Formale Grundlagen der Informatik I 4. Übungsblatt

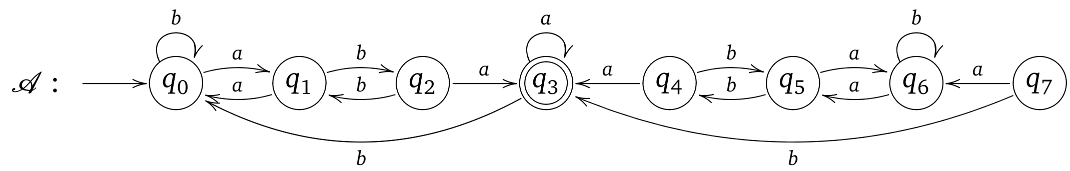
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
06. 05. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G7 (DEA Minimierung)
Betrachten Sie den folgenden DEA, den wir auf Minimalität prüfen wollen:



Formal ist der Automat $\mathscr{A}$ durch das Fünftupel $(\Sigma, Q, q_0, \delta, A)$ beschrieben. Weiter bezeichne $\hat{\delta}$ die *erweiterte Übergangsfunktion* (Skript, Definition 2.2.4): $\hat{\delta}(q, \epsilon) := q$ und $\hat{\delta}(q, wa) := \delta\big(\hat{\delta}(q, w), a\big)$ für alle $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ und $q \in Q$.

(a) Geben Sie die Zustände an, in denen sich der DEA $\mathscr{A}$ nach Ausführung der nachfolgenden Übergänge befindet:
   i. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon)$;
   ii. $\hat{\delta}(q_0, a)$;
   iii. $\hat{\delta}(q_0, aa)$;
   iv. $\hat{\delta}(q_0, abbbaa)$.

($\star$) Definiere durch $\mathscr{L}_q(\mathscr{A}) := \big\{ w \in \Sigma^* \,\big|\, \hat{\delta}(q, w) \in A \big\}$ die Menge aller Worte $w \in \Sigma^*$, die akzeptiert würden, wäre q der Startzustand. (Auch: Die Menge aller w, die auf einem Pfad von q zu einem akzeptierenden Zustand akzeptiert werden.) Geben Sie die Menge $\mathscr{L}_{q_3}(\mathscr{A})$ explizit an.

(b) Gegeben ist die folgende unvollständige Tabelle für die Relation $\nsim$ (Skript Seite 39, *Minimierung eines DFA*). (Ein $\times$ an der Stelle p, q in der Tabelle bedeutet, dass $p \nsim q$.) Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie ggf. ein Wort an, für das diese Unterscheidung notwendig ist, d. h. ein Wort w, das zu L_q gehört, aber nicht zu $L_{q'}$ (oder umgekehrt).

$\nsim$	0	1	2	3	4	5	6	7
0			$\times$	$\times$	$\times$			$\times$
1			$\times$	$\times$	$\times$			$\times$
2	$\times$	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
3	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
4	$\times$	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
5			$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
6			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
7	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Lösung:

(a) i. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$;
ii. $\hat{\delta}(q_0, a) = q_1$;
iii. $\hat{\delta}(q_0, aa) = q_0$;
iv. $\hat{\delta}(q_0, abbbaa) = q_3$.

($\star$) $\mathscr{L}_{q_3}(\mathscr{A})) = \mathtt{L}\Big(\big((\mathtt{b}((\mathtt{b}^*(\mathtt{aa})^*)^*\mathtt{a}(\mathtt{bb})^*\mathtt{a})^*\mathtt{a}(\mathtt{bb})^*\mathtt{ba})^*\mathtt{a}^*\big)^*\Big)$.

(b)

$\nsim$	0	1	2	3	4	5	6	7
0		×	×	×	×	×		×
1	×		×	×	×		×	×
2	×	×		×		×	×	×
3	×	×	×		×	×	×	×
4	×	×		×		×	×	×
5	×		×	×	×		×	×
6		×	×	×	×	×		×
7	×	×	×	×	×	×	×	

(p,q)	w
$(0,1)$	ba
$(0,5)$	ba
$(1,6)$	ba

Die Diagonale in der Tabelle bleibt frei, da $\sim$ (siehe Skript S. 39) reflexiv ist.

