Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

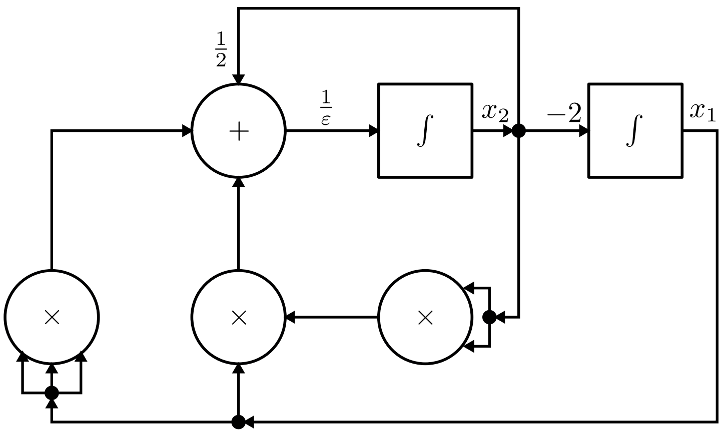
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2013/2014

Lösungsvorschlag der 9. Übung

Aufgabe 1 Blockorientierte Darstellung des Systemmodells (10 Punkte)

a) Übersetzen Sie folgende Blockdiagrammdarstellung in ein Differentialgleichungssystem.



b) Zeichnen Sie eine Blockdiagrammdarstellung für das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{\alpha}(m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2) + l_2 m_2 g \sin(\alpha) + l_1 m_1 g \sin(\alpha - \varphi) = 0 \ .$$

Dabei sind die Parameter m_1, l_1, m_2, l_2 und φ Eingänge des Modells. Verwenden Sie in Ihrer Darstellung die Blöcke $\langle l_1 \rangle \rightarrow$, $\langle l_2 \rangle \rightarrow$, $\langle m_1 \rangle \rightarrow$, $\langle m_2 \rangle \rightarrow$, $\langle \varphi \rangle \rightarrow$ für Systemeingänge; $\rightarrow (\sin) \rightarrow$, $\rightarrow (\frac{1}{x}) \rightarrow$ für Funktionen und darüber hinaus nur solche Blöcke, die auch in Aufgabe (a) vorkommen.

Lösungsvorschlag

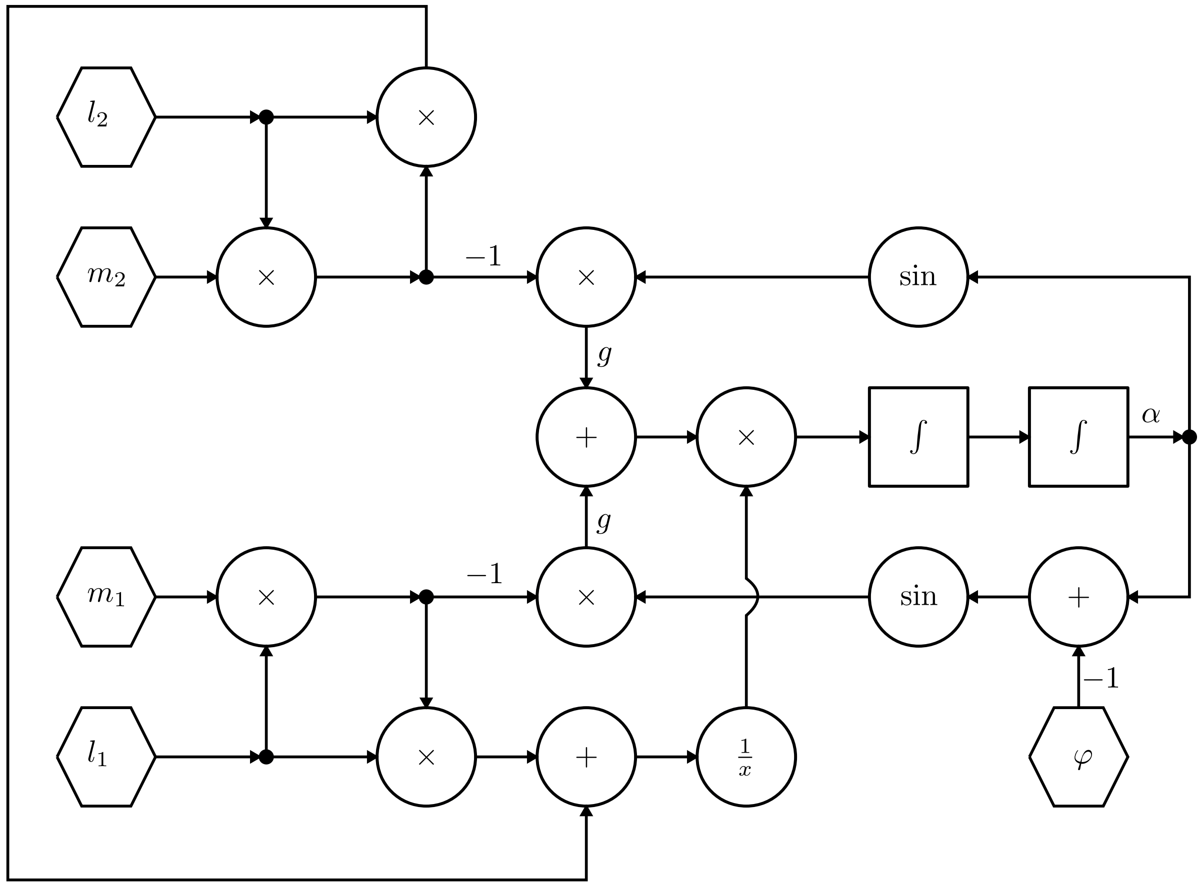
a) Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (4 Punkte):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}(\frac{1}{2}x_2 + {x_1}^3 + x_1 {x_2}^2) \end{pmatrix}$$

