

# Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Prof. Jan Peters, C. Daniel, MSc. und H. van Hoof, MSc.

Wintersemester 2013/2014

8. Übung

## Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Lernportal Informatik** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt.
- **Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben:** In der Vorlesung, oder bis Montag, den 16.12.2013, um 13:00 Uhr im Briefkasten unseres Fachgebietes neben dem Sekretariat in Raum S2|02/E314.

## Aufgabe 1 Dynamische Systeme mit Unstetigkeiten (10 Punkte)

Betrachtet werden soll ein Heizungssystem. Zur Regulierung der Raumtemperatur werde ein Thermostat so eingestellt, dass eine Heizung sich einschaltet, sobald die Temperatur unter  $17^\circ\text{C}$  fällt. Sobald die Raumtemperatur den Wert  $23^\circ\text{C}$  übersteigt, wird die Beheizung abgeschaltet.

Bei konstanter Außentemperatur lässt sich das dynamische Verhalten des Temperaturverlaufs in grober Näherung wie folgt beschreiben:

- Ist die Heizung aus, gilt für die Temperatur  $x(t)$  die Beschreibung  $\dot{x}(t) = -0.5x(t)$ .
- Ist die Heizung in Betrieb, gilt für die Raumtemperatur  $\dot{x}(t) = -0.5x(t) + 20$ .

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

- a) Zeigen Sie: Die Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ist durch

$$x(t) = e^{f(t)} \left[ \int_{t_0}^t b(s) e^{-f(s)} ds + x_0 \right], \quad f(t) := \int_{t_0}^t a(s) ds$$

gegeben. *Hinweis:* Differenzieren Sie dazu die rechte Seite der vorgeschlagenen Lösung und setzen Sie danach  $x(t)$  und  $\dot{x}(t)$  in das originale Problem ein.

- b) Wie lauten jeweils die Lösungen der Differentialgleichungen in den beiden diskreten Zuständen („Heizung an“ / „Heizung aus“) bei gegebenen Anfangswert  $x(t_0) = x_0$ ?
- c) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur  $x(t)$  zwischen  $t = 0$  und  $t = 3$  bei gegebenem Anfangswert  $x(t_0) = 0^\circ\text{C}$ .

- d) Geben Sie die Schaltfunktionen an, mit deren Hilfe Beginn und Ende der Beheizung in der Simulation der Temperatur berücksichtigt werden kann.
- e) Betrachten Sie die Situation  $x(1.6) = 22.0^\circ\text{C}$  bei eingeschalteter Heizung. Führen Sie einen Simulationsschritt der Länge  $\Delta t = 0.2$  mit dem expliziten Euler-Verfahren durch.
- f) Bestimmen Sie den aus (e) folgenden Schaltzeitpunkt und geben Sie Startwerte für den anschließenden Iterationsschritt der weiteren Simulation an.
- g) Skizzieren Sie  $x(1.6)$  und  $x(1.6 + \Delta t)$  aus (e), den Schaltzeitpunkt aus (f), und den zeitlichen (analytischen) Verlauf der Temperatur zwischen  $t = 1.5$  und  $t = 2.0$  in einer Zeichnung.

---

## Aufgabe 2 Numerische Integrationsverfahren (6 Punkte)

---

In der Vorlesung haben Sie verschiedene numerische Integrationsverfahren kennengelernt. Implementieren Sie nun das Explizite Eulerverfahren, das Heunverfahren und das Runge-Kuttaverfahren vierter Ordnung in Matlab. Vervollständigen Sie dazu den Matlabcode den Sie auf der Moodle Seite finden koennen.

- a) Implementieren Sie das Explizite Eulerverfahren (0 Punkte)
- b) Implementieren Sie das Heunverfahren (0 Punkte)
- c) Implementieren Sie das Runge-Kuttaverfahren vierter Ordnung (0 Punkte)
- d) Loesen Sie das Problem, das Sie als Loesung zur Aufgabe aus Uebung 4.1.a kennen.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{ml^2} (ml \sin(\theta)g + d\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

mit  $m = 3 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $d = 2 \text{ Nms}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  in einem Zeitraum von 100 Sekunden, aufgeteilt in  $1e4$  Teilschritte,  $\text{TNS} = 10$  und  $\text{DIRSCALE} = 1$ .

Plotten Sie hierzu sowohl das Richtungsfeld als auch den Phasenplot. Erklären Sie was in den Plots zu sehen ist.

- e) Um den Effekt einer steifen Differentialgleichung anschaulich zu machen, implementieren Sie das auf <http://www.mathworks.de/company/newsletters/articles/stiff-differential-equations.html> gegebene Problem. mit  $\delta_0 = 1e-5$ ,  $7e4$  Teilschritten,  $\text{TNS} = 1$  und  $\text{DIRSCALE} = 0.08$ . Da Ihr ODE solver eine zweidimensionale Gleichung erwartet, koennen sie die zweite Ableitung einfach auf konstant 0 setzten. Plotten Sie *nur* den Phasenraum und nicht das Richtungsfeld. Erklären Sie was in den Plots zu sehen ist, und wie die Probleme behoben werden koennten.

---

## Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

---

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung für eine schriftliche Aufgabe oder eine Programmieraufgabe bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Falls die Verwendung von Fremdmaterial gestattet ist, so müssen Quellen korrekt zitiert werden. Weiterführende Informationen finden Sie auf der Internetseite des Fachbereichs Informatik:

<http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarismus>