Formale Grundlagen der Informatik I
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
28. Mai 2014

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Konstruktion von Turingmaschinen)

Beschreiben Sie formal (d.h. unter Angabe der Komponenten Σ, Q, δ) eine deterministische Turingmaschine für die folgende Funktion: Bei Eingabe der Binärdarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ soll die Zahl $2 \cdot n$ (wieder in Binärdarstellung) ausgegeben werden.

Tipp: Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass Sie die Zahl n in der Form $b_0 b_1 \dots b_k$ (von links nach rechts geschrieben) auf dem Band vorliegen haben, wobei $n = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot 2^i$, $b_i \in \{0, 1\}$.

Lösung: Idee: Schreibe an aktueller Position eine 0, verschiebe den Kopf einen Schritt links und gehe in den akzeptierenden Zustand über.

δ	$\square$	0	1
q_0	$(0, <, q^+)$		

Aufgabe G17 (Simulation von Turingmaschinen)

Beschreiben Sie informell wie eine deterministische Turingmaschine $\mathcal{M}_0$ für jeden der nachfolgenden Punkte konstruiert werden kann. Geben Sie die dazu benötigten Zustände von $\mathcal{M}_0$ an und beschreiben Sie deren Funktion.

(a) Gegeben eine feste Zeichenkette $c = c_1 \dots c_k \in \Sigma^*$. Die Maschine $\mathcal{M}_0$ lösche die Eingabe, schreibe c auf das Eingabeband, fahre zurück an die Startposition und halte.

(b) Gegeben eine feste Turingmaschine $\mathcal{M}$ und eine feste Zeichenkette $c \in \Sigma^*$. Die Maschine $\mathcal{M}_0$ lösche ihre Eingabe und rechne anschliessend weiter wie die Maschine $\mathcal{M}$ bei Eingabe der Konstanten c.

(c) Gegeben eine feste Turingmaschine $\mathcal{M}$. Die Maschine $\mathcal{M}_0$ simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe $\langle \mathcal{M} \rangle$ so dass

$$
\begin{aligned}
w \xrightarrow{\mathcal{M}_0} \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} q^+, \\
w \xrightarrow{\mathcal{M}_0} q^- \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} q^-
\end{aligned}
$$

für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ der Maschine $\mathcal{M}_0$. Sie dürfen hier verwenden, dass für alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ solch eine Kodierung $\langle \mathcal{M} \rangle$ existiert[1].

Bemerkung: In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die Eingaben zu Σ^* gehören (d.h. wir erlauben $\square$ nicht als Eingabe).

[1] siehe auch: Gödelnummer (http://de.wikipedia.org/wiki/Gödelnummer)

Lösung:

(a) Wir benötigen die Zustände $q_0, q^+, q_{c_1}, \ldots, q_{c_k}, q^{c\rightarrow}, q^{\leftarrow}$ mit folgender Bedeutung:

q_0 Startzustand

q^+ Akzeptierender Endzustand

q_{c_i} Zustand, in dem der aktuelle Zelleninhalt mit c_i überschrieben und zum Zustand $q_{c_{i+1}}$ übergegangen wird, falls $i < k$, sonst wird zu $q^{c\rightarrow}$ übergegangen.

$q^{c\rightarrow}$ Lösche den Rest des Eingabewortes vom Band indem so lange nach rechts gefahren und $\square$ geschrieben wird, bis das erste $\square$ erreicht ist. Gehe dann in den Zustand $q^{\leftarrow}$ über.

$q^{\leftarrow}$ Fahre zur Anfangsposition des Bandes (d.h. in die durch die Konfiguration $C_{\text{start}} := (\square, q^{\leftarrow}, \square, c)$ beschriebene Position) und gehe in den Zustand q^+ über.

(b) Sei $\mathscr{M} = (\Sigma, Q, q'_0, \delta', q'^+, q'^-)$. Wir verwenden die (disjunkte) Vereinigung von Q mit den Zuständen aus (a). Die Zustände aus (a) sind nun mit folgender geänderter Bedeutung belegt:

$q^{\leftarrow}$ Fahre zur Anfangsposition des Bandes und (im Unterschied zur Maschine in (a)) gehe in den Startzustand q'_0 der Maschine $\mathscr{M}$ über.

q'_0 Da der Lesekopf der Maschine $\mathscr{M}_0$ auf der Startposition, sowie c auf dem Band steht, verfahre $\mathscr{M}_0$ nun wie $\mathscr{M}$, indem es die Übergangsfunktion von $\mathscr{M}$ ausführt.

q'^+ Gehe in den Zustand q^+ über.

q'^- Gehe in den Zustand q^- über.

