Formale Grundlagen der Informatik I
2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
30. April 2014

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Induktionsbeweise)

(a) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeige $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Σ^n ist die Menge der Wörter der Länge n über dem Alphabet Σ).

(b) Zeige $|\mathscr{P}(M)| = 2^{|M|}$ für alle endlichen Mengen M.

(c) Bestimme eine Formel für $|\Sigma^{\leq n}|$ und beweise ihre Richtigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dabei ist

$$\Sigma^{\leq n} := \bigcup_{0 \leq i \leq n} \Sigma^i$$

die Menge der Σ-Wörter mit einer Länge $\leq n$.

Lösung:

(a)
- Induktionsanfang: $|\Sigma^0| = |\{\varepsilon\}| = 1 = |\Sigma|^0$
- Induktionsschritt: Da man alle Wörter in Σ^{n+1} durch Anfügen eines Buchstaben an ein Wort in Σ^n erhält, gilt $|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma^n| \cdot |\Sigma|$. Mit der I.A. folgt $|\Sigma^n| \cdot |\Sigma| \overset{\text{I.A.}}{=} |\Sigma|^n \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^{n+1}$.

(b) Induktion über die Mächtigkeit von M:
- Induktionsanfang: $|\mathscr{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$
- Induktionsschritt: Angenommen $|M| = n+1$. Wähle ein festes Element $x \in M$, dann folgt $|\mathscr{P}(M)| = |\{A \mid A \subseteq M, x \in A\}| + |\{A \mid A \subseteq M, x \notin A\}|$. Weiterhin gilt $|\{A \mid A \subseteq M, x \in A\}| = |\{A \mid A \subseteq M \setminus \{x\}\}|$ und $|\{A \mid A \subseteq M, x \notin A\}| = |\{A \mid A \subseteq M \setminus \{x\}\}|$. Es folgt $|\mathscr{P}(M)| = 2 \cdot |\{A \mid A \subseteq M \setminus \{x\}\}| \overset{\text{I.A.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{|M|}$.

(c) Die gesuchte Formel lautet

$$|\Sigma^{\leq n}| = \frac{|\Sigma|^{n+1} - 1}{|\Sigma| - 1} \quad \text{falls } |\Sigma| \geq 2.$$

Falls $|\Sigma| = 1$, dann sieht man leicht, dass $|\Sigma^{\leq n}| = n + 1$ gilt.

- Induktionsanfang:

$$|\Sigma^{\leq 0}| = 1 = \frac{|\Sigma|^1 - 1}{|\Sigma| - 1}$$

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
|\Sigma^{\leq n+1}| &= |\Sigma^{\leq n}| + |\Sigma^{n+1}| \\
&= \frac{|\Sigma|^{n+1} - 1}{|\Sigma| - 1} + |\Sigma^{n+1}| && \text{Induktionsannahme} \\
&= \frac{|\Sigma|^{n+1} - 1}{|\Sigma| - 1} + |\Sigma|^{n+1} && \text{nach Teilaufgabe (a)} \\
&= \frac{|\Sigma|^{n+1} - 1 + |\Sigma|^{n+2} - |\Sigma|^{n+1}}{|\Sigma| - 1} \\
&= \frac{|\Sigma|^{n+2} - 1}{|\Sigma| - 1}
\end{aligned}$$

Aufgabe G5 (Sprachen)
Beweisen oder widerlegen Sie (mit einem Gegenbeispiel) die folgenden Gleichungen für beliebige Σ-Sprachen L_1, L_2.

(a) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$

(b) $(L_1 L_2)^* \setminus \{\varepsilon\} = L_1(L_2 L_1)^* L_2$

(c) $(L_1 L_2)^*(L_1 L_2) = L_1(L_2 L_1)^* L_2$

Lösung:

