

Formale Grundlagen der Informatik I

2. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
30. April 2014

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Induktionsbeweise)

- (a) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeige $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Σ^n ist die Menge der Wörter der Länge n über dem Alphabet Σ).
- (b) Zeige $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ für alle endlichen Mengen M .
- (c) Bestimme eine Formel für $|\Sigma^{\leq n}|$ und beweise ihre Richtigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dabei ist

$$\Sigma^{\leq n} := \bigcup_{0 \leq i \leq n} \Sigma^i$$

die Menge der Σ -Wörter mit einer Länge $\leq n$.

Aufgabe G5 (Sprachen)

Beweisen oder widerlegen Sie (mit einem Gegenbeispiel) die folgenden Gleichungen für beliebige Σ -Sprachen L_1, L_2 .

- (a) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$
- (b) $(L_1 L_2)^* \setminus \{\varepsilon\} = L_1 (L_2 L_1)^* L_2$
- (c) $(L_1 L_2)^* (L_1 L_2) = L_1 (L_2 L_1)^* L_2$

Aufgabe G6 (DFA)

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Finden Sie DFA \mathcal{A}_i mit $L(\mathcal{A}_i) = L_i$ für

- (a) L_1 : $\{0, 1\}$ -Wörter von gerader Länge mit genau dreimal 0.
- (b) L_2 : $\{0, 1\}$ -Wörter die 10 und 01 als (nicht notwendigerweise disjunkte) Teilwörter enthalten.
- (c) L_3 : $\{0, 1\}$ -Wörter, in denen alle 1-Blöcke Länge $3n + 2$ haben (für ein $n \in \mathbb{N}$).
(Ein 1-Block ist ein Teilwort, das nur aus dem Buchstaben 1 besteht und durch 0 bzw. Wortanfang oder Wortende begrenzt ist.)

Hausübung

Aufgabe H4 (Induktion)

(12 Punkte)

Sei t ein aus den Operationen $+$ und \cdot und der Konstanten 1 gebildeter Term. (Ein solcher Term kann als Wort über dem Alphabet $\{+, \cdot, 1, (,)\}$ aufgefasst werden.) Beweisen Sie per Induktion über den Termaufbau, dass der Wert von t (bzgl. der üblichen Interpretation von $+$, \cdot und 1) kleiner als $2^{|t|}$ ist.

Änderung: $|t|$ ist die Länge des Terms t . Beispiel: Betrachte den Term $(1 + (1 + 1)) \cdot (1 + 1)$, mit Länge 15.

Aufgabe H5 (DFA)

(12 Punkte)

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

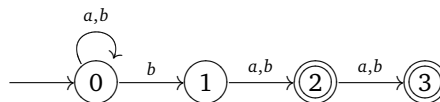
Geben Sie DFA an, die die folgenden Sprachen erkennen:

- (a) $L_1 = L((a(b + c + d))^*)$
- (b) $L_2 = L(a^+ b^+ c^+)$ (wobei $a^+ := a(a^*)$)
- (c) $L_3 = \overline{L_2}$

Aufgabe H6 (NFA)

(12 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden NFA \mathcal{A} :



Geben Sie zu \mathcal{A} einen DFA \mathcal{A}^{det} an, der die gleiche Sprache akzeptiert.