Pumping Lemma

Sei A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$ eine reguläre Sprache. Dann lassen sich alle Wörter $x \in L$ ab einer gewissen Länge $|x| \geq p$ (der Pumping-Länge) darstellen als

$x = uvw$ mit u, v, $w \in A^*$

wobei

$|v| > 0$ und

$|uv| \leq p$,

so dass gilt

$uv^kw \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Alle Wörter x ab einer gewissen Länge p (der Pumping-Länge) enthalten also ein Teilwort v, mit dem sich das Wort x "aufpumpen" lässt – daher die Bezeichnung Pumping Lemma.

How To:

Beispiel: $L = \{ a^m b^k c^{2m} \mid m, k \in \mathbb{N}_0 \}$ (c soll doppelt so oft wie a sein → zählen geht hier nicht → **nicht** reguläre Sprache)

1) Wort nur mit n-Potenzen suchen, dass in L enthalten ist, z.B.: $x = a^n b^1 c^{2n}$
2) Zerlegung in *u,v,w* (x = u v w) überlegen.
    - |u v| < n+1 (u+v max. Länge n)
    - |v| > 0 (v muss min. ein Zeichen enthalten)
    - u oder w dürfen auch leer sein

    hier z.B. würde u = leer, $v = a^n$, $w = b^1 c^{2n}$ alle Bedingungen erfüllen.
3) Potenz für v finden, sodass u v^i w nicht mehr in L enthalten ist.

Formal:

Für alle $n \in \mathbb{N}$

Wähle $x = a^n b^1 c^{2n} \in L$ mit $|x| \geq n$

Für alle $u, v, w \in X^*$ mit x = u v w und $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gilt

Wähle i=2: $uv^2w = a^{2n} b^1 c^{2n} \notin L$

$\Rightarrow$ **L nicht regulär!!**

Beispiele zum *Pumping-Lemma* :

1) Man definiere eine nicht reguläre Sprache $L = \{O^p \mid p \text{ ist eine Primezahl}\}$.
Annahme : L ist regulär. $\Rightarrow$ Dann muss L das *Pumping-Lemma* erfüllen.
Daraus folgt diese Beweisführung:

Man wähle ein n nach dem *Satz W* und es sei r eine Primezahl mit $r > n$.
Des weiteren sei $z = O^r \in L$.
$\Rightarrow$ Dann existiert eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $u = O^s$, $v = O^t$ mit $s, t \neq 0$.
Für O^r gilt auch $O^{r+i \cdot t} \in L$ für alle $i \geq 0$.
$\Rightarrow$ Folglich sind alle Zahlen $r + i \cdot t$ Primezahlen. Nach spätestens t Zahlen kommt also immer eine Primezahl. Nun setze man $i = r$, dann ist $r + r \cdot t$ eine Primezahl.

$\Rightarrow$ $r \cdot (1+t)$ ist eine Primezahl, andererseits sind r und $1 + t$ Faktoren von $r \cdot (1+t)$. ↯
$\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

2) Es sei die Sprache $L = \{O^m \mid m \text{ ist Quadratzahl}\}$ nicht regulär.
Man gehe auch hier von der Annahme aus, dass L regulär ist.
Die Beweisführung lautet dann folgendermaßen:

Unter der Bedingung, dass L regulär ist, muss es ein $n \in IN$ existieren, so dass sich jedes Wort zu der Form O^m mit $m \geq n$ und m Quadratzahl , sich in die Form $z = uvw$ zerlegen lässt, mit den entsprechenden Eigenschaften:
$v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq n$, $uv^i w \in L$ mit $i \geq 0$.

Nun wähle man speziell: $z = 0^{n^2}$
und betrachte zugleich die Zerlegung $z = uvw$.
Daraus folgt wegen der Bedingung des *Pumping-Lemma* : $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$.

Ferner ist für $i = 2$: $uv^2 w \in L$, anderseits soll gelten: $n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2 w| \leq n^2 + n < n^2 + n + 1 = (n+1)^2$

$\Rightarrow \underbrace{(uv^2 w)}_{\notin L} < (n+1)^2$ ↯ $\Rightarrow L$ ist nicht regulär !

<u>Beispiel 1:</u>

$L_1=\{a^m b^m$ mit $m \geq 1\}$ mit $\Sigma=\{a,b\}$

Annahme: L_1 ist regulär $\Rightarrow$ Anwendung des Pumping Lemma

Sei n die Zahl aus dem Pumping Lemma (beliebig aber fest)
Wähle $w = a^n b^n \in L$
Zerlege $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$
Betrachte $xy^0z = a^{n-|y|}b^n$ $(n-|y| < n$, da $y \geq 1)$
$\Rightarrow xy^0z \notin L_2$

$\Rightarrow L_2$ erfüllt das Pumping Lemma nicht
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow L_2$ ist nicht regulär

(Hinweis: Eine Fallunterscheidung ist nicht nötig, da es für jedes $n \in N_0$ ein Wort $a^m b^m \in L$ mit $m>n$ gibt, für das die oben genannte Argumentation gilt. Und nach PL müsste sich jedes Wort w mit $|w|>n$ „aufpumpen lassen".)

Beispiel 2:

$L_2=\{vcv^R \mid v \in \{a,b\}^*, v^R$ Spiegelwort zu $v\}$ mit $\Sigma=\{a,b,c\}$

Annahme: L_1 ist regulär $\Rightarrow$ Anwendung des Pumping Lemma

Sei n die Zahl aus dem Pumping Lemma (beliebig aber fest)
Wähle $w = vcv^R \in L$ mit $|v|=n=|v^R|$
Zerlege $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ $\quad (\Rightarrow |\omega| = 2n+1)$
$\Rightarrow\ w = xyz_1cz_2$ mit $xyz_1 = v$ und $z_2 = v^R$
Betrachte $xy^0z = xz_1cz_2 \quad \Rightarrow |xy^0z_1| = n-|y| < n \qquad$ (da $y \geq 1$)
$\Rightarrow xy^0z$ ist kein Palindrom, da $|v| \neq |v^R|$
$\Rightarrow xy^0z \notin L_2$

$\Rightarrow L_2$ erfüllt das Pumping Lemma nicht
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow L_2$ ist nicht regulär

Beispiel 3:

$L_3=\{0^p$ mit p ist Primzahl$\}$

Annahme: L_3 ist regulär $\Rightarrow$ Anwendung des Pumping Lemma

Sei n die Zahl aus dem Pumping Lemma (beliebig aber fest)
Wähle $w = 0^p$ mit $p \geq n+2$ (es gibt unendlich viele Primzahlen)
Zerlege $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$
(es gilt also $|xz| \geq 2$, da $|xyz| \geq n+2$ und $|xy| \leq n$)
Betrachte $xy^{|xz|}z$
$|xy^{|xz|}z| = |xz| + |xz|*|y| = |xz|*(1+|y|)$
Und das ist keine Primzahl, da 2 Faktoren ≥ 2
$\Rightarrow xy^{|xy|}z \notin L_3$

$\Rightarrow L_3$ erfüllt das Pumping Lemma nicht
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow L_3$ ist nicht regulär