Blatt 13 - Probeklausur

Prüfungsfach:	Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation
Nachname:	[redacted]
Vorname:	[redacted]
Matrikel-Nr.:	. . . .
Studiengang:	. . . .
Beginn (Uhrzeit):	. . . .
Dauer:	60 Minuten
Hörsaal:	S2|02 C205
Datum:	11.02.2013
Bemerkungen:	. . . .

Note:		
Aufgabe (Punkte)	Korrektur	Unterschrift
1 (15)		
2 (4)		
3 (3)		
4 (13)		
5 (8)		
6 (6)		
7 (11)		
8 (5)		
9 (8)		
Summe (73)		

Unterschrift

Die insgesamt zu vergebende Punktezahl beträgt **73** Punkte.
Zum Bestehen (Note 4.0) reichen **30** Punkte aus.
Zum Erreichen der Note 1.0 sind maximal **59** Punkte notwendig.

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 60 Minuten.
- ~~Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus. Tragen Sie auf allen Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.~~
- Dieses Aufgabenheft umfasst **12** nummerierte Seiten mit Aufgaben. Trennen Sie die Prüfungsbögen nicht auf.
- Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Papier.
- Lesen Sie die Fragen vor der Beantwortung sorgfältig und in Ruhe durch und beantworten Sie sie genau. Bearbeiten Sie die Aufgaben in für Sie günstiger Reihenfolge.
- Kommentieren Sie alle Ihre Ergebnisse bzw. Rechenschritte **kurz** und **stichwortartig**.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind ein beidseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4, eine mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und bei Bedarf ein Wörterbuch für Deutsch als Fremdsprache erlaubt.
- Schreiben Sie nur mit Kugelschreiber (blau oder schwarz) und nicht mit rotem oder grünem Stift oder Bleistift.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon und sonstige elektronische Geräte aus!
- Geben Sie beim Verlassen des Hörsaals alle Prüfungsunterlagen bei der Aufsicht ab.

Viel Erfolg!

---

1. Allgemeine Fragen (15 Punkte)

Hinweis: Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Punkt Abzug. Nicht beantwortete Fragen geben weder Punkte noch führen sie zu Punktabzug. Falls Sie in dieser Aufgabe weniger positive Punkte als negative Punkte sammeln, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet, es werden also keine negativen Punkte als Gesamtbewertung dieser Aufgabe vergeben.

- ☐ richtig ☒ falsch — Sowohl die Systemparameter als auch der Systemzustand eines Systemmodells ändern sich während eines Simulationslaufs.
- ☐ richtig ☒ falsch — Die Genauigkeit einer Simulation ist unabhängig von den Eingabedaten.
- ☒ richtig ☐ falsch — Zu jedem Petrinetz gibt es genau eine Inzidenzmatrix.
- ☐ richtig ☒ falsch — Zu jeder Inzidenzmatrix $W = W^+ - W^-$ läßt sich genau ein dazugehöriges Petrinetz angeben.
- ☐ richtig ☒ falsch — Beim Berechnen der Jacobi-Matrix durch automatisches Differenzieren treten keine Rundungsfehler auf.
- ☒ richtig ☐ falsch — Sowohl $x = 0.5 \cdot \tan x$ als auch $x = \arctan(2x)$ sind mögliche Fixpunktgleichungen zur Lösung von $2x - \tan x = 0$.
- ☒ richtig ☐ falsch — Die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens kann man daran erkennen,dass sich die Anzahl der korrekten Ziffern in der berechneten Näherung pro Iterationsschritt ungefähr verdoppelt.
- ☐ richtig ☒ falsch — Jedes nicht autonome Differentialgleichungssystem kann auf ein autonomes Differentialgleichungssystem gleicher Dimension transformiert werden.
- ☒ richtig ☐ falsch — Die Lipschitz-Konstante einer eindeutig lösbaren Differentialgleichung kann vom Anfangswert abhängig sein.
- ☐ richtig ☒ falsch — Das explizite Euler-Verfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung löst mit geringem Rechenaufwand steife Differentialgleichungen.
- ☐ richtig ☒ falsch — Es ist immer möglich, um die Ruhelage einer Differentialgleichung zu linearisieren und so die Stabilität der Ruhelage zu untersuchen.
- ☐ richtig ☒ falsch — Das Integrationsverfahren nach Heun löst Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten auch ohne explizite Schaltfunktion.
- ☐ richtig ☒ falsch — Bei einer Linearisierung $\underline{\dot{\mathbf{x}}} = A \cdot \underline{\mathbf{x}}$ um eine Gleichgewichtslage läßt sich stets alleine anhand des Realteils $Re(\lambda_i)$ der Eigenwerte λ_i von A entscheiden, ob die Gleichgewichtslage stabil ist.
- ☐ richtig ☒ falsch — Jede reelle Zahl zwischen 1 und 10 kann im IEEE 754-Zahlformat dargestellt werden.
- ☐ richtig ☒ falsch — Konditionszahlen numerischer Probleme hängen immer auch vom jeweiligen Lösungsalgorithmus ab.