b) Auflösen nach $\ddot{\alpha}$ (6 Punkte):

$$\ddot{\alpha}(m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2) + l_2 m_2 g \sin(\alpha) + l_1 m_1 g \sin(\alpha - \varphi) = 0 \ .$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-l_2 m_2 g \sin(\alpha) - l_1 m_1 g \sin(\alpha - \varphi)}{(m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2)} .$$



Aufgabe 2 Schritte einer Simulationsstudie (10 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir einige Teilschritte einer Simulationsstudie.

Problemspezifikation

Wir betrachten ein Kind, welches an einem Stab ein Spielzeug hinter sich hinter sich her zieht (bzw. vor sich her schiebt). Kind und Spielzeug werden als Punkte in der $x_1 x_2$-Ebene modelliert: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ bezeichnet die Position des Kindes, $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), S_2(t))^T$ bezeichnet die Position des Spielzeugs. Der Stab kann über den Vektor

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t) - x_1(t) \\ S_2(t) - x_2(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Der Abstand zwischen Kind und Spielzeug ist konstant und ergibt sich aus der Länge $L := \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)}$ des Stabes.

Exemplarisch betrachten wir den Fall, dass Kind und Spielzeug an den Positionen $(x_1(0), x_2(0))^T = (5, 0)^T$ bzw. $(S_1(0), S_2(0))^T = (10, 0)^T$ starten. Das Kind bewege sich mit der Geschwindigkeit $u_1(t) = -5 \sin t$ in x_1-Richtung und $u_2(t) = 5 \cos t$ in x_2-Richtung.

Modellierung

a) Beschreiben Sie die Bahn des Kindes $(x_1(t), x_2(t))^T$.

b) Die Bewegung des Kindes wird als vorgegebene Kontrolle betrachtet. Leiten Sie nun in einem nächsten Schritt eine Bewegungsgleichung für das Spielzeug in den Unbekannten S_1 und S_2 her. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeiten, wie in Abbildung 1 dargestellt ist, über den Stab gekoppelt sind. Die (vektorwertige!) Geschwindigkeit des Spielzeugs ergibt sich, indem man nur den Geschwindigkeitsanteil berücksichtigt, der über den Stab weitergegeben wird. Der Stab wird dabei durch den Vektor **d** beschrieben.

