Prof. Dr. Oskar von Stryk
FG Simulation, Systemoptimierung und Robotik
FB Informatik, Technische Universität Darmstadt

Blatt 14 - Probeklausur

Prüfungsfach: Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Beginn (Uhrzeit): ....

Dauer: 60 Minuten

Hörsaal: C205

Datum: 01.02.2010

Bemerkungen: ....

....

Note:		
Aufgabe (Punkte)	Punkte	
	Korrektur	Unterschrift
1 (16)		
2 (6)		
3 (4)		
4 (5)		
5 (11)		
6 (11)		
7 (5)		
8 (8)		
Summe (66)		

....
Unterschrift

Ich beantrage, dass nach Fertigstellung der Korrektur mein Klausurergebnis im **Webreg**-System veröffentlicht wird. Dabei kann nur ich nach Authentifizierung nur meine eigene Note einsehen.

Gilt nicht für die Probeklausur!

Die insgesamt zu vergebende Punktezahl beträgt **66** Punkte.
Zum Bestehen (Note 4.0) reichen **26** Punkte aus.
Zum Erreichen der Note 1.0 sind maximal **53** Punkte notwendig.

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 60 Minuten.
- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus. Tragen Sie auf allen Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Dieses Aufgabenheft umfaßt **10** nummerierte Seiten mit Aufgaben. Trennen Sie die Prüfungsbögen nicht auf.
- Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Papier.
- Lesen Sie die Fragen vor der Beantwortung sorgfältig und in Ruhe durch und beantworten Sie sie genau. Bearbeiten Sie die Aufgaben in für Sie günstiger Reihenfolge.
- Kommentieren Sie alle Ihre Ergebnisse bzw. Rechenschritte **kurz** und **stichwortartig**.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind ein beidseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4, eine mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und bei Bedarf ein Wörterbuch für Deutsch als Fremdsprache erlaubt.
- Schreiben Sie nur mit Kugelschreiber (blau oder schwarz) und nicht mit rotem oder grünem Stift oder Bleistift.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon, PDA, o.ä. aus!
- Geben Sie beim Verlassen des Hörsaals alle Prüfungsunterlagen bei der Aufsicht ab.

Viel Erfolg!

---

1. *Allgemeine Fragen* (16 Punkte)

Hinweis: Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Punkt Abzug. Nicht beantwortete Fragen geben weder Punkte noch führen sie zu Punktabzug. Falls Sie in dieser Aufgabe weniger positive Punkte als negative Punkte sammeln, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet, es werden also keine negativen Punkte als Gesamtbewertung dieser Aufgabe vergeben.

☐richtig ☒falsch Sowohl die Systemparameter als auch der Systemzustand eines Systemmodells ändern sich während eines Simulationslaufs.

☐richtig ☒falsch Die Genauigkeit einer Simulation in unabhängig von den Eingabedaten.

☒richtig ☐falsch Negativ exponentielle Verteilungsfunktionen sind die einzigen stetigen Verteilungsfunktionen, die gedächtnislos sind.

☐richtig ☒falsch Zu jeder Inzidenzmatrix $W = W^+ - W^-$ läßt sich genau ein dazugehöriges Petrinetz angeben.

☒richtig ☐falsch Kanten eines Petrinetzes verlaufen nur zwischen Plätzen und Transitionen.

☐richtig ☒falsch Der Vorwärtsdifferenzenquotient zur Näherung der ersten Ableitung einer Funktion einer unabhängigen Variablen lautet: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und bei Auswertung auf heutigen Computern gilt: Je kleiner h ist, desto genauer ist die Näherung.

☐richtig ☒falsch Das Integrationsverfahren nach Heun löst Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten auch ohne explizite Schaltfunktion.

☐richtig ☒falsch Jedes nicht autonome Differentialgleichungssystem kann auf ein autonomes Differentialgleichungssystem ohne Änderung der Problemdimension transformiert werden.

☒richtig ☐falsch Die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \sin(x(t))$ ist autonom.

☐richtig ☒falsch Die Gleichgewichtspunkte eines dynamischen Systems hängen von den Anfangswerten ab.

☐richtig ☒falsch Das explizite Euler-Verfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung löst mit geringem Rechenaufwand steife Differentialgleichungen.

☒richtig ☐falsch In Scilab lassen sich Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten nur mit spezieller Schaltfunktion numerisch korrekt lösen.

☒richtig ☐falsch Die Gleichgewichtslage heißt dann stabil, wenn eine durch eine kurz andauernde und nicht zu große Störung verursachte Abweichung aus dieser Lage im Laufe der Zeit gegen Null strebt.

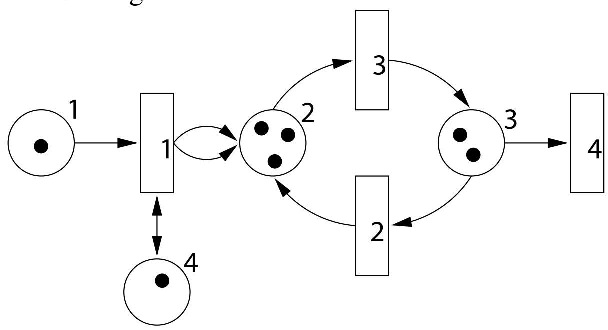
☐richtig ☒falsch Jede reelle Zahl zwischen 1 und 10 kann im IEEE 754-Zahlformat dargestellt werden.

☒richtig ☐falsch Eine Funktion $f(x) = x^3$ ist für $\|x\| \leq 1$ gut konditioniert.

☒richtig ☐falsch Die Konditionszahl eines Problems hängt nicht vom Algorithmus ab, der zur Lösung des Problems verwendet wird.

2. ***Petrinetze* (6 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes Petrinetz:



(a) Bezeichnen Sie in obigem Petrinetz die Plätze mit p_1, p_2, p_3, p_4 und die Transitionen mit t_1, t_2, t_3, t_4. Beachten Sie, dass die Indizes schon vorgegeben sind. Geben Sie den aktuellen Zustand des Petrinetzes an.

Antwort: (2 Punkte)

Kreise sind Plätze, Kästen sind Transitionen. (1 Punkt)
Zustand des Netzes ist $(1, 3, 2, 1)$. (1 Punkt)

(b) Im obigen Petrinetz gibt es keine Beschränkungen an die Markenzahl in den Plätzen. Welche Transitionen können im aktuellen Zustand schalten? Geben Sie jeweils den Zustand nach dem Schalten der Transition an (immer ausgehend vom obigen Zustand).

Antwort: (2 Punkte)

t_1 schaltet: $(0, 5, 2, 1)$
t_2 schaltet: $(1, 4, 1, 1)$
t_3 schaltet: $(1, 2, 3, 1)$
t_4 schaltet: $(1, 3, 1, 1)$

(c) Kann das gegebene Petrinetz verklemmen? Wenn ja, dann geben Sie eine Schaltfolge vom Ausgangszustand zu einem Zustand an, in dem das Netz verklemmt ist. Wenn nein, dann begründen Sie warum keine Verklemmung möglich ist.

Antwort: (2 Punkte)

Das Netz kann verklemmen, z.B. mit der Schaltfolge t_1, 5 mal t_3 und 7 mal t_4. Dann ist nur noch eine Markierung in p_4 und keine Transition ist schaltfähig, d.h. das Netz ist verklemmt.

3. *Grundbegriffe zur Modellierung und Simulation* (4 Punkte)

(a) Was ist ein Modell? Geben Sie eine allgemein gültige Definition an.

Antwort: (1 Punkt)

Antwortmöglichkeiten:

- (vereinfachendes) Abbild einer (partiellen) Realität
- eine abstrakte, logische und mathematische Darstellung der Objekte und und Wechselbeziehungen in einem System
- Ersatzsystem, gebildet unter Annahmen und Idealisierung

(b) Nennen Sie zwei wesentlichen Fehlerquellen, die im Rahmen der Validierung einer Simulationsstudie untersucht werden müssen.

Antwort: (1 Punkt)

Modellierungsfehler, Approximationsfehler des iterativen Berechnungsverfahrens, Rundungsfehler oder Programmier- und Implementierungsfehler

(c) Welche Möglichkeiten zur Klassifikation von Modellen anhand der Beschreibung i.) des Zustandsverlaufs und ii.) des zeitlichen Verlaufs kennen Sie?

Antwort: (1 Punkt)

i. Diskret oder kontinuierlich, deterministisch oder stochastisch

ii. Kontinuierlich, diskret äquidistant, diskret nicht äquidistant und kontinuierlich diskret

(d) Nennen Sie mindestens 2 Ursachen in dynamischen Systemen, die zu Unstetigkeiten im Verlauf der Zustände führen können.

Antwort: (1 Punkt)

Stoßvorgänge, Reibung in mechanischen Systemen (z.B. Übergänge von Gleit zu Haftreibung), Strukturvariable Systeme, Approximation von Teilmodellen von f, Hysterese, Unstetige zeitabhängige Eingangsfunktionen/Stellgrößen u

4. ***Steife Differentialgleichungen* (5 Punkte)**

Betrachen Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -101 & 100 \\ 100 & -101 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)\,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das System analytisch mit dem gegebenen Anfangswert.

Antwort: (4 Punkte)

Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -101 & 100 \\ 100 & -101 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = -201$ und $\lambda_2 = -1$

Eigenvektor zu λ_1: $c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu λ_2: $c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anfangswert eingesetzt in $\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-201 \cdot t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1 \cdot t}$ liefert: $c_1 = -1,\ c_2 = 1$

$\Rightarrow$ Lösung:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-201 \cdot t} + e^{-t} \\ -e^{-201 \cdot t} + e^{-1t} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie den Steifigkeitskoeffizienten an.

Antwort: (1 Punkt)

$\max \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|} = 201$

5. *Lösen von Gleichungssystemen* (11 Punkte)

Für die Funktion

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 \\ \sin(x_1) + 0.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

soll der Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ so bestimmt werden, dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (0,0)^T$ gilt.

(a) Das gestellte Problem läßt sich mit dem Fixpunkt-Verfahren lösen. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des Fixpunkt-Verfahrens.

Antwort: (3 Punkte)

gelöst wird Problem $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, Problem muss dafür also geeignet umgeschrieben werden
neuer Schritt: $\boldsymbol{x}_{i+1} = \tilde{f}(\boldsymbol{x}_i)$
Verfahren konvergiert, falls $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\boldsymbol{x}_s)$ im Einheitskreis

(b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das gestellte Problem mit dem Fixpunkt-Verfahren auf.

Antwort: (2 Punkte)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1^3 - 3 \cdot x_2 + x_1 \\ \sin(x_1) + 1.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}_{i+1} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_i) \end{aligned}$$

(c) Die Konvergenz-Eigenschaft des Fixpunkt-Verfahrens kann mit Hilfe eines zusätzlichen Faktors verbessert werden. Benennen Sie diesen und begründen Sie die Verbesserungseigenschaft.

Antwort: (1.5 Punkte)

Relaxationsmatrix A, Vorfaktor, führt zu kleineren Eigenwerten und damit schnellerer Kontraktion

(d) Beschreiben Sie in wenigen Stichpunkten ein in der Vorlesung beschriebenes spezielles Fixpunkt-Verfahren zur Lösung sowie je zwei Vor- oder Nachteile gegenüber dem allgemeinen Fixpunkt-Verfahren.

Antwort: (3 Punkte)

Newton-Verfahren
für Nullstellensuche
Taylor-Entwicklung wird abgebrochen
Iteration: $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$
lokale Konvergenz: FP -, Newton ++; Rechenaufwand FP ++, Newton -, Implementierungsaufwand: FP ++, Newton -

(e) In die Berechnung des bekannten Verfahrens aus (5d) geht die Jacobi-Matrix ein. Nennen Sie 3 Möglichkeiten, die den Aufwand zur Berechnung der Jacobi-Matrix reduzieren können.

Antwort: (1.5 Punkte)

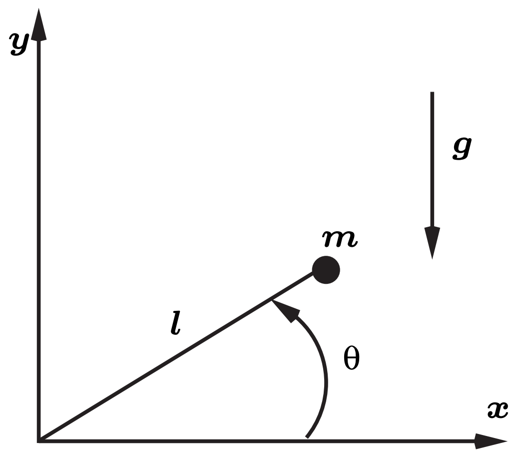
1. Dünnbesetzheit ausnutzen
2. Jacobi-Matrix durch konstante Matrix ersetzen
3. Schrittweise Aufdatierung (Update) / Quasi Newton Verfahren

6. ***Stabilität eines Pendels*** **(11 Punkte)**

Betrachtet wird ein Pendel mit einer punktförmigen Masse m, die an einem starren, masselosen Stab der Länge l aufgehängt ist. Für die Auslenkung $\theta_1 = 0$ hänge das Pendel senkrecht nach unten. Die Schwingungen des Pendels seien gedämpft mit der Reibungskonstanten d.
Die ein solches Pendel beschreibende Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \frac{-d}{ml^2}\theta_2 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1) \end{pmatrix}$$

mit stationären Lösungen für $\boldsymbol{\theta}_{s_1}^T := (\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ und $\boldsymbol{\theta}_{s_2}^T := (\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$. $(m, g, l, d > 0)$



