Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

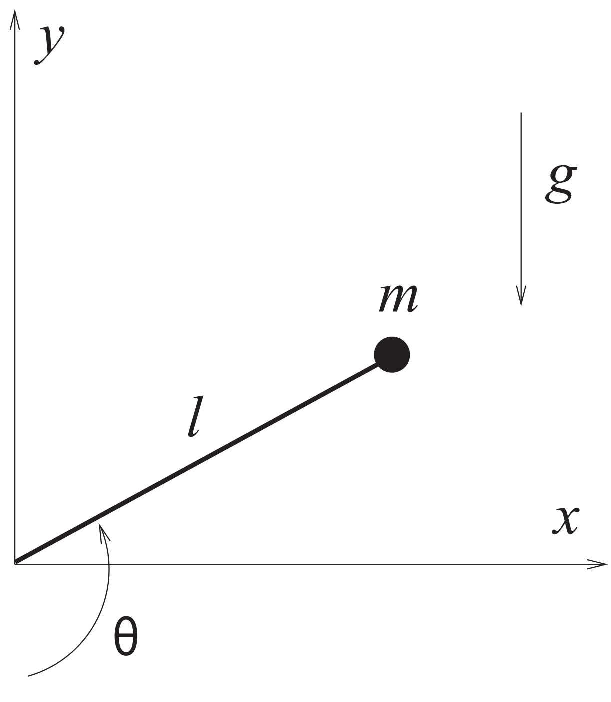
Wintersemester 2012/2013
Lösungsvorschlag der 4. Übung

Aufgabe 1 Steife Differentialgleichungssysteme (10 Punkte)

Wir betrachten ein stark vereinfachtes Modell einer Schiffsschaukel. Eine punktförmige Masse m repräsentiere den Schaukelkorb, der mit einem starren, masselosen Stab der Länge l aufgehängt ist. Für die Auslenkung $\theta = 0$ hängt die Schiffsschaukel senkrecht nach unten. Die Schwingungen der Schaukel sind im Drehgelenk gedämpft mit einer zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ proportionalen Dämpfung. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Als Differentialgleichung für den Winkel $\theta(t)$ ergibt sich damit

$$ml\sin(\theta)g + d\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = 0\,.$$

(a) Transformieren Sie die gegebene DGL auf ein System erster Ordnung. Bestimmen Sie alle Ruhelagen und zeichnen Sie diese in eine Skizze der Modells ein. Sind die berechneten Positionen plausibel? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.



Zu betrachten sei jetzt das spezielle System mit:

$m = 3$ kg, $g = 10$ m/s^2, $d = 2$ Nms, und $l = 2$ m.

(b) Bestimmen Sie die Jacobimatrix an den Gleichgewichtspunkten und nennen Sie die um die Gleichgewichtslagen linearisierten Systeme.

(c) Ist das linearisierte System stabil in der Nähe aller Gleichgewichtspunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Ist das System in der Umgebung der unteren Ruhelage ($\theta = 0$) steif? Betrachten Sie dazu die Zeitcharakteristiken.

Lösungsvorschlag

a)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{ml^2}\left(ml\sin(\theta)g + d\dot{\theta}\right) \end{pmatrix} \text{(1 Punkt)}$$

Fuer eine Gleichgewichtslage muessen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}$ und Beschleunigungen $\ddot{\theta}$ null sein. Also:

$$0 = \dot{\theta},$$

$$0 = -\frac{1}{ml^2}\left(ml\sin(\theta)g + d\dot{\theta}\right) = -\frac{1}{ml^2}\left(ml\sin(\theta)g\right)$$

Daraus folgt, dass die Ruhelagen an $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sein muessen. (2 Punkte)

b)

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & -\frac{d}{ml^2} \end{pmatrix}$$

Das linearisierte System lautet

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & -\frac{d}{ml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - k\pi \\ x_2 - 0 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

c) Die Eigenwerte des linearisierten Systems sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1/6 \pm \sqrt{1/36 + 20}}{2},$$

und

$$\lambda_{3,4} = \frac{-1/6 \pm \sqrt{1/36 - 20}}{2}$$

(2 Punkte)