(c) Wie in (b) mit $c = \langle \mathscr{M} \rangle$, allerdings mit dem zusätzlichen Zustand q^∞, so dass q'^+ in den Zustand q^∞ übergehe. Im Zustand q^∞ gelte $\delta_{\mathscr{M}_0}(q^\infty, z) = (z, \circ, q^\infty)$ für alle $z \in (\Sigma_{\mathscr{M}_0} \cup \{\square\})$.

Aufgabe G18 (Entscheidbarkeit)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Sprache $L_k := \{ \langle \mathscr{M}, w \rangle \mid \mathscr{M} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht innerhalb von } k \text{ Schritten} \}$ für eine Konstante $k \in \mathbb{N}$ ist entscheidbar.

(b) Die Sprache $L_A := \{ \langle \mathscr{M} \rangle \mid \forall w \in \Sigma^* \; \mathscr{M} \text{ hält bei Eingabe } w \}$ ist entscheidbar.

Lösung:

(a) Das Problem ist für jedes feste k entscheidbar. Konstruiere dazu eine Turingmaschine $\mathscr{M}'$ wie folgt: Bei Eingabe $\langle \mathscr{M}, w \rangle$, simuliere die Maschine $\mathscr{M}$ auf dem Eingabewort w für genau k Schritte. Akzeptiert $\mathscr{M}$ innerhalb dieser Simulationszeit, so verwerfe $\mathscr{M}'$. Akzeptiert $\mathscr{M}$ jedoch nicht innerhalb von k Schritten das Wort w, so akzeptiere $\mathscr{M}'$.

(b) Die Sprache L_A ist *nicht entscheidbar*, was wir durch die Reduktion auf das (semi-entscheidbare, aber *nicht entscheidbare*) Halteproblem beweisen.
Angenommen, die Sprache L_A ist entscheidbar. Dann lässt sich aus einer Maschine $\mathscr{M}_A$ wie folgt eine Turingmaschine $\mathscr{M}_H$ konstruieren, die das Halteproblem entscheidet (das entspricht Beispiel 4.3.6 im Skript):

- Die Eingabe sei die Kodierung einer Turingmaschine $\mathscr{M}$: $x = \langle \mathscr{M} \rangle$.
- Berechne die Kodierung $\langle \mathscr{M}' \rangle$ eine Maschine $\mathscr{M}'$, die
  – ihre Eingabe vom Band löscht,
  – dafür das Wort $\langle \mathscr{M} \rangle$ auf das Band schreibt
  – und anschließend die Berechnung gemäß der Übergangsfunktion von $\mathscr{M}$ fortsetzt.
- Simuliere nun die Maschine $\mathscr{M}_A$ auf der Eingabe $\langle \mathscr{M}' \rangle$. Akzeptiere genau dann, wenn die Simulation akzeptiert; verwerfe genau dann, wenn die Simulation verwirft.

Die Maschine $\mathscr{M}'$ dient dazu, die Eingabe $\langle \mathscr{M} \rangle$ in eine Instanz des Halteproblems umzubauen.

Hausübung

Diese Hausübung ist **online in Moodle** (https://moodle.tu-darmstadt.de/) **bis 20:00 am 6. Juni 2014** abzugeben. Um das zu tun, klicken Sie auf *Be6* im Abschitt *Übungen FGdI1* auf der Moodle-Seite der Veranstaltung.

Aufgabe H16 (Entscheidbarkeit) (12 Punkte)

Definiere die Sprache $L := \{ \langle \mathscr{M} \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* \text{ sodass } \mathscr{M} \text{ bei Eingabe } w \text{ hält} \}$. Ist L entscheidbar? Ist L semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antworte.

Lösung: L ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Mögliche Eingaben für Turingmaschinen (d.h. Wörter) sind algorithmisch aufzählbar. Wir konstruieren die Turingmaschine $\mathscr{M}'$, die L erkennt, wie folgt: $\mathscr{M}'$ akzeptiert als Eingabe den Code für eine Turingmaschine $\mathscr{M}$. Simuliere $\mathscr{M}$ auf der ersten Eingabe für einen Schritt; dann auf den ersten zwei Eingaben für zwei Schritte und so weiter. Sobald die simulierte $\mathscr{M}$ im akzeptierenden Zustand stoppt, terminiert $\mathscr{M}'$ im akzeptierenden Zustand (wenn $\mathscr{M}$ im verwerfenden Zustand stoppt, gehe einfach mit $\mathscr{M}'$ zur Simulation von $\mathscr{M}$ auf der nächsten Eingabe). Also stoppt $\mathscr{M}'$ auf der Eingabe $\langle \mathscr{M} \rangle$ (im akzeptierenden Zustand) genau dann, wenn $\mathscr{M}$ auf irgendeiner Eingabe im akzeptierenden Zustand stoppt. Das zeigt, dass L semi-entscheidbar ist. $\boxed{\text{6 P.}}$

