Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2013/2014
Lösungsvorschlag der 7. Übung

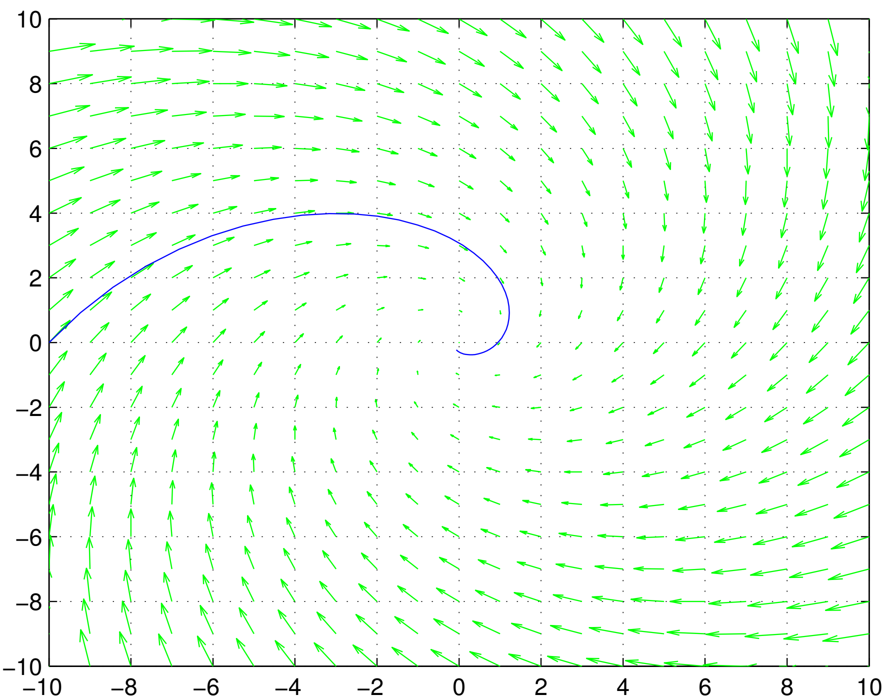
Aufgabe 1 Numerische Integration in zwei Dimensionen (16 Punkte)

Betrachten Sie das System $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, mit Anfangswerten $(-10 \quad 0)^T$.

a) Geben Sie den Verfahrensschritt für die Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens auf obige Differentialgleichung an. Führen Sie die ersten drei Schritte für die Schrittweite $h = 1$ durch.

b) Geben Sie den Verfahrensschritt für die Anwendung des impliziten Euler-Verfahrens auf obige Differentialgleichung an. Führen Sie die ersten drei Schritte für die Schrittweite $h = 1$ durch.

c) Zeichnen Sie die gefundenen Punkte des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens im folgenden Richtungsfeld:



Betrachten Sie jetzt das System der Lotka-Volterra Gleichungen

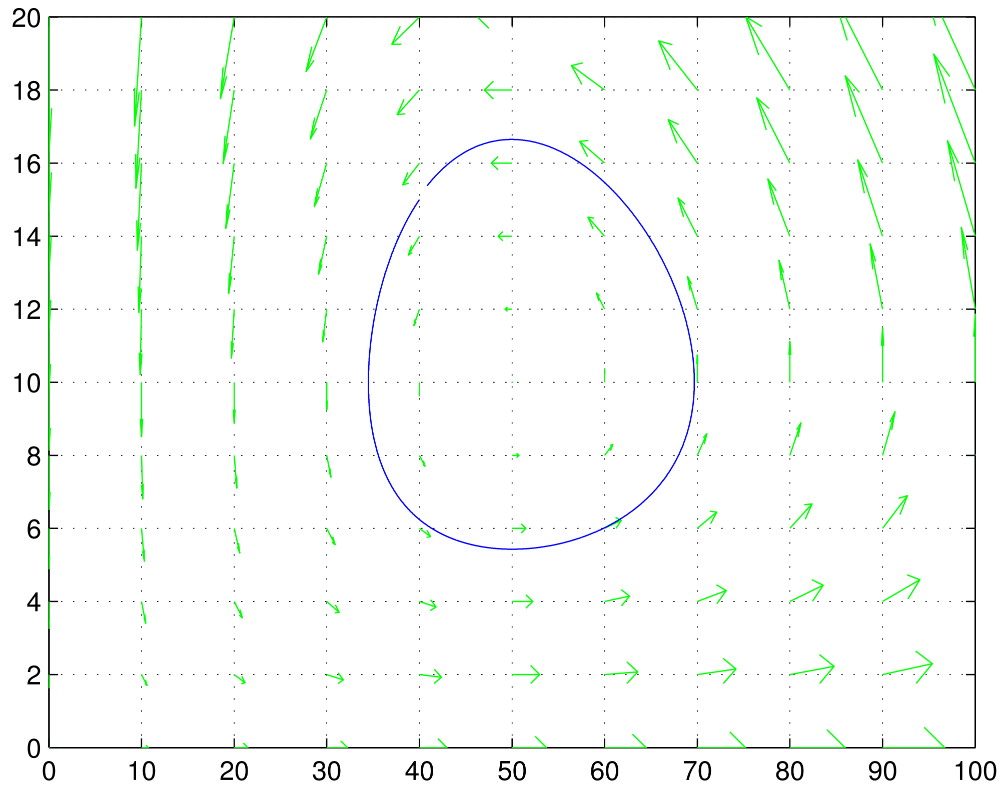
$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ -y(\gamma - \delta x) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen modellieren die Wechselwirkung von Jäger- und Beutepopulationen, wobei x die Anzahl der Beutetieren ist, y die Anzahl der Jäger, α die Reproduktionsrate der Beutetiere, β die Sterberate der Beutetiere pro Jäger, γ die Sterberate der Jäger, und δ die Reproduktionsrate der Jäger pro Beutetier. In diesem Fall gilt $\alpha = 100$, $\beta = 2$, $\gamma = 50$, $\delta = 1$, $x(0) = 40$, $y(0) = 15$.

d) Geben Sie den Verfahrensschritt für die Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens auf obige Differentialgleichung an. Führen Sie die ersten drei Schritte für die Schrittweite $h = 0.02$ durch.

e) Welches Problem entsteht, wenn wir versuchen das implizite Euler-Verfahren an zu wenden?

f) Zeichnen Sie die gefundenen Punkte für das explizite Euler-Verfahren im folgenden Richtungsfeld:



Lösungsvorschlag

a)

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \text{ (2 Punkte)}$$

Erste drei Iterationen (abrundet auf eine Dezimalstelle):

k	0	1	2	3
x	-10.0	-2.5	9.4	7.3
y	0.0	10.0	5.0	-8.1

(1.5 Punkte)

b)

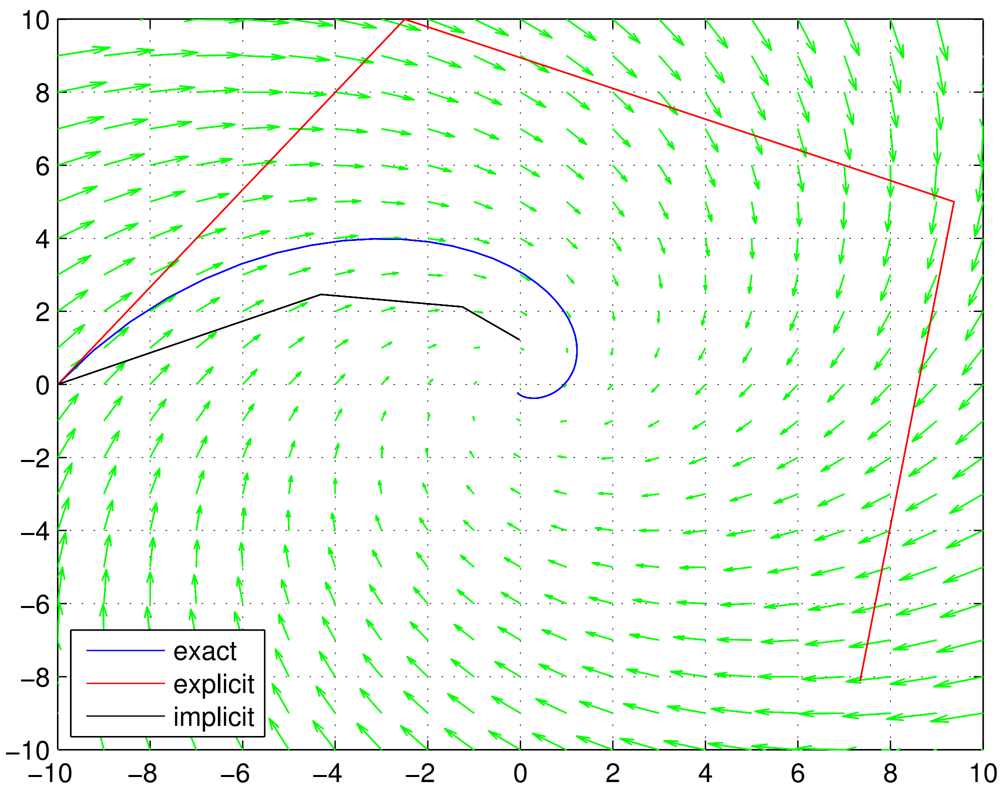
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} \\
\left(I - h \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \left(I - h \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad \text{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

Erste drei Iterationen (abrundet auf eine Dezimalstelle):

k	0	1	2	3
x	-10.0	-4.3	-1.2	0.0
y	0.0	2.5	2.1	1.2

(1.5 Punkte)

c) Im Richtungsfeld:



(2 Punkte)

d)

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_k(\alpha - \beta y_k) \\ -y_k(\gamma - \delta x_k) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + 0.02 \begin{pmatrix} x_k(100 - 2y_k) \\ -y_k(50 - x_k) \end{pmatrix} \text{ (2 Punkte)}$$

Erste drei Iterationen (abrundet auf eine Dezimalstelle):

