung über die Zeit:



(2 Punkte)