Nehmen wir jetzt an, dass L entscheidbar wäre, d.h. es gäbe eine Turingmaschine $\mathscr{M}''$, die immer stoppt und L erkennt. Konstruiere eine neue Turingmaschine wie folgt: $\mathscr{H}$ nimmt den Code für eine Turingmaschine $\mathscr{M}$ und simuliert $\mathscr{M}''$ auf dem Code für die Turingmaschine, die ihre Eingabe löscht, den Code für $\mathscr{M}$ auf das Band schreibt und $\mathscr{M}$ simuliert (vergleiche mit **Aufgabe G17**). Dann löst $\mathscr{H}$ das Halteproblem. Widerspruch. $\boxed{\text{6 P.}}$

Aufgabe H17 (Simulation von Turingmaschinen) (24 Punkte)

Implementieren Sie die folgenden Turingmaschinen über dem Alphabet $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ mithilfe des Turingmaschinensimulators

http://db.ing.puc.cl/turingmachine/

(a) Die Turingmaschine aus **Aufgabe G16**.

(b) Die Turingmaschine, die bei Eingabe der Binärdarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n+1$ (wieder in Binärdarstellung) ausgibt. Sie können annehmen, dass alle Binärzahlen umgekehrt (wie in **Aufgabe G16**) angegeben sind.

(c) Die Turingmaschine, die Ihre Matrikelnummer in Binärform auf das Band schreibt. Sie können annehmen, dass das Band am Anfang leer ist.

(d) Die Turingmaschine, die Implikation im folgenden Sinne berechnet:
   - Die Maschine stoppt genau dann, wenn es genau zwei Zeichen in der Eingabe gibt. Wenn das der Fall ist:
   - Die Maschine löscht die zwei Zeichen, schreibt stattdessen den Wahrheitswert der Implikation auf das Band und terminiert mit dem Kopf auf diesem Ergebnis, und zwar im akzeptierenden Zustand, wenn das Ergenis 1 ist, und im verwerfenden Zustand, wenn das Ergebnis `0` ist.

   Hier ist zu verstehen, dass 1 Wahrheit und `0` Falschheit darstellt. Das heißt, die Eingabe `10` führt zum Ergebnis `0` und die anderen zweistelligen Eingaben zu 1.

Bemerkung: **In diesem Simulator startet der Lesekopf auf dem ersten Zeichen der Eingabe**, statt links vor der Eingabe, wie in den Folien und im Skript! Passen Sie Ihre Lösung entsprechend an.

Lösung:

Teilaufgabe (a)	Teilaufgabe (b)	Teilaufgabe (c)	Teilaufgabe (d)
q0,_ q+,0,-	q0,_ q+,1,-	Die naive Lösung ist klar. ☺	q0,_ qEndlosschleife,_,>
q0,0 q1,0,<	q0,0 q+,1,-		q0,0 qf,_,>
q0,1 q1,1,<	q0,1 q0,0,>		q0,1 qw,_,>
q1,_ q+,0,-			qf,_ qEndlosschleife,_,>
			qf,0 qff,_,>
			qf,1 qfw,_,>
			qw,_ qEndlosschleife,_,>
			qw,0 qwf,_,>
			qw,1 qww,_,>
			qff,_ q+,1,-
			qff,0 qEndlosschleife,_,>
			qff,1 qEndlosschleife,_,>
			qfw,_ q+,1,-
			qfw,0 qEndlosschleife,_,>
			qfw,1 qEndlosschleife,_,>
			qwf,_ q-,0,-
			qwf,0 qEndlosschleife,_,>
			qwf,1 qEndlosschleife,_,>
			qww,_ q+,1,-
			qww,0 qEndlosschleife,_,>
			qww,1 qEndlosschleife,_,>
			qEndlosschleife,_ qEndlosschleife,_,>
			qEndlosschleife,0 qEndlosschleife,_,>
			qEndlosschleife,1 qEndlosschleife,_,>

Bepunktung: je Teilaufgabe $\boxed{6\text{ P.}}$.