Formale Grundlagen der Informatik I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Relationen)
Wir stellen einen gerichteten Graphen als ein Tupel (V, E) dar, wobei V die Knotenmenge und $E \subseteq V \times V$ die Kantenrelation ist. $(x, y) \in E$ soll genau dann zutreffen, wenn es eine Kante von x nach y gibt; wir schreiben auch $x \longrightarrow y$ um diesen Sachverhalt auszudrücken.

(a) Sei $R_0 \subseteq V \times V$ die Menge aller Paare (p, q), so dass es eine Folge von Kanten $p \longrightarrow \ldots \longrightarrow q$ von p nach q gibt (die Folge kann die Länge 0 haben; insbesondere erlauben wir $p = q$). Und sei $S_0 := \{(p, q) : (p, q) \in R_0 \text{ und } (q, p) \in R_0\}$.
Beweisen Sie, dass R_0 transitiv und S_0 eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $R_1 := \{(p, q) : (p, q) \in E \text{ oder } (q, p) \in E\}$ und S_1 die Menge aller Paare (p, q), so dass es eine Folge $\langle p_0, \ldots, p_n\rangle$ gibt, mit $p = p_0, q = p_n$ und $(p_i, p_{i+1}) \in R_1$ für alle $i < n$.
Zeigen Sie, dass R_1 symmetrisch und S_1 eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Sei jetzt $R_2 := \{(p, q) : (p, q) \in E \text{ und } (q, p) \in E\}$ und S_2 definiert wie S_1 in (b), wobei nun für alle $i < n$ gelten soll, dass $(p_i, p_{i+1}) \in R_2$.
Zeigen Sie, dass R_2 symmetrisch und S_2 eine Äquivalenzrelation ist.

(d) Welche Beziehungen gibt es zwischen S_1, S_2 und S_3? (Machen Sie sich dazu klar, was die intuitive Bedeutung dieser Relationen ist.) Finden Sie auch einen Graphen in dem alle drei Relationen unterschiedlichen Bedeutungen haben.

Lösungsskizze:

(a) Angenommen, dass $(p, q) \in R_0$ und $(q, r) \in R_0$. Dann gibt es Pfade $p \to \cdots \to q$ und $q \to \cdots \to r$. Wenn wir diese aneinanderhängen, erhalten wir einen Pfad $p \to \cdots \to r$. Also ist $(p, r) \in R_0$. Also ist R_0 transitiv.
Wir beweisen jetzt, dass S_0 eine Äquivalenzrelation ist:
(Reflexivität) Da $(p, p) \in R_0$, für alle $p \in Q$, gilt $(p, p) \in S_0$.
(Symmetrie) Sei $(p, q) \in S_0$. Dann ist $(p, q) \in R_0$ und $(q, p) \in R_0$. Nach Definition von R folgt, dass $(q, p) \in S_0$.
(Transitivität) Sei $(p, q) \in R$ und $(q, r) \in S_0$. Dann ist $(p, q), (q, p), (q, r), (r, q) \in R_0$. Da R_0 transitiv ist, folgt, dass $(p, r), (r, p) \in R_0$. Also ist auch $(p, r) \in S_0$.

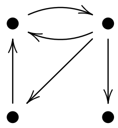
(b) Falls $(p, q) \in R_1$, dann $(p, q) \in E$ oder $(q, p) \in E$. Im beiden Fällen gilt $(q, p) \in R_1$, also ist R_1 symmetrisch.
Wir beweisen jetzt, dass S_1 eine Äquivalenzrelation ist:
(Reflexivität) $(p, p) \in S_1$, da $\langle p\rangle$ eine geeignete Folge ist.

(Symmetrie) Sei $(p,q) \in S_1$. Dann gibt es eine Folge $\langle p_0, \ldots, p_n \rangle$ mit $p = p_0, q = p_n$ und $(p_i, p_{i+1}) \in R_1$ für alle $i < n$. Da R_1 symmetrisch ist, gilt auch $(p_{i+1}, p_i) \in R_1$ für alle $i < n$. Also ist $\langle p_n, \ldots, p_0 \rangle$ eine Folge, die belegt, dass $(q,p) \in S_1$.

(Transitivität) zeigt man wieder durch aneinanderhängen von Folgen.

(c) Analog zu (a) und (b).

(d) Es gilt $S_2 \subseteq S_0 \subseteq S_1$. Alle Inklusionen sind echt, was sich z.B. am folgenden Graphen zeigt:



Aufgabe G2 ([Boolesche Algebren])

Sei $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ eine Boolesche Algebra. Zeigen Sie die folgende Regeln, wobei Sie nur die folgende Axiome verwenden:

BA1: $+$ und $\cdot$ sind assoziativ und kommutativ, d.h. für alle $x, y, z \in B$:

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+y = y+x,$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

BA2: $+$ und $\cdot$ sind distributiv, d.h. für alle $x, y, z \in B$:

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z).$$

BA3: 0 und 1 sind neutrale Elemente bzgl. $+$ und $\cdot$:

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x \text{ für alle } x \in B.$$

BA4: Komplement: $0 \neq 1$ und $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$ für alle $x \in B$.