(a) Wir weisen nach, dass obige Gleichung gilt:
Es gilt $L_i \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$ für $i = 1, 2$, also auch $L_1 \cup L_2 \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$ und es folgt $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$.
Für die umgekehrte Inklusion gilt $L_i^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ für $i = 1, 2$. Es folgt $L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$, und schließlich $(L_1^* L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^{**} \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.
Hier noch ein alternativer Beweis:
Sei $w \in (L_1 \cup L_2)^*$, dann ist $w = v_1 \dots v_n$ mit $v_i \in L_1 \cup L_2$ für $i = 1, \dots, n$. Da $\varepsilon \in L_j^*$ für $j = 1, 2$, folgt $L_j \subseteq L_1^* L_2^*$ für $j = 1, 2$ und demnach $L_1 \cup L_2 \subseteq L_1^* L_2^*$. Schließlich folgt $w \in (L_1^* L_2^*)^*$.
Ist andererseits $w \in (L_1^* L_2^*)^*$, dann ist $w = v_1 \dots v_n$ mit $v_i \in L_1^* L_2^*$ für $i = 1, \dots, n$. Es folgt $v_i = u_{i_1} u_{i_m} u'_{i_1} u'_{i_{m'}}$ mit $u_{i_j} \in L_1$ und $u'_{i_j} \in L_2$. Also ist jedes der v_i in $(L_1 \cup L_2)^*$ und demnach auch $w \in (L_1 \cup L_2)^*$.

(b) Obige Gleichung gilt im Allgemeinen nicht. Falls $\varepsilon \in L_1$ und $\varepsilon \in L_2$ dann folgt $\varepsilon \in L_1(L_2 L_1)^* L_1$ aber $\varepsilon \notin (L_1 L_2)^* \setminus \{\varepsilon\}$.
(Übrigens, falls $\varepsilon \notin L_1 \cap L_2$, dann zeigt man leicht, dass die Gleichung gilt.)

(c) Wir beweisen, dass obige Gleichung gilt:
Es gilt für $n \geq 0$

$$(L_1 L_2)^{n+1} = \underbrace{(L_1 L_2) \cdots (L_1 L_2)}_{(n+1)\text{-mal}} = L_1 \underbrace{(L_2 L_1) \cdots (L_2 L_1)}_{n\text{-mal}} L_2 = L_1 (L_2 L_1)^n L_2$$

es folgt

$$\begin{aligned}
(L_1 L_2)^*(L_1 L_2) &= \left(\bigcup_{n \geq 0} (L_1 L_2)^n \right) (L_1 L_2) \\
&= \bigcup_{n \geq 0} \left((L_1 L_2)^n (L_1 L_2) \right) \\
&= \bigcup_{n \geq 0} (L_1 L_2)^{n+1} \\
&= \bigcup_{n \geq 0} L_1 (L_2 L_1)^n L_2 \qquad \text{(s.o.)} \\
&= L_1 \left(\bigcup_{n \geq 0} (L_2 L_1)^n \right) L_2 \\
&= L_1 (L_2 L_1)^* L_2
\end{aligned}$$

Aufgabe G6 (DFA)
Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Finden Sie DFA $\mathscr{A}_i$ mit $L(\mathscr{A}_i) = L_i$ für

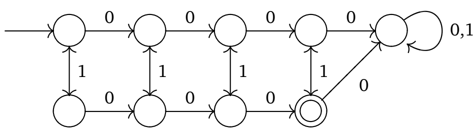
(a) L_1: $\{0, 1\}$-Wörter von gerader Länge mit genau dreimal 0.

(b) L_2: $\{0, 1\}$-Wörter die 10 und 01 als (nicht notwendigerweise disjunkte) Teilwörter enthalten.

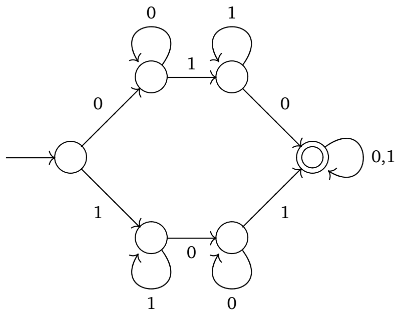
(c) L_3: $\{0, 1\}$-Wörter, in denen alle 1-Blöcke Länge $3n + 2$ haben (für ein $n \in \mathbb{N}$).
(Ein 1-Block ist ein Teilwort, das nur aus dem Buchstaben 1 besteht und durch 0 bzw. Wortanfang oder Wortende begrenzt ist.)

