Formale Grundlagen der Informatik I
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei $\mathcal{A}$ ein DFA mit n Zuständen. Der Beweis des Pumping Lemmas zeigt dann, dass es für jedes Wort $x \in L(\mathcal{A})$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = u \cdot v \cdot w$ mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$ gibt, so dass

$$u \cdot v^m \cdot w \in L(\mathcal{A})$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass aus $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ folgt, dass es ein Wort $x \in L(\mathcal{A})$ gibt mit $|x| < n$.
Hinweis: Betrachten Sie ein Wort $x \in L(\mathcal{A})$, das minimale Länge hat.

(b) Wie können Sie die Tatsache aus (a) benutzen um das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen zu entscheiden?

(c) Zeigen Sie, dass $L(\mathcal{A})$ genau dann unendlich ist, wenn es ein Wort $x \in L(\mathcal{A})$ mit $n \leq |x| < 2n$ gibt.
Hinweis: Wenn die Sprache $L(\mathcal{A})$ unendlich ist, gibt es Wörter die zu $L(\mathcal{A})$ gehören und mindestens Länge $2n$ haben (warum?). Unter diesen, betrachten Sie ein Wort minimaler Länge.

Aufgabe G2
Sei

$$L = \{ss^{-1}t \,:\, s, t \in \{a, b\}^+\},$$

wobei s^{-1} die Umdrehung von s bezeichnet (wie auf dem letzten Übungsblatt definiert).

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an.

(b) Zeigen Sie, dass L die Aussage im Pumping Lemma erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass L trotzdem nicht regulär ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Myhill-Nerode!

Aufgabe G3
Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{X_0, X, Y\}, P, X_0)$ mit

$$\begin{array}{llll} P: & X_0 & \to & aXaY \\ & X & \to & aXa \,|\, Y \\ & Y & \to & bY \,|\, \varepsilon. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache.

(b) Bestimmen Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' ohne ε-Produktionen.

(c) Zeigen Sie, dass die Sprache

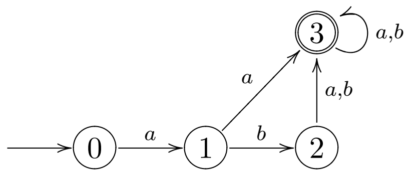
$$L = \{x \in \{a,b\}^* \,:\, |x|_a = |x|_b\}$$

kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik angeben, die diese Sprache erzeugt. (Begründen Sie Ihre Antwort!) Vgl. Übung 3.1.13 im Skript.

Aufgabe G4

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Betrachten Sie den Automaten $\mathcal{A}$:



Geben Sie eine reguläre Grammatik an, die die Sprache $L(\mathcal{A})$ erzeugt.

(b) Sei L die Sprache, die von der regulären Grammatik $G = (\{a,b\}, \{S,T,U,V\}, P, S)$ erzeugt wird, wobei

$$\begin{array}{rrcl} P: & S & \rightarrow & aT \mid aU \mid bU \\ & T & \rightarrow & bT \mid bV \\ & U & \rightarrow & aV \mid \varepsilon \\ & V & \rightarrow & aV \mid bU. \end{array}$$

Geben Sie einen DFA an, der L erkennt.

(c) Zeigen sie dass die folgenden beiden Grammatiken G_1, G_2 mit Startsymbol X dieselbe reguläre Sprache erzeugen:

$$\begin{array}{rl} G_1: & X \rightarrow XaXaX \mid Y \\ & Y \rightarrow YY \mid b \mid \varepsilon \end{array} \qquad \begin{array}{rl} G_2: & X \rightarrow aY \mid bX \mid \varepsilon \\ & Y \rightarrow bY \mid aZ_1 \mid aX \\ & Z_1 \rightarrow aZ_2 \mid bX \mid \varepsilon \\ & Z_2 \rightarrow bY \mid aZ_1 \mid aX \end{array}$$

Dazu übersetzt man zunächst die zweite, rechtslineare Grammatik in einen (möglichst kompakten) DFA um die erzeugte Sprache zu identifizieren. Dann zeige man, dass die erste Grammatik ebenfalls genau diese Sprache erzeugt (mit Induktionsbeweisen für die beiden Inklusionen!).

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Betrachten Sie die folgende kontextfreie Grammatik $G_a = (\Sigma, V_a, P_a, S)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, mit der Variablenmenge $V_a = \{S, T\}$, dem Startsymbol S und der Produktionen P_a gegeben durch

$$\begin{array}{l} S \rightarrow\ aSbT \mid ab \\ T \rightarrow\ bTa \mid \varepsilon \end{array}$$

Formen Sie die Grammatik G_a in eine Grammatik G in Chomsky-Normalform um, so dass $L(G_a) = L(G)$. Geben Sie wesentliche Zwischenschritte an.