(i) $0 \cdot 0 = 0$,

(ii) $1 + 1 = 1$,

(iii) $x + x = x$,

(iv) $x \cdot x = x$,

(v) $x \cdot 0 = 0$,

(vi) $x + 1 = 1$,

(vii) $x + (x \cdot y) = x$,

(viii) $x \cdot (x + y) = x$.

Lösungsskizze:

(i)

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot 1 \\ &= 0 \cdot (1 + 0) \\ &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ &= 0 + 0 \cdot 0 \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \cdot 0. \end{aligned}$$

(ii) Analog zu (i):

$$\begin{aligned} 1 &= 1+0 \\ &= 1+(0\cdot 1) \\ &= (1+0)\cdot(1+1) \\ &= 1\cdot(1+1) \\ &= (1+1)\cdot 1 \\ &= 1+1. \end{aligned}$$

(iii) $x + x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = x \cdot (1+1) = x \cdot 1 = x$.

(iv) Analog zu (iii): $x \cdot x = (x+0) \cdot (x+0) = x + 0 \cdot 0 = x + 0 = x$.

(v) $x \cdot 0 = x \cdot (x \cdot x') = (x \cdot x) \cdot x' = x \cdot x' = 0$.

(vi) Analog zu (v).

(vii) $x + (x \cdot y) = x \cdot 1 + x \cdot y = x \cdot (1+y) = x \cdot (y+1) = x \cdot 1 = x$.

(viii) Analog zu (vii).

Aufgabe G3
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen „f ist in $\mathcal{O}(g)$" (kurz „$f \in \mathcal{O}(g)$"), falls es Konstanten K, n_0 gibt, so dass

$$f(n) \leq K \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wir schreiben $f \sim g$, falls $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$. $f \sim g$ besagt, dass f und g dieselbe Wachstumsrate haben.
Zeigen Sie, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist.

Lösungsskizze:
Wir bemerken zuerst, dass $f \in \mathcal{O}(f)$, weil wir einfach $K = 1$ und $n_0 = 0$ wählen können.
Weiter gilt, dass

$$f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } g \in \mathcal{O}(h) \text{ impliziert } f \in \mathcal{O}(h). \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass $f(n) \leq K_0 \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ und $g(n) \leq K_1 h(n)$ für alle $n \geq n_1$. Dann folgt, dass $f(n) \leq K_0 K_1 h(n)$ wenn $n \geq n_0$ und $n \geq n_1$, d.h., wenn $n \geq \max(n_0, n_1)$.
Jetzt beweisen wir, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität $f \sim f$ ist klar, da $f \in \mathcal{O}(f)$; die Symmetrie is auch klar, weil $f \sim g$ heißt, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$, woraus folgt, dass $g \sim f$.
Um die Transitivität zu beweisen, nehmen wir an, dass $f \sim g$ und $g \sim h$. Daraus folgt, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h)$. Dann folgt mit (1), dass $f \in \mathcal{O}(h)$. Analog beweist man $h \in \mathcal{O}(f)$.

Aufgabe G4 (Induktion)
Sei $z = \sum_{i=0}^{k} z_i 10^i$ mit $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (d.h. $z_k z_{k-1} \ldots z_0$ ist die Dezimaldarstellung von z). Die *Quersumme* von z ist die Zahl

$$q(z) = \sum_{i=0}^{k} z_i.$$

(a) Beweisen Sie, dass $z \equiv_9 q(z)$ und dass deshalb die Zahl z genau dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme dies ist.
Hinweis. Zeigen Sie mit Induktion, dass $10^n - 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Zahl z genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i z_i = z_0 - z_1 + z_2 - \ldots + (-1)^k z_k$$

dies ist.

Lösungsskizze:

(a) Zuerst zeigen wir mit Induktion, dass $10^n - 1$ durch 9 teilbar ist.
Induktionsanfang: $10^0 - 1 = 0$ ist offensichtlich durch 9 teilbar.
Induktionsschritt von n nach $n+1$: wir nehmen an, dass $10^n - 1$ durch 9 teilbar sei, d.h., dass $10^n - 1 = 9 \cdot k_n$ für ein $k_n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = 10 \cdot 10^n - 10 + 10 - 1 = 10(10^n - 1) + 9 = 9(10k_n + 1)$$

durch 9 teilbar.
Hieraus folgt, dass für jede Dezimalzahl $\sum_{i=0}^{k} 10^k z_k$ die Differenz

$$\begin{aligned} z - q(z) &= (z_0 + 10z_1 + 100z_2 + \ldots + 10^k z_k) - (z_0 + z_1 + z_2 \ldots + z_k) \\ &= z_1(10-1) + z_2(100-1) + \ldots (10^k - 1)z_k \end{aligned}$$

durch 9 teilbar ist. Deshalb ist $z = q(z) \mod 9$.

