Formale Grundlagen der Informatik I
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Carsten Rösnick

Sommersemester 2013
15. 04. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Transitionssysteme)
Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

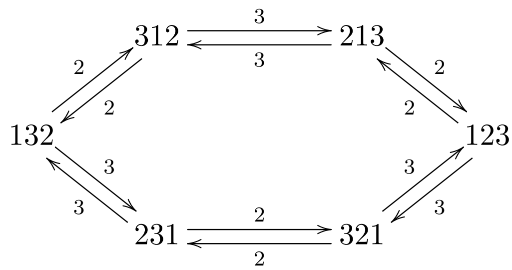
entsprechen.

(a) Zeichnen Sie für einen Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen zwischen diesen.

(b) Betrachten Sie einen Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \le k \le 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen zu 1234 sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welcher ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

Lösung:

(a)



(b) Wir bestimmen nacheinander die Mengen M_k, $0 \le k \le 4$, der Pfannkuchenstapel, die sich in k Übergängen sortieren lassen. Dabei ist ein Stapel genau dann in der Menge M_k (für $k > 0$), wenn er durch einen Übergang aus einen Stapel in M_{k-1} hervorgeht und selbst noch in *keinem* der Mengen $M_0, \ldots, M_{k-1}$ selbst vorhanden ist. (Das verhindert, dass wir beispielsweise durch drehen des obersten Pfannkuchen stets den Stapel 1234 in allen Mengen enthalten haben.)

$$\begin{array}{rc}
M_0: & 1234 \\
M_1: & 2134, 3214, 4321 \\
M_2: & 3124, 4312, 2314, 4123, 3421, 2341 \\
M_3: & 1324, 4213, 3412, 1342, 4132, 1423, 2143, 2431, 1243, 3241, 1432 \\
M_4: & 4231, 2413, 3142
\end{array}$$

Die Lösung (der einzige Stapel in M_3, der sich auf exakt zwei Wegen wieder sortieren lässt) ergibt sich dann, indem man alle Stapel in M_3 nacheinander durchgeht und die Anzahl der „Sortierpfade" zählt. (Alternativ kann man auch den vollständigen Baum der Tiefe 3, den man somit implizit durchgeht, auch explizit erstellen und an diesem die Anzahl der Pfade zählen.)

$$1324 \xrightarrow{2} 3124 \xrightarrow{3} 2134 \xrightarrow{2} 1234$$

$$1324 \xrightarrow{3} 2314 \xrightarrow{2} 3214 \xrightarrow{3} 1234$$

Aufgabe G2 (Mengenoperationen)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   i. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$
   ii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

Lösung:

(a) i. Wir zeigen, dass $(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap B$ und $(A \cap B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cap B$.

($\subseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \setminus C$. Dann ist $x \in A$, $x \in B$ und $x \notin C$. Also haben wir $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Daraus folgt, dass $x \in (A \setminus C) \cap B$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \setminus C) \cap B$. Dann ist $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Das erste bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin C$. Da $x \in A$ und $x \in B$, haben wir $x \in A \cap B$. Da also $x \notin C$, folgt $x \in (A \cap B) \setminus C$.

ii. Wir zeigen, dass $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ und $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \supseteq C \setminus (A \cap B)$.

($\subseteq$) Sei $x \in C \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in C$ und $\underline{x \notin A \cap B}$ (beachten Sie, dass $x \notin (A \cap B)$ *nicht* zu $x \notin A \wedge x \notin B$ äquivalent ist; siehe Abbildung 1). Da $x \notin A \cap B$, muss $x \notin A$ oder $x \notin B$ gelten (wäre beides falsch, so wäre $x \in A$ und $x \in B$ und damit $x \in A \cap B$). Falls $x \notin A$ gilt, dann $x \in C \setminus A$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Falls $x \notin B$ gilt, dann $x \in C \setminus B$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. In beiden Fällen gilt also $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(a) $x \notin A$ *oder* $x \notin B$ **(b)** $x \notin A$ und $x \notin B$

Abbildung 1: Richtige (links) und falsche (rechts) Reformulierung von $x \notin (A \cap B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Dann gilt entweder $x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$. (Hier sollten wir den Beweis also via Fallunterscheidung fortführen.) Im ersten Fall gilt $x \in C$ und $x \notin A$. Letzteres bedeutet, dass $x \notin A \cap B$. Also gilt $x \in C \setminus (A \cap B)$. Im zweiten Fall beweist man analog, dass $x \in C \setminus (A \cap B)$.

(b) Es gilt, dass $A \cap (M \setminus B) \subseteq A \setminus (B \cap C)$, $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Weiterhin sind sowohl $M \setminus (A \cup B)$ und $A \setminus (B \cup C)$ als auch $M \setminus (A \cup B)$ und $A \cap (M \setminus B)$ disjunkt.

Aufgabe G3 (Relationen)
Sei R eine binäre Relation auf X, also $R \subseteq X \times X$. Wir definieren (induktiv)

$$\begin{aligned} R^0 &:= \{(x,x) \mid x \in X\}\,, \\ R^{n+1} &:= \{(x,y) \in X \times X \mid \text{es gibt ein } z \text{ mit } (x,z) \in R \text{ und } (z,y) \in R^n\}\,, \\ R^* &:= \bigcup_{n \geq 0} R^n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) R^* ist eine reflexive Relation,

(b) R^* ist eine transitive Relation,

(c) R^* umfasst R, d.h. $R \subseteq R^*$,

(d) R^* ist die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfasst (d.h. falls R' reflexiv und transitiv ist mit $R \subseteq R'$, so gilt $R^* \subseteq R'$).

Lösung: Bemerken Sie, dass $(x,y) \in R^n$ genau dann gilt, wenn es eine Reihe $z_0, \ldots, z_n$ mit $x = z_0$, $y = z_n$ gibt, so dass $z_0 \; R \; z_1 \; R \; z_2 \; R \ldots R \; z_n$.

(a) R^* is reflexiv, denn $R^0 \subseteq R^*$.

(b) Seien x, y, z mit $x \; R^* \; y$ und $y \; R^* \; z$ gegeben. Dann gibt es Zahlen i und j mit $x \; R^i \; y$ und $y \; R^j \; z$. Dann gilt $x \; R^{i+j} \; z$ und damit $x \; R^* \; z$.

(c) R^* umfasst R, denn $R = R^1 \subseteq R^*$.

(d) Sei R' eine beliebige reflexive und transitive Relation, die R umfasst. Dann muss gelten: $R^0 \subseteq R'$, da R' reflexiv ist, und ferner $R = R^1 \subseteq R'$, da R' die Relation R umfasst. Da R' auch transitiv ist, folgt mit Induktion, dass $R^2, R^3, \ldots$ in R' enthalten sind. Also gilt $R^* \subseteq R'$. Damit ist gezeigt, dass R^* die *kleinste* solche Relation ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Relationen) (5 Punkte)
Durch

$$a \geq c :\Leftrightarrow \exists\, b \in M \,.\, a - c = b \cdot b, \qquad (a, c \in M)$$

sei auf einer (*Träger*-)Menge M eine *Relation* „$\geq$“ definiert. Überdies seien „$-$“ und „$\cdot$“ *Operationen* auf M. Wir betrachten nun die folgenden beiden Aussagen:

(a) $\forall\, a, b \in M \,.\big(a, b \geq 0 \implies a \cdot b \geq 0\big)$;

(b) $\forall\, a, b, c \in M \,.\big(a \geq b \wedge b \geq c \implies a \geq c\big)$.

Bemerkung: $\mathbb{Z}_p$ bezeichne den Restklassenring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Welche der vorigen Aussagen halten (d.h., sind erfüllt) über welcher der nachfolgenden Mengen M? Beweisen Sie jeweils Ihre Vermutung oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $\mathbb{R}$ (ii) $\mathbb{Q}$ (iii) $\mathbb{C}$ (iv) $\mathbb{Z}_2$ (v) $\mathbb{Z}_3$.

