Prof. Dr. Oskar von Stryk
FG Simulation, Systemoptimierung und Robotik
FB Informatik, Technische Universität Darmstadt

Blatt 13 - Probeklausur

Prüfungsfach: Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Beginn (Uhrzeit): ....

Dauer: 60 Minuten

Hörsaal: C205

Datum: 02.02.2009

Bemerkungen: ....

....

Note:		
Aufgabe (Punkte)	Punkte	
	Korrektur	Unterschrift
1 (16)		
2 (4)		
3 (6)		
4 (3)		
5 (13)		
6 (8)		
7 (5,5)		
8 (11.5)		
Summe (67)		

....
Unterschrift

Ich beantrage, dass nach Fertigstellung der Korrektur mein Klausurergebnis im **Webreg**-System veröffentlicht wird. Dabei kann nur ich nach Authentifizierung nur meine eigene Note einsehen.

Gilt nicht für die Probeklausur!

Die insgesamt zu vergebende Punktezahl beträgt **67** Punkte.
Zum Bestehen (Note 4.0) reichen **27** Punkte aus.
Zum Erreichen der Note 1.0 sind maximal **54** Punkte notwendig.

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 60 Minuten.
- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus. Tragen Sie auf allen Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Dieses Aufgabenheft umfaßt **10** nummerierte Seiten mit Aufgaben. Trennen Sie die Prüfungsbögen nicht auf.
- Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Papier.
- Lesen Sie die Fragen vor der Beantwortung sorgfältig und in Ruhe durch und beantworten Sie sie genau. Bearbeiten Sie die Aufgaben in für Sie günstiger Reihenfolge.
- Kommentieren Sie alle Ihre Ergebnisse bzw. Rechenschritte **kurz** und **stichwortartig**.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind ein beidseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4, eine mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und bei Bedarf ein Wörterbuch für Deutsch als Fremdsprache erlaubt.
- Schreiben Sie nur mit Kugelschreiber (blau oder schwarz) und nicht mit rotem oder grünem Stift oder Bleistift.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon, PDA, o.ä. aus!
- Geben Sie beim Verlassen des Hörsaals alle Prüfungsunterlagen bei der Aufsicht ab.

Viel Erfolg!

---

1. *Allgemeine Fragen* (16 Punkte)

Hinweis: Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Punkt Abzug. Nicht beantwortete Fragen geben weder Punkte noch führen sie zu Punktabzug. Falls Sie in dieser Aufgabe weniger positive Punkte als negative Punkte sammeln, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet, es werden also keine negativen Punkte als Gesamtbewertung dieser Aufgabe vergeben.

☐richtig ☒falsch Sowohl die Systemparameter als auch der Systemzustand eines Systemmodells ändern sich während eines Simulationslaufs.

☐richtig ☒falsch Die Genauigkeit einer Simulation ist unabhängig von den Eingabedaten.

☐richtig ☒falsch Das Gesetz von Little gilt nicht für Systeme, die einen stationären Zustand erreichen.

☐richtig ☒falsch Bei Ereignissen, die *beliebig* verteilt sind, ist das Eintreffen des nächsten Ereignisses zu jedem Zeitpunkt gleich wahrscheinlich, unabhängig von der Zeit, die bisher vergangen ist.

☐richtig ☒falsch Zu jeder Inzidenzmatrix $W = W^+ - W^-$ läßt sich genau ein dazugehöriges Petrinetz angeben.

☒richtig ☐falsch Beim rechnergestützten symbolischen Differenzieren treten keine Approximationsfehler auf.

☒richtig ☐falsch Sowohl $x = 0.5 \cdot \tan x$ als auch $x = \arctan(2x)$ sind mögliche Fixpunktgleichungen zur Lösung von $2x - \tan x = 0$.

☒richtig ☐falsch Die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens kann man daran erkennen,dass sich die Anzahl der korrekten Ziffern in der berechneten Näherung pro Iterationsschritt ungefähr verdoppelt.

☐richtig ☒falsch Jedes nicht autonome Differentialgleichungssystem kann auf ein autonomes Differentialgleichungssystem ohne Änderung der Problemdimension transformiert werden.

☒richtig ☐falsch Die Lipschitz-Konstante einer eindeutig lösbaren Differentialgleichung kann vom Anfangswert abhängig sein.

☐richtig ☒falsch Es ist immer möglich, um die Ruhelage einer Differentialgleichung zu linearisieren und so die Stabilität der Ruhelage zu untersuchen.

☐richtig ☒falsch Das Integrationsverfahren nach Heun löst Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten auch ohne explizite Schaltfunktion.

☒richtig ☐falsch Steife Komponenten von Differentialgleichungen sorgen in Bereichen, in denen sie kaum zur Lösung beitragen, für kleine Schritte.

☐richtig ☒falsch Bei einer Linearisierung $\dot{\boldsymbol{x}} = A \cdot \boldsymbol{x}$ um eine Gleichgewichtslage läßt sich stets alleine anhand des Realteils $Re(\lambda_i)$ der Eigenwerte λ_i von A entscheiden, ob die Gleichgewichtslage stabil ist.

☐ richtig ☒ falsch Jede reelle Zahl zwischen 1 und 10 kann im IEEE 754-Zahlformat dargestellt werden.

☐ richtig ☒ falsch Konditionszahlen numerischer Probleme hängen immer auch vom jeweiligen Lösungsalgorithmus ab.

2. *Grundbegriffe zur Modellierung und Simulation* (4 Punkte)

(a) Was ist ein Modell? Geben Sie eine allgemein gültige Definition an.

Antwort: (1 Punkt)

Antwortmöglichkeiten:

- (vereinfachendes) Abbild einer (partiellen) Realität
- eine abstrakte, logische und mathematische Darstellung der Objekte und und Wechselbeziehungen in einem System
- Ersatzsystem, gebildet unter Annahmen und Idealisierung

(b) Nennen Sie zwei wesentlichen Fehlerquellen, die im Rahmen der Validierung einer Simulationsstudie untersucht werden müssen.

Antwort: (1 Punkt)

Modellierungsfehler, Approximationsfehler des iterativen Berechnungsverfahrens, Rundungsfehler oder Programmier- und Implementierungsfehler

(c) Welche Möglichkeiten zur Klassifikation von Modellen anhand der Beschreibung i.) des Zustandsverlaufs und ii.) des zeitlichen Verlaufs kennen Sie?

Antwort: (1 Punkt)

i. Diskret oder kontinuierlich, deterministisch oder stochastisch

ii. Kontinuierlich, diskret äquidistant, diskret nicht äquidistant und kontinuierlich diskret

(d) Nennen Sie mindestens 2 Ursachen in dynamischen Systemen, die zu Unstetigkeiten im Verlauf der Zustände führen können.

Antwort: (1 Punkt)

Stoßvorgänge, Reibung in mechanischen Systemen (z.B. Übergänge von Gleit zu Haftreibung), Strukturvariable Systeme, Approximation von Teilmodellen von f, Hysterese, Unstetige zeitabhängige Eingangsfunktionen/Stellgrößen u

3. *Warteschlangentheorie* (6 Punkte)

An einer Tankstelle haben Sie nach dem Tanken die Möglichkeit, an einem Automaten Ihre Tankrechnung zu begleichen, oder Sie gehen zum Tankwart und bezahlen dort.

An beiden Bezahlstellen treffen im Mittel jeweils 4 Kunden je Minute mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten ein.

Beim Tankwart zahlen alle Kunden mit Kreditkarte, so dass die Bedienzeit je Kunde (Karte durchziehen und unterschreiben) konstant 10 Sekunden je Kunde beträgt. Am Tankautomaten muss man hingegen aus Sicherheitsgründen eine PIN eingeben, die manche Kunden schneller, andere langsamer eintippen. Dort ist die Bedienzeit exponentialverteilt mit durchschnittlich 12 Sekunden je Kunde.

(a) Durch welche Warteschlangenmodelle werden die beiden Warteschlangen (Tankwart und Automat) beschrieben und wie sind die Parameter? (Geben Sie alle Raten in Kunden pro Minute an.)

Antwort: (2 Punkte)

Tankwart: M/D/1 Warteschlange mit mittlerer Ankunftsrate $\lambda = 4$ und mittlerer Bedienrate $\mu_1 = 6$. (1 Punkt)

Automat: M/M/1 Warteschlange mit mittlerer Ankunftsrate $\lambda = 4$ und (mittlerer) Bedienrate $\mu_2 = 5$. (1 Punkt)

(b) Wie groß ist die Langzeitausnutzung der beiden Warteschlangensysteme?

Antwort: (2 Punkte)

Tankwart: $\rho_1 = \lambda/\mu_1 = 4/6 = 2/3\,.$

Automat: $\rho_2 = \lambda/\mu_2 = 4/5 = 0.8\,.$

(c) Wenn Sie möglichst schnell aus der Tankstelle wieder abfahren wollen, gehen Sie dann zu Tankwart oder Automat? Begründen Sie Ihre Antwort durch Berechnung geeigneter Kennzahlen der Warteschlangenmodelle!

Antwort: (2 Punkte)

Zum Tankwart, weil die Langzeitaufenthaltszeit dort geringer als am Automaten ist:
Langzeitaufenthaltszeit Tankwart:

$$w_1 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{2\mu_1}\frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\frac{2/3}{1/3} = 1/3\,.$$

Langzeitaufenthaltszeit Automat:

$$w_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{1}{5-4} = 1\,.$$

4. *Räuber–Beute–Modell: Modellierung* (3 Punkte)

Wir betrachten eine Räuberpopulation $R(t)$ und eine Beutepopulation $B(t)$. Die Populationen entwickeln sich entsprechend folgender Vorgaben

- Die Anzahl der Geburten der Räuber je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Räuber. Im zu betrachtenden Zeitrahmen kann das Absterben von Räubern vernachlässigt werden.
- Die Anzahl der Geburten und der Todesfälle der Beute je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Beutetiere.
- Der Zuwachs der Räuberpopulation je Zeiteinheit durch die Jagd von Beute ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.
- Die Abnahme der Beutepopulation je Zeiteinheit durch die Jagd der Räuber ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.

Stellen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen (Bilanzgleichungen) für die zeitliche Entwicklung der Räuber- und Beutepopulation auf. Wählen Sie geeignete Bezeichnungen für Geburts-, Sterbe- und Wachstumsraten.

Antwort: (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
\dot{R}(t) &= G_R R(t) + W_R R(t) B(t)\,, \\
\dot{B}(t) &= G_B B(t) - S_B B(t) - W_B R(t) B(t)\,.
\end{aligned}
$$

5. *Räuber–Beute–Modell: Analyse und Numerik* (13 Punkte)

Seien $0 < d < 1$ und $a > 0$ zwei reelle Parameter. Ein modifiziertes Räuber–Beute–Modell (nicht das in der vorherigen Aufgabe gesuchte!) ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\dot{R}(t) &= R(t)(-d + B(t))\,, \\
\dot{B}(t) &= B(t)(a - R(t) - aB(t))\,.
\end{aligned}
$$

(a) Bestimmen Sie den positiven Gleichgewichtspunkt (R^*, B^*) des Differentialgleichungssystems. (Hinweis: Dieser hängt noch von den Parametern a und d ab.)

Antwort: (2 Punkte)

Der einzige positive Gleichgewichtszustand ist $(R^*, B^*) = (a(1-d), d)$.

(b) Wenn $a = 1$ gilt, dann ergibt sich als positiver Gleichgewichtspunkt $(R^*, B^*) = (1 - d, d)$.
Geben Sie die Jacobimatrix $J(R^*, B^*)$ des Differentialgleichungssystems, ausgewertet in diesem Gleichgewichtspunkt, an.

Antwort: (2 Punkte)

$$J(R^*, B^*) = \begin{pmatrix} -d + B^* & R^* \\ -B^* & a - R^* - 2aB^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-d \\ -d & -d \end{pmatrix}.$$

(c) Sei weiterhin $a = 1$. Ist die zugehörige positive Gleichgewichtslage stabil für alle $d \in (0, 1)$?

Antwort: (3 Punkte)

Für $a = 1$ ergibt sich als Gleichgewichtspunkt $(R^*, B^*) = (1 - d, d)$. Zur Untersuchung seiner Stabilität müssen die Eigenwerte der Jacobimatrix $J(R^*, B^*)$ der rechten Seite der Dgl. betrachtet werden, siehe (b). Die charakteristische Gleichung dieser Matrix ist dann

$$0 = \lambda^2 + d\lambda + d(1 - d)$$

und somit sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - d(1 - d)}\,.$$

Die Gleichgewichtslage für einen Wert d ist stabil, wenn beide Eigenwerte negativen Realteil haben. Im Fall $d \in (0, 1)$ folgt $d(1 - d) > 0$ und somit haben wir entweder zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil oder zwei reelle negative Eigenwerte. Damit ist die Gleichgewichtslage also stabil wenn $d \in (0, 1)$, $a = 1$.

(d) Geben Sie die Verfahrensvorschrift für ein Verfahren zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingung an. Führen Sie mit diesem Verfahren einen Schritt mit Schrittweite $\Delta t = 1$ für das Differentialgleichungssystem mit den Anfangswerten $R(0) = 1\,, B(0) = \frac{1}{4}$ und Parametern $a = 1\,, d = \frac{1}{2}$ aus.

