Formale Grundlagen der Informatik I
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
27. 05. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Konstruktion von Turingmaschinen)
Beschreiben Sie formal (d. h. unter Angabe der Komponenten Σ, Q, δ) eine 1-Band Turingmaschine für die folgende Funktion: Bei Eingabe der Binärdarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ soll die Zahl $2 \cdot n$ (wieder in Binärdarstellung) ausgegeben werden.

Tipp: Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass Sie die Zahl n in der Form $b_0 b_1 \dots b_k$ (von links nach rechts geschrieben) auf dem Band vorliegen haben, wobei $n = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot 2^i$, $b_i \in \{0, 1\}$.

Aufgabe G17 (Simulation von Turingmaschinen)
Beschreiben Sie informell, wie eine deterministische Turingmaschine $\mathcal{M}_0$ für jeden der nachfolgenden Punkte konstruiert werden kann. Geben Sie die dazu benötigten Zustände von $\mathcal{M}_0$ an und beschreiben Sie deren Funktion.

(a) Gegeben eine feste Zeichenkette $c = c_1 \dots c_k \in \Sigma^*$. Die Maschine $\mathcal{M}_0$ lösche die Eingabe, schreibe c auf das Eingabeband, fahre zurück an die Startposition und halte.

(b) Gegeben eine feste Turingmaschine $\mathcal{M}$ und eine feste Zeichenkette $c \in \Sigma^*$. Die Maschine $\mathcal{M}_0$ lösche ihre Eingabe und rechne anschliessend weiter wie die Maschine $\mathcal{M}$ bei Eingabe der Konstanten c.

(c) Gegeben eine feste Turingmaschine $\mathcal{M}$. Die Maschine $\mathcal{M}_0$ simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe $\langle \mathcal{M} \rangle$ so dass

$$\begin{aligned} w \xrightarrow{\mathcal{M}_0} \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} q^+, \\ w \xrightarrow{\mathcal{M}_0} q^- \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} q^- \end{aligned}$$

für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ der Maschine $\mathcal{M}_0$. Sie dürfen hier verwenden, dass für alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ solch eine Kodierung $\langle \mathcal{M} \rangle$ existiert[1].

Aufgabe G18 (Entscheidbarkeit)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Sprache $L_k := \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht innerhalb von } k \text{ Schritten} \}$ für eine Konstante $k \in \mathbb{N}$ ist entscheidbar.

(b) Die Sprache $L_A := \{ M \mid \forall w \in \Sigma^* . M \text{ hält bei Eingabe } w \}$ ist entscheidbar.

[1] siehe auch: Gödelnummer (http://de.wikipedia.org/wiki/Gödelnummer)

Hausübung

Wichtiger Hinweis:

- Wegen des Endes der Veranstaltung FGdI1 ist die Abgabe der Hausübungen für alle Studenten ***am Ende der Vorlesung für FGdI2 am 7.6. 2013 um 9:20 in S101/A1***.
- Um die Lösungen richtig zu sortieren, müssen Sie Ihre Abgabe ***mit dem Namen Ihres Tutors*** versehen (Sie können die Namen auf der Moodle-Seite der Veranstaltung finden). Die Lösungen ohne einen Tutor-Namen ***werden nicht korrigiert***!
- Dieses Blatt enthält zwar drei Aufgaben, Sie müssen jedoch nur zwei davon lösen. Sie können sich allerdings durch Lösen der dritten Aufgabe zusätzliche Punkte verdienen.
- Wie immer denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen.

Aufgabe H16 (Entscheidbarkeit) (5 Punkte)
Wir stellen uns die Frage nach den Konsequenzen der Unentscheidbarkeit des in der Vorlesung vorgestellten Halteproblems. Dazu betrachten wir das folgende Problem:

> *Sei $\mathscr{P}$ ein beliebiges* Java*-Programm ohne Eingabe, wobei $\mathscr{P}$ mindestens $\ell \in \mathbb{N}$ Codezeilen enthalte. Wird Zeile ℓ jemals ausgeführt?*

Beweisen Sie, dass es keinen Algorithmus gibt, der dieses Problem für beliebige $\mathscr{P}$ und ℓ entscheidet.

Aufgabe H17 (Simulation von Turingmaschinen) (5 Punkte)
Mithilfe des Turingmaschinensimulators

`http://db.ing.puc.cl/turingmachine/`

implementieren Sie die folgenden Turingmaschinen:

(a) Die Turingmaschine aus **Aufgabe G16**.

(b) Die Turingmaschine, die bei Eingabe der Binärdarstellung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n + 1$ (wieder in Binärdarstellung) ausgibt.

(c) Die Turingmaschine, die Ihre Matrikelnummer in Binärform auf das Band schreibt (Sie können annehmen, dass das Band am Anfang leer ist). Versuchen Sie die Maschine mit möglichst kleiner Anzahl der Zustände zu finden.

Sie können annehmen, dass alle Binärzahlen umgekehrt (wie in **Aufgabe G16**) angegeben sind.

Bemerkung: In diesem Simulator fängt der Lesekopf auf dem ersten Zeichen der Eingabe an, statt links vor der Eingabe, wie im Skript!

Hinweis: Als Lösung jeder Teilaufgabe zählt die Abgabe des Programmcodes in Moodle in **Übungsblatt 7**. Dort finden Sie (nach dem Klick auf „Abgabe hinzufügen“) einen Editor, in dem Sie Ihre Lösungen einfügen können.

Aufgabe H18 (Verallgemeinerung von Turingmaschinen) (5 Punkte)
In dieser Aufgabe schwächen wir die Definition der Turingmaschine so ab, dass wir nach rechts *unendlich viele* Symbole aus Σ als Eingabe erlauben.
Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Das gegebene Problem ist, ob es irgendwo in der Eingabe eine 0 gibt.

(a) Ist dieses Problem *semientscheidbar*, im Sinne, dass eine solch verallgemeinerte Turingmaschine existiert, die genau die Zeichenfolgen mit mindestens einer 0 akzeptiert?

(b) Ist dieses Problem *entscheidbar*, im Sinne, dass eine solch verallgemeinerte Turingmaschine existiert, die auf jeder Eingabe terminiert und genau die Zeichenfolgen mit mindestens einer 0 akzeptiert?

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Minitest

Aufgabe M18 ((Semi-)Entscheidbarkeit)
Entscheiden Sie für die folgenden Sprachen, ob sie (semi-)entscheidbar sind:

(a) beliebige kontextfreie Sprache
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(b) die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(c) das Halteproblem $H \subseteq \Sigma^*$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(d) das Komplement des Halteproblems $\overline{H} = \Sigma^* \setminus H$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Aufgabe M19 (Turingmaschinen)
Gegeben sei die Turingmaschine $\mathscr{M}$ über dem Alphabet $\{a, b\}$ mit Startzustand q_0 und folgender Übergangsfunktion:

δ	$\square$	a	b
q_0	$(\square, >, q_a)$		
q_a	$(\square, \circ, q^+)$	$(a, >, q_b)$	$(b, \circ, q^-)$
q_b	$(\square, \circ, q^-)$	$(a, \circ, q^-)$	$(b, >, q_a)$

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

- ☐ $\mathscr{M}$ erkennt die Sprache $\mathtt{L}((\mathtt{a}+\mathtt{b})^*)$.
- ☐ $\mathscr{M}$ erkennt die Sprache $\mathtt{L}((\mathtt{ab})^*)$.
- ☐ Die von $\mathscr{M}$ erkannte Sprache kann nicht durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden.
- ☐ $\mathscr{M}$ hält immer.
- ☐ $\mathscr{M}$ hält nicht bei jeder Eingabe.
- ☐ $\mathscr{M}$ hält bei keiner Eingabe.