

Formale Grundlagen der Informatik I

3. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

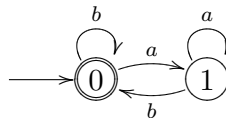
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Aufwärmen)

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche Sprache wird von dem folgenden DFA \mathcal{A} akzeptiert?



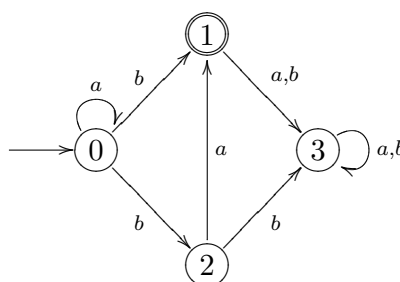
(b) Beschreiben Sie $L(\mathcal{A})$ durch einen regulären Ausdruck.

Lösungsskizze:

- (a) $L(\mathcal{A})$ besteht aus den a/b -Folgen, in denen nach jedem a irgendwann ein b folgt. Anders gesagt besteht die Sprache aus allen Folgen, die auf b enden und dem leeren Wort.
- (b) Mögliche reguläre Ausdrücke sind: $(b + aa^*b)^*$, $(a + b)^*ab^*b + b^*$, oder auch $\emptyset^* + (a + b)^*b$.

Aufgabe G2 (Potenzmengentrick)

Betrachten Sie den folgenden NFA:

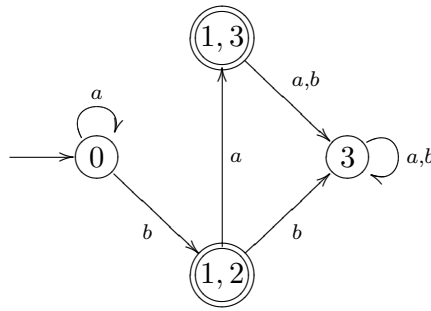


Bestimmen Sie einen DFA, der genau dieselbe Sprache erkennt. Geben Sie neben dem Automaten selbst auch die im Zuge der Lösung erstellte Tabelle an (siehe Skript, Beispiel 2.2.10).

Lösungsskizze:

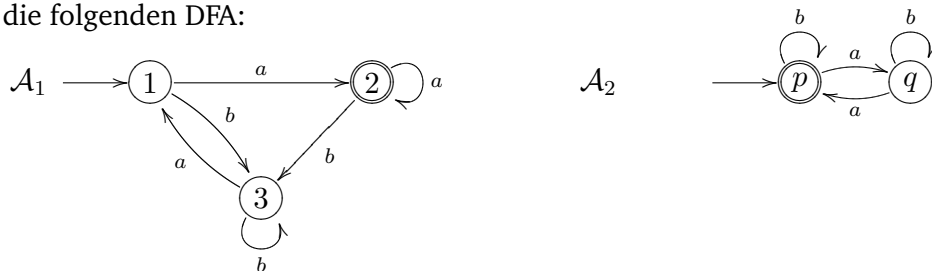
δ	a	b
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1, 2\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{3\}$
$\{1, 3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$

Die erreichbare Zuständen sind $\{0\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{3\}$. Akzeptierend sind $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$:



Aufgabe G3

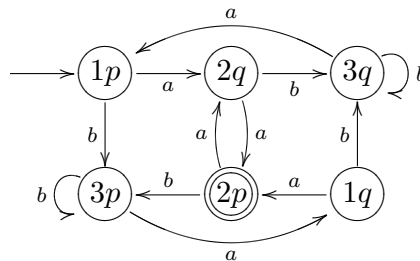
Gegeben seien die folgenden DFA:



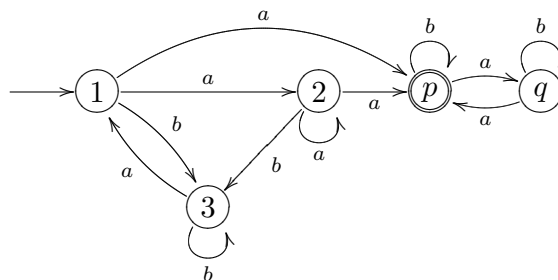
- (a) Geben Sie einen DFA an, der $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$ erkennt.
 (b) Geben Sie einen NFA an, der $L(\mathcal{A}_1) \cdot L(\mathcal{A}_2)$ erkennt.
 Extra: Was ändert sich an der Lösung, wenn der Zustand 1 in \mathcal{A}_1 auch akzeptierend ist?

Lösungsskizze:

- (a) Wir bilden den Produktautomaten (vgl. Lemma 2.2.11 auf Seite 30 im Skript):



- (b) Wir benutzen die Konstruktion aus Lemma 2.2.14(a) auf Seite 31 im Skript:



Falls Zustand 1 in \mathcal{A}_1 auch akzeptierend ist, muss in diesem Automaten der Zustand 1 auch akzeptierend sein und es muss eine a -Transition von 1 nach q sowie eine b -Transition von 1 nach p und eine a -Transition von 3 nach p hinzugefügt werden (warum?).

Hausübung

Aufgabe H1

(6 Punkte)

L und M seien Σ -Sprachen.

- (a) Zeigen Sie, dass $L \subseteq L^*$ und $(L \subseteq M^* \Rightarrow L^* \subseteq M^*)$.
- (b) Schließen Sie aus (a), dass $(L^*)^* = L^*$ und $(L \subseteq M \Rightarrow L^* \subseteq M^*)$.
- (c) Zeigen Sie, dass $(L \cup M)^* = (L^* M^*)^*$.

Aufgabe H2 (NFA-Umkehrung)

Für ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ wird w^{-1} durch $a_n \dots a_1$ definiert (d.h. w wird rückwärts gelesen). Die Sprache $\text{rev}(L)$ ist definiert als

$$\text{rev}(L) := \{w^{-1} \in \Sigma^* \mid w \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache L die Umkehrung $\text{rev}(L)$ regulär ist, indem Sie zeigen, wie aus einem NFA, der die Sprache L erkennt, ein NFA, der die Sprache $\text{rev}(L)$ erkennt, allgemein konstruiert werden kann.

Hinweise:

- Überlegen Sie sich dazu beispielhaft für den Automaten \mathcal{A}_1 aus Aufgabe G2 zunächst, wie solch ein „umgekehrter NFA“, erkennend die Sprache $\text{rev}(L(\mathcal{A}_1))$, auszusehen hat.
- Überlegen Sie sich, wie sich die Umkehrung eines NFA mit mehreren akzeptierenden Zuständen durch Ausnutzung der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen auf den Fall mit nur einem akzeptierenden Zustand zurückführen lässt.