Lösung:

(a)

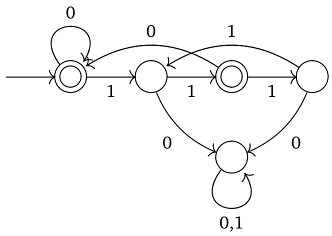


(b)



Dabei wurde benutzt, dass man L_2 auch folgendermaßen charakterisieren kann: Für jedes Wort $a_1 \ldots a_n$ gibt es $i < j < k$ mit ($a_i = a_k = 0$ und $a_j = 1$) oder ($a_i = a_k = 1$ und $a_j = 0$).

(c)



Hausübung

Aufgabe H4 (Induktion) (12 Punkte)
Sei t ein aus den Operationen $+$ und $\cdot$ und der Konstanten 1 gebildeter Term. (Ein solcher Term kann als Wort über dem Alphabet $\{+, \cdot, 1, (,)\}$ aufgefasst werden.) Beweisen Sie per Induktion über den Termaufbau, dass der Wert von t (bzgl. der üblichen Interpretation von $+$, $\cdot$ und 1) kleiner als $2^{|t|}$ ist.
Änderung: $|t|$ ist die Länge des Terms t. Beispiel: Betrachte den Term $(1 + (1 + 1)) \cdot (1 + 1)$, mit Länge 15.

Lösung: Sei $A(t)$ die Aussage: “Der Wert von t ist kleiner als $2^{|t|}$.”
Induktionsanfang: Für $t = 1$ ist $1 < 2 = 2^1 = 2^{|1|}$. Also gilt $A(1)$.
Induktionsschritt: Wir betrachten zuerst den Fall, dass $t = t_1 + t_2$. Sei n_i der Wert von t_i. Nach Induktionsvoraussetzung gelten $A(t_1)$ und $A(t_2)$. Somit ist der Wert von t gleich

$$n_1 + n_2 < 2^{|t_1|} + 2^{|t_2|} \leq 2^{|t_1|+|t_2|} < 2^{|t|}.$$

Analog erhalten wir für $t = t_1 \cdot t_2$ den Wert

$$n_1 n_2 < 2^{|t_1|} \cdot 2^{|t_2|} = 2^{|t_1|+|t_2|} < 2^{|t|}.$$

Aufgabe H5 (DFA) (12 Punkte)
Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.
Geben Sie DFA an, die die folgenden Sprachen erkennen:

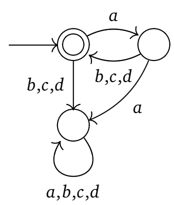
(a) $L_1 = L((a(b + c + d))^*)$

(b) $L_2 = L(a^+ b^+ c^+)$ (wobei $a^+ := a(a^*)$)

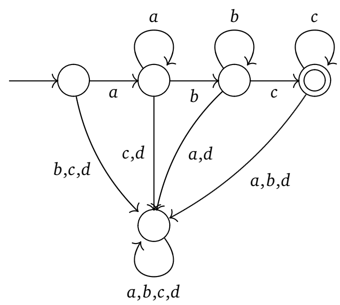
(c) $L_3 = \overline{L_2}$

Lösung:

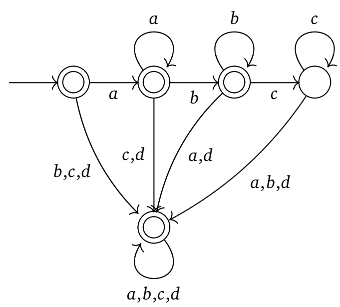
(a)



(b)

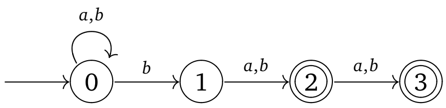


(c) Zustände des Automaten für L_2 durch nicht akzeptierende ersetzen und umgekehrt:



Aufgabe H6 (NFA) (12 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden NFA $\mathscr{A}$:



Geben Sie zu $\mathscr{A}$ einen DFA $\mathscr{A}^{\text{det}}$ an, der die gleiche Sprache akzeptiert.

Lösung:

δ	a	b
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0,2\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
$\{0,3\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0,2,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

Die aktiven Zustände sind $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,3\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}$.
Akzeptierend sind $\{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,3\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}$.