(a) Wie lauten die um die Gleichgewichtslagen $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$ und $\boldsymbol{\theta}_{s_2}$ linearisierten Systeme?
Antwort: (5 Punkte)

$$\Delta\boldsymbol{\theta} := \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_s$$
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} cos(\theta_1) & \frac{-d}{ml^2} \end{pmatrix}$$

Formal lauten die gesuchten Systeme:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Delta\theta}} &= \dot{\boldsymbol{\theta}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\theta_s} \cdot \boldsymbol{\Delta\theta} \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\theta_s} \cdot \boldsymbol{\theta} - \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\theta_s} \cdot \boldsymbol{\theta}_s \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & \frac{-d}{ml^2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}$$

und für $\boldsymbol{\theta}_{s_2}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & \frac{-d}{ml^2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi g}{l} \end{pmatrix}$$

(b) Begründen Sie analytisch, ob die Gleichgewichtspunkte stabil sind.
Antwort: (6 Punkte)

Die charakteristische Gleichung $det(A - \lambda I) = 0$ zur Bestimmung der Eigenwerte des Systems lautet für den Punkt $\boldsymbol{\theta}_{s_1}$:

$$\lambda^2 + \frac{d}{ml^2}\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$\Rightarrow\ \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{-d}{ml^2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{m^2 l^4} - 4\frac{g}{l}})$ $\Rightarrow$ der Realteil der Eigenwerte ist stets negativ (der Wurzelterm liefert entweder einen imaginären Anteil oder ist kleiner als $\frac{+d}{ml^2}$!)
$\Rightarrow$ **Stabilität**
Für den Punkt $\boldsymbol{\theta}_{s_2}$:

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{d}{ml^2}\lambda - \frac{g}{l} = 0$$

$\Rightarrow\ \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{-d}{ml^2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{m^2 l^4} + 4\frac{g}{l}})$ $\Rightarrow$ die Eigenwerte sind reelwertig und genau einer von beiden ist positiv (der Wurzelterm ist betragsmäßig größer als $\frac{+d}{ml^2}$!)
$\Rightarrow$ **Instabilität**

7. *Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten* (5 Punkte)

Wenn wir versuchen, einen abgeworfenen und danach wiederholt auf dem Boden auftreffenden Ball zu simulieren, stoßen wir schnell auf das Problem von Schaltpunkten, an denen sich das Systemverhalten unstetig ändert. An solchen Punkten würden numerische Standardverfahren alleine falsche Ergebnisse liefern.

Die Bahn eines Balles (mit leichter Dämpfung bei der Reflexion an der Ebene) ist in folgender Skizze veranschaulicht.

