Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Vorlesung: Diskrete Modellierung und Simulation (Fortsetzung)

28. Oktober 2013

Prof. Dr. Jan Peters

produziert vom HRZ Hochschulrechenzentrum

Meisenantworten

- Annotierte Slides in Moodle? OK, sind jetzt drinnen!
- Moodle Fragen immer richtige Antwort oben? Uups, danke! Fixed!
- Mehr Sniggers Fragen? Gerne!
- Fragendauer besser auf 40-45sec absenken? OK!

Überblick der Vorlesungsinhalte

1. Einführung
2. Diskrete Modellierung und Simulation
3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation
4. Teilschritte einer Simulationsstudie
5. Interpretation und Validierung
6. Modulare und objektorientierte Modellierung und Simulation
7. Parameteridentifikation von Modellen

MOODLE FRAGE

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

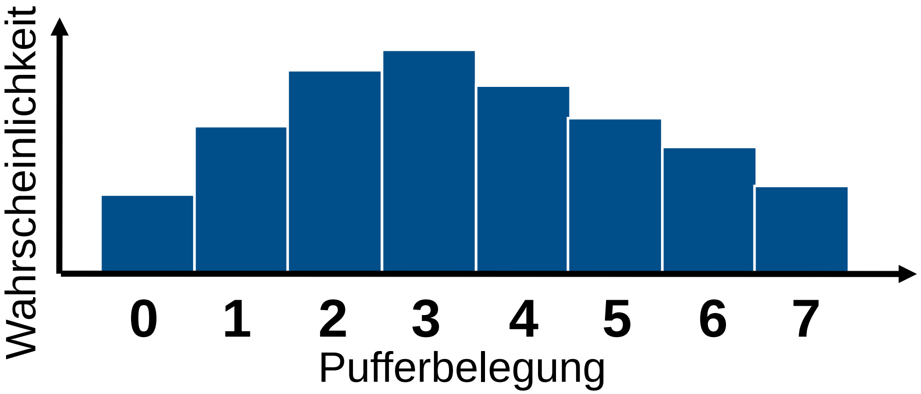
Grundlagen der Modellierung und Simulation

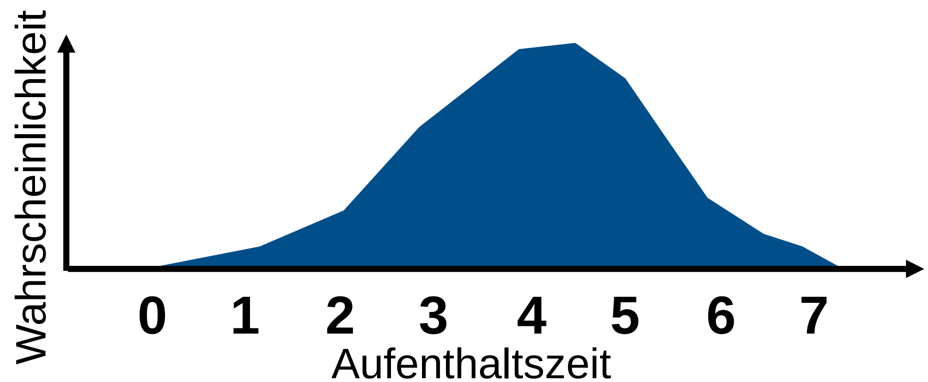
2. DISKRETE MODELLIERUNG UND SIMULATION (FORTSETZUNG)

Wiederholung: Statistische Daten bei einer DES (Beispiel)

- Diskrete Verteilungen bezogen auf Ressourcen
  - Pufferbelegung, Maschinenbelegung

- Kontinuierliche Verteilungen bezogen auf Werkstücke
  - Aufenthaltszeit im Puffer (oder im System)





2.4 Simulationen mit stochastischen Einflüssen: Grundbegriffe

- Zufallsgröße X
- Wahrscheinlichkeit (probability), dass X kleiner oder gleich x