Antwort: (3 Punkte)

Explizites Eulerverfahren für $\dot{x}(t) = f(t, x)\,, x(t_0) = x_0$ mit Schrittweite Δt

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f(t_k, x_k)\,, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Es sind also $R_0 = 1, B_0 = \frac{1}{4}$ und $t_0 = 0$. Es ergeben sich nach der Verfahrensvorschrift $t_1 = 1$ und

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + \Delta t[R_0(B_0 - \frac{1}{2})] = \frac{3}{4}\,, \\ B_1 &= B_0 + \Delta t[B_0(1 - R_0 - B_0)] = \frac{3}{16}\,. \end{aligned}$$

(e) Sie wollen mit einem Programmsystem (z.B. Scilab) ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung numerisch lösen. Welche Daten/Informationen müssen Sie der Zeitintegrationsroutine zur Verfügung stellen, damit diese Ihnen eine numerische Lösung berechnen kann.

Antwort: (3 Punkte)

- Eine Funktion, die die rechte Seite der Dgl. auswertet.
- Den Vektor der Anfangsbedingungen.
- Anfangszeitpunkt und Endzeitpunkt der Integration.
- Eine feste Zeitschrittweite bzw. eine Toleranzvorgabe.

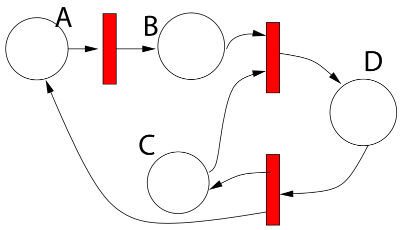
6. *Modellierung mit Petrinetzen* (8 Punkte)

(a) Ein System mit den Zuständen A, B, C und D gehorche folgenden Regeln:

- Der Zustand B kann eintreten, genau dann wenn vorher der Zustand A aktiv war.
- Der Zustand D kann eintreten, genau dann wenn vorher die Zustände B und C aktiv waren.
- Die Zustände A und C können eintreten, genau dann wenn vorher der Zustand D aktiv war.

Zeichnen Sie ein Petrinetz, welches genau diese Regeln widerspiegelt.

Antwort: (3 Punkte)



(b) Geben Sie zwei mögliche Anfangsmakierungsvektoren an, so dass dieses Petrinetz lebendig ist.

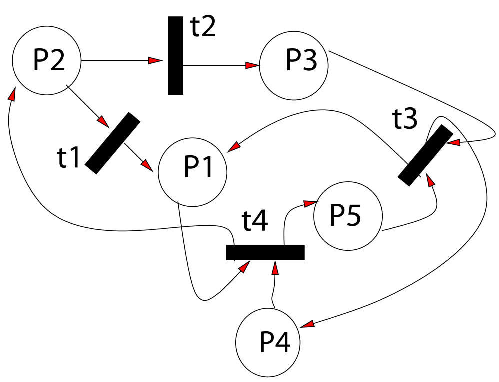
Antwort: (1 Punkt)

$$(m_A, m_B, m_C, m_D)^T \in \{(0,0,0,1),\ (1,0,1,0)^T,\ (0,1,1,0)^T\}$$

(c) Zeichnen sie das zu folgender Inzidenzmatrix gehörige Petrinetz, wobei die maximale Kapazität der jeweiligen Plätze gleich 1 sein soll. Beschriften Sie dabei in Ihrer Skizze alle Plätze und Transitionen.

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Antwort: (3 Punkte)



(d) Welche Transitionen können im Petrinetz aus Teilaufgabe (c) geschaltet werden, wenn der aktuelle Systemzustand durch den Markierungsvektor $m = (1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$ beschrieben ist?

Antwort: (1 Punkt)

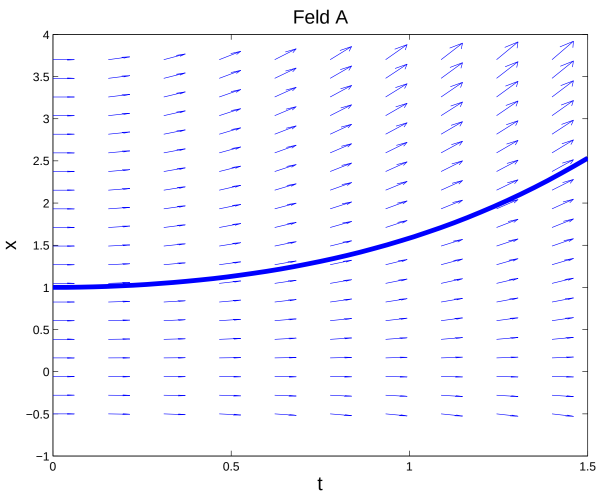
nur t_2

7. *Differentialgleichungen: Richtungsfelder und Autonomisierung* (5,5 Punkte)

Zeichnen Sie zu den Differentialgleichungen in (a) und (b) die Richtungsfelder und beschriften Sie Ihre Zeichnung. Zeichnen Sie sodann die Lösung für den angegebenen Startwert ein. Eine Rechnung ist dabei nicht erforderlich.