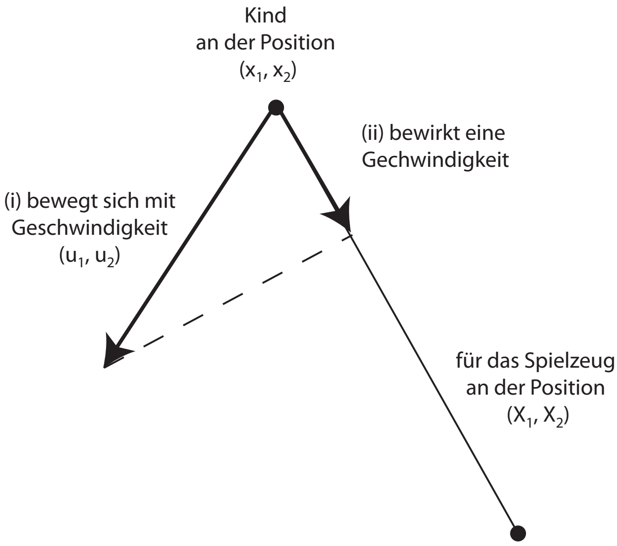


Abbildung 1: Skizze der Geschwindigkeitsübertragung zwischen Kind und Spielzeug.

Implementierung

c) Bestimmen Sie $(S_1, S_2)^T$ numerisch. Führen Sie dazu sieben Schritte mit dem expliziten Eulerverfahren mit einer konstanten Zeitschrittweite $h = 0.5$ durch. *Hinweis: Sie dürfen diese Aufgabe in Matlab bearbeiten, z.B. mittels des Verfahrens das Sie letzte Woche implementiert haben!*

d) Visualisieren Sie die in (c) erhältenen Ergebnisse. Erklären Sie, welche Werte Sie zum Visualisieren ausgewählt haben und begründen Sie, für welche Visualisierungsmöglichkeit Sie sich entscheiden haben.

Validierung

e) In dem Validierungsschritt wird geprüft, ob die Modellergebnisse plausibel sind. Ermitteln Sie den Abstand der sich zwischen Spielzeug und Kind ergibt. Ist dieser konstant? Geben Sie eine Begründung für Ihre Beobachtung.

Lösungsvorschlag

a) Ausgangsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 = -5\sin t,\ x_1(0) = 5 \\ \dot{x}_2 &= u_2 = 5\cos t,\ x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Integration:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5+\int_0^t -5\sin s\,ds = 5+(5\cos t-5) = 5\cos t\\
x_2 &= 0+\int_0^t 5\cos s\,ds = 5\sin t - 0 = 5\sin t
\end{aligned}
$$

(1 Punkt) (Das entspricht einem Kreis um den Ursprung mit Radius 5).

b) Vektorwertig erhalten wir:

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{d}\rangle}{||\mathbf{d}||^2}\mathbf{d}$$

bzw. komponentenweise:

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= \frac{u_1 d_1 + u_2 d_2}{d_1^2+d_2^2} d_1,\\
\dot{S}_2 &= \frac{u_1 d_1 + u_2 d_2}{d_1^2+d_2^2} d_2
\end{aligned}
$$

(3 Punkte)

c) Eine Tabelle der Iterationen findet sich in Tabelle 1. Hierbei wurde die Position **x** analytisch berechnet. Wenn die d, u aus dem nächsten Schritt verwendet werden ergibt sich Tabelle 2. (3 Punkte)

Tabelle 1: Ergebnisse für expliziten Euler ($dt = 0.5$, $L = 5$).

