Formale Grundlagen der Informatik I
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
13. 05. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Kontextfreie Grammatik)
Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \big(\{a, b\}, \{X_0, X, Y\}, P, X_0\big)$ mit

$$\begin{array}{rlll} P: & X_0 & \to & aXaY \\ & X & \to & aXa \mid Y \\ & Y & \to & bY \mid \varepsilon. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache.

(b) Bestimmen Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' ohne ε-Produktionen.

Aufgabe G11 (Chomsky-Normalform, CYK-Algorithmus)
Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \big(\{a, b\}, \{X_0, X, Y\}, P, X_0\big)$ mit

$$\begin{array}{rlll} P: & X_0 & \to & aXaY \mid aXa \mid aaY \mid aa \\ & X & \to & aXa \mid Y \mid aa \\ & Y & \to & bY \mid b. \end{array}$$

(a) Konstruieren Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(G')$.

(b) Entscheiden Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = aabaa$ in der von G' erzeugten Sprache $\mathrm{L}(G')$ liegt. Ist w in $\mathrm{L}(G')$ enthalten, so geben Sie zudem eine Ableitung in G' an.

Aufgabe G12 (Kontextfreie Grammatik)

(a) Welche Sprache beschreibt die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ mit $\Sigma := \{a, b, c, \$\}$, $V := \{S, A, B, X, Y\}$ und Produktionen

$$\begin{array}{ll} S \to AB & Xa \to aX \\ A \to aXA \mid \$ & X\$ \to \$Y \\ B \to bYB \mid \$ & Yb \to bY \\ & Y\$ \to \$c \end{array}$$

Beweisen Sie ihre Behauptung durch Induktion über die Menge der in G ableitbaren $(V \cup \Sigma)$-Wörter. Stellen Sie hierzu zunächst eine geeignete Induktionsbehauptung auf.

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache aus (a) an, d. h. eine Grammatik, bei welcher die linke Seite jeder Produktion aus einer einzigen Variablen besteht.

Hausübung

– Abgabe am 22.5.-24.5. 2013 in der Übung. Denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen. –

Aufgabe H10 (Pumping Lemma vs. Myhill-Nerode) (3 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \left\{p\,q\,q^{-1} \mid p, q \in \Sigma^+\right\}$ (für das Symbol $^{-1}$ siehe Übung 2.5.4 im Skript).

(a) Zeigen Sie, dass L die Aussage des Pumping-Lemmas erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass L trotzdem nicht regulär ist.
Tipp: Benutzen Sie den Satz von Myhill-Nerode!

Aufgabe H11 (Chomsky-Normalform, CYK-Algorithmus) (3 Punkte)
Gegeben sei die Grammatik $G = \big(\{.\} \cup \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots, \mathtt{9}\}, \{S, F, X\}, P, S\big)$,

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to X \,.\, F \mid X \\ & X \to \mathtt{0} \mid i\,F \qquad (i = \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots, \mathtt{9}) \\ & F \to j\,F \mid j \qquad (j = \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots, \mathtt{9}) \end{aligned}$$

(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, welche Sprache von der Grammatik G akzeptiert wird.

(b) Überführen Sie G in eine äquivalente Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

(c) Entscheiden Sie durch Ausführung des CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = \mathtt{20.540}$ in der von G' erzeugten Sprache $\mathrm{L}\left(G'\right)$ liegt. (Der CYK-Algorithmus sei dabei wie in der Übung in einer $|w| \times |w|$-Tabelle durchzuführen.) Ist w in $\mathrm{L}\left(G'\right)$ enthalten, so geben Sie zudem eine Ableitung in G' an.

Aufgabe H12 (Chomsky-Typ einer Sprache) (4 Punkte)
In der (fiktiven) Programmiersprache TUDL gibt es genau zwei Befehle: $\underline{\textit{produce}}$ □ und $\underline{\textit{consume}}$ □, wobei □ durch einen Variablennamen zu ersetzen ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf zwei Variablennamen: x und y. Unser Alphabet ist daher die Menge $\Sigma := \{x, y, \underline{\textit{produce}}, \underline{\textit{consume}}\}$.
Ein gültiges TUDL-Programm erfüllt die folgenden beiden Bedingungen:

- Bevor eine Variable □ konsumiert werden kann, muss sie produziert worden sein; d. h. jedem $\underline{\textit{consume}}$ □ muss ein $\underline{\textit{produce}}$ □ vorausgegangen sein.
- Am Ende wollen wir keine Reste haben, d. h. die Anzahl der $\underline{\textit{produce}}$ □ muss mit der Anzahl der $\underline{\textit{consume}}$ □ übereinstimmen.

(a) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache TUDL an.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache TUDL ist kontextfrei.

Minitest

Aufgabe M13

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Bestimmen Sie die korrekten Implikationen:

L ist regulär	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	es gilt die Aussage aus dem Pumping-Lemma, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $x \in L$ mit $\lvert x\rvert \geq n$ in $x = u \cdot v \cdot w$ zerlegen lässt...
	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	die Relation $\sim_L$ hat endlichen Index

Aufgabe M14

Sei $\mathcal{A}$ ein DEA und $\mathcal{B}$ ein NEA. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Es gibt einen Algorithmus, der entscheidet, ob $\mathcal{A}$ minimal ist.

☐ wahr ☐ falsch

(b) Es gibt bis auf Isomorphie genau einen minimalen DEA, der die gleiche Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt.

☐ wahr ☐ falsch

(c) Es gibt bis auf Isomorphie genau einen minimalen NEA, der die gleiche Sprache wie $\mathcal{B}$ erkennt.

☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe M15

Betrachten Sie die Grammatiken $G_i = \big(\{a, b\}, S, X, Y\}, P_i, S\big)$ für $i \in \{1, 2\}$ und mit

$$
\begin{array}{llll}
P_1\colon & S & \to & XY \\
 & X & \to & a \mid aX \\
 & Y & \to & b \mid Yb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
P_2\colon & S & \to & XY \\
 & X & \to & a \mid aX \\
 & Y & \to & b \mid Yb \\
 & XY & \to & YX
\end{array}
$$

(a) Welche der folgenden Sprachen beschreibt die Grammatik G_1?

☐ $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

☐ $\mathtt{L}\left(\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\right)$

☐ $\mathtt{L}\left(\mathtt{aa}^*\mathtt{bb}^*\right)$

☐ $\mathtt{L}\left((\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\right)$

(b) Welchen Typ haben die Grammatiken G_1 und G_2? (Mehrere Antworten möglich.)

- G_1: ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐ 0
- G_2: ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐ 0