(b) Idee: wie in (a). Man beweist jetzt, dass $10^n - (-1)^n$ durch 11 teilbar ist. (In Wikipedia findet man unter “Teilbarkeit” ähnliche Kriterien für andere Zahlen.)

Hausübung

Aufgabe H1 ([Relationen])

(i) Welche der Eigenschaften „Reflexivität”, „Symmetrie” und „Transitivität” haben die folgenden binären Relationen

$$\begin{aligned} &R_1 = \{(1,2),(5,6),(2,3),(1,3),(4,4)\} \text{ auf } A_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, \\ &R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \text{ auf } A_2 = \{1,2,3\}, \\ &R_3 = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\} \text{ auf } A_2 = \{1,2\}? \end{aligned}$$

(ii) Sei $p : Y \to X$ eine Surjektion. Zeigen Sie, dass durch

$$y_0 \sim y_1 :\Leftrightarrow p(y_0) = p(y_1)$$

eine Äquivalenzrelation auf Y definiert wird. Zeigen Sie auch, dass es eine Bijektion zwischen $Y/\sim$ und X gibt.

Lösungsskizze:

(i) R_1 is nicht reflexiv, nicht symmetrisch, aber transitiv. R_2 und R_3 sind reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(ii) $p(y) = p(y)$ gilt für jedes y, und deshalb ist $\sim$ reflexiv. Wenn $p(y_0) = p(y_1)$ gilt, gilt auch $p(y_1) = p(y_0)$, und deshalb ist $\sim$ symmetrisch. Wenn $p(y_0) = p(y_1)$ gilt und $p(y_1) = p(y_2)$, gilt auch $p(y_0) = p(y_2)$, und deshalb ist $\sim$ transitiv.
Wir definieren $t : Y/\sim \to X$ durch

$$t([y]) = p(y).$$

1. t is wohldefiniert, da

$$[y_0] = [y_1] \Rightarrow y_0 \sim y_1 \Rightarrow p(y_0) = p(y_1).$$

2. t ist injektiv, da

$$t([y_0]) = t([y_1]) \Rightarrow p(y_0) = p(y_1) \Rightarrow y_0 \sim y_1 \Rightarrow [y_0] = [y_1].$$

3. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $p(y) = x$ (p ist surjektiv). Es folgt $t([y]) = p(y) = x$, und deshalb ist t surjektiv.

Aufgabe H2 (Boolesche Algebren) (6 Punkte)
Sei $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ eine Boolesche Algebra.

(i) Seien $x, y \in B$ so, dass

$$x \cdot y = 0 \text{ und } x + y = 1.$$

Zeigen Sie, dass $y = x'$. (Verwenden Sie hier und in (ii) nur die Axiome und Regeln die Sie in Aufgabe (G3) abgeleitet haben.)
Hinweis: beweisen Sie $y = x'y$ und $x' = x'y$.

(ii) Zeigen Sie die De Morgan Regeln:

$$\begin{aligned} 0' &= 1, \\ 1' &= 0, \\ (x+y)' &= x' \cdot y', \\ (x \cdot y)' &= x' + y', \\ x'' &= x. \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie, dass durch $\varphi(b) = b'$ ein Isomorphismus von Booleschen Algebren

$$(B, 0, 1, +, \cdot, ') \xrightarrow{\varphi} (B, 1, 0, \cdot, +, ')$$

definiert wird.

Lösungsskizze:

(i)

$$\begin{aligned} y &= y(x + x') \\ &= yx + yx' \\ &= yx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x'(x + y) \\ &= x'x + x'y \\ &= x'y \end{aligned}$$

(ii) Es folgt mit (i) aus

$$\begin{aligned}(x+y)x'y' &= xx'y + yx'y' \\ &= 0+0 \\ &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x+y+x'y' &= x+y(x+x')+x'y \\ &= x+xy+x'y+x'y' \\ &= xy+x+x'(y+y') \\ &= xy+x+x' \\ &= xy+1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

dass $(x+y)' = x'y'$. Die anderen Fälle gehen analog.

(iii) Es folgt unmittelbar aus (ii), dass φ ein Homomorphismus ist. φ ist selbst ein Isomorphismus, weil es seine eigene Umkehrfunktion ist.