Formale Grundlagen der Informatik I
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
23. April 2014

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Mengenoperationen)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   i. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$
   ii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

Aufgabe G2 (Äquivalenzrelationen, Surjektivität, Injektivität)

(a) Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung. Die Relation $\sim$ sei auf A durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

für $x, y \in A$ definiert.
   i. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
   ii. Sei $q : A \to {}^{A}/_{\sim}$ durch $q(x) := [x]_{\sim}$ definiert. Zeigen Sie, dass q surjektiv ist.
   iii. Geben Sie ein Beispiel von A, B und f an, sodass q nicht injektiv ist.

(b) Sei A eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass für jede Äquivalenzrelation $\approx$ auf A eine Menge B und eine Abbildung $f : A \to B$ existiert, sodass $x \approx y \iff f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in A$ gilt.

Aufgabe G3 (Transitionssysteme und Wahrheitswertetafeln)

(a) Modellieren Sie eine Verkehrsampel als endliches Transitionssystem.

(b) Zeigen Sie anhand von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln äquivalent sind:

$$\neg(p \to q), \qquad p \wedge \neg q, \qquad (p \vee q) \wedge \neg q.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Mengenoperationen) (12 Punkte)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

(d) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

Aufgabe H2 (Bijektivität) (12 Punkte)
Definiere die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(x, y) := \frac{(x+y) \cdot (x+y+1)}{2} + x.$$

Beweisen Sie, dass f eine Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ ist.
Bemerkung: Wir betrachten 0 als natürliche Zahl.

Aufgabe H3 (Wahrheitswertetafeln) (12 Punkte)
Man betrachte die logischen Formeln

(i) $p \vee q$,

(ii) $(p \wedge q \wedge r) \to \neg p$,

(iii) $p \wedge (p \vee q \vee r)$,

(iv) $(p \to q) \leftrightarrow q$.

(a) Geben Sie die Wahrheitswertetafeln für diese Formeln an.

(b) Geben Sie für je zwei dieser Formeln an, ob sie logisch äquivalent sind.