Einführung in Computational Engineering
Grundlagen der Modellierung und Simulation

Dr. Arne Nägel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2012/2013

Lösungsvorschlag der 8. Übung

Aufgabe 1 Zeitintegration von Differentialgleichungen (12 Punkte)

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \cos(\frac{5}{3}t + 1) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}, \quad x(0) = -1/2$$

soll mit numerischen Methoden bestimmt werden.

Konstruieren Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils so viele Schritte, wie es die Größe des Richtungsfeldes auf dem Beiblatt erlaubt. Verwenden Sie die Schrittweite $h = 1$ und machen Sie für jeden Iterationsschritt die verwendeten Steigungen in Ihrer Konstruktion kenntlich.

a) Konstruieren Sie geometrisch Lösungspunkte mit dem expliziten Euler-Verfahren. Geben Sie auch den rechnerisch ermittelten Wert x_k für $k = 1$ nach der ersten Iteration an.

b) Konstruieren Sie geometrisch Lösungspunkte mit dem impliziten Euler-Verfahren. Geben Sie auch den rechnerisch ermittelten Wert x_k für $k = 1$ nach der ersten Iteration an.

c) Konstruieren Sie geometrisch die Lösungspunkte mit dem Heun-Verfahren. Geben Sie auch den rechnerisch ermittelten Wert x_k für $k = 1$ nach der ersten Iteration an.

d) Berechnen Sie drei Lösungspunkte mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und tragen Sie diese in die Skizze von Aufgabe (c) ein.

Lösungsvorschlag

Wir haben $f(t, x) = \cos(\frac{5}{3}t + 1) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}$.

a) Expliziter Euler: $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$, also für $x_0 = -1/2$, $t_0 = 0$, $h = 1$:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \cos 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \cos 1 - \frac{1}{4} \approx 0.2903$$

Weitere Kontrollen: $x_2 = 0.0461$, $x_3 = 0.1991$, $x_4 = 1.7589$, $x_5 = 3.3246$. Geometrische Konstruktion siehe Lösung in Abb. 1.

b) Impliziter Euler: $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_{k+1}, x_{k+1})$, also für $x_0 = -1/2$, $t_0 = 0$, $h = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{5}{3} + 1\right) + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \\ \iff \quad \frac{1}{2}x_1 &= \cos\frac{8}{3} \\ \iff x_1 \quad &= 2\cos\frac{8}{3} \approx -1.7787 \end{aligned}$$

Weitere Kontrollen: $x_2 = -3.2974$, $x_3 = -3.6744$, $x_4 = -5.9764$, $x_5 = -12.9445$. Geometrische Konstruktion siehe Lösung in Abb. 1.

c) Verfahren von Heun:

$$\begin{aligned} s_1 &= f(t_k, x_k) \\ x_{k+1}^p &= x_k + hs_1 \\ s_2 &= f(t_{k+1}, x_{k+1}^p) \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{2}(s_1 + s_2) \end{aligned}$$

Also für $x_0 = -1/2$, $t_0 = 0$, $t_1 = h = 1$:

$$\begin{aligned} s_1 &= \cos 1 + \frac{1}{4} \\ x_1^p &= \cos 1 - \frac{1}{4} \approx 0.2903 \\ s_2 &= f(t_1, x_1^p) = \cos\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\left(\cos 1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \approx -0.2442 \\ x_1 &= x_k + \frac{h}{2}(s_1 + s_2) \approx -0.2269 \end{aligned}$$

Weitere Kontrollen: $x_2 = -0.5958$ $x_3 = -0.1406$, $x_4 = 1.2098$, $x_5 = 2.2326$.

d) Kontrollen: $x_1 = -0.3965$, $x_2 = -1.1123$, $x_3 = -0.7524$, $x_4 = 0.4324$, $x_5 = 0.7324$.

Aufgabe 2 Fehlerordnung der Trapezregel (8 Punkte)

Zur Lösung der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ betrachten Sie die Trapezregel:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\big(f(x_{k+1}) + f(x_k)\big)$$

1. Handelt es sich um ein implizites oder ein explizites Verfahren?
2. Geben Sie die Gleichung für den lokalen Diskretisierungsfehler d_k an und bestimmen Sie dessen Fehlerordnung. Nehmen Sie dazu an, dass die Lösung x hinreichend oft differenzierbar ist.
3. Berechnen Sie anschließend die Fehlerordnung p des globalen Diskretisierungsfehlers g_n. (*Hinweis: Sie sollen für f geeignete Lipschitzbedingungen annehmen!*)
4. Welche Ableitungen werden für b) benötigt? Sind die Differenzierbarkeitsanforderungen strenger oder weniger streng als beim in der Vorlesung betrachteten Euler-Verfahren?

Lösungsvorschlag

1. Da die rechte Seite Terme mit x_{k+1} enthält, ist das Verfahren implizit (1 Punkt).

2. Analog zum in der Vorlesung behandelten Euler-Verfahren ergibt sich (4 Punkte):

$$\begin{aligned}
d_{k+1} &= x(t_{k+1}) - x(t_k) - \frac{h}{2}\big(f(x(t_k)) + f(x(t_{k+1}))\big) \\
&= \left(\dot{x}(t_k)h + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_k)h^2 + \frac{1}{6}\dddot{x}(t_k)h^3 + O(h^4)\right) \\
&\quad -\frac{h}{2}\left(\dot{x}(t_k) + \dot{x}(t_k) + \ddot{x}(t_k)h + \frac{1}{2}\dddot{x}(t_k)h^2 + O(h^3)\right) \\
&= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)h^3\dddot{x}(t_k) + O(h^4) \\
&= -\frac{1}{12}h^3\dddot{x}(t_k) + O(h^4)
\end{aligned}$$

3. Da $|d_k| \leq Ch^3$ folgt $|g_n| \leq \frac{Ce^{Lnh}}{L}h^2$. Das Verfahren ist von zweiter Ordnung $p = 2$ (1 Punkt).
4. Benötigt werden Ableitungen dritter Ordnung $\dddot{x}$ (+ etwas mehr für Terme höherer Ordnung.); die Differenzierbarkeitsanforderungen sind strenger. (2 Punkte)

Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch nach 2013!

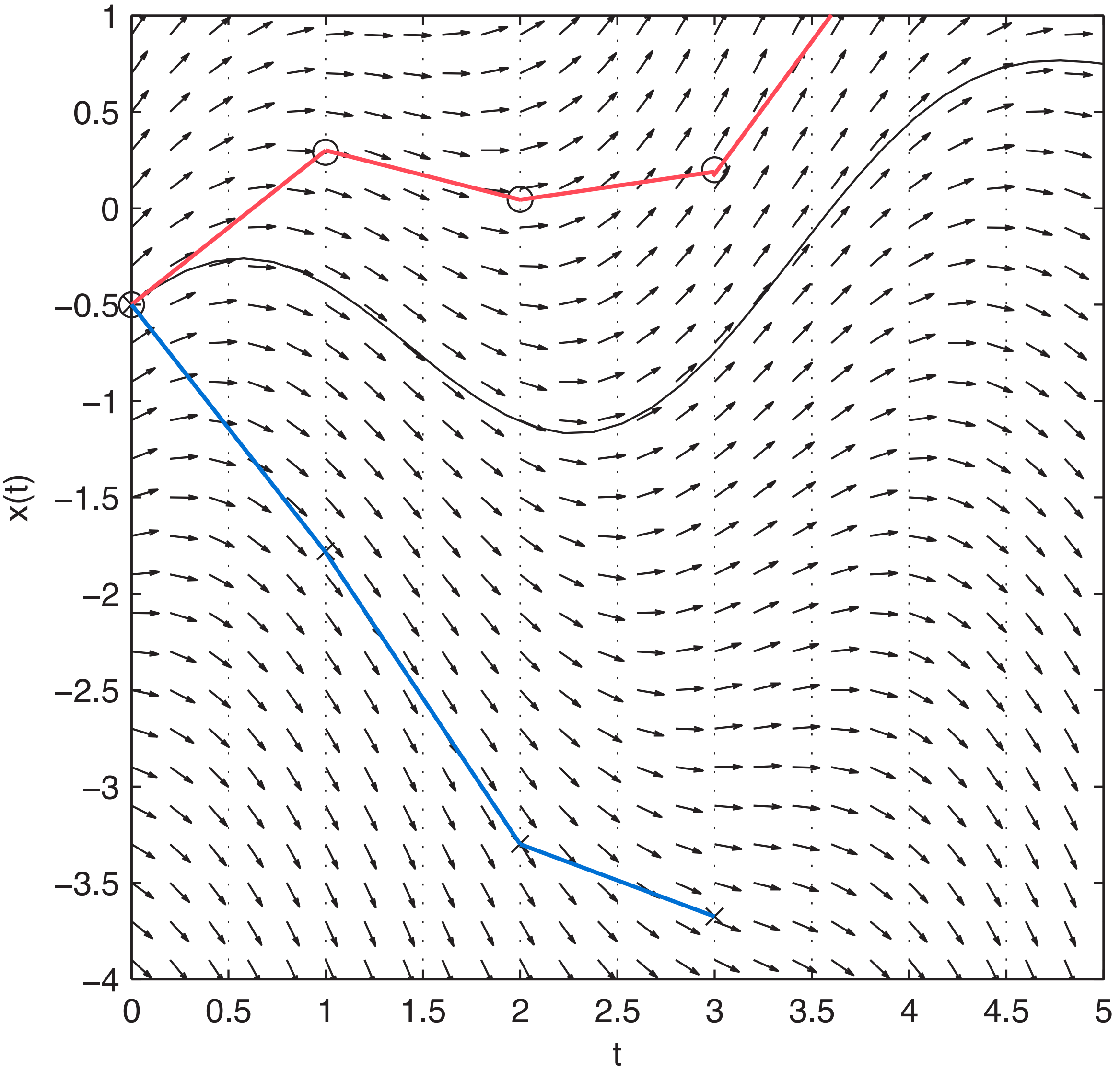

Abbildung 1: Geometrische Konstruktion zu a) und b)

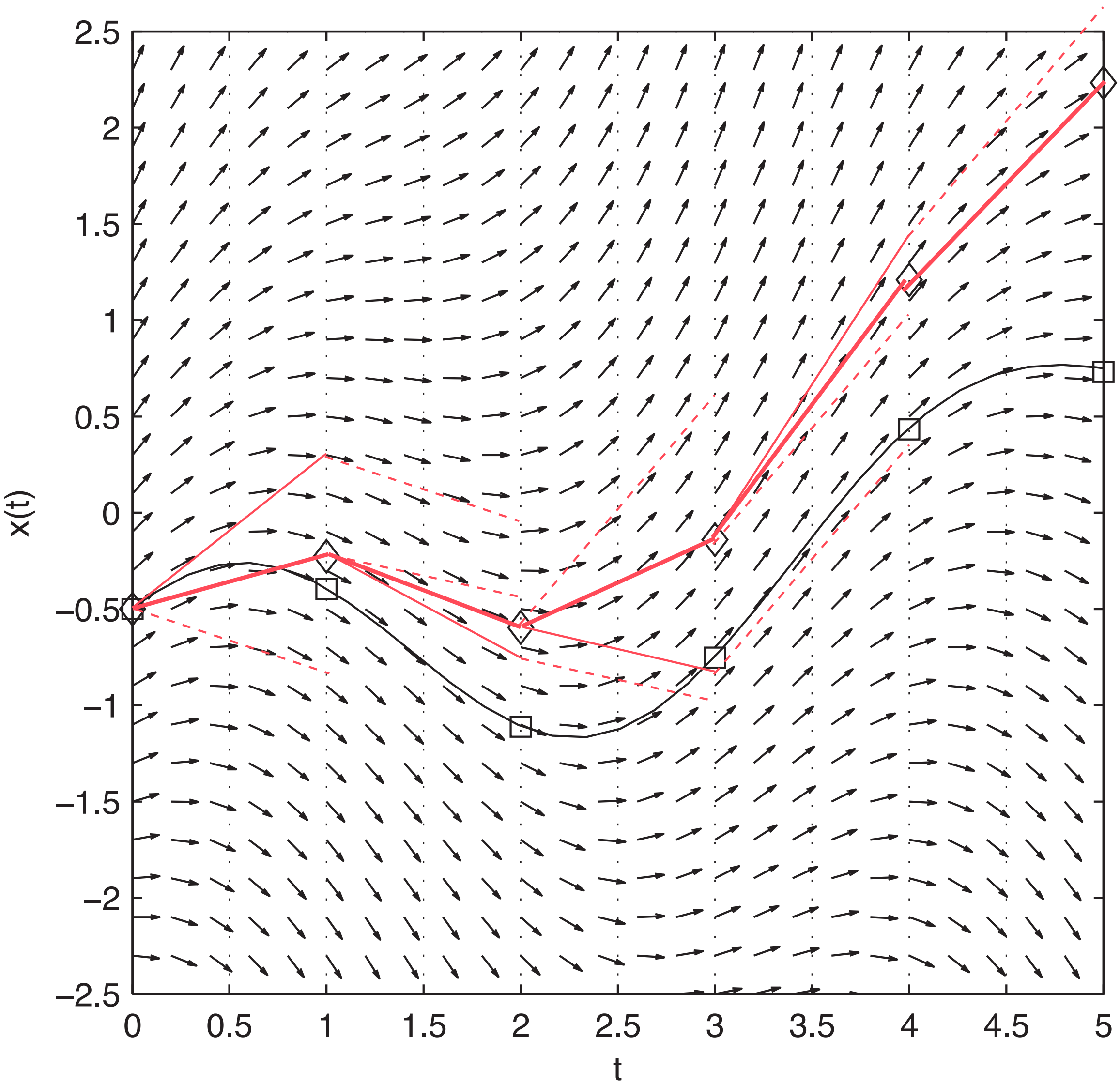

Abbildung 2: Geometrische Konstruktion zu c) sowie Lösung zu d)