2. Grundbegriffe zur Modellierung und Simulation (4 Punkte)

(a) Was ist ein Modell? Geben Sie eine allgemein gültige Definition an.

Antwort: (1 Punkt)

Antwortmöglichkeiten:

- (vereinfachendes) Abbild einer (partiellen) Realität
- eine abstrakte, logische und mathematische Darstellung der Objekte und Wechselbeziehungen in einem System
- Ersatzsystem, gebildet unter Annahmen und Idealisierung

(b) Nennen Sie zwei wesentliche Fehlerquellen, die im Rahmen der Validierung einer Simulationsstudie untersucht werden müssen.

Antwort: (1 Punkt)

Modellierungsfehler, Approximationsfehler des iterativen Berechnungsverfahrens, Rundungsfehler oder Programmier- und Implementierungsfehler

(c) Welche Möglichkeiten zur Klassifikation von Modellen anhand der Beschreibung i.) des Zustandsverlaufs und ii.) des zeitlichen Verlaufs kennen Sie?

Antwort: (1 Punkt)

i. diskret oder kontinuierlich, deterministisch oder stochastisch

ii. kontinuierlich, diskret äquidistant, diskret nicht äquidistant und kontinuierlich diskret

(d) Nennen Sie mindestens 2 Ursachen in dynamischen Systemen, die zu Unstetigkeiten im Verlauf der Zustände führen können.

Antwort: (1 Punkt)

Stoßvorgänge, Reibung in mechanischen Systemen (z.B. Übergänge von Gleit zu Haftreibung), Strukturvariable Systeme, Approximation von Teilmodellen von f, Hysterese, Unstetige zeitabhängige Eingangsfunktionen/Stellgrößen u

3. Räuber–Beute–Modell: Modellierung (3 Punkte)

Es werde eine Räuberpopulation $R(t)$ und eine Beutepopulation $B(t)$ betrachtet. Die Populationen entwickeln sich entsprechend folgender Vorgaben

- Die Anzahl der Geburten der Räuber je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Räuber. Im zu betrachtenden Zeitrahmen kann das Absterben von Räubern vernachlässigt werden.
- Die Anzahl der Geburten und der Todesfälle der Beute je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Beutetiere.
- Der Zuwachs der Räuberpopulation je Zeiteinheit durch die Jagd von Beute ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.
- Die Abnahme der Beutepopulation je Zeiteinheit durch die Jagd der Räuber ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.

Stellen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen (Bilanzgleichungen) für die zeitliche Entwicklung der Räuber- und Beutepopulation auf. Wählen Sie geeignete Bezeichnungen für Geburts-, Sterbe- und Wachstumsraten.

Antwort: (3 Punkte)

$$\dot{R}(t) = G_R R(t) + W_R R(t) B(t)\,,$$
$$\dot{B}(t) = G_B B(t) - S_B B(t) - W_B R(t) B(t)\,.$$

4. Räuber–Beute–Modell: Analyse und Numerik (13 Punkte)

Seien $0 < d < 1$ und $a > 0$ zwei reelle Parameter. Ein modifiziertes Räuber–Beute–Modell (nicht das in der vorherigen Aufgabe gesuchte!) sei gegeben durch

$$\dot{R}(t) = R(t)(-d + B(t))\,,$$
$$\dot{B}(t) = B(t)(a - R(t) - aB(t))\,.$$

(a) Bestimmen Sie den positiven Gleichgewichtspunkt (R^*, B^*) des Differentialgleichungssystems. (Hinweis: Dieser hängt noch von den Parametern a und d ab.)

Antwort: (2 Punkte)

Der einzige positive Gleichgewichtszustand ist $(R^*, B^*) = (a(1-d), d)$.

(b) Wenn $a = 1$ gilt, dann ergibt sich als positiver Gleichgewichtspunkt $(R^*, B^*) = (1 - d, d)$.
Geben Sie die Jacobimatrix $J(R^*, B^*)$ des Differentialgleichungssystems, ausgewertet in diesem Gleichgewichtspunkt, an.

Antwort: (2 Punkte)

$$J(R^*, B^*) = \begin{pmatrix} -d + B^* & R^* \\ -B^* & a - R^* - 2aB^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - d \\ -d & -d \end{pmatrix}.$$

(c) Sei weiterhin $a = 1$. Ist die zugehörige positive Gleichgewichtslage stabil für alle $d \in (0, 1)$?

Antwort: (3 Punkte)

Für $a = 1$ ergibt sich als Gleichgewichtspunkt $(R^*, B^*) = (1 - d, d)$. Zur Untersuchung seiner Stabilität müssen die Eigenwerte der Jacobimatrix $J(R^*, B^*)$ der rechten Seite der Dgl. betrachtet werden, siehe (b). Die charakteristische Gleichung dieser Matrix ist dann

$$0 = \lambda^2 + d\lambda + d(1 - d)$$

und somit sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - d(1 - d)}\,.$$

Die Gleichgewichtslage für einen Wert d ist stabil, wenn beide Eigenwerte negativen Realteil haben. Im Fall $d \in (0, 1)$ folgt $d(1 - d) > 0$ und somit haben wir entweder zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil oder zwei reelle negative Eigenwerte. Damit ist die Gleichgewichtslage also stabil wenn $d \in (0, 1)$, $a = 1$.

(d) Geben Sie die Verfahrensvorschrift für ein Verfahren zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingung an. Führen Sie mit diesem Verfahren einen Schritt mit Schrittweite $\Delta t = 1$ für das Differentialgleichungssystem mit den Anfangswerten $R(0) = 1\,, B(0) = \frac{1}{4}$ und Parametern $a = 1\,, d = \frac{1}{2}$ aus.

Antwort: (3 Punkte)

Explizites Eulerverfahren für $\dot{x}(t) = f(t, x)\,, x(t_0) = x_0$ mit Schrittweite Δt

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f(t_k, x_k)\,, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Es sind also $R_0 = 1, B_0 = \frac{1}{4}$ und $t_0 = 0$. Es ergeben sich nach der Verfahrensvorschrift $t_1 = 1$ und

$$R_1 = R_0 + \Delta t[R_0(B_0 - \frac{1}{2})] = \frac{3}{4}\,,$$
$$B_1 = B_0 + \Delta t[B_0(1 - R_0 - B_0)] = \frac{3}{16}\,.$$

(e) Sie wollen mit einem Programmsystem (z.B. Matlab) ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung numerisch lösen. Welche Daten/Informationen müssen Sie der Zeitintegrationsroutine zur Verfügung stellen, damit diese Ihnen eine numerische Lösung berechnen kann.

Antwort: (3 Punkte)

- Eine Funktion, die die rechte Seite der Dgl. auswertet.
- Den Vektor der Anfangsbedingungen.
- Anfangszeitpunkt und Endzeitpunkt der Integration.
- Eine feste Zeitschrittweite bzw. eine Toleranzvorgabe.

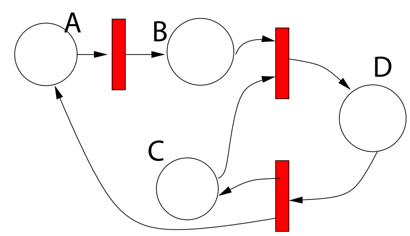
5. Modellierung mit Petrinetzen (8 Punkte)

(a) Ein System mit den Zuständen A, B, C und D gehorche folgenden Regeln:

- Der Zustand B kann eintreten, genau dann wenn vorher der Zustand A aktiv war.
- Der Zustand D kann eintreten, genau dann wenn vorher die Zustände B und C aktiv waren.
- Die Zustände A und C können eintreten, genau dann wenn vorher der Zustand D aktiv war.

Zeichnen Sie ein Petrinetz, welches genau diese Regeln widerspiegelt.

Antwort: (3 Punkte)



(b) Geben Sie zwei mögliche Anfangsmakierungsvektoren an, so dass dieses Petrinetz lebendig ist.

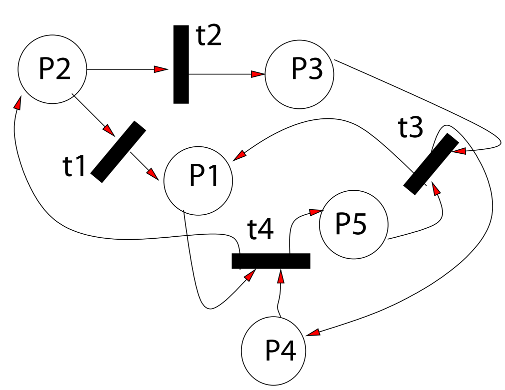
Antwort: (1 Punkt)

$(m_A, m_B, m_C, m_D)^T \in \{(0,0,0,1)^T,\ (1,0,1,0)^T,\ (0,1,1,0)^T\}$

(c) Zeichnen sie das zu folgender Inzidenzmatrix gehörige Petrinetz, wobei die Kapazität der jeweiligen Plätze gleich 1 sein soll. Beschriften Sie dabei in Ihrer Skizze alle Plätze und Transitionen.

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Antwort: (3 Punkte)



(d) Welche Transitionen können im Petrinetz aus Teilaufgabe (c) geschaltet werden, wenn der aktuelle Systemzustand durch den Markierungsvektor $m = (1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$ beschrieben ist?

Antwort: (1 Punkt)

nur t_2

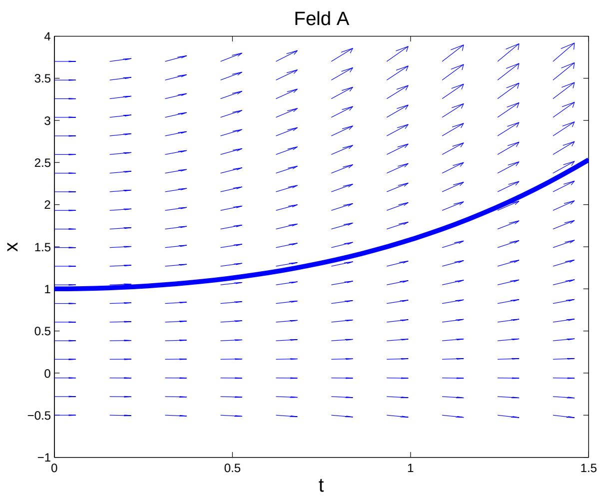
6. Differentialgleichungen: Richtungsfelder und Autonomisierung (6 Punkte)

Skizzieren Sie zu den Differentialgleichungen in (a) und (b) die Richtungsfelder und beschriften Sie Ihre Zeichnung. Verwenden Sie dafür die angegebenen Wertetabelle. Zeichnen Sie sodann die Lösung für den angegebenen Startwert ein. Eine Rechnung ist dabei nicht erforderlich.

$\boldsymbol{x}$	0	0.5	1.0	1.5
$\boldsymbol{\sin(x)}$	0	0.479	0.841	0.997

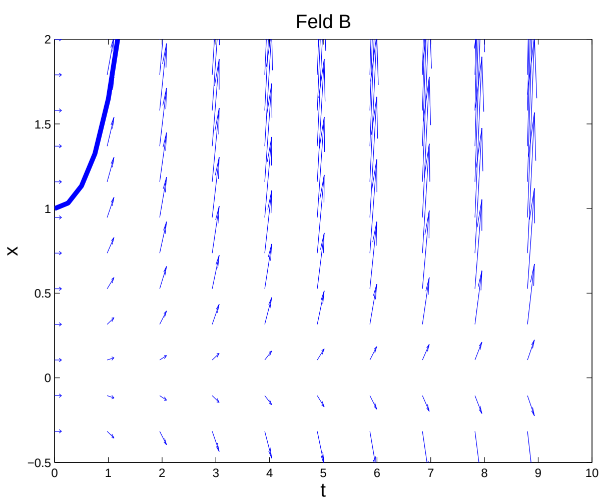
(a) $\dot{x}(t) = x(t)\sin(t), x(0) = 1$

Antwort: (2,5 Punkte)



(b) $\dot{x}(t) = t \cdot x(t), x(0) = 1$

Antwort: (2,5 Punkte)



(c) Transformieren Sie die Differentialgleichung aus Aufgabe (b) in ein autonomes Differentialgleichungssystem.

