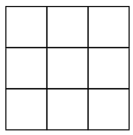
Formale Grundlagen der Informatik I
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

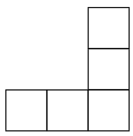
SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Transitionssysteme)
Betrachten Sie dass folgende Spiel. Das Spiel beginnt mit einer rechteckigen Tafel Schokolade, z.B. von folgender Form:

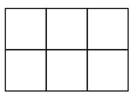


Zwei Spieler wählen nun abwechselnd ein Stück der Schokolade. Wer ein Stück gewählt hat, muss dieses Stück essen, sowie alle anderen Stücke, die sich weiter links, oberhalb oder weiter links und oberhalb von dem gewählten Stück befinden. Der Spieler darf keine anderen Stücke essen. Wenn man beispielsweise das mittlere Stück der oben abgebildeten Schokolade aussucht, bleibt folgender Rest übrig:



Jeder Spieler muss immer mindestens ein Stück Schokolade essen und wer das letzte Stück isst, hat verloren.

(a) Nehmen Sie an, das Spiel beginnt mit der folgenden Form:



Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm, dessen Knoten die möglichen Positionen sind, die man von der Startposition aus erreichen kann. Die Kanten sollen die möglichen Übergänge darstellen, die einem Zug im Spiel entsprechen.

(b) Erklären Sie, wie man das Diagramm benutzen kann um die Positionen zu ermitteln, in denen der Spieler, der am Zug ist, Gewinn erzwingen kann (also eine *Gewinnstrategie* hat).

(c) Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie sieht seine Strategie aus?

Aufgabe G2 (Mengenoperationen)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   i. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

ii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Transitionssysteme)
Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

entsprechen.

(a) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

(b) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen zu 1234 sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

Aufgabe H2
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$