Dabei haben $\lambda_{1,2}$ positive reelle Anteile und sind deshalb instabil, waehrend $\lambda_{3,4}$ nur negative reelle Anteile haben und gedaempft schwingen. (1 Punkt)

d) Da die Eigenwerte konjugiert komplex sind, ist Tmax = Tmin, und das Steifheitsmass= 1, also ist das System nicht steif. (2 Punkte)

Aufgabe 2 Linearisierung um eine Referenztrajektorie (10 Punkte)

Die Gleichungen die die Bewegungsbahn eines Satelliten in einer Bahn um einen Planeten M beschreiben sind

$$\ddot{d} = d\dot{\alpha}^2 - \mu/d^2$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2\dot{d}\dot{\alpha}}{d}$$

wobei d die Distanz zwischen Satellit und M beschreibt, α die Winkel, und μ das Produkt der Gravitationskonstante G und der Masse von M. (Die Beschleunigung in Richtung $\boldsymbol{r}$ ist gleich der Anziehungskraft geteilt durch die Satellitmasse m_s: $\ddot{d} - d\dot{\alpha}^2 = m_s\mu/(d^2 m_s)$, die Beschleunigung in Richtung $\boldsymbol{\theta}$: $d\ddot{\alpha} + 2\dot{d}\dot{\alpha} = 0$.)

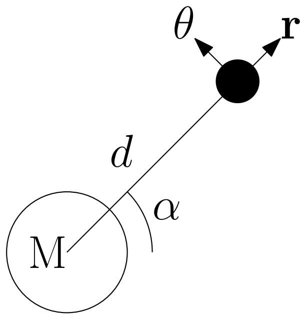


Abbildung 1: Planet M, Satellit, und die Polarkoordinate d, α.

a) Transformieren Sie das Gleichungssystem in ein System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{d} \\ \ddot{d} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(d, \dot{d}, \dot{\alpha})$$

b) Linearisieren Sie das erhaltene System. Das heißt, schreiben sie

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{d} \\ \Delta\ddot{d} \\ \Delta\ddot{\alpha} \end{pmatrix} = J(d, \dot{d}, \dot{\alpha}) \begin{pmatrix} \Delta d \\ \Delta\dot{d} \\ \Delta\dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

wobei $J(d, \dot{d}, \dot{\alpha})$ die Jacobimatrix von $\boldsymbol{f}$ ist.

c) Eine kreisförmige Bahn ist eine mögliche Lösung des Systems. Die entsprechenden Sollwerte sind $d_s = d_0$, $\dot{d} = 0$, $\dot{\alpha} = \omega$, und $\mu = d_0^3\omega^2$. Linearisieren Sie das System um die Referenztrajektorie.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $J(d, \dot{d}, \dot{\alpha})$. Was können Sie über die Stabilität des Systems sagen?

Lösungsvorschlag

a)

$$\begin{pmatrix} \dot{d} \\ \ddot{d} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{d} \\ d\dot{\alpha}^2 - \mu/d^2 \\ -\frac{2\dot{d}\dot{\alpha}}{d} \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

b)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{d}}{\partial d} & \frac{\partial \dot{d}}{\partial \dot{d}} & \frac{\partial \dot{d}}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial \ddot{d}}{\partial d} & \frac{\partial \ddot{d}}{\partial \dot{d}} & \frac{\partial \ddot{d}}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial d} & \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \dot{d}} & \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dot{\alpha}^2 + 2\frac{\mu}{d^3} & 0 & 2d\dot{\alpha} \\ \frac{2\dot{d}\dot{\alpha}}{d^2} & \frac{-2\dot{\alpha}}{d} & \frac{-2\dot{d}}{d} \end{pmatrix} \tag{1}$$

(2 Punkte)

c) Sollwerte in erhaltene Lösung einsetzen:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 2d_0\omega \\ 0 & \frac{-2\omega}{d_0} & 0 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

d) Die Determinante

$$|J - I\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 2d_0\omega \\ 0 & \frac{-2\omega}{d_0} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \omega^2\lambda,$$

Die Eigenwerte

$$0 = |J - I\lambda| = -\lambda^3 - \omega^2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \omega^2) \rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 = -\omega^2 \rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -i\omega \vee \lambda = i\omega.$$

(3 Punkte)

Alle Eigenwerte haben Realteil Null. Deswegen können wir basierend auf den Eigenwerten allein keine Aussage über die Stabilität machen. (1 Punkt)