Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Dr. J. Peters, C. Daniel, M.Sc. und H. van Hoof, M.Sc.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2013/2014
Lösungsvorschlag der 2. Übung

Aufgabe 1 Erzeugung von Zufallszahlen (4 Punkte)

Eine weitverbreitete Methode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen sind *lineare Kongruenzgeneratoren*. Diese erzeugen ausgehend von einem Startwert x_0 eine Folge weiterer Zahlen durch die Vorschrift

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \mod m$$

Dabei bezeichnet m die Periode, a einen Multiplikator und c eine Verschiebung. Die erzeugten Zahlen entsprechen (je nach Wahl der Parameter) mehr oder weniger einer Gleichverteilung über natürliche Zahlen zwischen 0 und $m-1$.

a) Berechnen Sie für $a = 6$, $c = 27$ und $m = 100$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 27$ neun weitere Zahlen x_1, ..., x_9 und geben Sie diese an. Ermitteln Sie außerdem, wie sich die zehn Zahlen auf die folgenden Intervalle verteilen:

- $n = 5$ Teilintervalle: $[0, 19]$, $[20, 39]$,..., $[80, 99]$.
- $n = 10$ Teilintervalle: $[0, 9]$, $[10, 19]$,..., $[90, 99]$,

b) Zur Prüfung der Qualität des Zufallszahlengenerators bieten sich verschiedene statisitische Tests an. Zunächst soll die Hypothese getestet werden, dass die Zufallsvariablen gleichverteilt sind. Dies kann z.B. durch den sog. χ^2-Test geschehen. Dieser basiert auf der Berechnung des Wertes

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_k - e_k)^2}{e_k}.$$

Diese Zahl gibt an, wie stark die $k = 1, \ldots, n$ beobachteten Größen b_k von den Erwartungswerten e_k abweichen (b_k beschreibt die Aufteilung auf die Intervalle, die sie in Aufgabenteil a) errechnet haben). Bei einer einer Gleichverteilung gilt $e_k = 10/n$ für alle k.

Ist χ^2 kleiner als ein von der Anzahl der Klassen n abhängiger kritischer Wert χ_n, so werden wir die Hypothese der Gleichverteilung akzeptieren. Falls wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% tolerieren, liegt der kritische Wert bei $\chi_{10} = 16.9$ für 10 Intervalle bzw. bei $\chi_5 = 9.5$ für 5 Intervalle. Geben Sie in beiden Fällen an, ob der Test die Gleichverteilungshypothese akzeptiert. *(Warnung: Dieses Beipiel dient der Illustration! Im Normalfall sollten wesentlich mehr als nur 10 Zufallszahlen erzeugt werden!)*

Lösungsvorschlag

Zufallszahlen: 27, 89, 61, 93, 85, 37, 49, 21, 53, 45. (1 Punkt).

Verteilung für 10 Intervalle:

Intervall	b_k	e_k
$[0,9]$	0	1
$[10,19]$	0	1
$[20,29]$	2	1
$[30,39]$	1	1
$[40,49]$	2	1
$[50,59]$	1	1
$[60,69]$	1	1
$[70,79]$	0	1
$[80,89]$	2	1
$[90,99]$	1	1

(1 Punkt)

Da $\chi^2 = 6 < 16.9$ => Akzeptanz. (0.5 Punkt)

Verteilung für 5 Intervalle:

Intervall	b_k	e_k
$[0,19]$	0	2
$[20,39]$	3	2
$[40,59]$	3	2
$[60,79]$	1	2
$[80,99]$	3	2

(1 Punkt)

Da $\chi^2 = 4 < 9.5$ => Akzeptanz (0.5 Punkt)

Aufgabe 2 DES und Zufall (8 Punkte)

In der nachfolgenden Tabelle sind die Ergebnisse einer diskreten Ereignissimulation einer Warteschlange in einem Blumengeschäft angegeben. Für jeden Kunden i bezeichnet dabei:

- $\triangle t_i^{\mathrm{A}}$: die Zeit, die bis zur Ankunft des nächsten Kunden vergeht. Diese sind gleichverteilt aus den Zahlen $\{1,\ldots,10\}$ entnommen.
- $\triangle t_i^{\mathrm{D}}$: die Zeit, die zur Bearbeitung des Wunsches des i. Kunden benötigt wird. Diese ist gleichverteilt in $\{2,3,4,5\}$.
- t_i^{A}, t_i^{S}, t_i^{D}: die Zeiten, welche die Ankunft (ggf. in der Schlange), den Beginn der Bearbeitung (*service*) und das Verlassen des Geschäfts (*departure*) beschreiben.

Alle Zeiten sind in Minuten angegeben.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der gleichverteilten Bedienzeit.
Hinweis: Im diskreten Fall gilt allgemein für den Erwartungswert $E(x) = \sum_k x_k p_k$ *(für alle möglichen Werte* x_k *ist dabei* p_k *die zugehörige Wahrscheinlichkeit); Varianz:* $\sigma^2(x) = E[(x - E[x])^2] = E[x^2] - (E[x]^2)$.

i	$\triangle t_i^{\mathrm{A}}$	$\triangle t_i^{D}$	t_i^{A}	t_i^{S}	t_i^{D}
1	8	3	0	0	3
2	3	2	8	8	10
3	5	2	11	11	13
4	4	3	16	16	19
5	1	2	20	20	22
6	10	4	21	22	26
7	3	3	31	31	34
8	7	4	34	34	38
9	3	4	41	41	45
10	3	3	44	45	48
11	5	3	47	48	51
12	8	4	52	52	56
13	1	5	60	60	65
14	6	3	61	65	68
15	5	4	67	68	72
16	9	2	72	72	74
17	2	5	81	81	86
18	6	3	83	86	89
19	5	4	89	89	93
20	2	5	94	94	99

Berechnen Sie aus den Daten der Tabelle:

b) die mittlere Wartezeit des Kunden,

c) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht warten muss,

d) die gesamte Zeit, die die Floristin auf das Eintreffen neuer Kunden wartet,

e) die mittlere Wartezeit der Kunden, die warten,

f) die mittlere Verweildauer der Kunden im Geschäft.

g) Wenden Sie eine Schätzformel zur approximativen Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz aus der Vorlesung auf die Bedienzeiten aus nebenstehender Tabelle an. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabe (a).

Lösungsvorschlag

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der gleichverteilten Bedienzeit (2 Punkte):

$$
\begin{aligned}
E[\triangle t^D] &= \frac{2+3+4+5}{4} = \frac{7}{2} = 3.5 \\
Var[\triangle t^D] &= E[(\triangle t^D)^2] - \left(E[\triangle t^D]\right)^2 = \frac{4+9+16+25}{4} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Berechne zunächst für alle Kunden die folgenden vier Hilfsgrößen:

- Verweildauer der Kunden: $t_i = t_i^{\mathrm{D}} - t_i^{\mathrm{A}}$
- Wartezeit des Kunden: $w_i^{\mathrm{K}} = t_i^{\mathrm{S}} - t_i^{\mathrm{A}}$
- Wartezeit der Floristin: $w_i^{\mathrm{F}} = t_i^{\mathrm{S}} - t_{i-1}^{\mathrm{D}},\ i > 1,\ w_1^{\mathrm{F}} = t_1^{\mathrm{A}}$

i	w_i^K	t_i	$(w_i^K = 0)$	w_i^F
1	0	3	1	0
2	0	2	1	5
3	0	2	1	1
4	0	3	1	3
5	0	2	1	1
6	1	5	0	0
7	0	3	1	5
8	0	4	1	0
9	0	4	1	3
10	1	4	0	0
11	1	4	0	0
12	0	4	1	1
13	0	5	1	4
14	4	7	0	0
15	1	5	0	0
16	0	2	1	0
17	0	5	1	7
18	3	6	0	0
19	0	4	1	0
20	0	5	1	1

b) Mittlere Wartezeit des Kunden (1 Punkt):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i^K = 11/20 = 0.55min$$

c) Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht warten muss (1 Punkt): 14 von 20 Kunden warten nicht, somit:

$$\text{P(Kunde wartet nicht)} = \frac{14}{20}$$

d) Gesamte Zeit, die die Floristin auf das Eintreffen neuen Kunden wartet, (1 Punkt):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^F = 31min$$

e) Mittlere Wartezeit der Kunden, die warten (6 Kunden warten, Zeit insgesamt 11 Minuten, s.o.) (1 Punkt):

$$\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{n} w_i^K = 11/6min$$

f) Mittlere Verweildauer der Kunden im Geschäft (1 Punkt):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = 79/20min$$

g) Vgl. Seite 13 (1 Punkt):

$$\begin{aligned} S_{20}/20 &= \frac{68}{20} = 3.4 \\ T_{20}/20 - \left(S_{20}/20\right)^2 &= \frac{250}{20} - \left(\frac{68}{20}\right)^2 = 0.94 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse sind von gleicher Größenordnung.