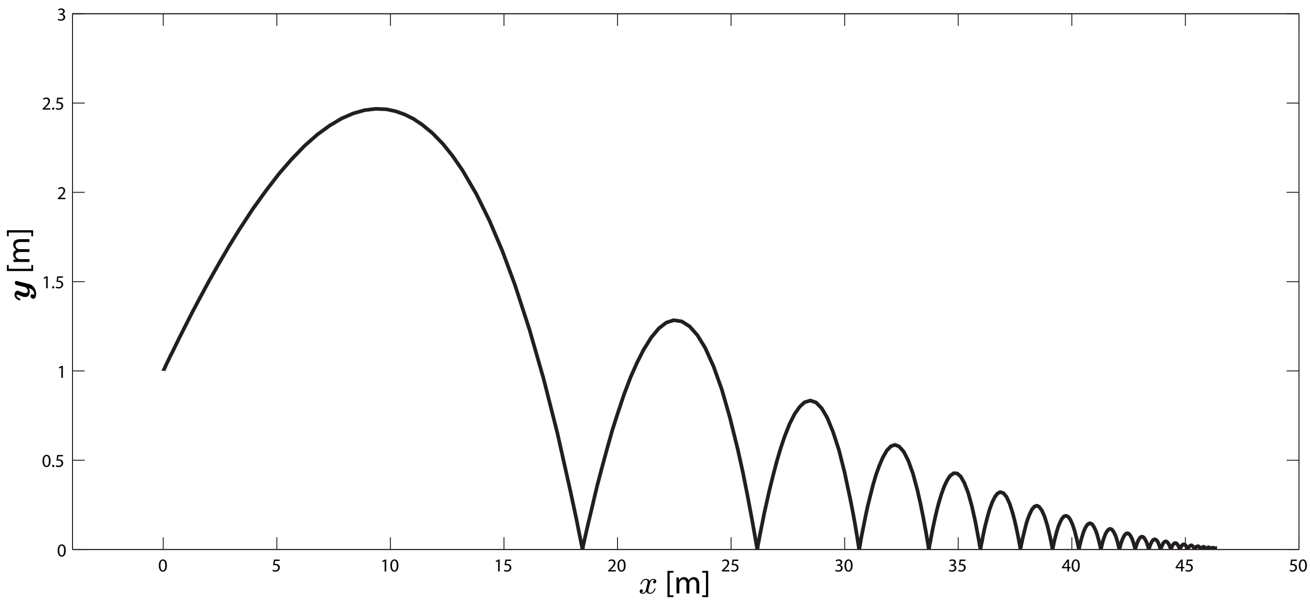


Abbildung 1: Beispiel einer Flugbahn eines geworfenen Balls

(a) Wie können Unstetigkeitsstellen (Schaltpunkte) in einem Differentialgleichungsmodell mit Hilfe von Schaltfunktionen geeignet charakterisiert werden?

Antwort: (1 Punkt)

Durch Nullstellen einer Schaltfunktion

(b) Wann (in welchem Zustand) treten Schaltpunkte im obigen Modell der Bewegung des Balls auf und welche Zustandsgrößen ändern sich an diesen sowie welche bleiben unverändert?

Antwort: (3 Punkte)

Schaltpunkte sind Zeitpunkte, in denen der Ball die Ebene berührt.
Die Position bleibt unverändert.
Die Geschwindigkeit ändert sich (je nach Modellierung nur in einer oder in beiden Komponenten).

(c) Geben Sie eine Schaltfunktion $q(x, y)$ an, die die Unstetigkeitsstellen in der Bewegung des Balls bestimmt.

Antwort: (1 Punkt)

Schaltpunkte $\Leftrightarrow$ $y_s = 0$
Besipiel für eine Schaltfunktion: $q(x, y, u, v, t) = y - 0 = y$

8. *Zahldarstellung nach IEEE 754* (8 Punkte)

(a) Beschreiben Sie die Darstellung normalisierter Gleitpunktzahlen.
Antwort: (3 Punkte)

- Normalisierte Gleitpunktzahl: allgemeine Darstellung

$$z = \pm\left(d_1 \cdot B^0 + d_2 \cdot B^{-1} + \ldots + d_t \cdot B^{-t+1}\right) \cdot B^E$$

Äquivalente Bezeichnungen: Gleitpunktzahl, Gleitkommazahl, floating point number

B: Basis, z.B. 10 (Dezimalzahl) oder 2 (Binärzahl)

E: Exponent, ganze Zahl und beschränkt: $E_{\text{min}} \leq E \leq E_{\text{max}}$

d_i: Ziffern, $d_i \in \{0,1,2,\ldots, B\text{-}1\}$

z normalisiert $\Rightarrow d_1 \neq 0$ (falls $z \neq 0$)

t: Länge der Mantisse

$d_1\, d_2\, d_3\, \ldots\, d_t$: Mantisse M

Beispiel:

$$z = \underbrace{3.001109}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{10}_{\text{Basis}}^{\overbrace{1}^{\text{Exponent}}}$$

- t, E_{min}, E_{max} endlich und konstant $\Rightarrow$
  - Menge der darstellbaren Zahlen ist endlich.
  - Es gibt eine größte und eine kleinste, darstellbare Zahl.

(b) Geben Sie kurz in Worten einen Algorithmus zum Addieren zweier normalisierter Gleitpunktzahlen an (zunächst ohne mögliche Sonderfälle als Ergebnis).
Antwort: (3 Punkte)

i. Anpassen der Exponenten (d.h. auf gleichen Exponenten bringen)

ii. Addieren der Mantissen (dabei implizite 1 berücksichtigen), und ggf. Anpassen dieser

iii. ggf. Anpassen des Exponenten, so dass Zahl normiert ist

(c) In welchen Fällen können Sonderfälle im Ergebnis der Addition zweier IEEE-Zahlen auftreten?
Antwort: (2 Punkte)

- mind. ein Summand ist Sonderfall
- Ergebnis ist größer als größte darstellbare Zahl
- beide Summanden sind gleich bis auf der Vorzeichen (Sonderfall 0)
- Summanden unterscheiden sich um das Vorzeichen und um einen Betrag, der kleiner ist als kleinste darstellbare Zahl (Sonderfall denormalisiert oder 0, je nach Architektur)