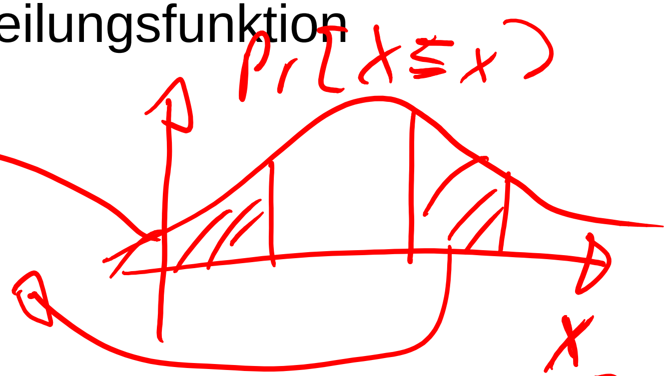
$$\Pr[X \leq x]$$

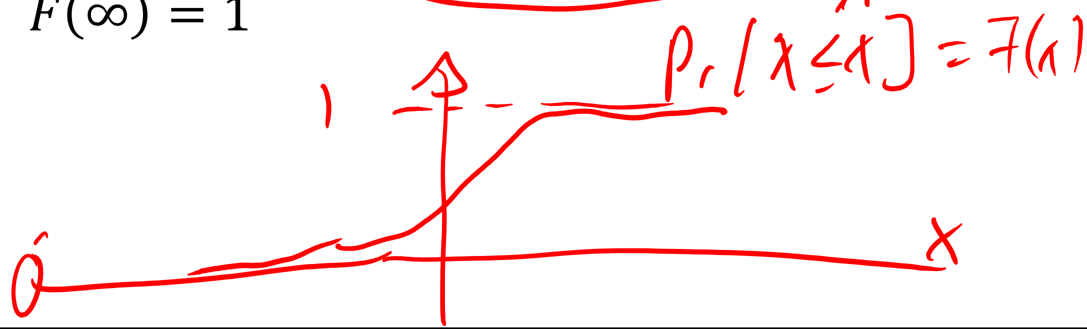
- Beschreibung eindimensionaler x durch Verteilungsfunktion $F(x)$

$$F(x) = \Pr[X \leq x]$$

$$F(b) - F(a) = \Pr[a < X \leq b]$$

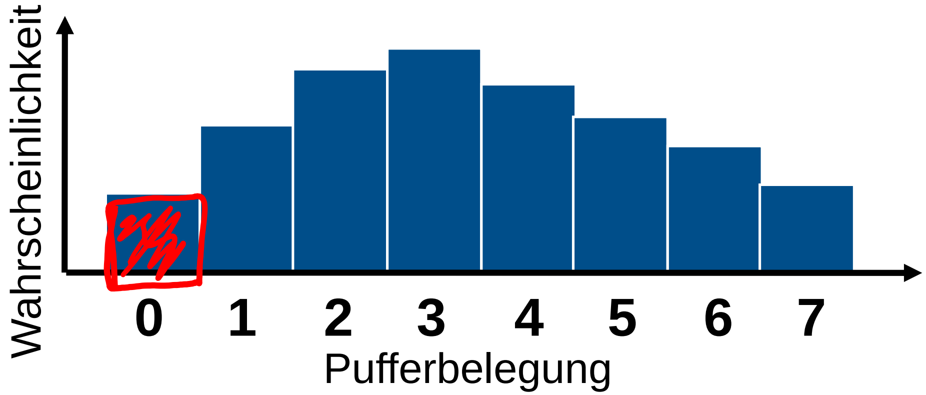
$$F(-\infty) = 0, \qquad F(\infty) = 1$$





2.4 Simulationen mit stochastischen Einflüssen: Diskrete Verteilungen

- Beispiel



- Ist zufällige Größe X eine diskret verteilte Größe, dann Angabe der Wahrscheinlichkeiten $p_k (k = 1, \dots, N)$ möglich:

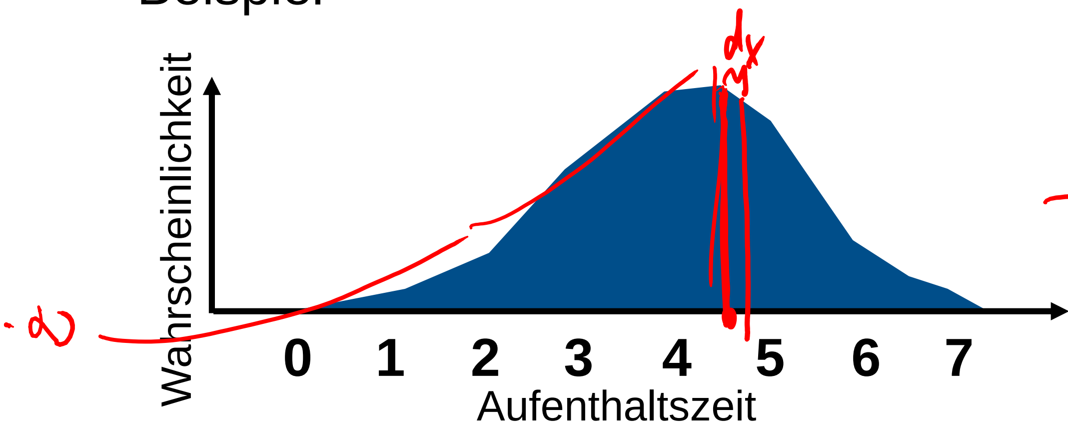
$$p_k = \Pr[x_k = X]$$

$$F(x_k) = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$$

2.4 Simulationen mit stochastischen Einflüssen: Kontinuierliche Verteilungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel



- Ist die zufällige Größe X eine stetig verteilte Größe, dann Angabe der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ möglich

$$f(x)\,dx = \Pr[x < X \leq x + dx]$$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds}$$ (Allgemein: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} dF(s)$)

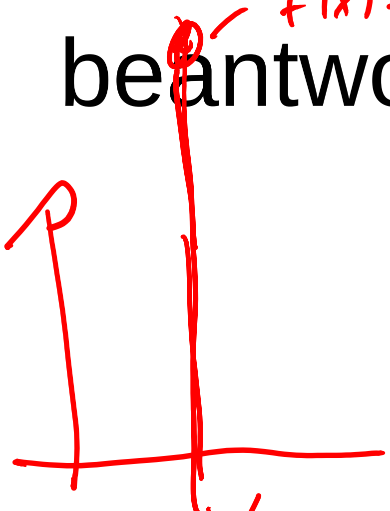
MOODLE FRAGE

$f(x) = 0$

$\boxed{f(x) \geq 0}$ $\boxed{f(x) > 0}$ $\boxed{f(x) < 1 \quad f(x) \leq 1}$

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!

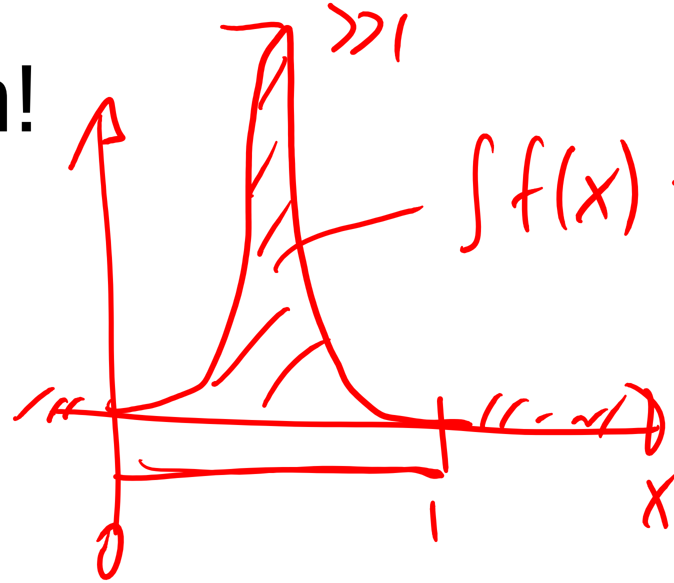
$f(x) = \infty$



$X = x$

$\gg 1$

$\int f(x) = 1$



2.4 Simulationen mit stochastischen Einflüssen: Grundbegriffe

- Das n-te Moment $E[X^n]$einer Verteilungsfunktion ist

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^n \, dF(s)$$

- Erwartungswert (Mittelwert) von x entspricht dem 1. Moment

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} s \, dF(s)$$

2.4 Simulationen mit stochastischen Einflüssen: Grundbegriffe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Varianz (Streuungsquadrat) entspricht dem 2. Moment

$E[X^2]$

$$Var(X) = \sigma^2(X) = E[(X - E[X])^2]$$
$$= \overline{E[X^2]} - \overbrace{(E[X])}^{}{}^2$$

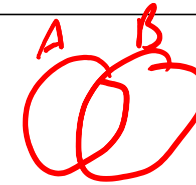
2 Moment − (1 moment)^2

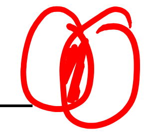
- Verschiebungsregel für Streuungen

$$\underline{E[(X-a)^2]} = \underline{\sigma^2(X)} + \underline{(E[X]-a)^2}$$

2.4 Simulationen mit stochastischen Einflüssen: Grundbegriffe

▪ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bzw. B	$Pr[A]$ bzw. $Pr[B]$
▪ Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse zusammen	$Pr[A \wedge B]$
▪ Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, unter der Bedingung, dass B eingetreten ist (bedingte Wahrscheinlichkeit)	Likelihood likelihood $Pr[A\|B]$ Prior
▪ Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten	$Pr[A\|B] \cdot Pr[B] = Pr[A \wedge B]$
▪ Ereignis A ist unabhängig von Ereignis B, wenn	$Pr[A\|B] = Pr[A]$





Beispiel: Bayes‘ Law herleiten…

A = Alarm , B = Burglary

$p(B) = \frac{1}{381}$, $p(A) = 0.002$, $p(A|B) = 0.75$

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)\,p(B)}{p(A)} \approx 0.98425$$

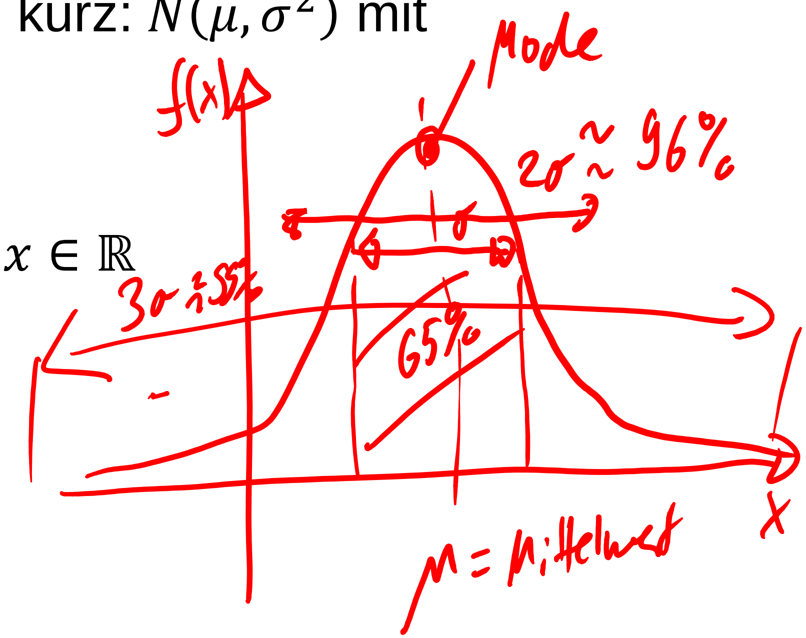
$$p(A \wedge B) = p(A|B)\,p(B) = p(B|A)\,p(A)$$