Aufgabe 3 Warteschlangen und Zufall (8 Punkte)

Am Darmstädter Hauptbahnhof ist am Info-Punkt immer einiges los. An einem normalen Tag kommen zu Stoßzeiten durchschnittlich 4 Reisende pro Minute an um einige Fragen zu stellen. Die Person am Schalter benötigt durchschnittlich 12 Sekunden pro Reisende, um die Fragen zu beantworten. Die Zeitspanne zwischen der Ankunft zweier aufeinander folgender Reisender und die Zeit, die der Schalterbeamte zur Beantwortung der Fragen benötigt, seien exponentialverteilt.

a) Wie groß ist die mittlere Auslastung ρ der Person am Schalter?

b) Wie lange benötigen die Fragesteller im Durchschnitt von Ihrer Ankunft am Schalter bis zur Beantwortung der Frage?

c) Wie viele Reisende befinden sich erwartungsgemäß am Schalter (die Person, deren Frage beantwortet wird, zählt dazu)?

d) Wie viele Reisende warten durchschnittlich in der Schlange am Schalter (jetzt ohne den Fragesteller)? *Hinweis: Man kann nicht einfach Eins abziehen für den Fragesteller!*

Wegen einer Marathonverstaltung sind mehr Menschen in der Stadt und suchen um Auskunft. Im Schnitt kommen jetzt 16 Personen pro Minute.

e) Wie verändert sich die mittlere Auslastung ρ? Welche Aussagen kann man über den Zustand des Systems treffen? Welche verschiedenen Maßnahmen kann man treffen, damit diese Veränderung nicht eintritt?

f) Unterstellen Sie ein M/M/c-Modell mit mehreren Personen in der Beratung am Info-Punkt. Wie viele Beratungsplätze c sollten sinnvollerweise mindestens geöffnet werden?

Lösungsvorschlag

a) Mittlere Auslastung (1 Punkt):

$$\lambda = 4/\text{min}, \mu = 5/\text{min} \Rightarrow \rho = 4/5$$

b) Erwartungswert für Verweildauer in Warteschlange (1 Punkt):

$$w = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{5-4}\text{min} = 1\text{min}$$

c) Anzahl der Reisenden (inkl. Fragesteller) entspricht Auslastung des Systems (1 Punkt):

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 4$$

oder

$$L = \lambda \cdot w = 4.$$

d) (1 Punkt) Die Belegung schreibt man als $L(t) = Q(t) + S(t)$ (Belegung der Warteschlange und des Servers). Wir haben $L = E[L(t)] = E[Q(t)] + E[S(t)]$, also

$$Q := E[Q(t)] = L - \rho = 4 - \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5} = 3.2$$

Das ist etwas heuristisch! Ausführlich über Warscheinlichkeiten:
Wir haben Pr[Q(t) = 0] = Pr[L(t) = 0] + Pr[L(t) = 1] =$(1-\rho)(1+\rho)$ sowie Pr[Q(t) = k] = Pr[L(t) = k+1] = $(1-\rho)\rho^{k+1}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} E[Q(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} kPr[Q(t)=k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^{k+1} \\ &= 3\frac{1}{5} = 3.2 \end{aligned}$$

e) Es ist nun $\lambda = 16/min$ und somit die Auslastung $\rho = \lambda/\mu = 16/5 > 1$ (2 Punkte).
Wenn $\rho > 1$, dann ist das System nicht mehr im fließenden Zustand, sondern es gibt einen Rückstau. Zur Entschärfung entweder μ vergrößern (Schnellere Beantwortung) oder zusätzliche Plätze besetzen($c > 1$).

f) Mindestens 4, denn: $\rho < 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{16}{c \cdot 5} < 1 \Leftrightarrow c > 3.2$ (2 Punkte)