Formale Grundlagen der Informatik I
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

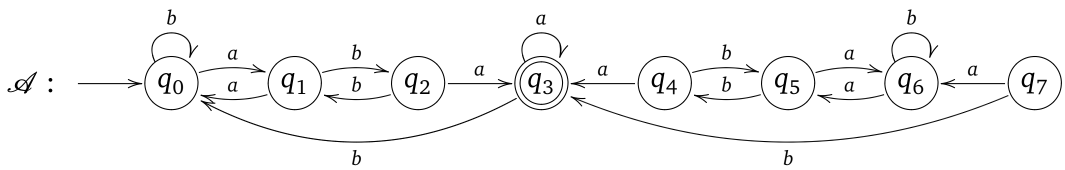
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
06. 05. 2013

Wichtiger Hinweis: Denken Sie daran, dass der 9.5. ein Feiertag ist und somit die Übung 9 auf den 8.5. um 8:00 in S103/204 verschoben wird.

Gruppenübung

Aufgabe G7 (DEA Minimierung)
Betrachten Sie den folgenden DEA, den wir auf Minimalität prüfen wollen:



Formal ist der Automat $\mathscr{A}$ durch das Fünftupel $(\Sigma, Q, q_0, \delta, A)$ beschrieben. Weiter bezeichne $\hat{\delta}$ die *erweiterte Übergangsfunktion* (Skript, Definition 2.2.4): $\hat{\delta}(q,\epsilon) := q$ und $\hat{\delta}(q, wa) := \delta\big(\hat{\delta}(q,w), a\big)$ für alle $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ und $q \in Q$.

(a) Geben Sie die Zustände an, in denen sich der DEA $\mathscr{A}$ nach Ausführung der nachfolgenden Übergänge befindet:
   i. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon)$;
   ii. $\hat{\delta}(q_0, a)$;
   iii. $\hat{\delta}(q_0, aa)$;
   iv. $\hat{\delta}(q_0, abbbaa)$.

($\star$) Definiere durch $\mathscr{L}_q(\mathscr{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q,w) \in A\}$ die Menge aller Worte $w \in \Sigma^*$, die akzeptiert würden, wäre q der Startzustand. (Auch: Die Menge aller w, die auf einem Pfad von q zu einem akzeptierenden Zustand akzeptiert werden.) Geben Sie die Menge $\mathscr{L}_{q_3}(\mathscr{A})$ explizit an.

(b) Gegeben ist die folgende unvollständige Tabelle für die Relation $\nsim$ (Skript Seite 39, *Minimierung eines DFA*). (Ein $\times$ an der Stelle p, q in der Tabelle bedeutet, dass $p \nsim q$.) Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie ggf. ein Wort an, für das diese Unterscheidung notwendig ist, d. h. ein Wort w, das zu L_q gehört, aber nicht zu $L_{q'}$ (oder umgekehrt).

$\nsim$	0	1	2	3	4	5	6	7
0			×	×	×			×
1			×	×	×			×
2	×	×		×		×	×	×
3	×	×	×		×	×	×	×
4	×	×		×		×	×	×
5			×	×	×		×	×
6			×	×	×	×		×
7	×	×	×	×	×	×	×	

Aufgabe G8 ((Nicht-)Regularität von Sprachen)

(a) Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Formal geschrieben lautet das Pumping-Lemma wie folgt (vgl. Skript Lemma 2.5.2):

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\,.\,\forall\, x \in L\,.\Big(|x| \geq n \implies \exists\, u, v, w \in \Sigma^*\,.\big(x = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}\,.(u\, v^m\, w \in L)\big)\Big) \tag{1}$$

Geben Sie die Negation von (1) an (d. h. die Aussage, dessen Korrektheit Sie beweisen müssen, wenn Sie mittels Pumping-Lemmas die *Nichtregularität* der Sprache L nachweisen wollen).

(b) Zeigen Sie sowohl mittels Myhill-Nerode als auch mittels Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n\}$$

nicht regulär ist.

Aufgabe G9 (Grammatiken)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, X_0)$ mit $\Sigma := \{a, b\}$, $V := \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ und

$$\begin{array}{rlcl} P: & X_0 & \to & aX_1 \mid bX_0 \\ & X_1 & \to & aX_0 \mid bX_2 \\ & X_2 & \to & aX_3 \mid bX_0 \\ & X_3 & \to & aX_0 \mid bX_3 \mid \varepsilon \end{array}$$

Welche der nachfolgenden Worte sind in der Grammatik G ableitbar?

$$aaabbba, \quad bbaaaba, \quad bbababb$$

Bonus: Ist die von der Grammatik G beschriebene Sprache regulär?

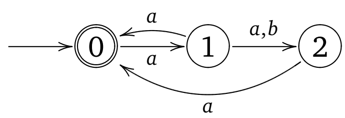
Hausübung

– Abgabe am 15.5.-17.5. 2013 in der Übung. Denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen. –

Aufgabe H8 (NEA zu DEA) (5 Punkte)

Betrachten Sie den NEA $\mathscr{A}$:

$\mathscr{A}$:



(a) Konstruieren Sie mittels Potenzmengenkonstruktion (Skript, Abschnitt 2.2.3) einen DEA $\mathscr{B}$, der die gleiche Sprache wie $\mathscr{A}$ erkennt (d. h. $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{B})$).

(b) Konstruieren Sie aus $\mathscr{B}$ einen *minimalen* DEA $\mathscr{C}$, der die gleiche Sprache erkennt. Geben Sie dazu (wie in **Aufgabe G7**) die Relationen $\not\sim_i$ in tabellarischer Form an.

Aufgabe H9 (Regularität von Sprachen) (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und L eine nicht-leere reguläre Σ-Sprache. Beweisen oder widerlegen Sie die Regularität jeder nachfolgenden Sprache.

(a) $L_1 := \{u \in \Sigma^* \mid \exists\, v \in \Sigma^*\,.\, u \cdot v \in L\}$

(b) $L_2 := \big\{w \in L \;\big|\; \exists\, u \in \Sigma^* \setminus L\,.\,\exists\, v \in \Sigma^+\,.\, u \cdot v = w\big\}$

(c) $L_3 := \big\{x^p y \;\big|\; y \in L, \text{Primzahl } p \in \mathbb{N}\big\}$,
wo $x \notin \Sigma$ ein festes Element ist (und so L_3 eine Sprache über das Alphabet $\Sigma \cup \{x\}$ ist).

Minitest

Aufgabe M10

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Bestimmen Sie die korrekten Implikationen:

L ist regulär	□ $\Longrightarrow$ □ $\Longleftarrow$	L ist endlich
	□ $\Longrightarrow$ □ $\Longleftarrow$	L wird von einem DFA akzeptiert
	□ $\Longrightarrow$ □ $\Longleftarrow$	L wird von einem NFA akzeptiert
	□ $\Longrightarrow$ □ $\Longleftarrow$	L enthält eine reguläre Sprache, d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_1 \subseteq \Sigma^*$ mit $L_1 \subseteq L$
	□ $\Longrightarrow$ □ $\Longleftarrow$	L ist Teilmenge einer regulären Sprache, d.h. es gibt eine reguläre Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $L \subseteq L_2$

Aufgabe M11

Kennzeichen Sie diejenige der folgenden Sprachen, die regulär sind.

- □ $\mathsf{L}\left(\mathsf{aaaaa\ a^*\ bbbbb\ b^*}\right)$
- □ $\left\{(ab)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 5\right\}$
- □ $\left\{a^n b^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 5\right\}$
- □ $\left\{a^m b^n \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N},\, m, n \geq 5\right\}$

Aufgabe M12

Sei L die Sprache, beschrieben durch die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, X_0)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{X_0\}$ und $P: \ X_0 \rightarrow aX_0b \mid \varepsilon$. Für welche Wortpaare w, w' gilt $w \sim_L w'$?

- □ a, b
- □ $aabb$, $aabb$
- □ $abab$, $baba$
- □ ab, ba
- □ aab, $aabb$