

Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr. J. Peters, C. Daniel, M.Sc. und H. van Hoof, M.Sc.

Wintersemester 2013/2014

2. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Lernportal Informatik** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt.
- **Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben:** In der Vorlesung, oder bis Montag, den 4.11.2012, um 13:15 Uhr im Briefkasten unseres Fachgebietes neben dem Sekretariat in Raum S2|02/E314.

Aufgabe 1 Erzeugung von Zufallszahlen (4 Punkte)

Eine weitverbreitete Methode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen sind *lineare Kongruenzgeneratoren*. Diese erzeugen ausgehend von einem Startwert x_0 eine Folge weiterer Zahlen durch die Vorschrift

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \mod m$$

Dabei bezeichnet m die Periode, a einen Multiplikator und c eine Verschiebung. Die erzeugten Zahlen entsprechen (je nach Wahl der Parameter) mehr oder weniger einer Gleichverteilung über natürliche Zahlen zwischen 0 und $m - 1$.

- a) Berechnen Sie für $a = 6$, $c = 27$ und $m = 100$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 27$ neun weitere Zahlen x_1, \dots, x_9 und geben Sie diese an. Ermitteln Sie außerdem, wie sich die zehn Zahlen auf die folgenden Intervalle verteilen:
- $n = 5$ Teilintervalle: $[0, 19]$, $[20, 39]$, ..., $[80, 99]$.
 - $n = 10$ Teilintervalle: $[0, 9]$, $[10, 19]$, ..., $[90, 99]$,
- b) Zur Prüfung der Qualität des Zufallszahlengenerators bieten sich verschiedene statistische Tests an. Zunächst soll die Hypothese getestet werden, dass die Zufallsvariablen gleichverteilt sind. Dies kann z.B. durch den sog. χ^2 -Test geschehen. Dieser basiert auf der Berechnung des Wertes

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(b_k - e_k)^2}{e_k}.$$

Diese Zahl gibt an, wie stark die $k = 1, \dots, n$ beobachteten Größen b_k von den Erwartungswerten e_k abweichen (b_k beschreibt die Aufteilung auf die Intervalle, die sie in Aufgabenteil a) errechnet haben). Bei einer Gleichverteilung gilt $e_k = 10/n$ für alle k .

Ist χ^2 kleiner als ein von der Anzahl der Klassen n abhängiger kritischer Wert χ_n , so werden wir die Hypothese der Gleichverteilung akzeptieren. Falls wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% tolerieren, liegt der kritische Wert bei $\chi_{10} = 16.9$ für 10 Intervalle bzw. bei $\chi_5 = 9.5$ für 5 Intervalle. Geben Sie in beiden Fällen an, ob der Test die Gleichverteilungshypothese akzeptiert. (*Warnung: Dieses Beispiel dient der Illustration! Im Normalfall sollten wesentlich mehr als nur 10 Zufallszahlen erzeugt werden!*)

Aufgabe 2 DES und Zufall (8 Punkte)

In der nachfolgenden Tabelle sind die Ergebnisse einer diskreten Ereignissimulation einer Warteschlange in einem Blumengeschäft angegeben. Für jeden Kunden i bezeichnet dabei:

- Δt_i^A : die Zeit, die bis zur Ankunft des nächsten Kunden vergeht. Diese sind gleichverteilt aus den Zahlen $\{1, \dots, 10\}$ entnommen.
- Δt_i^D : die Zeit, die zur Bearbeitung des Wunsches des i . Kunden benötigt wird. Diese ist gleichverteilt in $\{2, 3, 4, 5\}$.
- t_i^A, t_i^S, t_i^D : die Zeiten, welche die Ankunft (ggf. in der Schlange), den Beginn der Bearbeitung (*service*) und das Verlassen des Geschäfts (*departure*) beschreiben.

Alle Zeiten sind in Minuten angegeben.

- a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der gleichverteilten Bedienzeit.

Hinweis: Im diskreten Fall gilt allgemein für den Erwartungswert

$E(x) = \sum_k x_k p_k$ (für alle möglichen Werte x_k ist dabei p_k die zugehörige Wahrscheinlichkeit); Varianz: $\sigma^2(x) = E[(x - E[x])^2] = E[x^2] - (E[x])^2$.

i	Δt_i^A	Δt_i^D	t_i^A	t_i^S	t_i^D
1	8	3	0	0	3
2	3	2	8	8	10
3	5	2	11	11	13
4	4	3	16	16	19
5	1	2	20	20	22
6	10	4	21	22	26
7	3	3	31	31	34
8	7	4	34	34	38
9	3	4	41	41	45
10	3	3	44	45	48
11	5	3	47	48	51
12	8	4	52	52	56
13	1	5	60	60	65
14	6	3	61	65	68
15	5	4	67	68	72
16	9	2	72	72	74
17	2	5	81	81	86
18	6	3	83	86	89
19	5	4	89	89	93
20	2	5	94	94	99

Berechnen Sie aus den Daten der Tabelle:

- b) die mittlere Wartezeit des Kunden,
- c) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht warten muss,
- d) die gesamte Zeit, die die Floristin auf das Eintreffen neuer Kunden wartet,
- e) die mittlere Wartezeit der Kunden, die warten,
- f) die mittlere Verweildauer der Kunden im Geschäft.
- g) Wenden Sie eine Schätzformel zur approximativen Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz aus der Vorlesung auf die Bedienzeiten aus nebenstehender Tabelle an. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabe (a).

Aufgabe 3 Warteschlangen und Zufall (8 Punkte)

Am Darmstädter Hauptbahnhof ist am Info-Punkt immer einiges los. An einem normalen Tag kommen zu Stoßzeiten durchschnittlich 4 Reisende pro Minute an um einige Fragen zu stellen. Die Person am Schalter benötigt durchschnittlich 12 Sekunden pro Reisende, um die Fragen zu beantworten. Die Zeitspanne zwischen der Ankunft zweier aufeinander folgender Reisender und die Zeit, die der Schalterbeamte zur Beantwortung der Fragen benötigt, seien exponentialverteilt.

- a) Wie groß ist die mittlere Auslastung ρ der Person am Schalter?
- b) Wie lange benötigen die Fragesteller im Durchschnitt von Ihrer Ankunft am Schalter bis zur Beantwortung der Frage?
- c) Wie viele Reisende befinden sich erwartungsgemäß am Schalter (die Person, deren Frage beantwortet wird, zählt dazu)?
- d) Wie viele Reisende warten durchschnittlich in der Schlange am Schalter (jetzt ohne den Fragesteller)?
Hinweis: Man kann nicht einfach Eins abziehen für den Fragesteller!

Wegen einer Marathonveranstaltung sind mehr Menschen in der Stadt und suchen um Auskunft. Im Schnitt kommen jetzt 16 Personen pro Minute.

- e) Wie verändert sich die mittlere Auslastung ρ ? Welche Aussagen kann man über den Zustand des Systems treffen? Welche verschiedenen Maßnahmen kann man treffen, damit diese Veränderung nicht eintritt?

-
- f) Unterstellen Sie ein M/M/c-Modell mit mehreren Personen in der Beratung am Info-Punkt. Wie viele Beratungsplätze c sollten sinnvollerweise mindestens geöffnet werden?
-

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung für eine schriftliche Aufgabe oder eine Programmieraufgabe bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Falls die Verwendung von Fremdmaterial gestattet ist, so müssen Quellen korrekt zitiert werden. Weiterführende Informationen finden Sie auf der Internetseite des Fachbereichs Informatik:

<http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarismus>