Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Vorlesung: Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

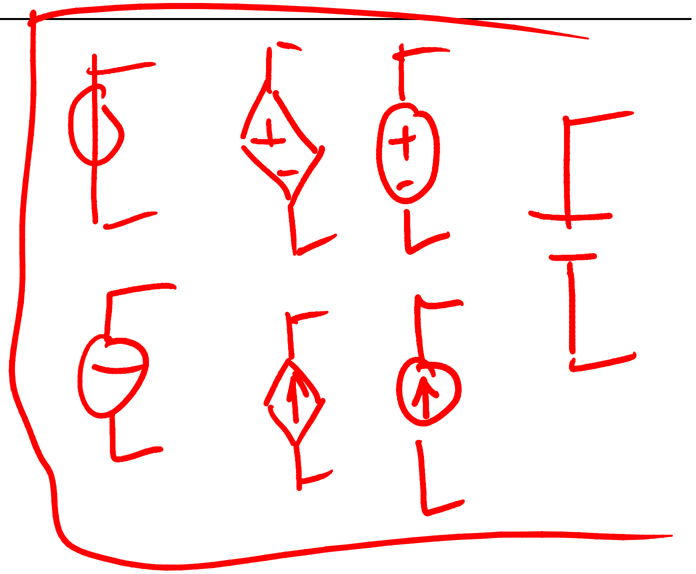
4. November 2013

Prof. Dr. Jan Peters

MOODLE TEST IN ZWEI FOLIEN

produziert vom HRZ Hochschulrechenzentrum

Meisenantworten



- Übung und Vorlesung tauschen? *Terminproblem!*
- Spannungsquelle und Stromquelle?
- Schwierigkeit der Übung = *Durchschnittsnote!*
- Moodle Fragen zwei Folien vorher ankündigen? *OK*
- Moodle Antworten länger erklären? *OK!*
- Symbole länger und häufiger erklären? *OK!*
- Umfragen in Moodle freischalten? *Wie geht das?*
- Antwort in Moodle umentscheiden?
- Ausgewählte Antwort besser hervorheben? *Geht net…*
- Im Nachhinein einsehbar? *Vorlesungsaufzeichnung + Semersterende!*
- *Fragen an Chris und Herke werden von Beiden beantwortet…*

Überblick der Vorlesungsinhalte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Einführung
2. Diskrete Modellierung und Simulation
3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation
4. Teilschritte einer Simulationsstudie
5. Interpretation und Validierung
6. Modulare und objektorientierte Modellierung und Simulation
7. Parameteridentifikation von Modellen

MOODLE FRAGE

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Grundlagen der Modellierung und Simulation

3. ZEITKONTINUIERLICHE MODELLIERUNG UND SIMULATION

3.1 Örtlich konzentrierter Parameter

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Definition: Es sei $n \in \mathbb{N}, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt die Gleichung

$$y^{(n)}(t) = F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right), \qquad t \in I,$$

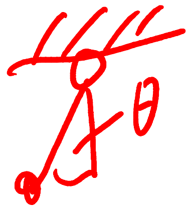
  gewöhnliche Differentialgleichung.

Mechanik

$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, Q)$

- Anders ausgedrückt: Eine gewöhnliche Differentialgleichung hängt von der Funktion selbst und mindestens einer ihrer Ableitungen nach der unabhängigen Veränderlichen (z.B. t) ab

$m\ddot{x} + c(x - x_0) = mg$



$J\ddot{\theta} = mgl \sin\theta - \mu\dot{\theta}$

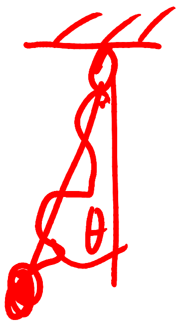
IAS

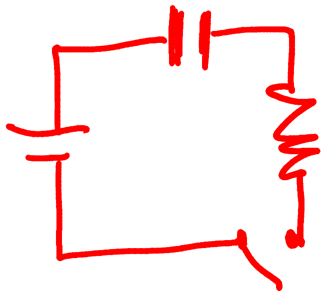
3.1 Örtlich konzentrierter Parameter

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Systeme mit *örtlich konzentrierten* Parametern werden durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben

- Beispiele
  - Zeitlicher Verlauf der Schwingung einer Masse an einer Feder
  - Zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung einer elektrischen Schaltung





MOODLE TEST IN ZWEI FOLIEN

3.1 Örtlich verteilter Parameter

- Definition
  - Hängt die bestimmende Gleichung einer Funktion von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen ab, heißt diese partielle Differentialgleichung.

- Systeme mit (lokal) *örtlich verteilten* Parametern werden durch partielle Differentialgleichungen beschrieben

3.1 Örtlich verteilter Parameter

- Beispiele:
  - Strömungsdynamik
  - Temperaturverteilung in einen Festkörper

- Ein- bzw. zweimalige totale Ableitungen nach t werden mit einem bzw. zwei Punkten abgekürzt, z.B. $\boxed{x'(t) = \dot{x}(t)}$ $x'(t) = \dot{x}$

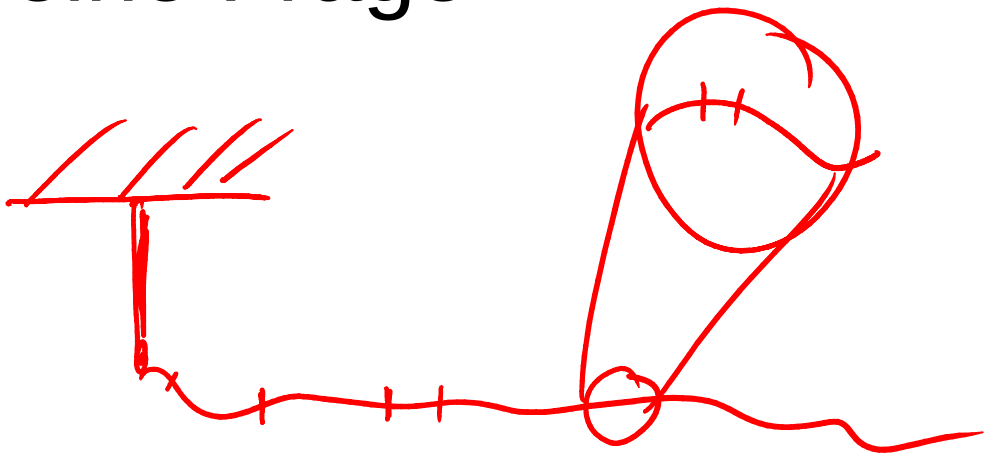
- In der Vorlesung werden nur *örtlich konzentrierte* Parameter betrachtet

MOODLE FRAGE

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\boxed{y'''(t) = F(y', y'', y)}$$

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!



3.1.1 Örtlich konzentrierte Parameter: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Herleitung: Schwingung einer Masse an einer Feder
  - Masse m, Federkonstante c und Systemzustand x zum Zeitpunkt t(Längenveränderung)

$-c(x-x_0)$ $\quad cx_0 = mg$

  - Hookesches Gesetz: $F = -c \cdot x(t)$
  - Newtonsches Gesetz: $F = m \cdot \ddot{x}(t)$

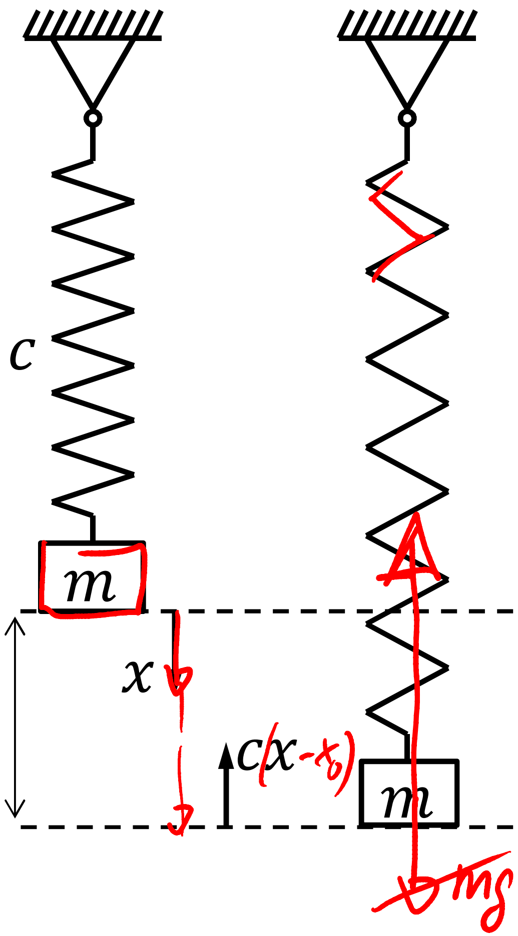
$F=F$

  - Es ergibt sich die DGL 2.Ordnung:

$m\ddot{x} = -cx$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{c}{m}x(t)$$

Auslenkung

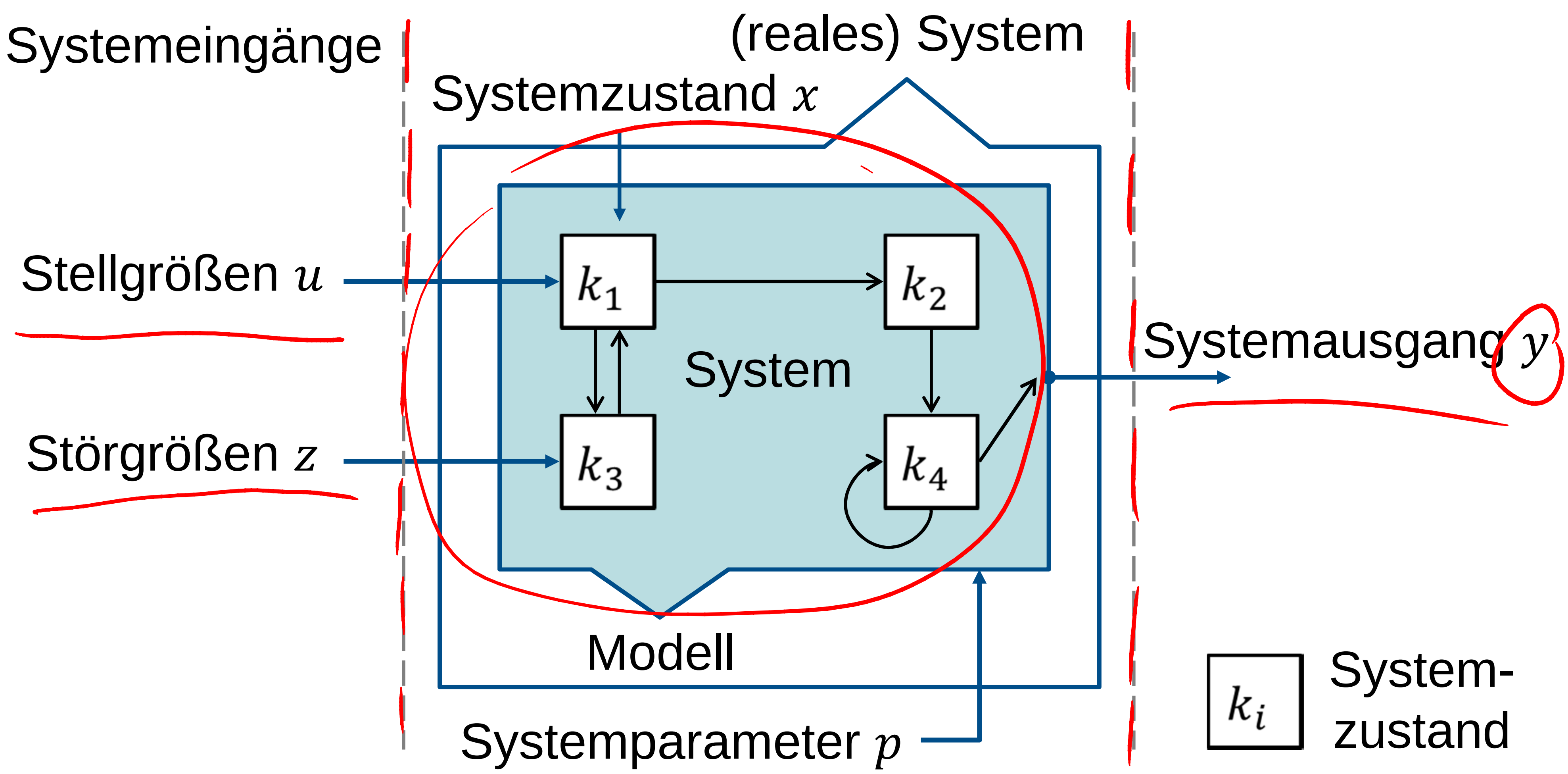


3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme: Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

	Zustandsvariablen x_i	Systemelemente k_j
▪ Elektrische Schaltungen	▪ Strom, Spannung,Ladung, ...	▪ Widerstand, Spule, Kondensator, Verstärker, ...
▪ Mechanische Mehrkörpersysteme	▪ Position, Winkel, Geschwindigkeit,...	▪ Starrkörper, Feder, Dämpfer, ...
▪ Chemische Reaktionsnetzwerke	▪ Stoffkonzentrationen, ...	▪ ChemischeReaktionen unterschiedlicher Stoffe
▪ Verfahrenstechnik	▪ Temperaturen, Massenverteilungen	▪ Reaktoren, Behälter, Trennstufen

3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme: System und Modell



3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme: Allgemeine Zustandsgleichung

- System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Position
Geschwindigkeit
Zeit

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{pmatrix} = f\big(x(t), u(t)\big)$$

Systemdynamik

$$y = g(x, u, t) = (g_1(x, u, t), \dots, g_m(x, u, t))^T$$

Systemausgang

$y = \dot{x}_2$

Geschw. + Beschleunigung!

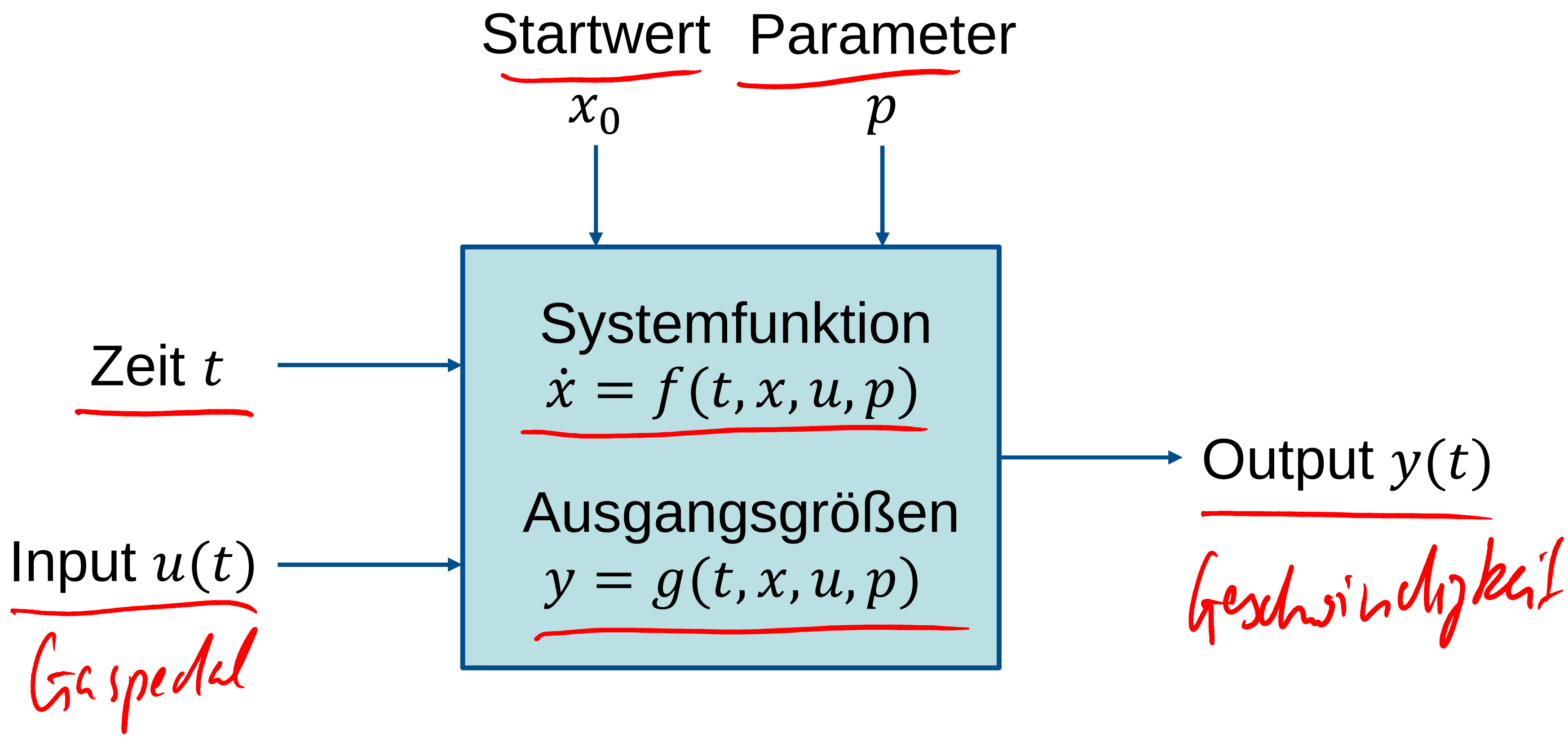
- Zum Zwecke der Simulation muss u gegeben sein

Gaspedal

Geschwindigkeit

- Zustandsgrößen y häufig direkt am realen System beobachtbar

3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme: Allgemeines Zustandsraummodell



3.2.1 Transformation auf System 1. Ordnung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Jedes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung kann auf ein System 1. Ordnung transformiert werden

- Der Grad einer DGL gibt die Dimension des transformierten DGL Systems in erster Ordnung an

3.2.1 Transformation auf System 1. Ordnung: Beispiel

- Schwingung einer Masse an einer Feder
- Eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

- Einführung der höheren totalen Zeitableitungen des Systemzustands als weitere Zustandsvariablen

$x_1 = x$ Position

$x_2 = \dot{x}$ Geschwindigkeit

$$x_1 := x, \quad x_2 := \dot{x}, \qquad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{c}{m}x \end{pmatrix}$$

x_2 x_1

3.2.2 Autonomisierung nichtautonomer DGL-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hängt eine Funktion f nicht explizit von der Zeitgröße t ab, so nennt man das DGL-System autonom

- Jedes nicht autonome DGL-System (mit Dimension n) lässt sich auf ein autonomes DGL-System (mit Dimension $n + 1$) transformiert werden

$$x_{n+1} = t$$

$$\boxed{\dot{x}_{n+1} = 1}$$

Zeit wird Zustand!

3.2.2 Autonomisierung nichtautonomer DGL-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel ($n = 2$)

$$\boxed{\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \cdot x_2 \\ \sqrt{t} \cdot x_1 \end{pmatrix},} \qquad \underline{x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2}$$

- Einführung einer „Zeitvariablen“ $\underline{x_3 = t}$

$$\underline{x_3 = t} \implies \underline{\dot{x}_3 = 1,} \qquad \underline{x_3(0) = 0}$$

- <u>Autonomes DGL-System</u>

KEIN t ! = Autonom!

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} (x_3)^2 \cdot x_2 \\ \sqrt{x_3} \cdot x_1 \\ 1 \end{pmatrix}} = f(x), \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Allgemeine lineare Systemdynamik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eine wichtige Teilklasse ist die der linearen Systemdynamik

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) = Ax + Bu \\ y &= g(x,u) = Cx + Eu \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^l$$

mit konstanten (oder rein zeitabhängigen) Koeffizientenmatrizen

$$\boxed{\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times l} \\ C &\in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad E \in \mathbb{R}^{m\times l} \end{aligned}}$$

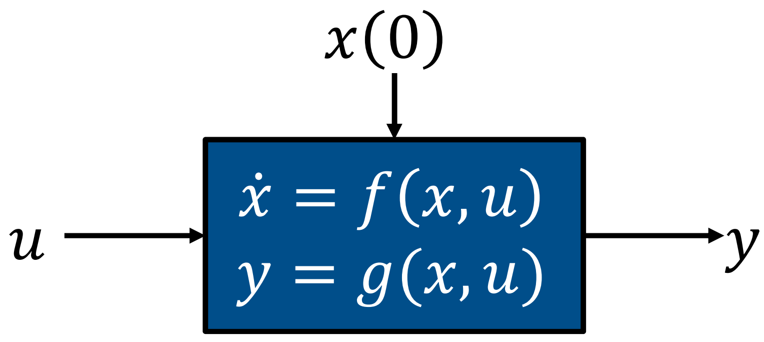
Konstant!

- Beispiel: Schwingung einer Masse an einer Feder ($n = 2, l = 0$)

$$\boxed{\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_1 \end{pmatrix}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{pmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{B} u =: Ax + Bu$$

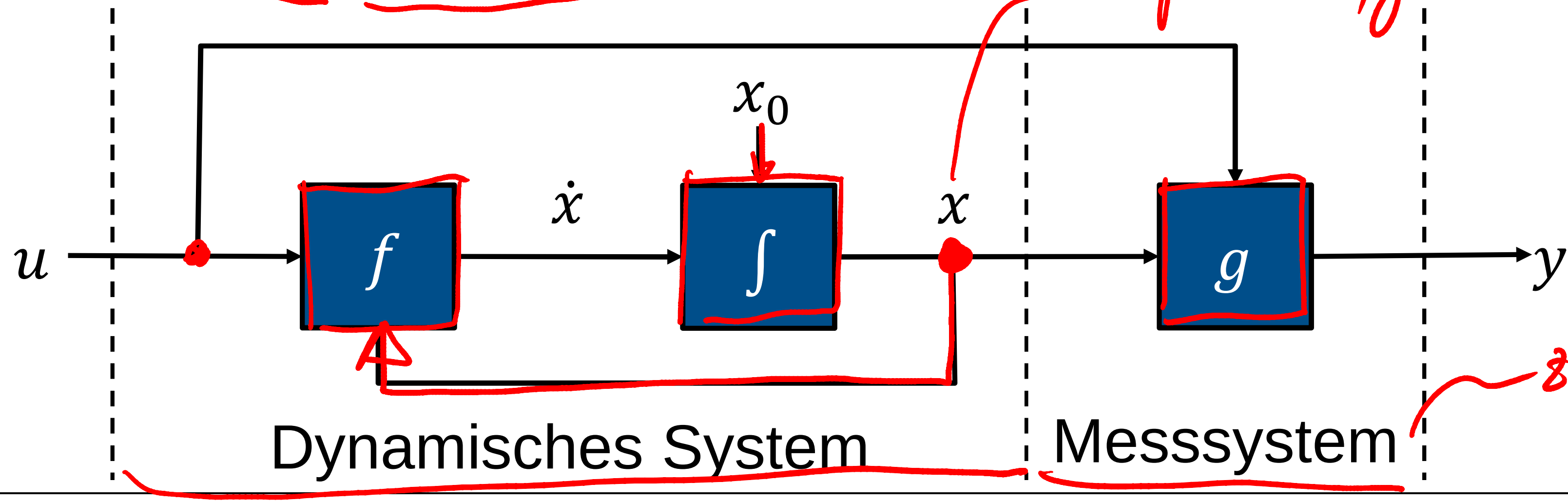
3.2.4 Blockorientierte Darstellung

- Das DGL-System mit Anfangswert
  - $\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$



- Äquivalente Form Integralgleichung!
  - $x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(x(s), u(s)\big)\, ds$

position, geschwindigkeit!



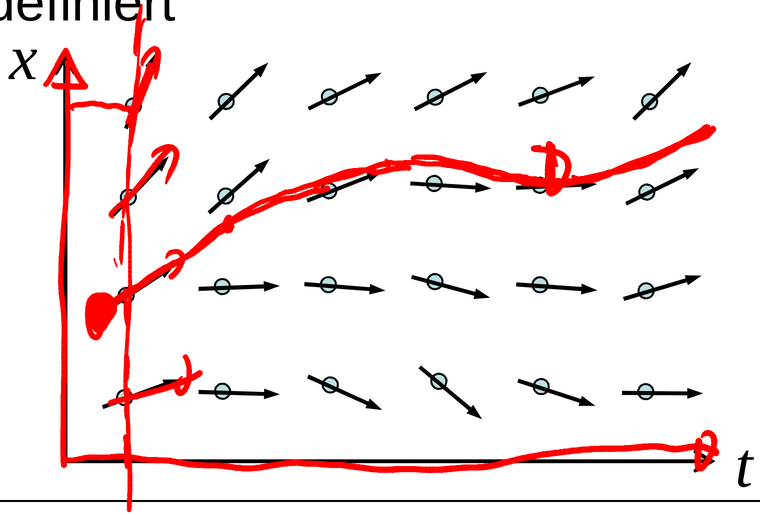
z.B. Tacho

3.3 Modellanalyse: Lösbarkeit

- Beispiel: gewöhnliche DGL 1. Ordnung ($n = 1$)

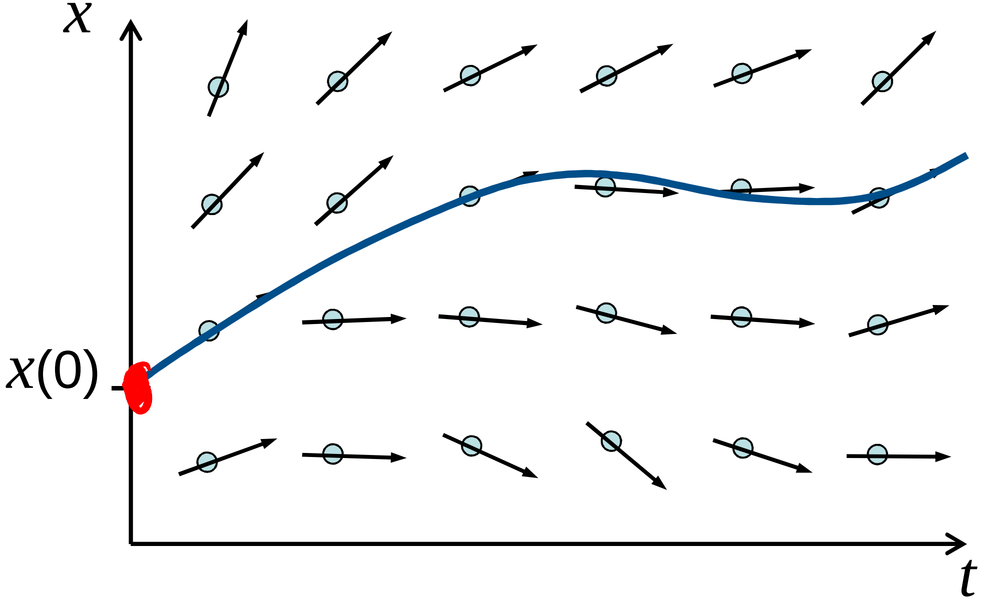
$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

- Damit wird für jeden (zulässigen) Punkt $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ eine Steigung für $x(t)$ und mit allen Steigungen ein Richtungsfelddefiniert



3.3 Modellanalyse: Lösbarkeit

- Eine Lösungstrajektorie $x(t)$ erhält man, mit Hilfe eines festgelegten Wertes, z.B. $x(0)$, und von dort „dem Richtungsfeld folgt“.



3.3 Modellanalyse: Lösbarkeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Die allgemeine Lösung hängt von nIntegrationskonstanten ab, die z.B. durch n Anfangsbedingungen festgelegt werden

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\|$$

- Gilt die Lipschitz-Bedingung, hat ein autonomes DGL-System 1. Ordnung mit gegebenem Anfangswert eine eindeutige Lösung $x(t)$ für $t > 0$ (Satz von Picard-Lindelöf)

$$\underline{\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L\,\|x_1 - x_2\|}$$

3.3.1 Gleichgewichtslösungen

- Gibt es für konstantes $u(t) = u_s$ ein x_s mit

$$x(t) \rightarrow x_s \text{ für } t \rightarrow \infty$$

heißt x_s stationärer Zustand („Gleichgewichtslage“)

$x = x_s \Rightarrow \dot{x} = 0$

$\equiv$ position bleibt NUR x_s wenn $\dot{x} = 0$

Geschwindigkeit

- Falls x_s existiert, gilt $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und damit

$0 = \dot{x} = f(x, u) \Longrightarrow$

$$0 = f(x_s, u_s)$$

$\rightarrow x_s = f^{-1}(0, u_s)$

  - Ein (i.Allg. nichtlineares) System von n Gleichungen f_j zur Bestimmung von nUnbekannten x_{s_j}

3.3.1 Gleichgewichtslösungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zur Bestimmung der Gleichgewichtslösung unterscheidet man zwischen zwei Systemdynamiken

  - <u>Lineare</u> Systemdynamik $\dot{x} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$ $= A(x, u) \Rightarrow \dot{x} = 0 \quad A(x,u) = 0$

    $$\Rightarrow Ax_s = -Bu_s$$

    $\Rightarrow x = A^{-1}(0, u)$

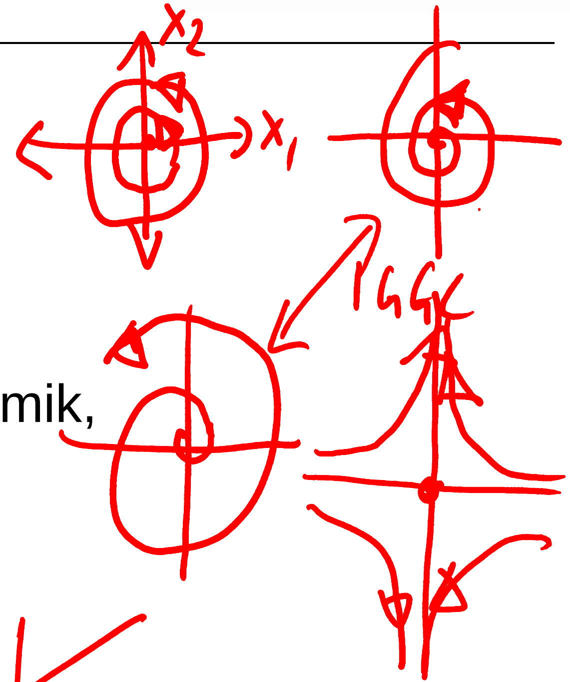
  - <u>Nichtlineare</u> Systemdynamik $\dot{x} = f(x, u)$

    $$\Rightarrow 0 = f(x_s, u_s)$$

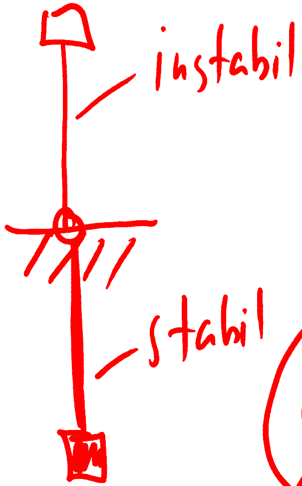
3.3.1 Gleichgewichtslösungen

$\dot{x} = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^2$

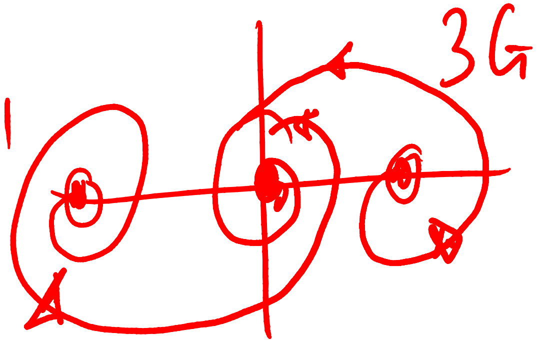
- Ein Gleichungssystem kann genau eine, mehrere, unendlich viele oder keine Lösungen x_s haben

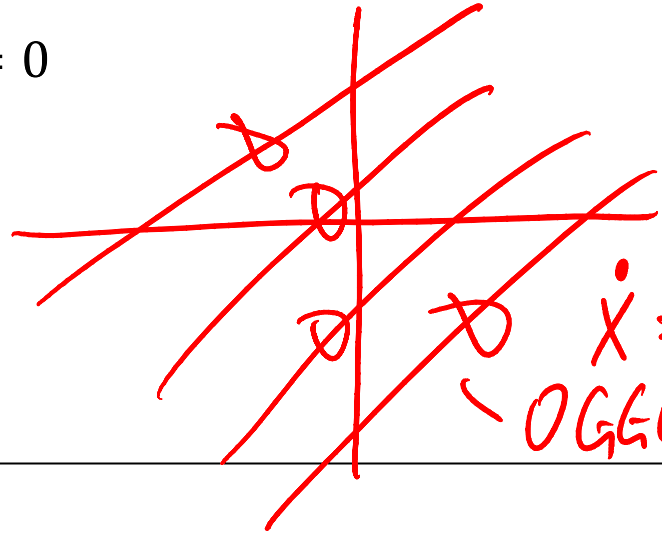


- (Eindeutige) Lösung x_s existiert bei *linearer* Systemdynamik, falls A invertierbar ist, also es gilt, dass



$$Rg(A) = n \text{ oder } \det(A) \neq 0$$



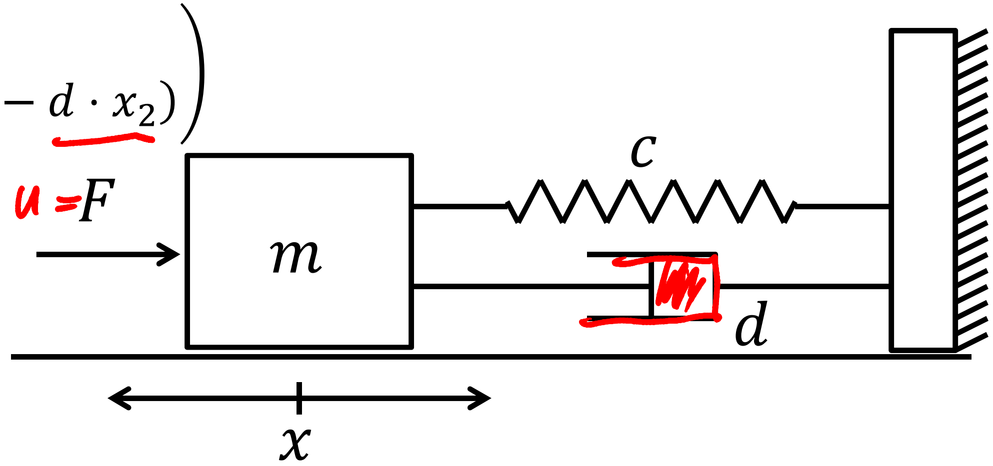


3.3.1 Gleichgewichtslösungen: Beispiel

- Berechnung der Gleichgewichtslage für linearen Schwinger
  - Masse m, Federkonstante c, Dämpfung d und zeitabhängige Größen Kraft $F(t)$, sowie Systemzustand $x(t)$
  - Es ergibt sich die DGL:

MOODLE TEST IN ZWEI FOLIEN

$$\dot{x}(t) = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(F - c \cdot x_1 - d \cdot x_2) \end{pmatrix}$$



3.3.1 Gleichgewichtslösungen: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

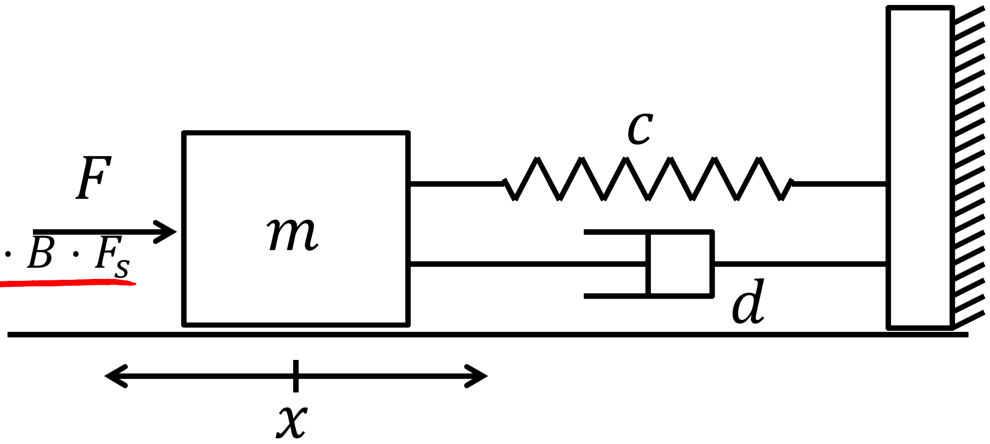
- Berechnung der Gleichgewichtslage für linearen Schwinger ($\dot{x}(t) = 0$)

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}}_{B} u(t) \qquad \text{mit } u(t) = F(t)$$

- Berechnung der Gleichgewichtslösung mit $\boxed{A \cdot x_s = -B \cdot F_s}$ $\Rightarrow x_s = -A^{-1} B F_s$
  - Matrix A muss regulär sein!

- Gleichgewichtslösung:

$$x_s = -A^{-1} \cdot B \cdot F_s$$



IAS

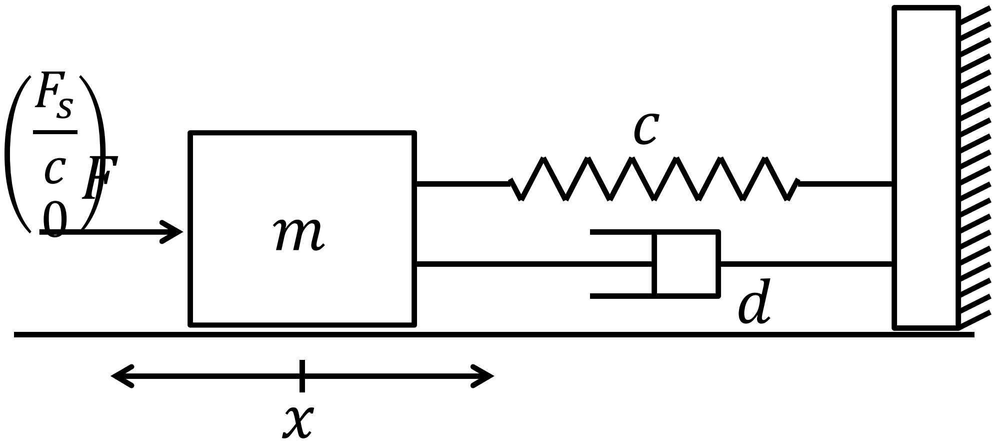
3.3.1 Gleichgewichtslösungen: Beispiel

- Berechnung der Gleichgewichtslage für linearen Schwinger

  $x_s = -A^{-1} \cdot B \cdot F_s$ wobei F_s konstant ist

$$x_s = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \cdot F_s = \ldots = \underline{\begin{pmatrix} \frac{F_s}{c} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_s}{c} \\ 0 \end{pmatrix}$$

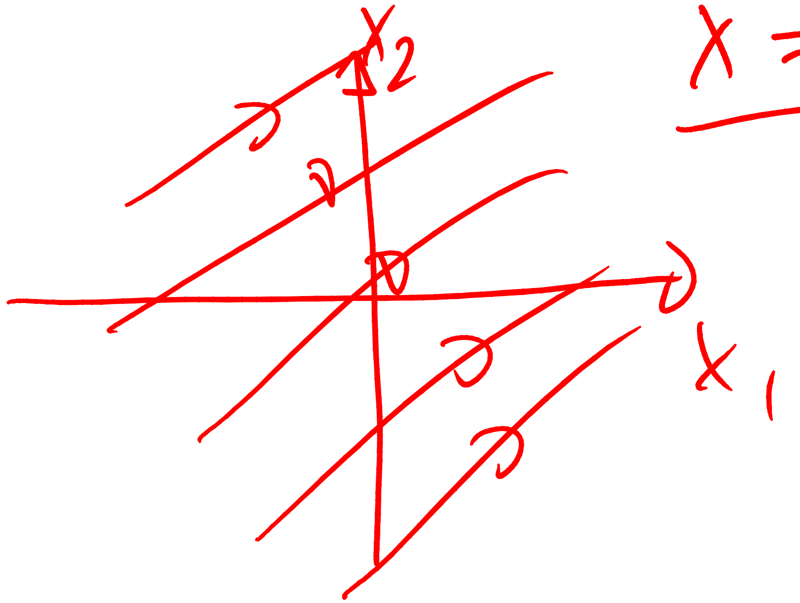


MOODLE FRAGE

$u = const$

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!

$x = u$



3.3.2 Jacobi-Matrix

$\dot{x} = f(x, u)$

$\dot{x} = Ax + Bu$

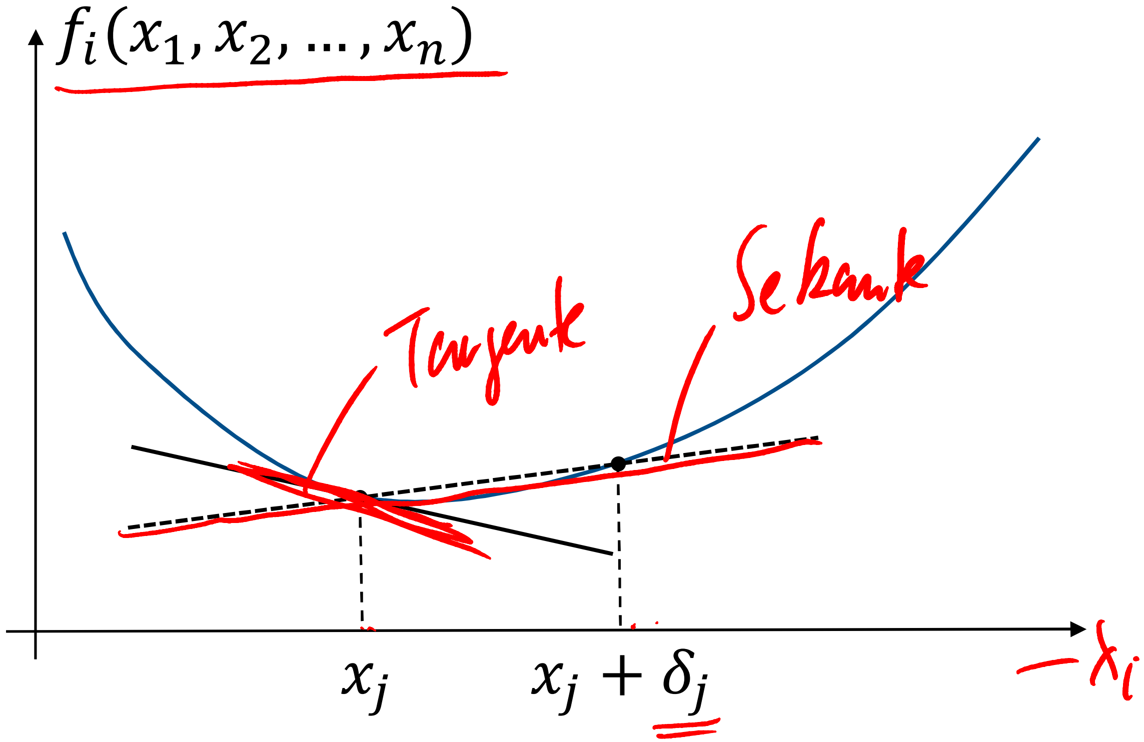
$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = J_f$

- Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ offen und $f: G \longrightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ partiell differenzierbar. Die $p \times d$-Matrix aller partiellen Ableitungen heißt Jacobi-Matrix von f

$$J_f(x_0) \coloneqq \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_d f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \cdots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$$

- Berechnung
  - Analytisch (exakt)
  - Numerisch (approximativ)

Veranschaulichung



- $$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{\delta_j \to 0} \frac{1}{\delta_j} \Big(\big(f_i(x_1, \ldots, x_j + \delta_j, \ldots, x_n) \big) - f_i\big(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n\big) \Big)$$

3.3.2 Jacobi-Matrix: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Berechnung der Jacobi Matrix für Schwingung einer Masse an einer Feder

$$\underline{\dot{x} := f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m} x_1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix } J_f} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{pmatrix}}_{=A}$$

3.3.2 Jacobi-Matrix: Numerisch

Black Box

$\to \boxed{} \to J_f = ?$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Approximation der j-ten Spalte der Jacobi-Matrix mittels Vorwärtsdifferenzenquotient

Einheitsvektor e_j

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \approx \frac{1}{\delta_j}\Big(f\big(x + e_j\delta_j\big) - f(x)\Big)$$

Veränderung

- j-ter Einheitsvektor e_j

aktuelle Zustand

- Schrittweite δ_j, z.B. $\delta_j = \varepsilon \cdot \left(1 + |x_j|\right)$
- Toleranz ε

3.3.2 Jacobi-Matrix: Numerisch

- Für $|x_j| \gg 1$ („sehr groß") ist δ eine relative Schrittweite
- Für $|x_j| \ll 1$ („sehr klein") ist δ eine absolute Schrittweite
- Mögliche Matlab Implementierung:

$\delta_i \approx \varepsilon |x_i|$

$\delta_i \approx \varepsilon = \text{const}$

$$\delta_0 = \mathrm{sqrt}(\varepsilon);\; n = \mathrm{length}(y);\, \mathrm{df} = \mathrm{zeros}(n);$$

$$\text{for } i = 1 : n$$

$$\delta = \max\Big(1, \mathrm{abs}\big(x(i)\big)\Big) * \delta_0;$$

$$\mathrm{df}(:, i) = \Big(f\big(x + h * (1{:}\,n == i)\big) - f(x)\Big)/h;$$

$$\text{end}$$

3.3.2 Jacobi-Matrix: Numerische Genauigkeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

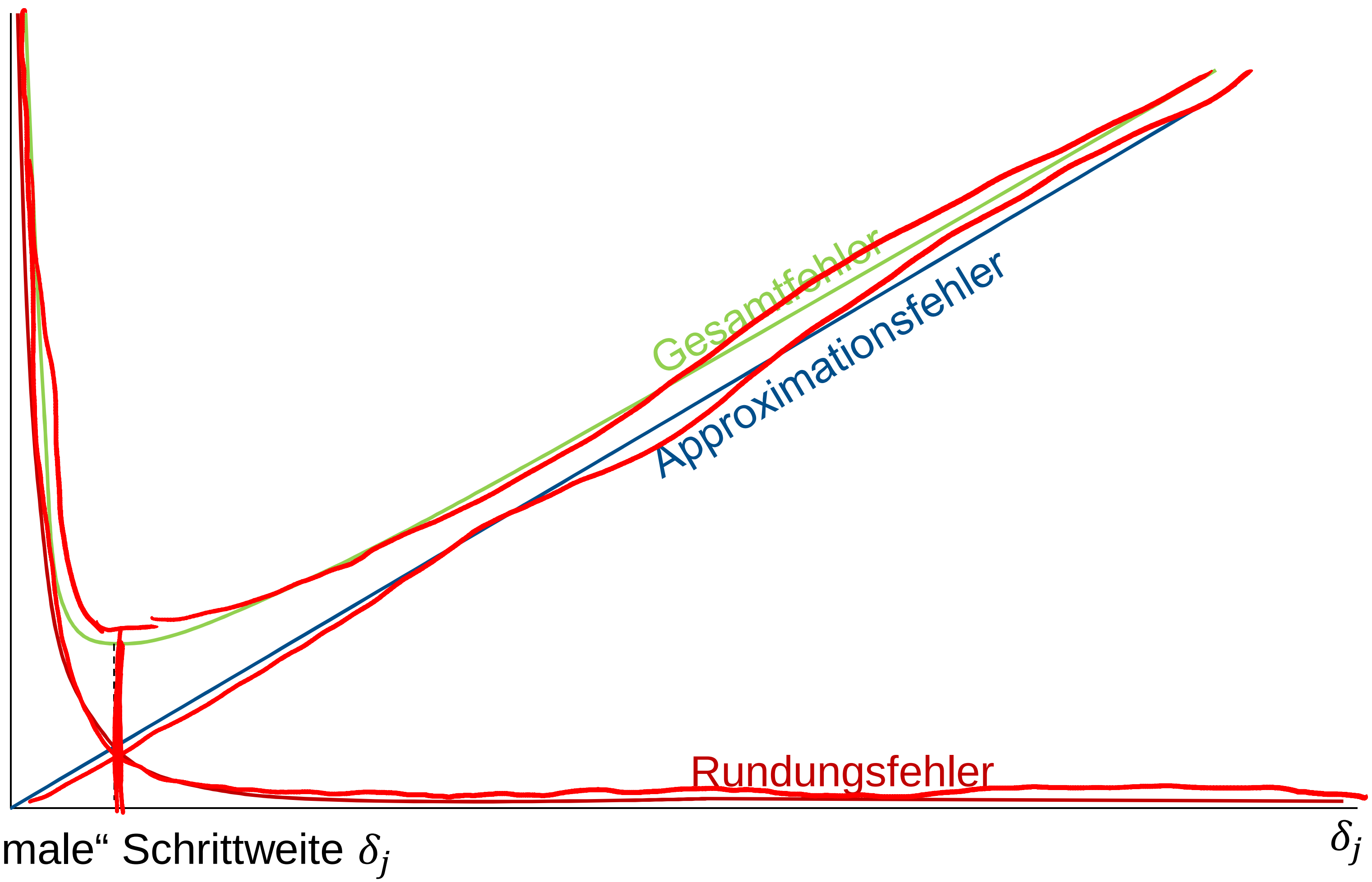
- Man betrachte $|\text{Sollwert} - \text{Approximation}|$

$$\left| \underline{\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}} - \underbrace{\frac{1}{\delta_j}\Big(f\big(x + e_j\delta_j\big) - f(x)\Big)} \right| \leq \left|\delta_j\right| \cdot \boxed{\left| \frac{\partial^2 f_i(\hat{x})}{\partial x_j^2} \right|}$$

- Vorwärtsdifferenzenapproximation liefert in der Regel maximal die Hälfte der gültigen Dezimalstellen von f

- Wird δ immer kleiner, nimmt der Einfluss von Rundungsfehlern zu

3.3.2 Jacobi-Matrix: Numerische Genauigkeit



„optimale“ Schrittweite δ_j

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

- Technische (und andere) dynamische Systeme sollen häufig in einem vorgegebenen, stationären Betriebszustand arbeiten
- Bei (möglichst) konstanten Eingangsgrößen u_s sollen (möglichst) konstante Ausgangsgrößen x_s erzeugt werden

- Beispiel
  - Ein Gleichstromantrieb hat eine bestimmte Drehzahl aufrechtzuerhalten
  - bei vorgegebener Eingangsspannung und Belastung

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

- In der Praxis gibt es selten lineare DGL-Systeme
- Prüfen auf Stabilität mit der Linearisierung um die Gleichgewichtslage
- Annahme: Zustand $x(t)$ „in der Nähe" der Gleichgewichtslage x_s

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

- Betrachtung der Abweichungen $\Delta x(t)$ der Zustandsvariablen $x(t)$ von den Gleichgewichtswerten x_s
  - Komponentenweise Darstellung: $\Delta x_i(t) := x_i(t) - x_{s_i}, \quad i = 1, \dots, n$
  - Durch Umformung der komponentenweisen Darstellung erhält man: $x_i(t) = x_{s_i} + \Delta x_i(t)$

    GGL

    $\dot{x}_{s_i} = 0$
  - Daraus ergibt sich insgesamt: $\boxed{\dot{x}(t) = \Delta\dot{x}(t)} = \frac{d(\Delta x)}{dt}$
- Analoge Betrachtung für System~~zustand~~ Eingang u

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

$\dot{x} = f(x, u)$

- Gesucht ist eine DGL für $\Delta x(t)$, also etwas von der Form:

$$\Delta \dot{x}(t) = \tilde{f}(\Delta x, \Delta u)$$

$\Delta x = x - x_s \,, \quad \Delta u = u - u_s$

- Wegen $\Delta \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i(t)$ und $\dot{x}_i(t) = f_i\big(x(t), u(t)\big)$, gilt dann auch:

$$\Delta \dot{x}_i(t) = f_i(\underbrace{x_s + \Delta x(t)}_{x}, \underbrace{u_s + \Delta u(t)}_{u})$$

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

- Mit Taylorentwicklung bis zum linearen Term $(p = \overset{\infty}{1})$ folgt:

$$T_{f_i,p}(x,u) = f_i(x_s,u_s) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{x_s,u_s} \Delta x_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\bigg|_{x_s,u_s} \Delta u_j \; + O(\varepsilon^2)$$

- Damit ergibt sich die DGL folgender Form:

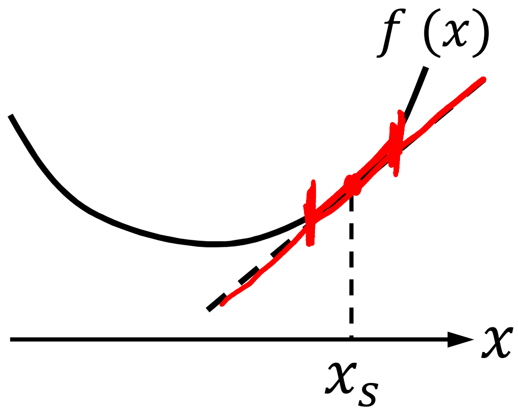
$$\Delta \dot{x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_s,u_s}}_{A} \cdot \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_s,u_s}}_{B} \cdot \Delta u$$

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

- Geometrische Interpretation: Approximation einer (Hyper-) Fläche durch ihre (Hyper-)Tangentialebene

- Beispiel $(n = 1)$

Linearisierung in x_s möglich:



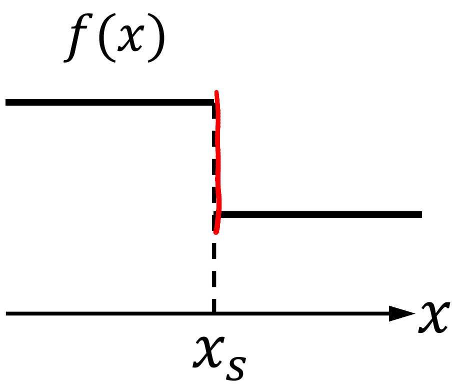
3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

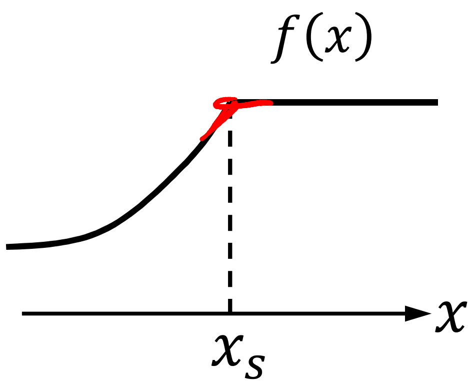
- Die beschriebene Linearisierung ist nicht immer möglich

- Beispiel $(n = 1)$

Linearisierung in x_s nicht möglich:



„Sprungstelle“



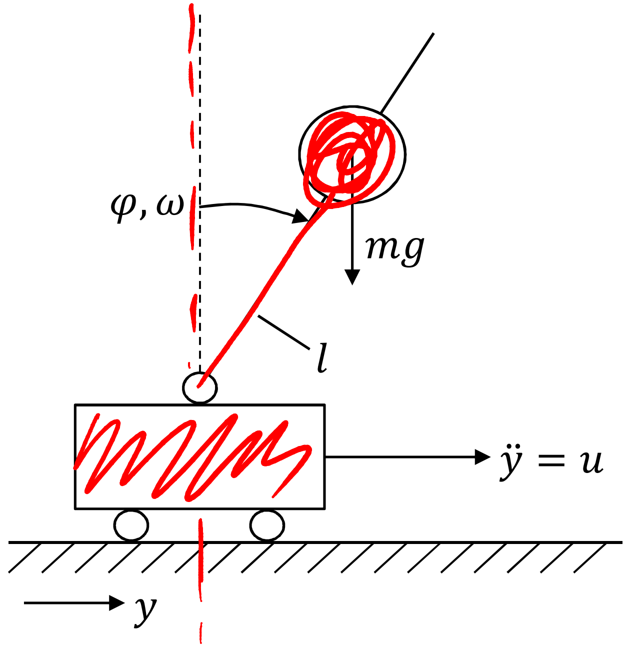
„Knickstelle“

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage: Beispiel

- Man betrachte das DGL-System des inversen Pendels:

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{l}\underbrace{\sin(\varphi)}_{\approx \Delta\varphi} - \frac{1}{l}\underbrace{\cos(\varphi)}_{1}\,\dot{u}$$



- Zuerst müsste man die allgemeine Form der Linearisierung für beliebige Punkte φ_0, ω_0, u_0 aufstellen (nächste Vorlesung)

3.3.3 Linearisierung um die Gleichgewichtslage: Beispiel

- Sei nun $\underline{\varphi_0 = 0}, \underline{\omega_0 = 0}$ und $\underline{u_0 = 0}$ (Gleichgewichtslage)

- Linearisierung des DGL Systems um die Gleichgewichtslage erfolgt damit durch:

$$\underline{\Delta\dot{\varphi}} = \underline{\Delta\omega}$$

$$\boxed{\Delta\dot{\omega} = \frac{g}{l}\Delta\varphi - \frac{1}{l}\Delta u}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix}}_{B} \Delta u$$

3.3.4 Lösen einer linearisierten DGL

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Formen von linearisierten DGL
  - skalare Differentialgleichung $\Delta\dot{x} = a \cdot \Delta x$
    (Spezialfall der Vektordifferentialgleichung mit $n = 1$)
  - Vektordifferentialgleichung $\Delta\dot{x} = A \cdot \Delta x$
  - Lösung mittels Exponentialansatz
    $$\Delta x(t) = c \cdot e^{(\lambda t)}, \qquad \Delta x, c \in \mathbb{C}^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Delta\dot{x} = c e^{\lambda t} \lambda$$
$$= A c e^{\lambda t}$$

3.3.4 Lösen einer linearisierten DGL

- Einsetzen des Exponentialansatz in die Vektordifferentialgleichung ergibt:

$$\left(c \cdot e^{(\lambda t)}\right)' = A \cdot c \cdot e^{(\lambda t)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot c \cdot e^{(\lambda t)} = A \cdot c \cdot e^{(\lambda t)}$$

$$\Leftrightarrow (I \cdot \lambda - A) \cdot c = 0$$

$e^{\lambda t} > 0$

- Aus diesem Eigenwertproblem folgt die Lösung:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e^{(\lambda_i t)}$$

3.3.4 Lösen einer linearisierten DGL: Probleme

- Lineare Differentialgleichung nicht lösbar, wenn die Systemmatrix A nicht diagonalisierbar ist

  - Nicht genug linear-unabhängige Eigenvektoren vorhanden, die den Lösungsraum aufspannen

  - Lösung mithilfe von algebraischen Mitteln (Jordansche Normalform)

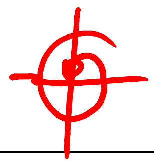
3.3.4 Lösen einer linearisierten DGL

- Einfache reelle Eigenewerte
  - $x(t) = \sum_i c_i \cdot e^{\lambda_i t}$

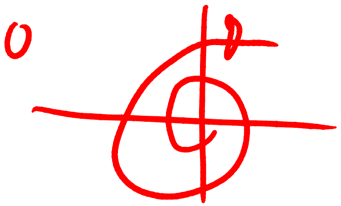
- Doppelte reelle Eigenwerte
  - $x(t) = \sum_i c_i \cdot t^{(i-1)} \cdot e^{\lambda_i t}$

- Komplexe Eigenwerte
  - $x(t) = \sum_i e^{Re\{\lambda_i\} t} \cdot (c_i \cdot (\cos(Im\{\lambda_i\} t) + i \cdot \sin(Im\{\lambda_i\} t)))$

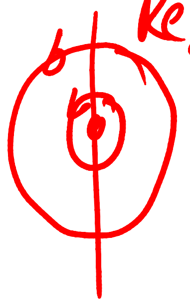
$Re\,\lambda_i < 0$



$Re\,\lambda_i > 0$



$Re\,\lambda_i = 0$



3.3.4 Lösen einer linearisierten DGL: Beispiel

- Allgemeine Lösung: Schwingung einer Masse an einer Feder
- Sei dafür $\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_1 \end{pmatrix}$, man berechne demnach:

$$\lambda \cdot I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/m & 0 \end{pmatrix}}^{A} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ c/m & \lambda \end{pmatrix}$$

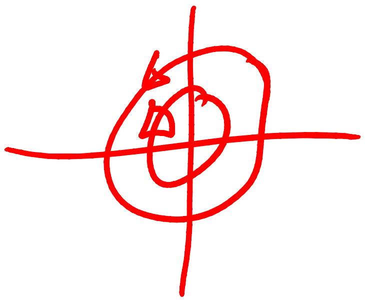
$\lambda^2 - (-1)\left(\frac{c}{m}\right)$

$$\Rightarrow \det(\lambda \cdot I - A) = \lambda^2 + c/m = 0$$

Re

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{c/m}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$



3.4 Stabilität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenwerte λ_i mit $i = 1, \ldots, n$ bestimmen die Stabilität eines Systems

    - Reelle, konjugiert komplexe, einfache oder mehrfache Eigenwerte (EW) sind möglich

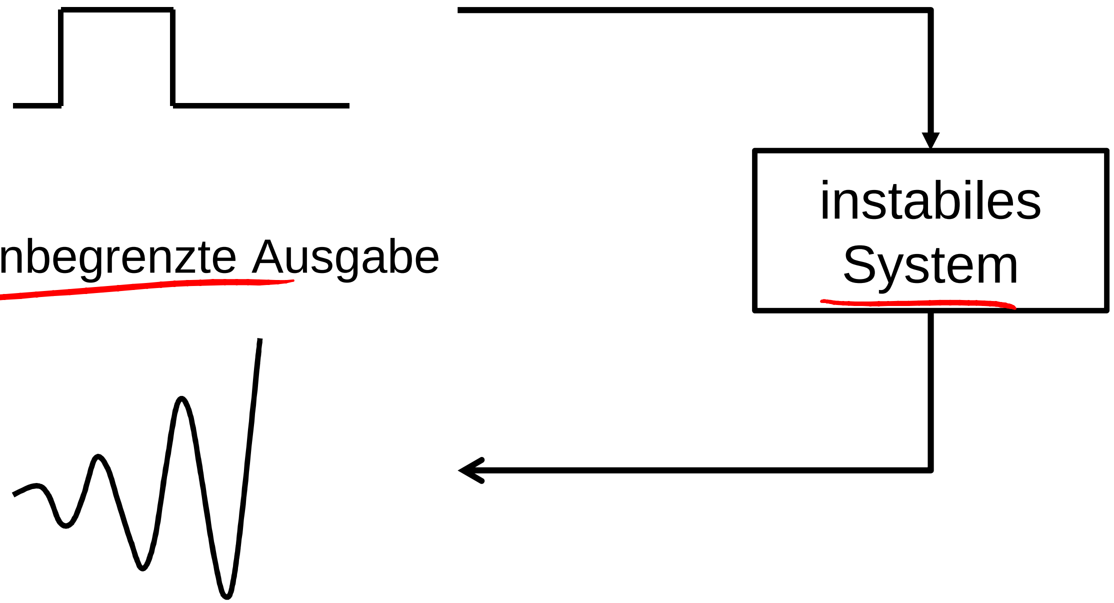
    - Vorzeichen des reellen Teils $Re(\lambda_i)$ der EW ist für die Stabilität entscheidend

    - Bestimmung der Eigenwerte z.B. mittels Charakteristischer Gleichung (Charakteristisches Polynom)

$$\rightarrow \det(\lambda I - A) = 0$$

3.4 Stabilität

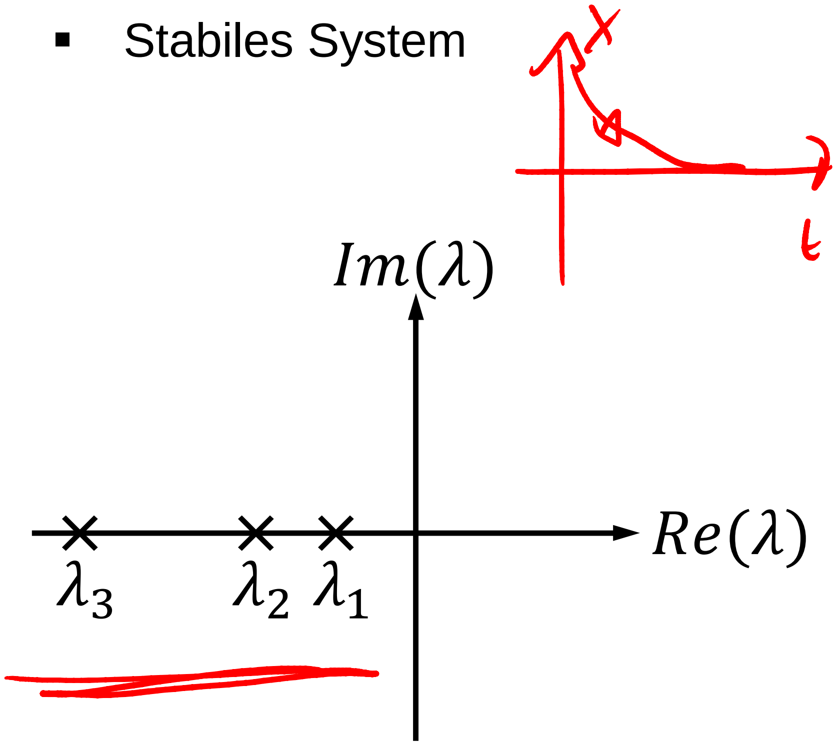
- Gefahr bei instabilen Systemen
  - Begrenzte Eingabe
  - Theoretisch unbegrenzte Ausgabe



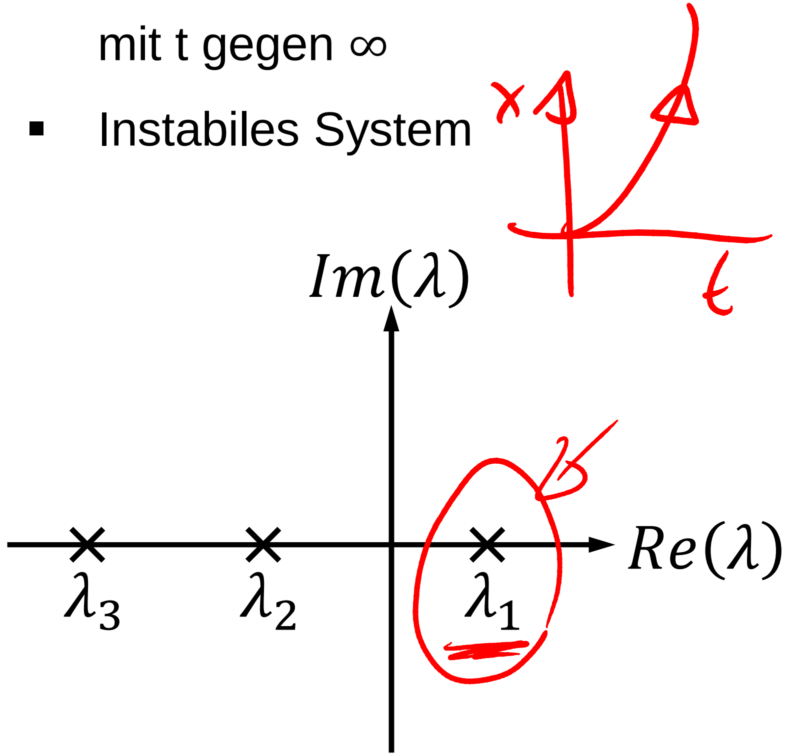
MOODLE TEST IN ZWEI FOLIEN

3.4 Stabilität

- Reelle, negative Eigenwerte
  - Aperiodische Dämpfung
  - Stabiles System

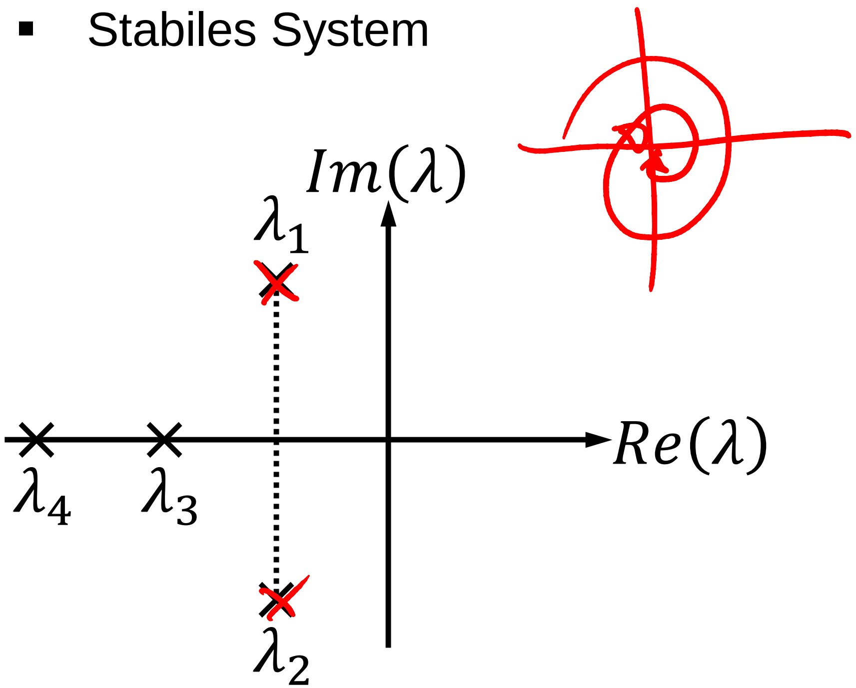


- Mindestens ein reell, positiver EW
  - Zugehörige Eigenbewegung wächst mit t gegen ∞
  - Instabiles System

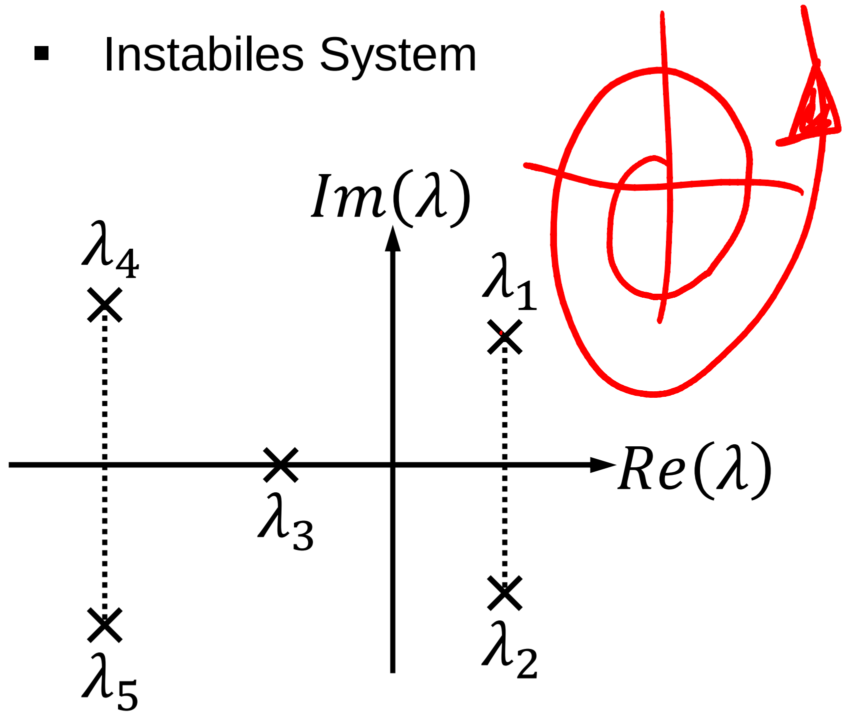


3.4 Stabilität

- Konjugiert komplexe Eigenwerte mit $Re(\lambda_{1,2}) < 0$
  - Gedämpfte Oszillation
  - Stabiles System



- Konjugiert komplexe Eigenwerte mit $Re(\lambda_{1,2}) > 0$
  - Ungedämpfte Oszillation
  - Instabiles System



MOODLE FRAGE

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!