	Kind				**Spielzeug**		**stab**
t	x_1	x_2	u_1	u_2	S_1	S_2	$\|\|d\|\|$
0	5.0000	0	0	5.0000	10.0000	0	5.0000
0.5000	4.3879	2.3971	-2.3971	4.3879	10.0000	0	6.1026
1.0000	2.7015	4.2074	-4.2074	2.7015	8.1938	0.7715	6.4785
1.5000	0.3537	4.9875	-4.9875	0.3537	6.0745	2.0973	6.4095
2.0000	-2.0807	4.5465	-4.5465	-2.0807	4.0167	3.1369	6.2582
2.5000	-4.0057	2.9924	-2.9924	-4.0057	2.0871	3.5830	6.1214
3.0000	-4.9500	0.7056	-0.7056	-4.9500	0.4125	3.4207	6.0106
3.5000	-4.6823	-1.7539	1.7539	-4.6823	-0.8657	2.7735	5.9214

d) Es bieten sich mehrere Visualisierungsmöglichkeiten an. Bei guter Begründung werden alle Visualisierungen akzeptiert. Relevante Werte sind z.B. Position des Kindes, Position des Spielzeugs, länge des Stabs, Geschwindigkeit des Kindes. Mögliche Visualisierungsmöglichkeiten sind ein Phasenplot oder ein Zeitverlauf. Beispiele werden in Fig. 2 gezeigt. (2 Punkte)

e) Der Abstand zwischen Kind und Spielzeug bleibt nicht konstant, da er nur implizit in den Modellgleichungen enthalten ist. (Andere Modelle sind jedoch durchaus denkbar!). (1 Punkt)

Tabelle 2: Ergebnisse für expliziten Euler ($dt = 0.5$, $L = 5$).

	Kind				**Spielzeug**		**stab**
t	x_1	x_2	u_1	u_2	S_1	S_2	$\|\|d\|\|$
0	5.0000	0	0	5.0000	10.0000	0	5.0000
0.5000	4.3879	2.3971	-2.3971	4.3879	8.1938	0.7715	4.1386
1.0000	2.7015	4.2074	-4.2074	2.7015	6.0745	2.0973	3.9787
1.5000	0.3537	4.9875	-4.9875	0.3537	4.0167	3.1369	4.1039
2.0000	-2.0807	4.5465	-4.5465	-2.0807	2.0871	3.5830	4.2777
2.5000	-4.0057	2.9924	-2.9924	-4.0057	0.4125	3.4207	4.4389
3.0000	-4.9500	0.7056	-0.7056	-4.9500	-0.8657	2.7735	4.5779
3.5000	-4.6823	-1.7539	1.7539	-4.6823	-1.6551	1.8370	4.6967

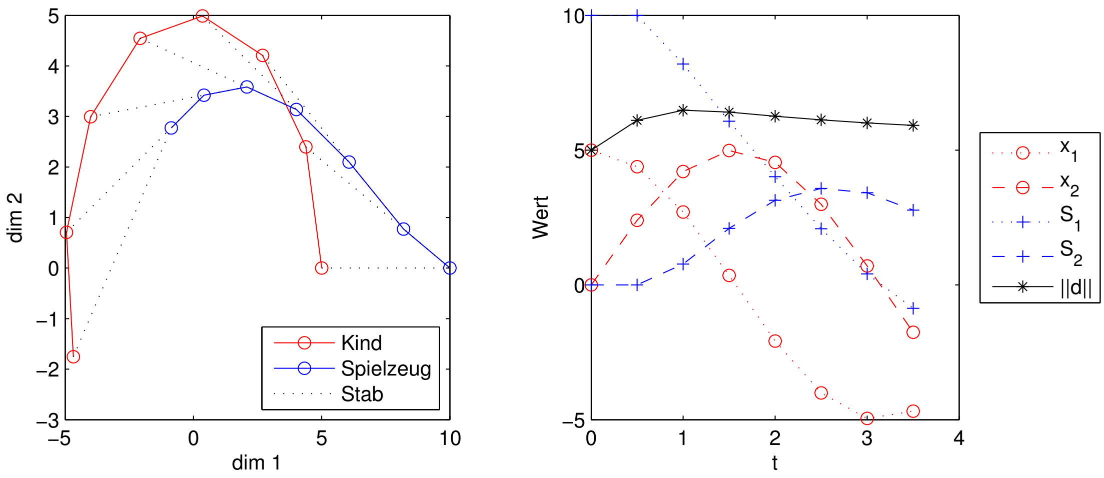


Abbildung 2: Mögliche Visualisierungen