Bemerkung: Die Operationen „$-$“ und „$\cdot$“ sind als die in den jeweiligen Trägermengen übliche Subtraktionen und Multiplikationen zu verstehen.

Lösung: $\boxed{\text{0.5 P.}}$ je Menge M und Aussage (a. oder b.).

- Zu a) für $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$: Gilt $a, b \geq 0$, existieren also $\alpha, \beta \in M$ mit $a - 0 = \alpha^2$ und $b - 0 = \beta^2$, so gilt folglich auch $a \cdot b \geq 0$ wegen $a \cdot b = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2$. (Das geht, da die zuvor genannten Mengen unter Multiplikation abgeschlossen sind.)

- Zu b) für $\mathbb{Q}$: $5 \geq 1$ und $1 \geq 0$, aber $5 \not\geq 0$. Grund: $\sqrt{p}$ ist irrational für alle Primzahlen p, damit also nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten.
- Zu b) für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$: Sind $a \geq b$ und $b \geq c$, so existieren $\alpha, \beta \in M$ mit $a - b = \alpha^2$ und $b - c = \beta^2$. Schreiben wir $a - c$ um zu $(a - b) + (b - c)$, so sehen wir leicht, dass $a \geq c$ genau dann gilt, wenn ein $\gamma \in M$ existiert, das $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ erfüllt. Da das Argument der Wurzel stets nicht-negativ ist, existiert ein solches γ für alle α, β; $a \geq c$ ist also wahr, sofern die Prämisse wahr ist.
- Zu b) für $\mathbb{Z}_2$: $a \geq c$ gilt für alle $a, c \in \mathbb{Z}_2$!
- Zu b) für $\mathbb{Z}_3$: Gilt nicht, da zwar $2 \geq 1$ und $1 \geq 0$, aber $2 \not\geq 0$.

Aufgabe H2 (Induktion) (2.5+2.5 Punkte)

(a) Die Fibonacci Zahlen F_n (n natürliche Zahl) sind, wie folgt, rekursiv definiert: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ gilt $F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} - (-1)^n$.
Tipp: Es kann hilfreich sein $F_n^2 = F_n(F_{n-2} + F_{n-1})$ zu verwenden.

(b) Die Menge der *schönen Wörter* über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei wie folgt definiert:
   i. Die Wörter ab, ba und c sind *schön*;
   ii. Ist w ein *schönes* Wort, so sind auch awb und bwa *schön*;
   iii. Sind w und w' *schön*, so ist wcw' ebenfalls *schön*.

   Bezeichne mit $\#_a w$ die Anzahl der a's im Wort w. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass $\#_a w = \#_b w$ für alle schönen Wörter w gilt.

Lösung:

(a) Induktionsanfang (jeweils $\boxed{\text{0.5 P.}}$ pro item):
   - Für $n = 1$ gilt $F_1^2 = 1^2 = F_0 \cdot F_2 - (-1)^1$. ✓
   - Um den Beweis des Induktionsschrittes zu verkürzen zeigen wir den -anfang zudem für $n = 2$. Einsetzen und Ausmultiplizieren der Definition ergibt $F_2^2 = (F_0 + F_1)^2 = 1^2$. Da sich die Behauptung zu $F_1 \cdot (F_1 + F_2) - (-1)^2 = F_1^2 + F_1 \cdot F_2 - 1$ auflösen lässt, gilt diese für $n = 2$.

