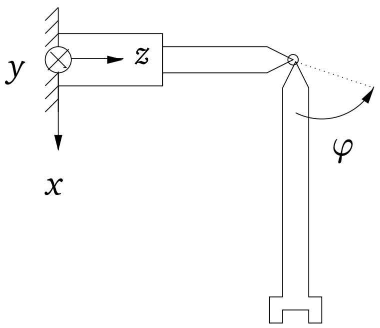
Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

Wintersemester 2012/2013
Lösungsvorschlag der 6. Übung

Aufgabe 1 Untersuchung der Bewegung eines Roboterarms (10 Punkte)



Betrachtet wird der Roboterarm aus nebenstehender Abbildung. Er besitzt einen Teleskoparm, an dessen Ende ein Pendel hängt. Der Zustand des Roboters wird beschrieben durch die Geschwindigkeit v, mit der die Teleskopstange in z-Richtung ausfährt, den Winkel φ, der die Auslenkung des Pendels beschreibt, und die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der das Pendel schwingt. Mit diesen Größen lautet die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\varphi} - \omega \\ 0 &= 2\dot{v} + \cos(\varphi)\dot{\omega} - \sin(\varphi)\omega^2 \\ 0 &= 2\dot{\omega} + \cos(\varphi)\dot{v} + 9\sin(\varphi). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie alle Gleichgewichtslagen $(\varphi^*, \omega^*, v^*)$ des Manipulators.
<u>Hinweis</u>: Eine Gleichgewichtslage liegt für $(\dot{\varphi}, \dot{\omega}, \dot{v}) = (0, 0, 0)$ vor. Sie dürfen ferner $v = 0$ annehmen.

b) Linearisieren Sie die rechten Seiten aller Gleichungen. Die Linearisierung einer mehrdimensionalen Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ an der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ ist: $f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a_1, \ldots a_n)}{\partial x_j} \Delta x_j$. Die Gleichungen sollen um die Gleichgewichtslage, in der der Arm sich in aufrechter Position befindet, linearisiert werden.

c) Bringen Sie das linearisierte System in Standardform „$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = A\Delta\boldsymbol{x}$“. *Hinweis:* Es ist hilfreich, das System zunächst in der Form $\Delta\boldsymbol{x} = A^{-1}\Delta\dot{\boldsymbol{x}}$ zu schreiben.

d) Berechnen Sie die Eigenwerte des erhaltenen Systems. Ist das System stabil?

e) Erkläre Sie das Ergebnis aus (d). (Warum ist der Arm in dieser Lage stabil / nicht stabil?).

Lösungsvorschlag

a) Gleichgewichtslage $\longleftrightarrow (\dot{\varphi}, \dot{\omega}, \dot{v})^T = (0,0,0)^T$
Einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \\ 0 &= \sin(\varphi)\omega^2 = 0, \quad \text{wegen } \omega = 0 \\ 0 &= 9\sin(\varphi) \Rightarrow \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

v darf hier beliebig konstant sein. (1 Punkt)

b)

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\dot{\varphi} - \Delta\omega \\ 0 &= 2\Delta\dot{v} + \cos(\varphi_0)\Delta\dot{\omega} - 2\sin(\varphi_0)\omega_0\Delta\omega + (\sin(\varphi_0)\dot{\omega}_0 + \cos(\varphi_0)\omega_0^2)\Delta\varphi \\ 0 &= 2\Delta\dot{\omega} + \cos(\varphi_0)\Delta\dot{v} - (\sin(\varphi_0)\dot{v}_0 - 9\cos(\varphi_0))\Delta\varphi \end{aligned}$$

Arm ist aufrecht, also k ist ungerade $(\cos(k\pi) = -1)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\dot{\varphi} - \Delta\omega \\ 0 &= 2\Delta\dot{v} - \Delta\dot{\omega} \\ 0 &= 2\Delta\dot{\omega} - \Delta\dot{v} - 9\Delta\varphi \end{aligned}$$

(3 Punkte)

c) Umformung:

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega \\ 0 \\ \Delta\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{v} \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Matrix invertieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 3 \end{array}\right)$$

(1 Punkt)

Um statt $(\Delta\omega, 0, \Delta\phi)^T$ auf der rechten Seite $(\Delta\phi, \Delta\omega, \Delta v)^T$ schreiben zu können, muss die dritte Spalte nach vorne gebracht werden und die zu Δv gehörige Spalte durch $(0,0,0)^T$ ersetzt werden. Das DGL-System in Standardform lautet schließlich

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 6 \\ 0 & 2/3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ 0 \\ \Delta\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

d)

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 6 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda^3 + 6\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 6) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,1} = \pm\sqrt{6}(1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

Es gibt Eigenwerte > 0, also das System ist nicht stabil. (1 Punkt)

e) Der Arm in aufrechter Position ist wie ein invertiertes Pendel: eine kleine Störung kann den Arm fällen lassen (kleine Störungen werden durch das System verstärkt). (1 Punkt)

Aufgabe 2 Fix Point Iteration (10 Punkte)

Wir betrachten folgende Gleichung:

$$x_{i+1} = \sin^{-1}(\cos(x_i + 1)^2).$$

a) Fuehren Sie von Hand zwei Schritte der Fixpunktiteration durch. Starten Sie mit $x = 0$.

b) Schreiben Sie die Gleichung in der Form $0 = f(x)$ auf, und fuehren Sie zwei Iterationen des Newton Verfahrens von Hand durch. Die analytische Ableitung koennen Sie zB. von Wolfram Alpha errechnen lassen. Starten Sie mit $x = 0$.

c) Implementieren Sie die Fixpunktiteration und das Newtonverfahren in Matlab. Plotten Sie die Anzahl der benoetigten Iterationen gegen die gewuenschte Genauigkeit. Sie koennen ein Matlab Skeleton von der Webseite herunterladen. Starten Sie mit $x = 0$. Plotten Sie die Loesung im Format wie in Fig. 1, Fig. 2 und Fig. 3

Lösungsvorschlag

a) (2 Punkte)

i	x
0	0
1	0.296
2	0.074

b) (2 Punkte)

i	x
0	0
1	0.152
2	0.160

c) (6 Punkte)

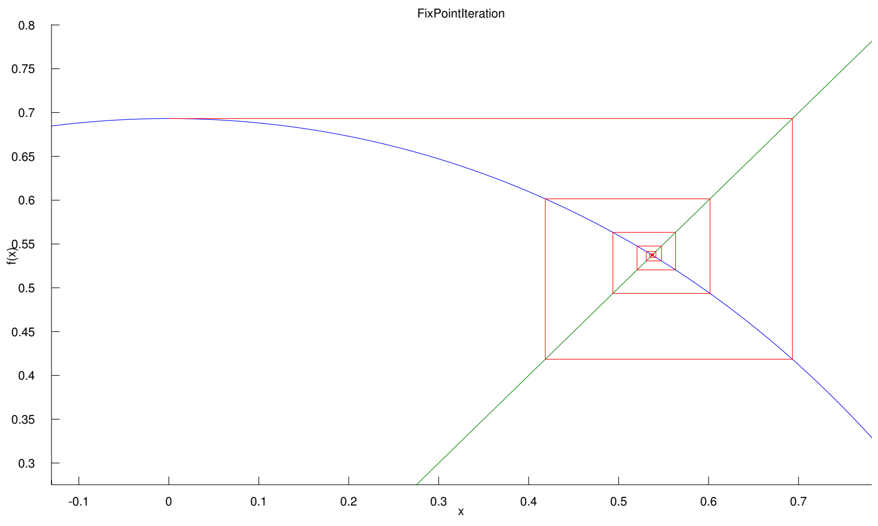


Abbildung 1: Design template

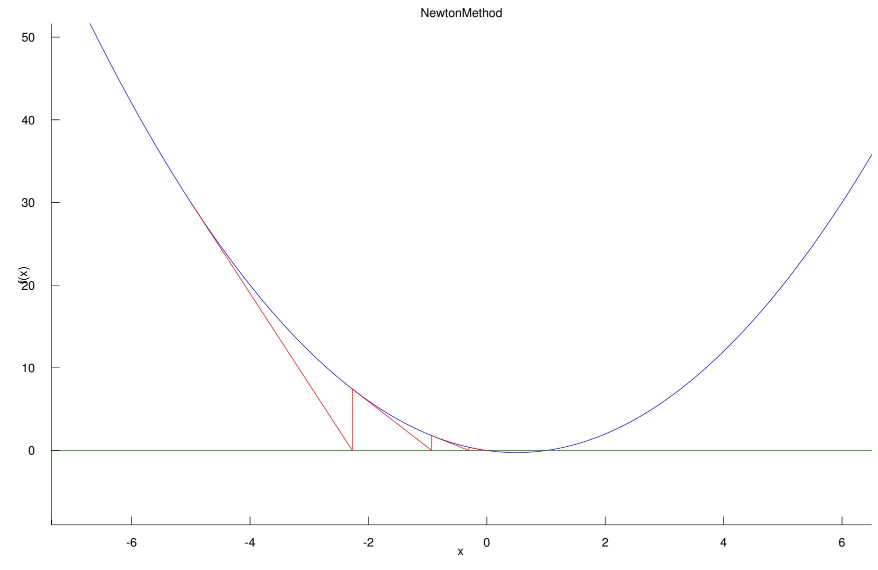


Abbildung 2: Design template

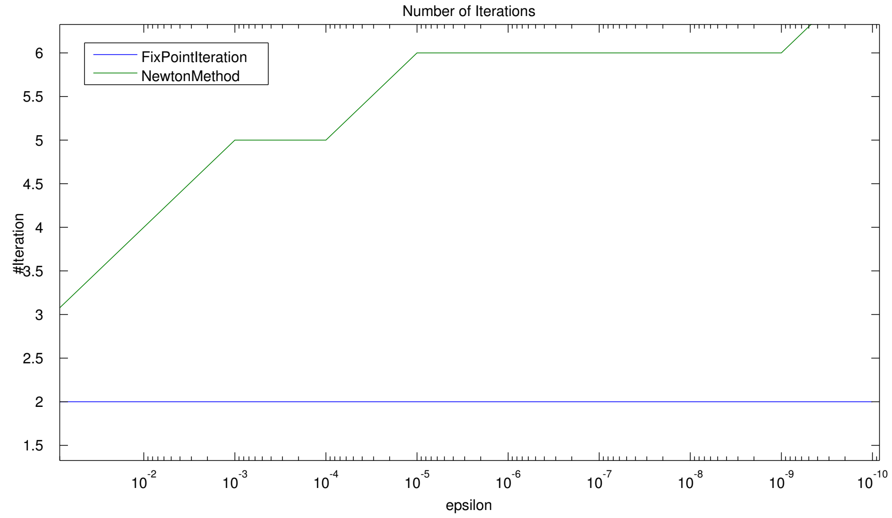


Abbildung 3: Design template

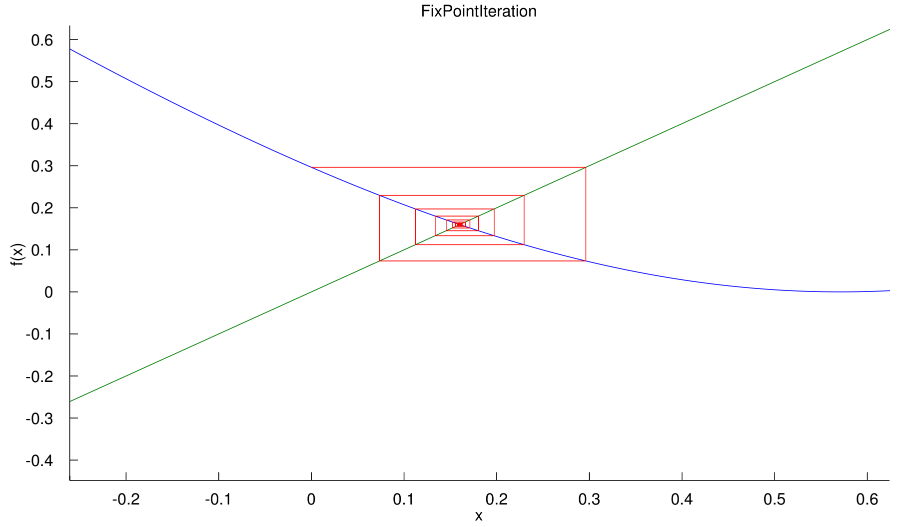


Abbildung 4: Solution FixPoint

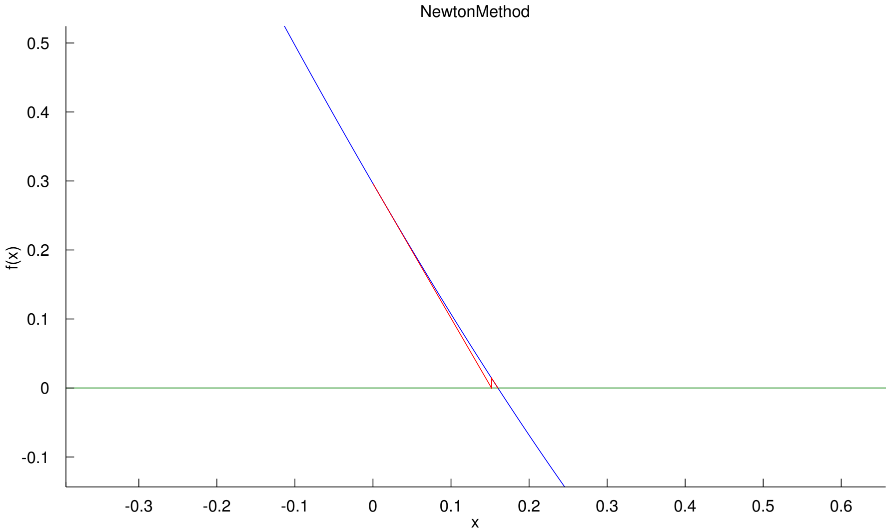


Abbildung 5: Solution Newton

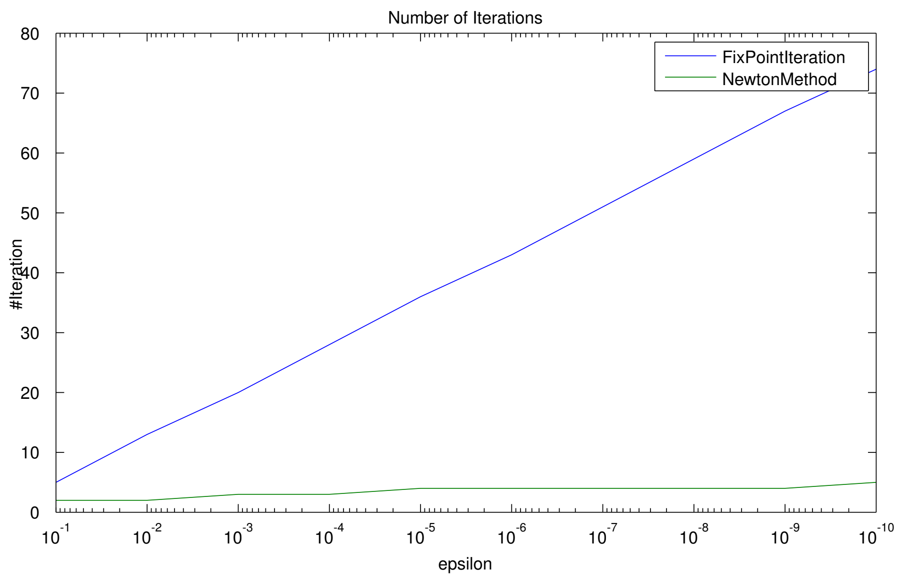


Abbildung 6: Solution Evaluation