Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2005/06
6. März 2006

Formale Grundlagen der Informatik I

Klausur

Nachname:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	12	60	(+12)
erreichte Punkte								

Note:

(Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.)

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Bearbeiten Sie **mindestens 5 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 6 Aufgaben.
Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

(Aufgabe 1)

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$.

(a) Bestimmen zu den folgenden Σ-Sprachen jeweils einen regulären Ausdruck, der die entsprechende Sprache beschreibt.

  (i) L_1 enthält genau die Wörter, deren Länge modulo 3 gleich 1 ist.

  (ii) L_2 enthält genau die Wörter, bei denen zwischen je zwei „c“ mindestens ein „a“ steht.

  (iii) L_3 enthält genau die Wörter, in denen kein „c“ vorkommt, und jeder Präfix, der mit „a“ endet, eine ungerade Anzahl von „b“ enthält.

(b) Geben Sie für die folgenden regulären Ausdrücke an, ob die beschriebene Sprache gleich Σ^* ist.

  (i) $(a + b + c)(a^*b^*c^*)^* + \emptyset^*$

  (ii) $(a + bca) + ((c + \emptyset^*)(\emptyset^* + b)(aa)^*)^*$

  (iii) $(a + bc)^* + (a + cb)^* + (a + bb)^* + (a + cc)^*$

(Aufgabe 2)

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Geben Sie einen nichtdeterministischen Automaten über dem Alphabet Σ an, der die folgende Sprache erkennt

$$L\big((ab + ac)^* a(bc)^*\big)$$

(b) Führen Sie die Potenzmengenkonstruktion mit dem Automaten aus (a) durch.
Geben Sie hierfür eine Tabelle für die Übergangsfunktion, die Menge der Endzustände und ein Diagramm des Automaten an. (Unerreichbare Zustände nicht aufführen!)

(c) Geben Sie einen minimalen DFA für L an, und beweisen Sie, dass Ihr Automat minimal ist.

(Aufgabe 3)

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und folgende Σ-Sprachen

$L_1 := \{a^n b^k a^n b^k \;:\; n, k \in \mathbb{N}\}$

$L_2 := \{a^n b^k a^k b^n \;:\; n, k \in \mathbb{N}\}$

$L_3 := \{a^n b^n a^k b^k \;:\; n, k \in \mathbb{N}\}$

(a) Bestimmen Sie für L_1, L_2 und L_3 jeweils, zu welchem Niveau der Chomsky-Hierarchie sie gehören (ohne Nachweis).

(b) Geben Sie für die *kontextfreien* Sprachen jeweils eine Grammatik an.

(c) Weisen Sie die Nicht-Regularität mindestens einer der Sprachen nach.

(Aufgabe 4)

(a) Betrachten Sie die Grammatik G über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit Startsymbol X und den Produktionen

$$\begin{aligned} X &\to Xa \mid Y \mid ZZ \\ Y &\to b \mid aY \mid Z \\ Z &\to Xbb \mid c \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine zu G äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.

(b) Betrachten Sie die Grammatik aus Aufgabenteil (a) und das Wort $w = babbc$. Bestimmen Sie mittels des CYK-Algorithmus systematisch für jedes Teilwort $u_{i,j}$ von w die Menge der Variablen $V(i,j) \subseteq V$, die das Teilwort $u_{i,j}$ erzeugen.

(c) Geben Sie einen PDA $\mathcal{P}$ über $\Sigma = \{a, b\}$ an, mit $L(\mathcal{P}) = L^*$ wobei $L = \{a^n b^n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$.

(Aufgabe 5)

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Jeder NFA, dessen Zustände alle akzeptierend sind, akzeptiert Σ^*.

(b) Jeder DFA, dessen Zustände alle akzeptierend sind, akzeptiert Σ^*.

(c) Jeder DFA mit mindestens einem akzeptierenden Zustand akzeptiert mindestens ein Wort.

(d) Jeder minimale DFA mit mindestens einem akzeptierenden Zustand akzeptiert mindestens ein Wort.

(e) Jeder minimale DFA mit genau 2 Zuständen muss genau einen akzeptierenden Zustand haben.

(Aufgabe 6)

Das folgende Diagramm zeigt ein 3×3 Feld mit Startposition $*$.

$*$		

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma := \{r, l, o, u\}$. Wir fassen Σ-Wörter als Zuganweisung ausgehend vom Feld $*$ auf, wobei $r/l/o/u$ jeweils für einen Schritt nach rechts/links/oben/unten steht. Zuganweisungen, die über den Rand hinausführen würden, sind *nicht ausführbar*.

Betrachten Sie folgende Σ-Sprachen:

L ist die Menge aller ausführbaren Zuganweisungen $w \in \Sigma^*$ (z. B. $orruol \in L$, $ol \notin L$).

$L_0 \subset L$ enthält alle Zuganweisungen, die in Position $*$ enden.

$L_1 \subseteq L$ enthält alle Zuganweisungen, die jedes Feld mindestens einmal besuchen.

(a) Geben Sie jeweils einen DFA für die Sprachen

  (i) L

  (ii) L_0

an.

Hinweis: Am einfachsten geben Sie das Transitionssystem in einem Diagramm an und spezifizieren Startzustand und akzeptierende Zustände separat.

(b) Begründen Sie, dass L_1 regulär ist.

Hinweis: Es soll kein Automat angegeben werden.

(c) $\hat{L} \subseteq \Sigma^*$ sei analog zu L definiert bezüglich des Feldes $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (d. h. ohne rechten und oberen Rand) mit Startposition $* = (0, 0)$.

  (i) Ist $\hat{L}$ regulär? (Geben Sie einen Beweis an.)

  (ii) Ist $\hat{L}$ kontextfrei? (Eine informelle Begründung reicht aus.)