Formale Grundlagen der Informatik I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
22. 04. 2013

Gruppenübung

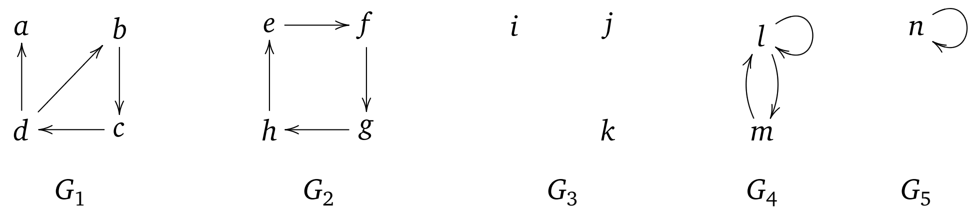
Aufgabe G4 (Stern-Operation)
L und M seien Σ-Sprachen.

(a) Zeigen Sie, dass $L \subseteq L^*$ und $\left(L \subseteq M^* \implies L^* \subseteq M^*\right)$.
(b) Schließen Sie aus (a), dass $(L^*)^* = L^*$ und $\left(L \subseteq M \implies L^* \subseteq M^*\right)$.
(c) Zeigen Sie, dass $(L \cup M)^* = (L^* M^*)^*$.

Aufgabe G5 (Wahrheitswertetafeln)
Zeigen Sie anhand von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln äquivalent sind:

$$\neg(p \to q), \qquad p \wedge \neg q, \qquad (p \vee q) \wedge \neg q.$$

Aufgabe G6 (Graphhomomorphismen)
Ein *gerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten und einer Teilmenge $E \subseteq V \times V$ von Kanten. Gegeben seien die folgenden fünf gerichteten Graphen:



Der Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ ist beispielsweise wie folgt formal gegeben:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{a, b, c, d\} \\ E_1 &= \{(d, a), (d, b), (b, c), (c, d)\} \end{aligned}$$

Geben Sie an, zwischen welchen der Graphen Homomorphismen existieren, und geben Sie auch gegebenenfalls einen Homomorphismus an.

Hausübung

Wichtiger Hinweis:

- Wegen des Feiertages ist die Abgabe der Hausübungen für alle Studenten ***in der Vorlesung am 3.5. 2013***.
- Um die Lösungen richtig zu sortieren, müssen Sie Ihre Abgabe ***mit dem Namen Ihres Tutors*** versehen (Sie können die Namen auf der Moodle-Seite der Veranstaltung finden). Die Lösungen ohne einen Tutor-Namen ***werden nicht korrigiert***!
- Wie immer denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen.

Aufgabe H3 (Äquivalenzrelationen, Injektivität, Surjektivität, Bijektivität) (6 Punkte)
Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung.

(a) Sei auf A durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

für $x, y \in A$ die Relation $\sim$ definiert. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $q : A \to A/{\sim}$ durch $q(x) := [x]_\sim$ definiert. Zeigen Sie, dass q eine surjektive Abbildung ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $i : \text{Bild}(f) \to B$, $i(x) := x$, injektiv ist.

(d) Sei durch $\overline{f}([x]) := f(x)$ eine Abbildung $\overline{f} : A/{\sim} \to \text{Bild}(f)$ definiert. Zeigen Sie, dass $\overline{f}$ wohldefiniert ist und dass sie bijektiv ist.

(e) Schließen Sie, dass sich jede Abbildung als eine Verkettung einer surjektiven, bijektiven und injektiven Abbildung darstellen lässt.

Aufgabe H4 (4 Punkte)
Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

(a) Sei L_1 die kleinste Sprache über Alphabet Σ, für die gilt:
  - $aaaababa \in L_1$,
  - wenn das Wort aw ($w \in \Sigma^*$) zu L_1 gehört, so auch $w \in L_1$,
  - wenn das Wort wa ($w \in \Sigma^*$) zu L_1 gehört, so auch $w \in L_1$.

  Geben Sie alle Wörter in der Sprache L_1 an.

(b) Sei noch eine Sprache L_2 definiert durch $w \in L_2 \iff ww \in L_1$. Geben Sie L_2, $L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cdot L_2$ an.

Minitest

Aufgabe M4

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Die Relation $R_1 = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid v \text{ ist Präfix von } w\}$ ist

- ☐ reflexiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ transitiv

Aufgabe M5

Die Relation $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \cdot b \neq 0\}$ ist

- ☐ reflexiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ transitiv

Aufgabe M6

Seien A und B endliche Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

(a) Ist f injektiv, so folgt stets
- ☐ $|A| \leq |B|$
- ☐ $|A| \geq |B|$

(b) Ist f surjektiv, so folgt stets
- ☐ $|A| \leq |B|$
- ☐ $|A| \geq |B|$