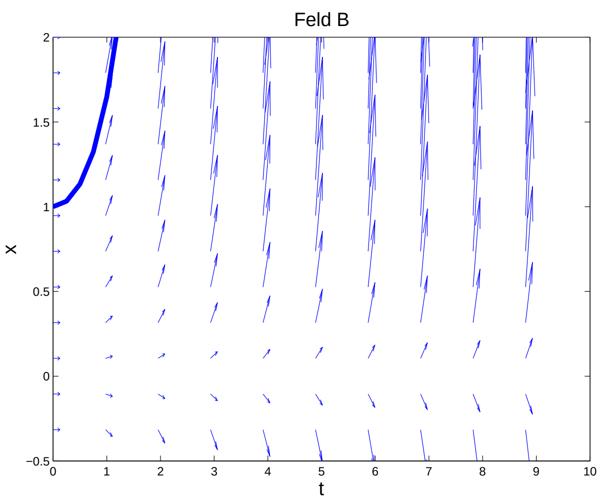
(a) $\dot{x}(t) = x(t)\sin(t), x(0) = 1$

Antwort: (2 Punkte)



(b) $\dot{x}(t) = t \cdot x(t), x(0) = 1$

Antwort: (2 Punkte)



(c) Transformieren Sie die Differentialgleichung aus Aufgabe (b) in ein autonomes Differentialgleichungssystem.

Antwort: (1.5 Punkte)

$$\begin{aligned} y(t) :=& t \\ autonomes\ DGL-System: & \\ \dot{x}(t) =& y(t) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) =& 1 \\ x(0) = 1,\ & y(0) = 0 \end{aligned}$$

8. *Lösen von Gleichungssystemen* (11.5 Punkte)

Für die Funktion

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 \\ \sin(x_1) + 0.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

soll der Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ so bestimmt werden, dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (0,0)^T$ gilt.

(a) Das gestellte Problem läßt sich mit dem Fixpunkt-Verfahren lösen. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des Fixpunkt-Verfahrens.

Antwort: (3 Punkte)

gelöst wird Problem $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, Problem muss dafür also geeignet umgeschrieben werden
neuer Schritt: $\boldsymbol{x}_{i+1} = \tilde{f}(\boldsymbol{x}_i)$
Verfahren konvergiert, falls $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\boldsymbol{x}_s)$ im Einheitskreis

(b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das gestellte Problem mit dem Fixpunkt-Verfahren auf.

Antwort: (2 Punkte)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= 0 \\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1^3 - 3 \cdot x_2 + x_1 \\ \sin(x_1) + 1.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{x}_{i+1} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_i)
\end{aligned}
$$

(c) Die Konvergenz-Eigenschaft des Fixpunkt-Verfahrens kann mit Hilfe eines zusätzlichen Faktors verbessert werden. Benennen Sie diesen und begründen Sie die Verbesserungseigenschaft.

Antwort: (2 Punkte)

Relaxationsmatrix A, Vorfaktor, führt zu kleineren Eigenwerten und damit schnellerer Kontraktion

(d) Beschreiben Sie in wenigen Stichpunkten ein in der Vorlesung beschriebenes spezielles Fixpunkt-Verfahren zur Lösung sowie je zwei Vor- oder Nachteile gegenüber dem allgemeinen Fixpunkt-Verfahren.

Antwort: (3 Punkte)

Newton-Verfahren
für Nullstellensuche
Taylor-Entwicklung wird abgebrochen
Iteration: $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$
lokale Konvergenz: FP -, Newton ++; Rechenaufwand FP ++, Newton -, Implementierungsaufwand: FP ++, Newton -

(e) In die Berechnung des bekannten Verfahrens aus (8d) geht die Jacobi-Matrix ein. Nennen Sie 3 Möglichkeiten, die den Aufwand zur Berechnung der Jacobi-Matrix reduzieren können.

Antwort: (1.5 Punkte)

1. Dünnbesetzheit ausnutzen
2. Jacobi-Matrix durch konstante Matrix ersetzen
3. Schrittweise Aufdatierung (Update) / Quasi Newton Verfahren