Mit $\alpha = 20$

k	0	1	2	3
x	40.0	32.0	29.4	32.1
y	15.0	12.0	7.7	4.5

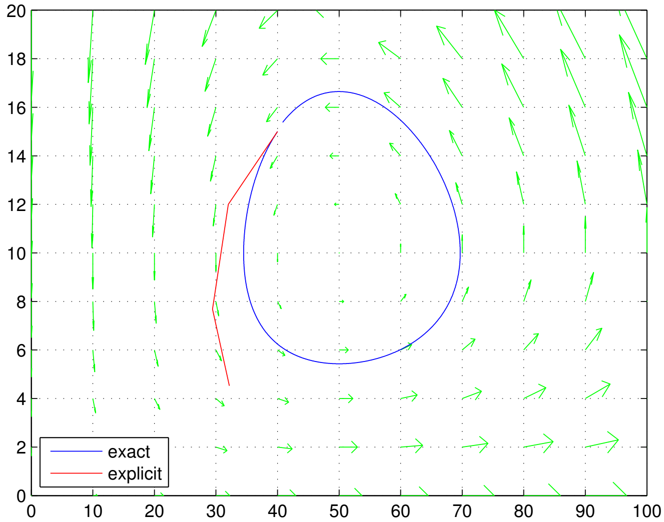
Mit $\alpha = 100$

k	0	1	2	3
x	40.0	96.0	241.9	502.8
y	15.0	12.0	23.0	111.5

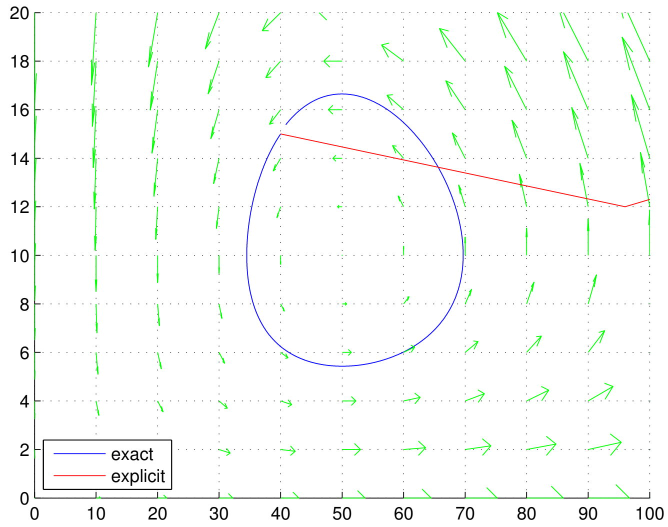
(1.5 Punkte)

e) Um das implizite Euler-verfahren an zu wenden, brauchen wir die Lösung eines nicht-lineairen Systems (1.5 Punkte). Weil es hier ein quadratisches System betrifft, hat das System möglicherweis zwei Lösungen oder gar keine. Generell ist die Lösung des Systems nicht immer möglich, und mussen Annäherungen oder numerische Verfahren genutzt werden um das System zu lösen.

f) Im Richtungsfeld: Mit $\alpha = 20$



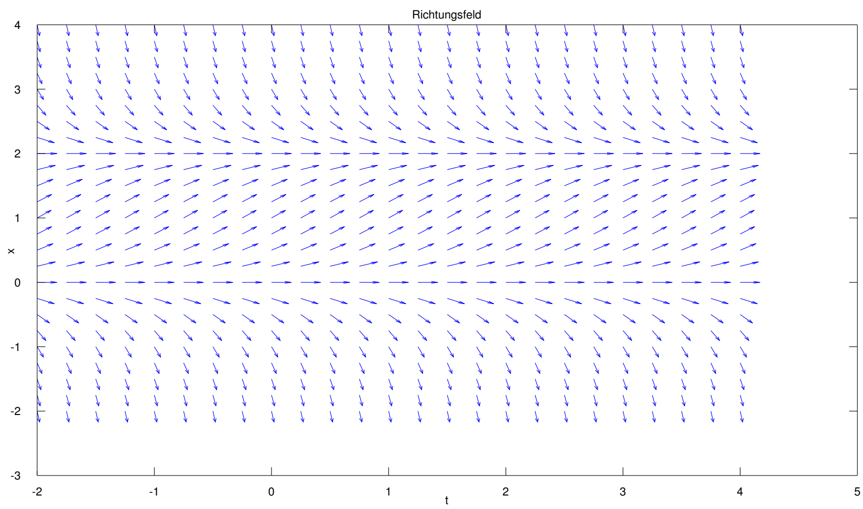
Mit $\alpha = 100$



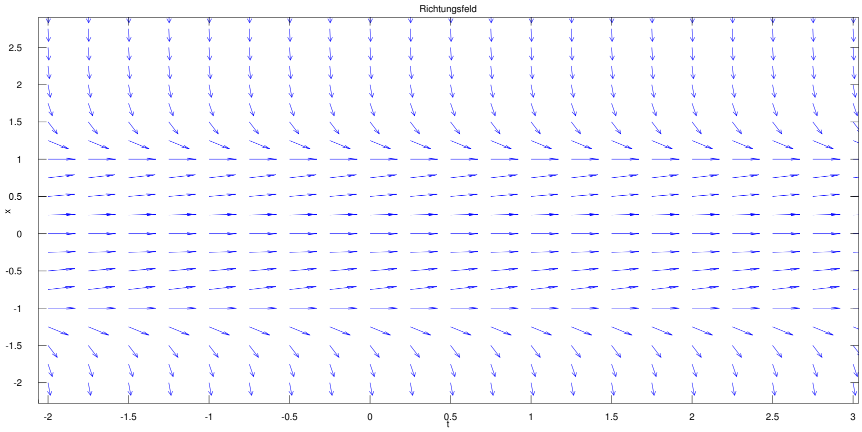
(1 Punkt)

Aufgabe 2 Geometrischer Euler (4 Punkte)

Der explizite und implizite Euler Algorithmus wird normalerweise am Computer berechnet, aber wir koennen die Loesung auch von Hand in ein Richtungsfeld eintragen. Tun Sie dies fuer die beiden folgenden Richtungsfelder, die Sie schon aus vorhergehenden Uebungen kennen fuer die gegebenen Startwerte und eine Schrittweite von $h = 1$.

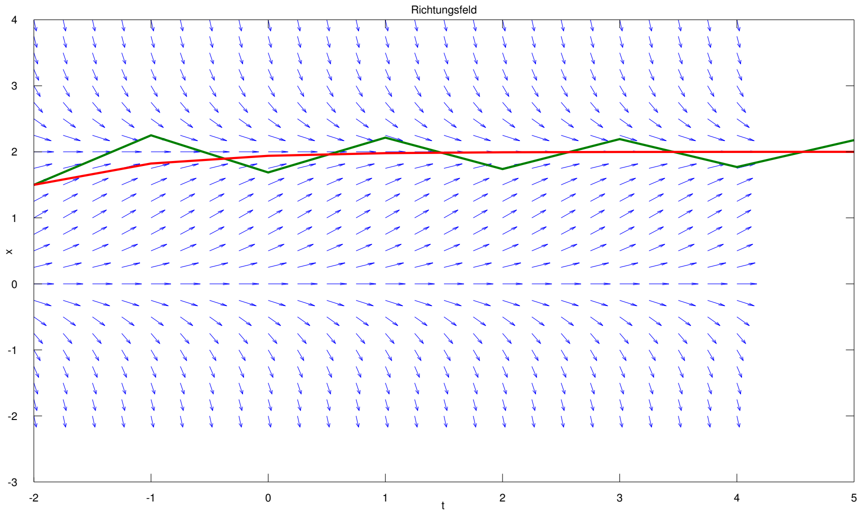


a) Startwert $= [-2, 1.5]$

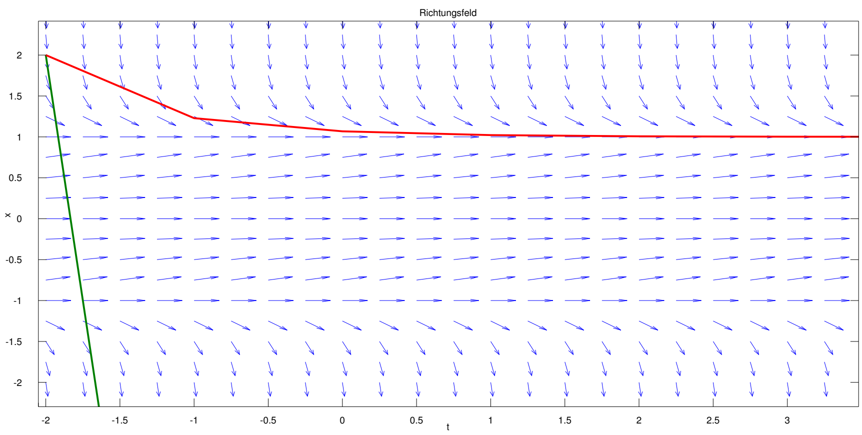


b) Startwert $= [-2, 2]$

Lösungsvorschlag



a) Startwert $= [-2, 1.5]$



b) Startwert $= [-2, 2]$