Antwort: (1 Punkt)

$$y(t) := t$$

autonomes DGL-System:

$$\dot{x}(t) = y(t) \cdot x(t)$$
$$\dot{y}(t) = 1$$
$$x(0) = 1, y(0) = 0$$

7. Lösen von Gleichungssystemen (11 Punkte)

Für die Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 \\ \sin(x_1) + 0.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

soll der Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ so bestimmt werden, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0, 0)^T$ gilt.

(a) Das gestellte Problem lässt sich mit dem Fixpunkt-Verfahren lösen. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des Fixpunkt-Verfahrens.

Antwort: (3 Punkte)

gelöst wird das Problem $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
neuer Schritt: $\mathbf{x}_{i+1} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i)$
Verfahren konvergiert gegen Fixpunkt $\mathbf{x}_s$, falls alle EW von $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_s)$ im Einheitskreis liegen (lokaler Konvergenzsatz)

(b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das gestellte Problem mit dem Fixpunkt-Verfahren auf.

Antwort: (2 Punkte)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1^3 - 3 \cdot x_2 + x_1 \\ \sin(x_1) + 1.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$$

(c) Die Konvergenz-Eigenschaft des Fixpunkt-Verfahrens kann mit Hilfe eines zusätzlichen Faktors verbessert werden. Benennen Sie diesen und begründen Sie die Verbesserungseigenschaft.

Antwort: (2 Punkte)

- Relaxationsmatrix A
- Vorfaktor
- führt zu kleineren Eigenwerten und damit schnellerer Kontraktion

(d) Beschreiben Sie in wenigen Stichpunkten ein in der Vorlesung beschriebenes spezielles Fixpunkt-Verfahren zur Lösung sowie je zwei Vor- oder Nachteile gegenüber dem allgemeinen Fixpunkt-Verfahren.

Antwort: (2.5 Punkte)

- Newton-Verfahren
- für Nullstellensuche
- Taylor-Entwicklung wird abgebrochen
- Iteration: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$

- lokale Konvergenz: FP -, Newton ++
- Rechenaufwand: FP ++, Newton -
- Implementierungsaufwand: FP ++, Newton -

(e) In die Berechnung des bekannten Verfahrens aus (7d) geht die Jacobi-Matrix ein. Nennen Sie 3 Möglichkeiten, die den Aufwand zur Berechnung der Jacobi-Matrix reduzieren können.

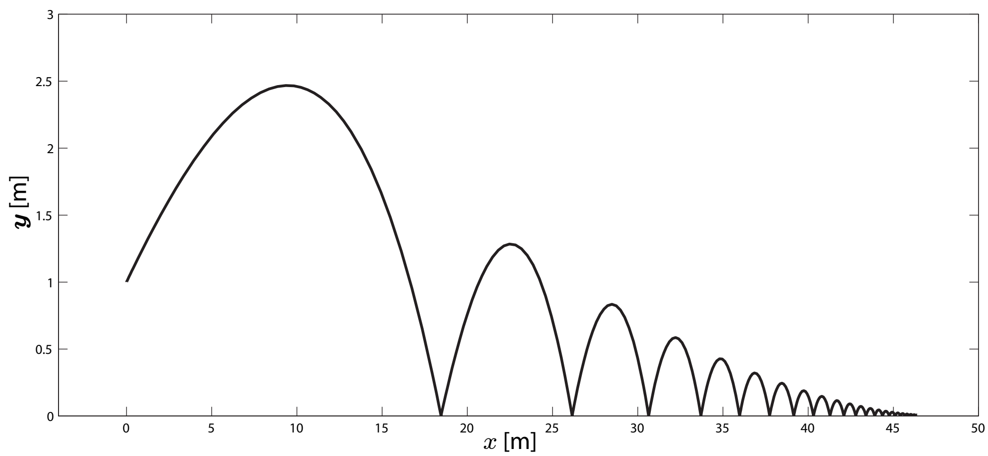
Antwort: (1.5 Punkte)

1. Dünnbesetztheit ausnutzen
2. Jacobi-Matrix durch konstante Matrix ersetzen
3. Schrittweise Aufdatierung (Update) / Quasi-Newton-Verfahren

8. Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten (5 Punkte)

Wenn wir versuchen, einen abgeworfenen und danach wiederholt auf dem Boden auftreffenden Ball zu simulieren, stoßen wir schnell auf das Problem von Schaltpunkten, an denen sich das Systemverhalten unstetig ändert. An solchen Punkten würden numerische Standardverfahren alleine falsche Ergebnisse liefern.

Die Bahn eines Balles (mit leichter Dämpfung bei der Reflexion an der Ebene) ist in folgender Skizze veranschaulicht.



(a) Wie können Unstetigkeitsstellen (Schaltpunkte) in einem Differentialgleichungsmodell mit Hilfe von Schaltfunktionen geeignet charakterisiert werden?

Antwort: (1 Punkt)

Durch Nullstellen einer Schaltfunktion

(b) Wann (in welchem Zustand) treten Schaltpunkte im obigen Modell der Bewegung des Balls auf und welche Zustandsgrößen ändern sich an diesen sowie welche bleiben unverändert?

Antwort: (3 Punkte)

Schaltpunkte sind Zeitpunkte, in denen der Ball die Ebene berührt.
Die Position bleibt unverändert.
Die Geschwindigkeit ändert sich (je nach Modellierung nur in einer oder in beiden Komponenten).

(c) Geben Sie eine Schaltfunktion $q(x, y)$ an, die die Unstetigkeitsstellen in der Bewegung des Balls bestimmt.

Antwort: (1 Punkt)

Schaltpunkte $\Leftrightarrow$ $y_s = 0$
Beispiel für eine Schaltfunktion: $q(x, y, u, v, t) = y - 0 = y$

9. Zufällige Prozesse (8 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Simulationen, in denen der Zufall während der Simulation eine Rolle spielt.

(a) Eine weitverbreitete Verfahrensklasse zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen auf dem Rechner sind lineare Kongruenzgeneratoren. Geben Sie mit Hilfe einer Formel an, wie diese arbeiten. Verwenden Sie dazu eine Periode m, einen Multiplikator a und eine Verschiebung c. Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 55$ für $a = 8$, $c = 47$ und $m = 100$ drei weitere Zahlen x_1, x_2, und x_3 und geben Sie diese an.

Antwort: (2 Punkte)

Ausgehend von einem Startwert x_0 werden weitere Zahlen durch die Vorschrift

$$x_{i+1} = (ax_i + c)(\mod m)$$

erzeugt. Konkrete Werte der Zufallszahlen: 55, 87, 43, 91.

(b) Die so erzeugten natürlichen Zahlen x_i entsprechen im Idealfall (je nach Wahl der Parameter) einer Gleichverteilung zwischen 0 und $m - 1$. Wie erhält man aus diesen Zahlen weitere Zahlen, die allgemeinen kontinuierlichen Verteilungen genügen?

Antwort: (2 Punkte)

- Division der Zahlen durch m liefert eine kontinuierliche Gleichverteilung für das Intervall $[0, 1)$.
- Weitere Verteilungen durch Transformation.

(c) In einer stochastischen Verkehrssimulation wurde u.a. die Anzahl F der vor einer Ampel wartenden Fahrzeuge simuliert. Für sechs verschiedene Ampelphasen wurden dabei $10, 4, 6, 5, 4$ bzw. 7 Fahrzeuge beobachtet. Schätzen Sie aus den Beobachtungen den Mittelwert und die Varianz einer Verteilung, die diesen Beobachtungen für F möglicherweise zugrunde liegt.

Antwort: (2 Punkte)

Schätzung erfolgt über Momentenformeln (3. Foliensatz):

$$\begin{aligned}
E(L) &\approx \frac{10+4+6+5+4+7}{6} = 6 \\
Var(L) &\approx \frac{10^2+4^2+6^2+5^2+4^2+7^2}{6} - 36 \\
&= \frac{100+16+36+25+16+49}{6} - 36 = \frac{242}{6} - 36 = 4\,\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(d) Man vermutet, das die Anzahl F der innerhalb einer Ampelphase wartenden Fahrzeuge auch (ohne Ausführen einer Simulation) über eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert 6 modelliert werden kann. Ist diese Vermutung mit den beobachteten Größen vereinbar? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Vergleich zu den Beobachtungen aus Aufgabenteil c). Geben Sie dazu auch die Varianz der Exponentialverteilung an.

Antwort: (2 Punkte)

- Für eine Exponentialverteilung hätte man $E(L) = 6$, $Var(L) = 6^2 = 36$.
- Obwohl der Erwartungswert passend ist, scheint die Varianz ziemlich klein. Problem ist, dass $n = 6$ ziemlich klein ist.