2.5 Verteilungen: Normalverteilung = Gaussverteilung

- X heißt normalverteilt mit Parameter μ, σ^2, kurz: $N(\mu, \sigma^2)$ mit Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

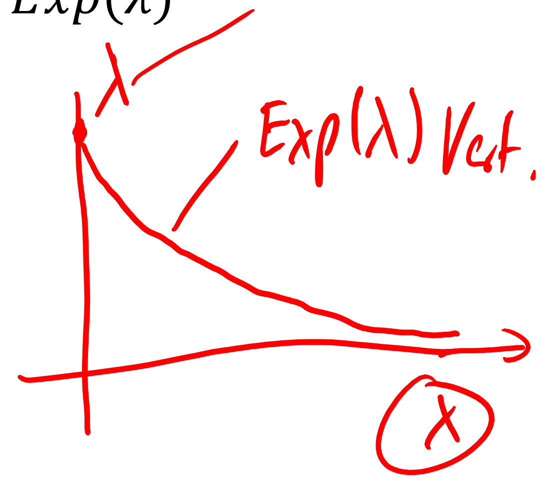


- Mittelwert: μ
- Varianz: σ^2
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

- Standard-Normalverteilung: $\mu = 0, \ \ \sigma^2 = 1$

2.5 Verteilungen: Exponentialverteilung

- X heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, kurz $Exp(\lambda)$ mit



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Varianz: $\cancel{\lambda^{-2}}$
- Standardabweichung: $\cancel{\lambda^{-1}}$ $= \sqrt{\lambda^{-2}} = \left(\sqrt{\lambda^2}\right)^{-1} = \sqrt{\sigma^2}$

2.5 Verteilungen: Exponentialverteilung

- Nur die negativ exponentielle Verteilungsfunktion ist ohne „Gedächtnis“ mit MarkovEigenschaft

$$\Pr[X \leq a + x \mid X > a] = \Pr[X \leq x]$$

- Sind Ankunftszeiten von Aufträgen negativ exponentiell verteilt folgt
  - Verteilungsfunktion der Zeitspanne bis zum Eintreffen des nächsten Auftrags ist unabhängig davon, wie viel Zeit seit dem letzten Auftrag vergangen ist
  - Vergehen zwischen zwei Aufträgen t Zeiteinheiten, dann muss man trotzdem noch tZeiteinheiten warten, unabhängig davon wie viel Zeit seit dem letzten Auftrag schon vergangen ist

2.5 Verteilungen: Schätzung der Momente

- Diskrete Verteilungen: z.B. Pufferbelegung $P_i = P(t_i)$mit den Summationsvariablen
  - Summe aller Entitäten im Puffer bis Intervall i: S_i
  - Anzahl der Entitäten im Puffer im Intervall i: P_i
  - Hilfsvariable für das 2. Moment: T_i

$$S_0 = 0, \qquad S_{i+1} = S_i + P_{i+1} \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$T_0 = 0, \qquad T_{i+1} = T_i + P_{i+1}^2 \Rightarrow T_n = \sum_{i=1}^{n} P_i^2$$

2.5 Verteilungen: Schätzung der Momente

- Schätzung der Momente
  - Erwartungswert

$$E(P) \approx S_n/n$$

  - Varianz

$$Var(P) \approx T_n/n - \underbrace{(S_n/n)}_{\mu^2}{}^2$$

- 1. Moment: $E(P)$
- 2. Moment: T_n/n

2.5 Verteilungen: Schätzung der Momente

- Kontinuierliche Verteilungen: z.B. Aufenthaltszeit $A(t)$ mit den Summationsvariablen

$$S(t) = \int_0^t A(\tau)\, d\tau = S(t-\Delta t) + \Delta t\, A(t)$$

$$T(t) = \int_0^t A^2(\tau)\, d\tau$$

- Schätzung der Momente
  - Erwartungswert $E(A) \approx S(t)/t$
  - Varianz $Var(A) \approx T(t)/t - (S(t)/t)^2$

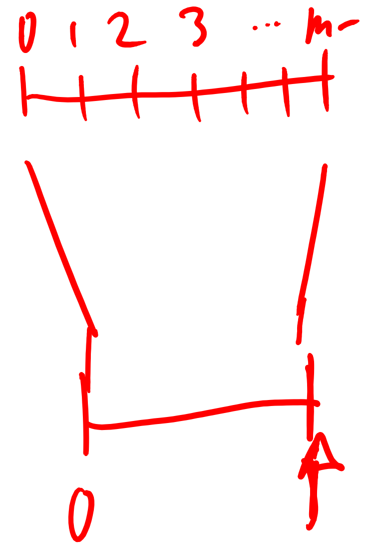
2.5 Verteilungen

- Bisher war x_i gleichverteilt in den natürlichen Zahlen

$$x_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

- Gleichverteilung im Intervall $[0, 1)$ durch Division

$$u_i = x_i / m \in [0, 1)$$



MOODLE FRAGE

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!

2.6 Zufall im Rechner: Lineare Kongruenz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Pseudozufallszahlen über lineare Kongruenzgeneratoren:

$$x_0 \coloneqq \text{Startwert (seed)}$$ = Uhrzeit + Datum (unixtime)

$$x_{k+1} \coloneqq (a x_k + c) \bmod m$$

  - Multiplikator: a
  - Inkrement: c
  - Periode: m

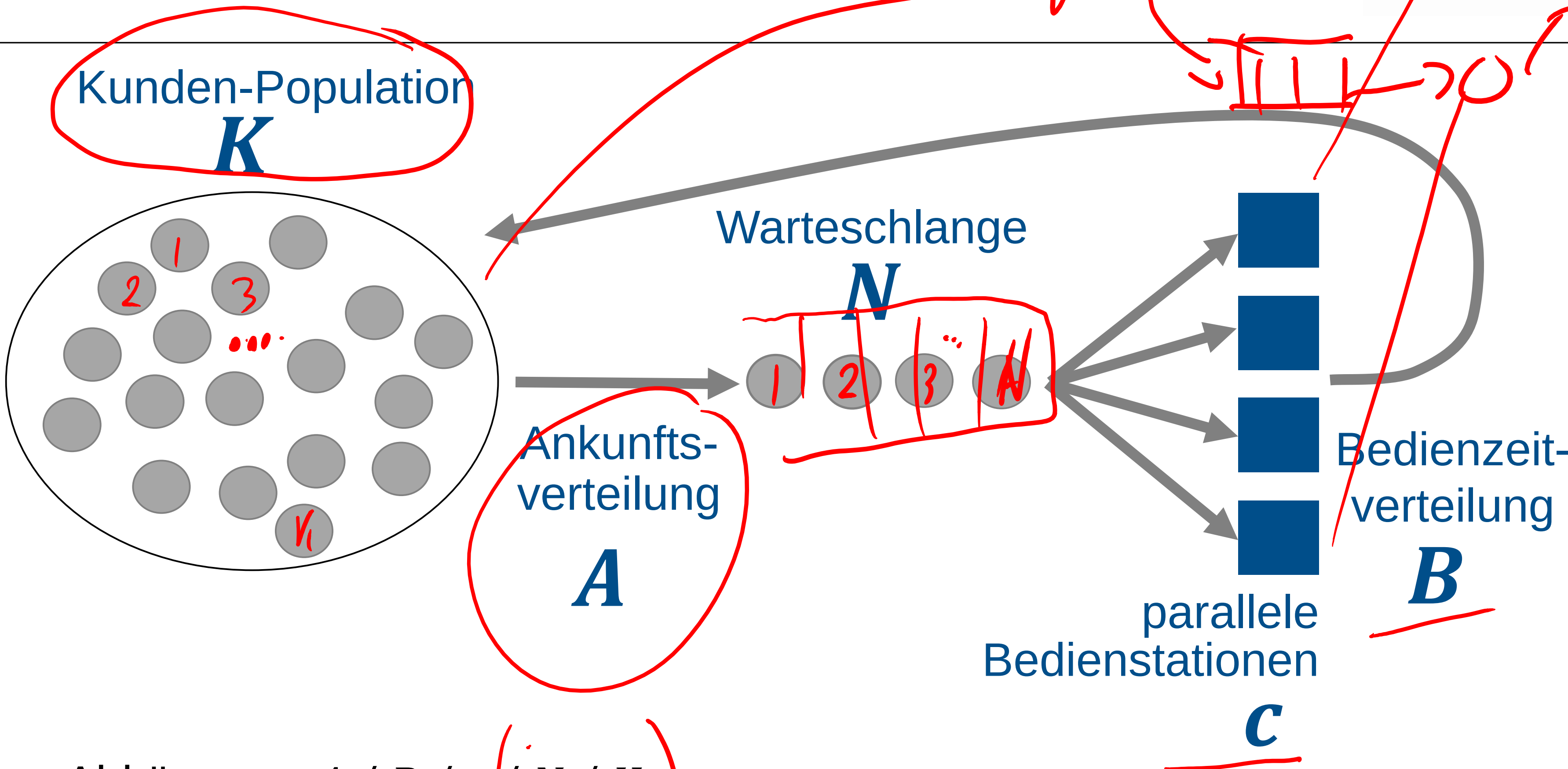
2.6 Zufall im Rechner: Lineare Kongruenz

- Sequenz eines linearen Kongruenzgenerators
  - $a = 17$
  - $c = 43$
  - $m = 100$

$$x_0 = 27$$
$$x_{k+1} = (a x_k + c) \bmod m$$

$$x_1 = (17 \cdot 27 + 43) \bmod 100 = 502 \bmod 100 = 2$$
$$x_2 = (17 \cdot 2 + 43) \bmod 100 = 77 \bmod 100 = 77$$
$$\vdots$$

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell

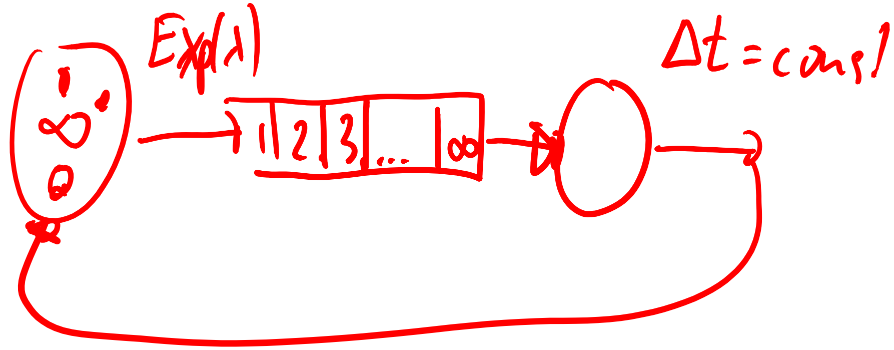


- Abkürzung: $A \,/\, B \,/\, c \,/\, N \,/\, K$

$\infty \quad \infty$

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell

- Abkürzung: A / B / c / N / K
  - Wertebereich für A und B
    - M = (negativ) exponentiell (markovian)
    - D = deterministisch (deterministic)
    - G = beliebig (general)
  - c = Anzahl paralleler Bedienstationen
  - N = maximale Anzahl gleichzeitiger Aufträge im System
  - K = Anzahl der Kunden



- $A/B/c \Leftrightarrow A/B/c/\infty/\infty$
  - $M/D/1 \Leftrightarrow M/D/1/\infty/\infty$

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Bezeichnungen

- mittlere Ankunftsrate: $\lambda = E[A]$
- (mittlere) Bedienrate pro Station: $\mu = E[B]$

μc

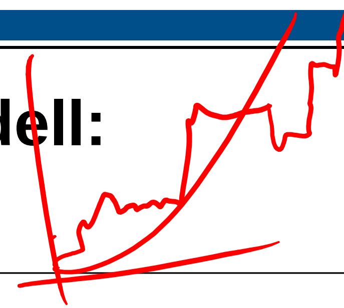
- Streuung der Bedienrate: $\sigma^2 = Var[B]$

- Zeitabhängige diskrete Zufallsvariable:
  - $L(t)$ = Gesamtzahl der Kunden im System zur Zeit t

Zeit!

- Langzeitverhalten $(t \rightarrow \infty)$
  - $L(t) \rightarrow L(\infty)$ stationäre Verteilung

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Bezeichnungen



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bedingung für Stationarität
  - $\lambda < \mu$ $\Leftarrow$ mittlere Ankunftsrate $\overset{\geq}{<}$ mittlere Bedienrate

- Abgeleitete Größen
  - L Erwartungswert von $L(\infty)$
  - ρ Langzeitausnutzung der Server
  - w Langzeitaufenthalt im System / Mittlere Aufenthaltszeit der Aufträge

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Ziel

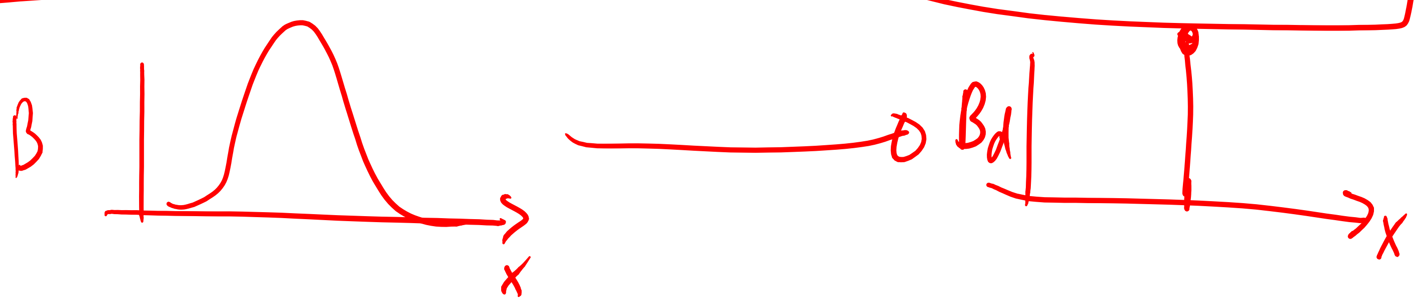
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ziel der Warteschlangentheorie
  - Bestimmung der Verteilung von $L(\infty)$ "stationär"

- Dichtefunktion von $L(\infty)$:
  - $d_{L(\infty)}(\xi) = Pr(L(\infty) = \xi)$
  - Geometrische Verteilung $= (1-\rho) \cdot \rho^{\xi}$
  - ξ ist hierbei ein Schwellwert, den es zu ermitteln gilt

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Weitere Warteschlangen

- $M/G/1$
  - $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
  - $L = \rho + \frac{\rho^2 (1 + \cancel{\sigma^2/\mu^2})}{2 \cdot (1 - \rho)}$ $\quad \sigma^2 = 0$
  - $\boxed{w = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \cdot (1 + \cancel{\sigma^2/\mu^2})}{2 \cdot \mu^2 (1 - \rho)}}$
- $M/D/1$: $\sigma = 0$
  - $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
  - $L = \rho + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
  - $w = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}$



2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Weitere Warteschlangen

A B c=1

- $M/M/1$: $\sigma = \mu$
  - $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$
  - $L = \frac{\rho}{1-\rho}$
  - $w = \frac{1}{\mu - \lambda}$