   Induktionsschritt ($\boxed{\text{1.5 P.}}$): Sei $n > 1$. Durch die Umstellung der Aussage zu $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ kann der Beweis übersichtlicher aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} - F_n(F_{n-2} + F_{n-1}) \\ &= F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_n - F_{n-1}F_n \\ &= (-1) \cdot (F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2) \overset{\text{IV}}{=} (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n. \end{aligned}$$

(b) Induktionsanfang:
   - Wort $w = ab$: $\#_a w = 1 = \#_b w$. ✓
     Wort $w = ba$: Analog zum vorherigen Fall. ✓
     Zusammen $\boxed{\text{0.5 P.}}$.
   - Wort $w = c$: $\#_a w = 0 = \#_b w$. ✓ $\boxed{\text{0.5 P.}}$

   Induktionsschritt: w und w' seien schöne Wörter, nach Induktionsvoraussetzung gelten also also $\#_a w = \#_b w$ und $\#_a w' = \#_b w'$.
   - Wort $\tilde{w} = awb$: $\#_a \tilde{w} = 1 + \#_a w$, $\#_b \tilde{w} = 1 + \#_b w$. Durch die Induktionsvoraussetzung folgt $\#_a \tilde{w} = \#_b = \tilde{w}$; $\tilde{w}$ ist somit ein schönes Wort.
     Wort $\tilde{w} = bwa$: Analog zum vorherigen Fall.
     Zusammen $\boxed{\text{1 P.}}$.
   - Wort $\tilde{w} = wcw'$: Analoges Argument wie im ersten Fall. $\boxed{\text{0.5 P.}}$ für diesen Fall.

Minitest

Aufgabe M1
Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- $\square$ $\emptyset \in M$
- $\square$ $\emptyset \subseteq M$
- $\square$ $\{\emptyset\} \in M$

Lösung:

- $\square$ $\emptyset \in M$
- $\boxtimes$ $\emptyset \subseteq M$
- $\square$ $\{\emptyset\} \in M$

Die leere Menge $\emptyset$ ist nicht in M enthalten, weil M nach Voraussetzung nur $1, 2, 3$ enthält. ($\emptyset \in M$ würde z. B. gelten, wenn $M = \{\emptyset, 1, 2, 3\}$). Aus dem gleichen Grund ist auch die Menge, die nur $\emptyset$ enthält, also $\{\emptyset\}$, nicht in M enthalten. Die leere Menge ist aber eine Teilmenge von M, weil für jedes Element der leeren Menge gilt, dass es auch ein Element von M ist.

Aufgabe M2
Seien $R, R' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zwei Ordnungsrelationen, so ist $R \cap R'$ ebenfalls eine Ordnungsrelation. *Wahr* oder *falsch*?

Lösung: *Wahr*.
Beispielhaft für die Antisymmetrie. Seien $(a, b) \in R \cap R'$ und $(b, a) \in R \cap R'$, dann gilt $(a, b), (b, a) \in R$. Da R nach Voraussetzung antisymmetrisch ist, folgt daraus $a = b$ (was zu zeigen war).

Aufgabe M3
Durch $A \subseteq B :\Leftrightarrow A \setminus B \neq \emptyset$ sei eine Relation auf der Potenzmenge der natürlichen Zahlen definiert. Welche der folgenden Aussagen gilt für alle *nicht-leeren* Teilmengen A, B von $\mathbb{N}$?

- $\square$ $\subseteq = \emptyset$
- $\square$ $A \subseteq \emptyset$
- $\square$ $\big(\forall\, x \in A \,.\, x \in B\big) \implies A \subseteq B$
- $\square$ $(\emptyset, A) \in \subseteq$

Lösung:

- $\square$ $\subseteq = \emptyset$
- $\boxtimes$ $A \subseteq \emptyset$
- $\square$ $\big(\forall\, x \in A \,.\, x \in B\big) \implies A \subseteq B$
- $\square$ $(\emptyset, A) \in \subseteq$

- Die erste Aussage ist falsch, denn z.B. $\{0, 1\} \subseteq \{0\} \iff \{1\} \neq \emptyset$, also es gibt Mengen, die in Relation $\subseteq$ sind.
- Die zweite Aussage ist wahr:

$$A \subseteq \emptyset \iff A \setminus \emptyset \neq \emptyset \iff A \neq \emptyset$$

  und A ist nicht leer nach der Voraussetzung.
- Ein Gegenbeispiel für die dritte Aussage ist $A = B = \{0\}$.
- Jede Menge A ist ein Gegenbeispiel für die vierte Aussage.