Aufgabe G8 ((Nicht-)Regularität von Sprachen)

(a) Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Formal geschrieben lautet das Pumping-Lemma wie folgt (vgl. Skript Lemma 2.5.2):

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \,.\, \forall\, x \in L \,.\Big(|x| \geq n \implies \exists\, u, v, w \in \Sigma^* \,.\big(x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall\, m \in \mathbb{N} \,.(u\, v^m\, w \in L)\big)\Big) \tag{1}$$

Geben Sie die Negation von (1) an (d. h. die Aussage, dessen Korrektheit Sie beweisen müssen, wenn Sie mittels Pumping-Lemmas die *Nichtregularität* der Sprache L nachweisen wollen).

(b) Zeigen Sie sowohl mittels Myhill-Nerode als auch mittels Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n\}$$

nicht regulär ist.

Lösung:

(a) Wir verwenden die Formeln

$$\begin{aligned}
\neg\exists\, x \in X \,.\, \phi &\quad\leftrightsquigarrow\quad \forall\, x \in X \,.\, \neg\phi \\
\neg\forall\, x \in X \,.\, \phi &\quad\leftrightsquigarrow\quad \exists\, x \in X \,.\, \neg\phi \\
\neg(\phi \vee \psi) &\quad\leftrightsquigarrow\quad \neg\phi \wedge \neg\psi \\
\neg(\phi \wedge \psi) &\quad\leftrightsquigarrow\quad \neg\phi \vee \neg\psi \\
\phi \implies \psi &\quad\leftrightsquigarrow\quad \neg\phi \vee \psi \\
\neg\neg\phi &\quad\leftrightsquigarrow\quad \phi
\end{aligned}$$

Wir bekommen

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,.\, \exists\, x \in L \,.\Big(|x| \geq n \wedge \forall\, u, v, w \in \Sigma^* \,.\big(\neg(x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \vee \exists\, m \in \mathbb{N} \,.(u \cdot v^m \cdot w \notin L)\big)\Big),$$

was noch als

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,.\, \exists\, x \in L \,.\Big(|x| \geq n \wedge \forall\, u, v, w \in \Sigma^* \,.\big((x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \implies \exists\, m \in \mathbb{N} \,.(u \cdot v^m \cdot w \notin L)\big)\Big)$$

umgeschrieben werden kann.

(b) • (Myhill-Nerode) Für Worte $w, w' \in \Sigma^*$ haben wir nach Definition

$$w \sim_L w' \iff \forall\, x \in \Sigma^* . \big(wx \in L \iff w'x \in L\big)\,.$$

Um zu zeigen, dass L nicht regulär ist, genügt es, unendlich viele nicht äquivalente Worte zu finden.

Wir zeigen, dass die Worte $w_i := a^i$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise nicht äquivalent sind. Nehmen wir $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ (o. B. d. A. $i < j$). Ein Gebenbeispiel für $a^i \sim_L a^j$ ist $x = b^j$, denn $a^i b^j \notin L$, aber $a^j b^j \in L$.

• (Pumping Lemma) Wir müssen die Aussage in (a) beweisen.

Nehmen wir beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen ein $x \in L$ finden, für das die Aussage in großen Klammern gilt. Wir zeigen, dass $x = a^n b^n$ funktioniert. Weil $n =: m \geq n$, haben wir $x \in L$. Auch $|x| = 2n \geq n$. Wir müssen noch den Allquantor beweisen.

Nehmen wir beliebige $u, v, w \in \Sigma^*$. Weil wir eine Implikation zeigen möchten, verwenden wir die linke Seite als Premisse. Sei also $x = uvw$ eine beliebige Zerlegung von x mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ an. Jetzt wollen wir noch den Existenzquantor beweisen, also sollen wir ein richtiges $m \in \mathbb{N}$ finden.

Weil $|uv| \leq n$, enthält v nur a. Wir sehen, dass $m = 0$ funktioniert, denn $uv^0w = a^{n-|v|}b^n$ und dieses Wort ist nicht in L, denn $|v| \geq 1$.

Aufgabe G9 (Grammatiken)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, X_0)$ mit $\Sigma := \{a, b\}$, $V := \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ und

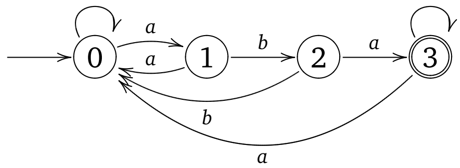
$$\begin{array}{rrcl} P: & X_0 & \rightarrow & aX_1 \mid bX_0 \\ & X_1 & \rightarrow & aX_0 \mid bX_2 \\ & X_2 & \rightarrow & aX_3 \mid bX_0 \\ & X_3 & \rightarrow & aX_0 \mid bX_3 \mid \varepsilon \end{array}$$

Welche der nachfolgenden Worte sind in der Grammatik G ableitbar?

$$aaabbba, \quad bbaaaba, \quad bbababb$$

Bonus: Ist die von der Grammatik G beschriebene Sprache regulär?

Lösung: Die Grammatik beschreibt den folgenden DEA:



Weil die von der Grammatik G beschriebene Sprache von einem DEA erkannt ist, ist sie regulär.

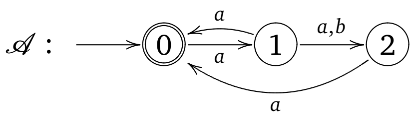
Das erste Wort ist in G nicht ableitbar, das zweite und dritte doch:

$$X_0 \rightarrow bX_0 \rightarrow bbX_0 \rightarrow bbaX_1 \rightarrow bbaaX_0 \rightarrow bbaaaX_1 \rightarrow bbaaabX_2 \rightarrow bbaaabaX_3 \rightarrow bbaaaba$$
$$X_0 \rightarrow bX_0 \rightarrow bbX_0 \rightarrow bbaX_1 \rightarrow bbabX_2 \rightarrow bbabaX_3 \rightarrow bbababX_3 \rightarrow bbababbX_3 \rightarrow bbababb$$

Hausübung

Aufgabe H8 (NEA zu DEA) (5 Punkte)

Betrachten Sie den NEA $\mathscr{A}$:



(a) Konstruieren Sie mittels Potenzmengenkonstruktion (Skript, Abschnitt 2.2.3) einen DEA $\mathscr{B}$, der die gleiche Sprache wie $\mathscr{A}$ erkennt (d. h. $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{B})$).

(b) Konstruieren Sie aus $\mathscr{B}$ einen *minimalen* DEA $\mathscr{C}$, der die gleiche Sprache erkennt. Geben Sie dazu (wie in **Aufgabe G7**) die Relationen $\nsim_i$ in tabellarischer Form an.

Lösung:

(a) $\boxed{2\text{ P.}}$

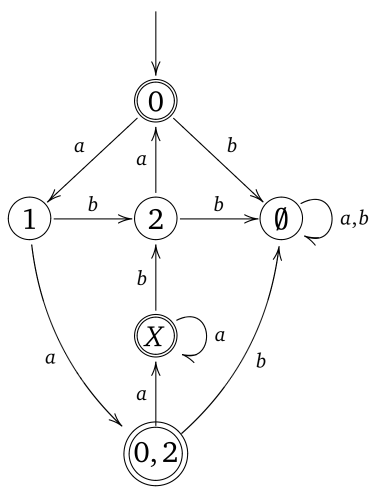
$$\hat{A} = \Big\{\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\Big\}$$

δ	a	b
$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,2\}$	$\{0,1\}$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$

(b) $\boxed{3\text{ P.}}$ Wir bestimmen die Relationen $\nsim_i$ ($\times$ gehöre dabei zu $\nsim_0$ und $\times_i$ zu $\nsim_i$ für $i \geq 1$).

$\nsim_0$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0,2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0\}$		$\times$	$\times$	$\times_1$	$\times$	$\times_1$	$\times_1$
$\{1\}$	$\times$		$\times_1$	$\times$	$\times_2$	$\times$	$\times$
$\emptyset$	$\times$	$\times_1$		$\times$	$\times_1$	$\times$	$\times$
$\{0,2\}$	$\times_1$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times_2$	$\times_2$
$\{2\}$	$\times$	$\times_2$	$\times_1$	$\times$		$\times$	$\times$
$\{0,1\}$	$\times_1$	$\times$	$\times$	$\times_2$	$\times$		
$\{0,1,2\}$	$\times_1$	$\times$	$\times$	$\times_2$	$\times$		

Da $\nsim_3 = \nsim_2$, ist die Relation $\nsim$ durch die Letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände $\{1,0\}$ und $\{0,1,2\}$ identifizieren können (wir nennen den neuen Zustand X). Deshalb sieht der DEA minimaler Länge wie folgt aus:



Aufgabe H9 (Regularität von Sprachen) (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und L eine nicht-leere reguläre Σ-Sprache. Beweisen oder widerlegen Sie die Regularität jeder nachfolgenden Sprache.

(a) $L_1 := \{u \in \Sigma^* \mid \exists\, v \in \Sigma^* . u \cdot v \in L\}$

(b) $L_2 := \left\{w \in L \;\middle|\; \exists\, u \in \Sigma^* \setminus L . \exists\, v \in \Sigma^+ . u \cdot v = w\right\}$

(c) $L_3 := \left\{x^p y \;\middle|\; y \in L, \text{Primzahl } p \in \mathbb{N}\right\}$,
wo $x \notin \Sigma$ ein festes Element ist (und so L_3 eine Sprache über das Alphabet $\Sigma \cup \{x\}$ ist).

Lösung:

(a) $\boxed{\text{1,5 P.}}$ Die Sprache L_1 setzt sich aus allen Präfixen von Wörtern $w \in L$ zusammen. Ist $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, A)$ ein L akzeptierender DEA, so ist $\mathscr{A}_1 = (\Sigma, Q, q_0, \delta, A_1)$ mit $A_1 := \{q \in A \mid \exists\, w \in \Sigma^* . \hat{\delta}(q, w) \in A\}$ ein DEA für L_1.
Vorsicht: Es können wirklich nur Zustände, für die ein „Pfad" zu einem akzeptierenden Zustand existiert, in A_1 aufgenommen werden. Wähle zur Veranschauung einen Graphen mit Senken.
Korrektheit:

- $L_1 \subseteq \mathscr{L}\left(\mathscr{A}_1\right)$: Sei $u \in L_1$. Nach Definition existiert somit ein $v \in \Sigma^*$ mit $w := u \cdot v \in L$. Das Wort w wird somit von $\mathscr{A}$ akzeptiert, es gibt also (da wir über DEAs reden) einen eindeutigen Akzeptanzpfad von q_0 zu einem Zustand in A: $\hat{\delta}(q_u, v) \in A$ mit $q_u := \hat{\delta}(q_0, u)$. Nach Definition ist damit q_u in A_1 enthalten, womit $u \in \mathscr{L}\left(\mathscr{A}_1\right)$ folgt.
- $\mathscr{L}\left(\mathscr{A}_1\right) \subseteq L_1$: Ist $u \in \mathscr{L}\left(\mathscr{A}_1\right)$ so ist $q_u := \hat{\delta}(q_0, u)$ in A_1. Das heißt aber, u lässt sich durch mindestens ein $v \in \Sigma^*$ zu einem Wort in L verlängern (d. h. $w := u \cdot v \in L$), wonach u per Definition in L_1 enthalten ist.

(b) $\boxed{\text{1,5 P.}}$ Hier können wir die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen ausnutzen: $L_2 = L \cap \overline{L} \cdot \Sigma^+$.

(c) $\boxed{\text{2 P.}}$ Die Sprache ist nicht regulär, was wir mittels Pumping-Lemmas beweisen. Wichtig: Aus $x \notin \Sigma$ kann gefolgert und ausgenutzt werden, dass $x^p y$ nur genau dann in L_3 enthalten ist, wenn sowohl p prim ist, als auch $y \in L$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und wähle (ohne Einschränkung) $p \geq n$ prim. Weiter wählen wir das Wort $z = x^p y$ für irgendein $y \in L$ (solch ein y existiert, denn L ist nach Voraussetzung nicht leer). Damit ist die Voraussetzung $|z| \geq n$ erfüllt. Sei nun $z = u \cdot v \cdot w$ irgendeine Zerlegung von z mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| \geq 1$. Da $p \geq n$ ist z somit von der Form $z = x^i x^j x^{p-i-j} y$ für $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pumpe z wie folgt auf und nutze aus, dass sich Primzahlen nicht „weiter in Primzahlen zerlegen" lassen: $u \cdot v^{p+1} w = x^{i+(p+1)j+(p-i-j)} y = x^{(j+1)p} y \notin L_3$.

Minitest

Aufgabe M10

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Bestimmen Sie die korrekten Implikationen:

L ist regulär	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L ist endlich
	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L wird von einem DFA akzeptiert
	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L wird von einem NFA akzeptiert
	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L enthält eine reguläre Sprache, d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_1 \subseteq \Sigma^*$ mit $L_1 \subseteq L$
	☐ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L ist Teilmenge einer regulären Sprache, d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $L \subseteq L_2$

Lösung:

L ist regulär	☐ $\Longrightarrow$ ☒ $\Longleftarrow$	L ist endlich

Begründung: Besteht L nur aus den endlich vielen Elementen $w_1, \dots, w_n$, dann kann L durch den regulären Ausdruck $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ beschrieben werden. Umgekehrt ist Σ^* regulär, aber nicht endlich.

L ist regulär	☒ $\Longrightarrow$ ☒ $\Longleftarrow$	L wird von einem DFA akzeptiert

Begründung: Satz von Kleene (Satz 2.3.1 im Skript).

L ist regulär	☒ $\Longrightarrow$ ☒ $\Longleftarrow$	L wird von einem NFA akzeptiert

Begründung: Satz von Kleene (Satz 2.3.1 im Skript).

L ist regulär	☒ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L enthält eine reguläre Sprache, d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_1 \subseteq \Sigma^*$ mit $L_1 \subseteq L$

Begründung: Hinrichtung ist klar mit $L = L_1$. Rückrichtung: Jede Sprache L enthält die reguläre Sprache $\emptyset$, aber nicht jede Sprache ist regulär.

L ist regulär	☒ $\Longrightarrow$ ☐ $\Longleftarrow$	L ist Teilmenge einer regulären Sprache, d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $L \subseteq L_2$

Begründung: Hinrichtung ist klar mit $L = L_2$. Rückrichtung: Jede Sprache L ist in der regulären Sprache Σ^* enthalten, aber nicht jede Sprache ist regulär.

Aufgabe M11

Kennzeichen Sie diejenige der folgenden Sprachen, die regulär sind.

☐ $\mathtt{L}\big(\mathtt{aaaaa\ a^*\ bbbbb\ b^*}\big)$

☐ $\big\{(ab)^n \bigm| n \in \mathbb{N}, n \geq 5\big\}$

☐ $\big\{a^n b^n \bigm| n \in \mathbb{N}, n \geq 5\big\}$

☐ $\big\{a^m b^n \bigm| m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 5\big\}$

Lösung:

☒ $\mathtt{L}\big(\mathtt{aaaaa\ a^*\ bbbbb\ b^*}\big)$
Begründung: Sprachen, die durch *reguläre* Ausdrücke entstehen, sind stets regulär (Satz von Kleene).

☒ $\big\{(ab)^n \bigm| n \in \mathbb{N}, n \geq 5\big\}$
Begründung: Die Sprache ist identisch zu $\mathtt{L}\big(\mathtt{ababababab(ab)^*}\big)$.

☐ $\big\{a^n b^n \bigm| n \in \mathbb{N}, n \geq 5\big\}$
Begründung: Pumping-Lemma.

☒ $\big\{a^m b^n \bigm| m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 5\big\}$
Begründung: Die Sprache ist identisch zu $\mathtt{L}\big(\mathtt{aaaaa\ a^*\ bbbbb\ b^*}\big)$ (m und n können unabhängig voneinander gewählt werden).

Aufgabe M12

Sei L die Sprache, beschrieben durch die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, X_0)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{X_0\}$ und $P: \ X_0 \rightarrow aX_0b \mid \varepsilon$. Für welche Wortpaare w, w' gilt $w \sim_L w'$?

☐ a, b

☐ $aabb, aabb$

- ☐ $abab$, $baba$
- ☐ ab, ba
- ☐ aab, $aabb$

Lösung:

- ☐ a, b
  Begründung: $ab \in L$, aber $bb \notin L$.
- ☒ $aabb$, $aabb$
  Begründung: $\sim_L$ ist reflexiv.
- ☒ $abab$, $baba$
  Begründung: $ababw,\ babaw \notin L$ für alle $w \in \Sigma^*$.
- ☐ ab, ba
  Begründung: $ab \in L$, aber $ba \notin L$.
- ☐ aab, $aabb$
  Begründung: $aab \notin L$, aber $aabb \in L$.