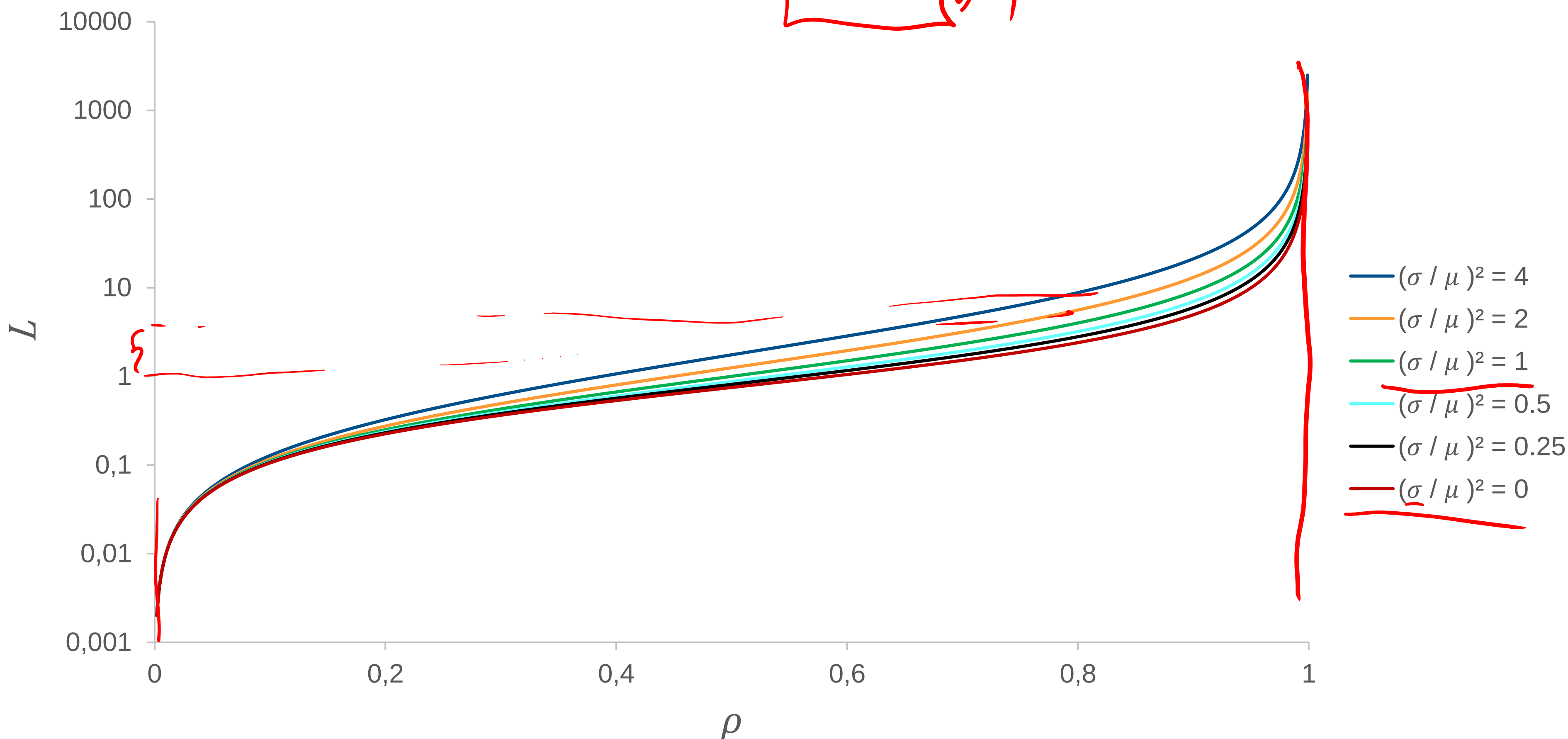
$\mu \rightarrow c\mu$

- $M/M/c$
  - $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$
  - $L = c\rho + \frac{\rho}{1-\rho} \cdot Pr(L(\infty) \geq c)$
  - $w = \frac{L}{\lambda}$
  - $P_0 = \left[\frac{(c\rho)^c}{(1-\rho)\cdot c!} + \sum_{i=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^i}{i!}\right]^{-1}$
  - $Pr(L(\infty) \geq c) = \frac{(c\rho)^c}{(1-\rho)\cdot c!} \cdot P_0$

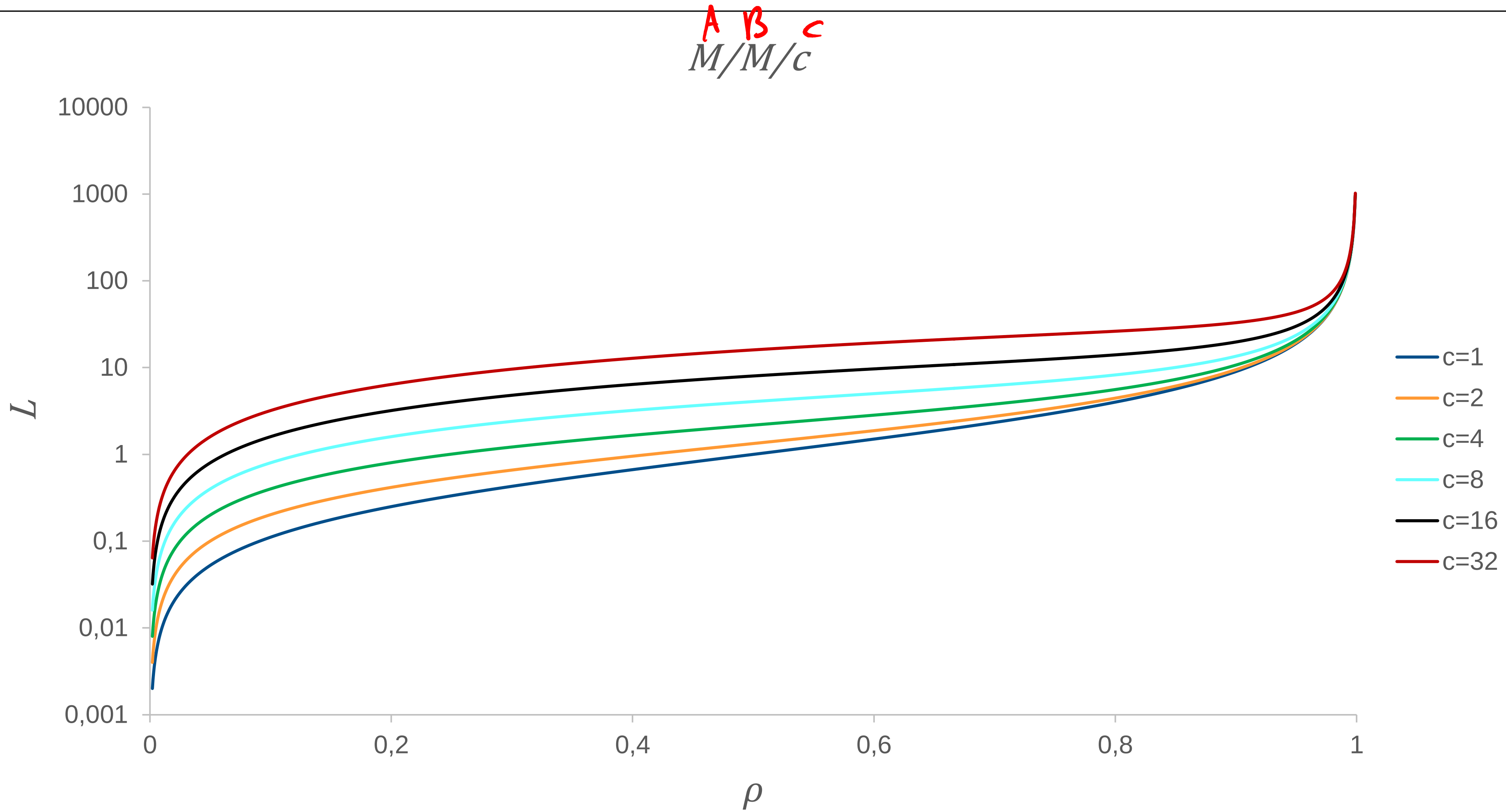
2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Graphische Darstellung

A B C

$M/G/1$ ρ, μ, σ



2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Graphische Darstellung



2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Gesetz von Little

- Gilt für alle Systeme, die einen stationären Zustand $t \to \infty$ erreichen

$$L = \lambda \cdot w$$

- $L =$ mittlere Zahl der Aufträge im System
- $\lambda =$ mittlere Eintreffrate der Aufträge
- $w =$ mittlere Aufenthaltszeit der Aufträge

- Gesetz von Little wird zur Konsistenzprüfung von Simulationsergebnissen verwendet (Simulationsvalidierung)

MOODLE FRAGE

Bitte jetzt auf Moodle einige Fragen beantworten!

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Tankstelle mit Bezahlmöglichkeit beim Tankwart oder an einem Automaten
- Vier Kunden pro Minute mit exponentialverteilten Ankunftszeiten
- Bezahlung beim Tankwart dauert konstant 10 Sekunden
- Bezahlung am Automaten durchschnittlich 12 Sekunden (exponentialverteilt)

$M_T + M_A$

- Tankwart: $M/D/1$-Warteschlange
- Automat: $M/\overset{G}{M}/1$-Warteschlange

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Beispiel

- Automat: $M/M/1$-Warteschlange
  - Bedingung für Stationarität: $\lambda < \mu$
  - Vier Kunden pro Minute: $\lambda = 4$
  - 12 Sekunden am Automaten: $\mu = 60/12 = 5$

→ stationär

  - Langzeitausnutzung

$$\rho = \lambda/\mu = 4/5 = 0.8$$

  - Erwartungswert (Kunden im System)

$$L = \rho/(1-\rho) = 0.8/(1-0.8) = 4$$

  - Langzeitaufenthaltszeit

$$w = 1/(\mu-\lambda) = 1/(5-4) = 1$$

2.7 Allgemeines Warteschlangenmodell: Ergebnisse der Warteschlangentheorie

- Warteschlangen werden länger, wenn bei konstantem Erwartungswert die Streuung der Bedienzeiten wächst
- Jede Pufferlänge tritt mit gewisser Wahrscheinlichkeit einmal auf, d.h. Puffer laufen stets gelegentlich voll
- nServer mit einer Warteschlange sind besser als n Server mit n Warteschlangen