Formale Grundlagen der Informatik I
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
28. Mai 2014

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Konstruktion von Turingmaschinen)
Beschreiben Sie formal (d.h. unter Angabe der Komponenten Σ, Q, δ) eine deterministische Turingmaschine für die folgende Funktion: Bei Eingabe der Binärdarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ soll die Zahl $2 \cdot n$ (wieder in Binärdarstellung) ausgegeben werden.

Tipp: Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass Sie die Zahl n in der Form $b_0 b_1 \dots b_k$ (von links nach rechts geschrieben) auf dem Band vorliegen haben, wobei $n = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot 2^i$, $b_i \in \{0, 1\}$.

Aufgabe G17 (Simulation von Turingmaschinen)
Beschreiben Sie informell wie eine deterministische Turingmaschine $\mathscr{M}_0$ für jeden der nachfolgenden Punkte konstruiert werden kann. Geben Sie die dazu benötigten Zustände von $\mathscr{M}_0$ an und beschreiben Sie deren Funktion.

(a) Gegeben eine feste Zeichenkette $c = c_1 \dots c_k \in \Sigma^*$. Die Maschine $\mathscr{M}_0$ lösche die Eingabe, schreibe c auf das Eingabeband, fahre zurück an die Startposition und halte.

(b) Gegeben eine feste Turingmaschine $\mathscr{M}$ und eine feste Zeichenkette $c \in \Sigma^*$. Die Maschine $\mathscr{M}_0$ lösche ihre Eingabe und rechne anschliessend weiter wie die Maschine $\mathscr{M}$ bei Eingabe der Konstanten c.

(c) Gegeben eine feste Turingmaschine $\mathscr{M}$. Die Maschine $\mathscr{M}_0$ simuliere $\mathscr{M}$ auf Eingabe $\langle \mathscr{M} \rangle$ so dass

$$
\begin{aligned}
w \xrightarrow{\mathscr{M}_0} \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathscr{M} \rangle \xrightarrow{\mathscr{M}} q^+, \\
w \xrightarrow{\mathscr{M}_0} q^- \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathscr{M} \rangle \xrightarrow{\mathscr{M}} q^-
\end{aligned}
$$

für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ der Maschine $\mathscr{M}_0$. Sie dürfen hier verwenden, dass für alle Turingmaschinen $\mathscr{M}$ solch eine Kodierung $\langle \mathscr{M} \rangle$ existiert[1].

Bemerkung: In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die Eingaben zu Σ^* gehören (d.h. wir erlauben $\Box$ nicht als Eingabe).

Aufgabe G18 (Entscheidbarkeit)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Sprache $L_k := \left\{ \langle \mathscr{M}, w \rangle \;\middle|\; \mathscr{M} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht innerhalb von } k \text{ Schritten} \right\}$ für eine Konstante $k \in \mathbb{N}$ ist entscheidbar.

(b) Die Sprache $L_A := \left\{ \langle \mathscr{M} \rangle \;\middle|\; \forall w \in \Sigma^* \; \mathscr{M} \text{ hält bei Eingabe } w \right\}$ ist entscheidbar.

[1] siehe auch: Gödelnummer (`http://de.wikipedia.org/wiki/Gödelnummer`)

Hausübung

Diese Hausübung ist **online in Moodle** (https://moodle.tu-darmstadt.de/) **bis 20:00 am 6. Juni 2014** abzugeben. Um das zu tun, klicken Sie auf *Be6* im Abschitt *Übungen FGdI1* auf der Moodle-Seite der Veranstaltung.

Aufgabe H16 (Entscheidbarkeit) (12 Punkte)

Definiere die Sprache $L := \{ \langle \mathscr{M} \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* \text{ sodass } \mathscr{M} \text{ bei Eingabe } w \text{ hält} \}$. Ist L entscheidbar? Ist L semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antworte.

Aufgabe H17 (Simulation von Turingmaschinen) (24 Punkte)

Implementieren Sie die folgenden Turingmaschinen über dem Alphabet $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ mithilfe des Turingmaschinensimulators
http://db.ing.puc.cl/turingmachine/

(a) Die Turingmaschine aus **Aufgabe G16**.

(b) Die Turingmaschine, die bei Eingabe der Binärdarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n+1$ (wieder in Binärdarstellung) ausgibt. Sie können annehmen, dass alle Binärzahlen umgekehrt (wie in **Aufgabe G16**) angegeben sind.

(c) Die Turingmaschine, die Ihre Matrikelnummer in Binärform auf das Band schreibt. Sie können annehmen, dass das Band am Anfang leer ist.

(d) Die Turingmaschine, die Implikation im folgenden Sinne berechnet:
- Die Maschine stoppt genau dann, wenn es genau zwei Zeichen in der Eingabe gibt. Wenn das der Fall ist:
- Die Maschine löscht die zwei Zeichen, schreibt stattdessen den Wahrheitswert der Implikation auf das Band und terminiert mit dem Kopf auf diesem Ergebnis, und zwar im akzeptierenden Zustand, wenn das Ergenis 1 ist, und im verwerfenden Zustand, wenn das Ergebnis 0 ist.

Hier ist zu verstehen, dass 1 Wahrheit und 0 Falschheit darstellt. Das heißt, die Eingabe 10 führt zum Ergebnis 0 und die anderen zweistelligen Eingaben zu 1.

Bemerkung: **In diesem Simulator startet der Lesekopf auf dem ersten Zeichen der Eingabe**, statt links vor der Eingabe, wie in den Folien und im Skript! Passen Sie Ihre Lösung entsprechend an.