Formale Grundlagen der Informatik I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2012**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Relationen)
Wir stellen einen gerichteten Graphen als ein Tupel (V,E) dar, wobei V die Knotenmenge und $E \subseteq V \times V$ die Kantenrelation ist. $(x,y) \in E$ soll genau dann zutreffen, wenn es eine Kante von x nach y gibt; wir schreiben auch $x \longrightarrow y$ um diesen Sachverhalt auszudrücken.

(a) Sei $R_0 \subseteq V \times V$ die Menge aller Paare (p,q), so dass es eine Folge von Kanten $p \longrightarrow \ldots \longrightarrow q$ von p nach q gibt (die Folge kann die Länge 0 haben; insbesondere erlauben wir $p = q$). Und sei $S_0 := \{(p,q) : (p,q) \in R_0 \text{ und } (q,p) \in R_0\}$.
Beweisen Sie, dass R_0 transitiv und S_0 eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $R_1 := \{(p,q) : (p,q) \in E \text{ oder } (q,p) \in E\}$ und S_1 die Menge aller Paare (p,q), so dass es eine Folge $\langle p_0,\ldots,p_n\rangle$ gibt, mit $p = p_0, q = p_n$ und $(p_i, p_{i+1}) \in R_1$ für alle $i < n$.
Zeigen Sie, dass R_1 symmetrisch und S_1 eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Sei jetzt $R_2 := \{(p,q) : (p,q) \in E \text{ und } (q,p) \in E\}$ und S_2 definiert wie S_1 in (b), wobei nun für alle $i < n$ gelten soll, dass $(p_i, p_{i+1}) \in R_2$.
Zeigen Sie, dass R_2 symmetrisch und S_2 eine Äquivalenzrelation ist.

(d) Welche Beziehungen gibt es zwischen S_0, S_1 und S_2? (Machen Sie sich dazu klar, was die intuitive Bedeutung dieser Relationen ist.) Finden Sie auch einen Graphen in dem alle drei Relationen unterschiedlichen Bedeutungen haben.

Aufgabe G2 ([Boolesche Algebren])
Sei $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ eine Boolesche Algebra. Zeigen Sie die folgende Regeln, wobei Sie nur die folgende Axiome verwenden:

BA1: $+$ und $\cdot$ sind assoziativ und kommutativ, d.h. für alle $x,y,z \in B$:

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+y = y+x,$$
$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z), \quad x\cdot y = y\cdot x.$$

BA2: $+$ und $\cdot$ sind distributiv, d.h. für alle $x,y,z \in B$:

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z, \quad x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z).$$

BA3: 0 und 1 sind neutrale Elemente bzgl. $+$ und $\cdot$:

$$x+0 = x, \quad x\cdot 1 = x \text{ für alle } x \in B.$$

BA4: Komplement: $0 \neq 1$ und $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$ für alle $x \in B$.

(i) $0 \cdot 0 = 0$,

(ii) $1 + 1 = 1$,

(iii) $x + x = x$,

(iv) $x \cdot x = x$,

(v) $x \cdot 0 = 0$,

(vi) $x + 1 = 1$,

(vii) $x + (x \cdot y) = x$,

(viii) $x \cdot (x + y) = x$.

Aufgabe G3 (Induktion)
Sei $z = \sum_{i=0}^{k} z_i 10^i$ mit $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (d.h. $z_k z_{k-1} \ldots z_0$ ist die Dezimaldarstellung von z). Die *Quersumme* von z ist die Zahl

$$q(z) = \sum_{i=0}^{k} z_i.$$

(a) Beweisen Sie, dass $z \equiv_9 q(z)$ und dass deshalb die Zahl z genau dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme dies ist.

Hinweis. Zeigen Sie mit Induktion, dass $10^n - 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Zahl z genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i z_i = z_0 - z_1 + z_2 - \ldots + (-1)^k z_k$$

dies ist.

Aufgabe G4
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen „f ist in $\mathcal{O}(g)$” (kurz „$f \in \mathcal{O}(g)$”), falls es Konstanten K, n_0 gibt, so dass

$$f(n) \leq K \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wir schreiben $f \sim g$, falls $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$. $f \sim g$ besagt, dass f und g dieselbe Wachstumsrate haben.
Zeigen Sie, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist.

Hausübung

Aufgabe H1 ([Relationen])

(i) Welche der Eigenschaften „Reflexivität”, „Symmetrie” und „Transitivität” haben die folgenden binären Relationen

$$R_1 = \{(1,2), (5,6), (2,3), (1,3), (4,4)\} \text{ auf } A_1 = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \text{ auf } A_2 = \{1,2,3\},$$
$$R_3 = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\} \text{ auf } A_2 = \{1,2\}?$$

(ii) Sei $p : Y \to X$ eine Surjektion. Zeigen Sie, dass durch

$$y_0 \sim y_1 :\Leftrightarrow p(y_0) = p(y_1)$$

eine Äquivalenzrelation auf Y definiert wird. Zeigen Sie auch, dass es eine Bijektion zwischen $Y/\sim$ und X gibt.

Aufgabe H2 ([Boolesche Algebren]) (6 Punkte)

Sei $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ eine Boolesche Algebra.

(i) Seien $x, y \in B$ so, dass

$$x \cdot y = 0 \text{ und } x + y = 1.$$

Zeigen Sie, dass $y = x'$. (Verwenden Sie hier und in (ii) nur die Axiome und Regeln die Sie in Aufgabe (G3) abgeleitet haben.)
Hinweis: beweisen Sie $y = x'y$ und $x' = x'y$.

(ii) Zeigen Sie die De Morgan Regeln:

$$\begin{aligned} 0' &= 1, \\ 1' &= 0, \\ (x+y)' &= x' \cdot y', \\ (x \cdot y)' &= x' + y', \\ x'' &= x. \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie, dass durch $\phi(b) = b'$ ein Isomorphismus von Booleschen Algebren

$$(B, 0, 1, +, \cdot, ') \xrightarrow{\phi} (B, 1, 0, \cdot, +, ')$$

definiert wird.