# Formale Grundlagen der Informatik 3

## Einführung in Model Checking: Spezifikation und Modell, Wiederholung

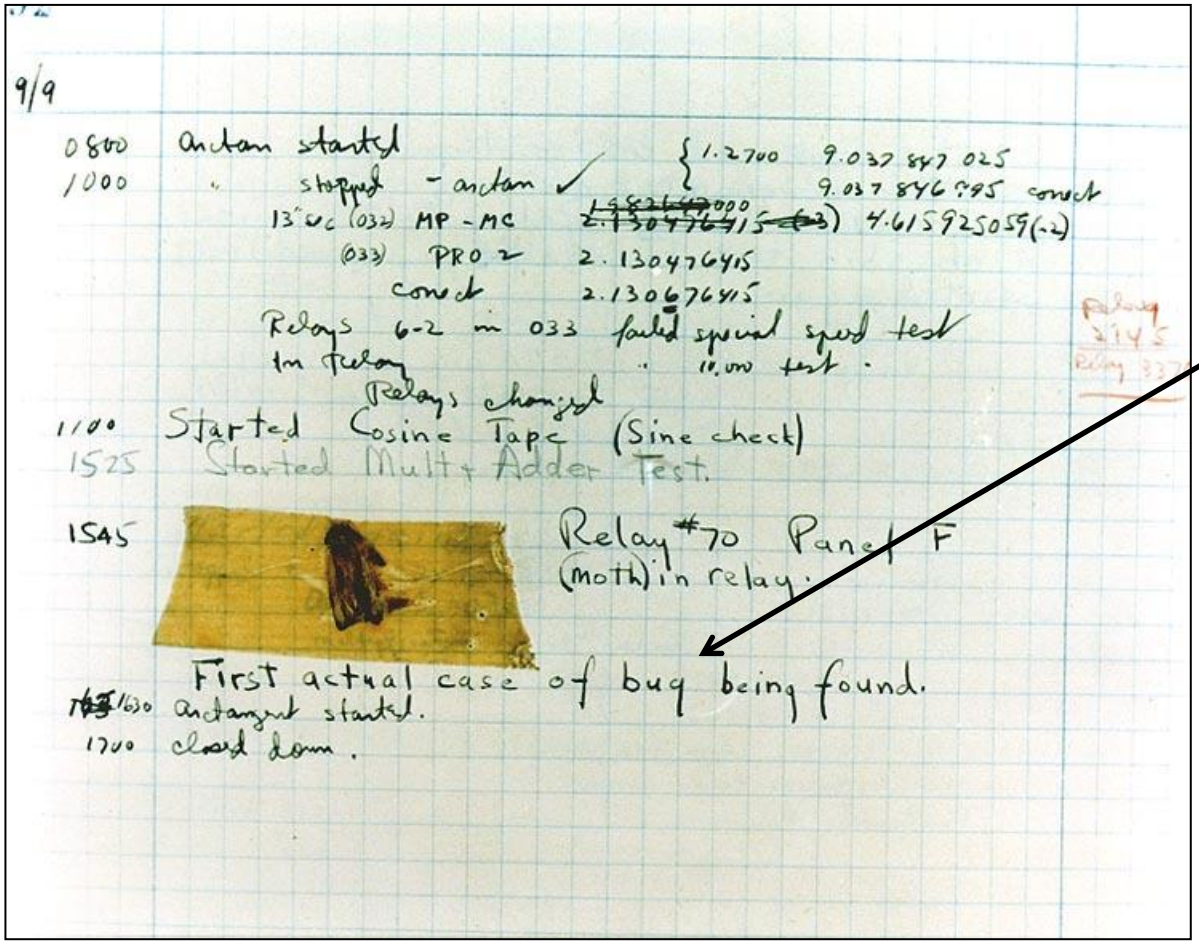
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Prof. Stefan Katzenbeisser**
Security Engineering Group
Technische Universität Darmstadt

skatzenbeisser@acm.org
http://www.seceng.informatik.tu-darmstadt.de




# Motivation
# Softwarefehler: Bugs




„First actual case of bug being found"

Logbuch der Mark II Aiken, 1947

# Motivation
# Korrektheit von Hardware und Software (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**„Pentium Bug" (1994):**

$$4195835 - \frac{4195835}{3145727} * 3145727 = 256$$


- Kosten: 500 Mio. $

**Ariane 5 (1996):**

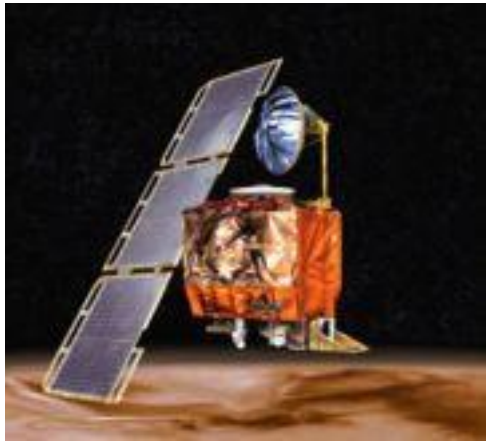
- Softwarefehler in der Verarbeitung von Sensordaten
- Überlauf führte zu Crash eines Teilprogramms
- Falsche Daten für Steuerungscomputer
- Kosten 500 Mio. $ bis 2 Mrd. $ (geschätzt)



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Motivation
# Korrektheit von Hardware und Software (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



**Mars Climate Orbiter (1999):**

- Verwechslung metrischer und britischer Einheiten
- Kosten: 125 Mio. $

**LA Air Traffic Control (2004):**

- Kontakt zu 400 Flugzeugen verloren
- Crash des Kommunikationssystems durch Unterlauf eines Zählers
- Backup-System versagte

**Therac 25 Strahlentherapiegerät (1985):**

- Race condition
- >3 Todesfälle



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Fehlerfreie Software?

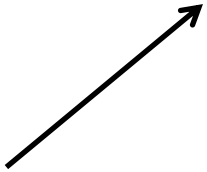
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

***Testen:***

- Test, ob SW/HW auf bestimmten (kritischen) Eingabedaten korrekt funktioniert
- Testen ist immer unvollständig!
- Problem: repräsentative Testfälle?
- Keine exakten Aussagen über Korrektheit erzielbar

***Verifikation:***

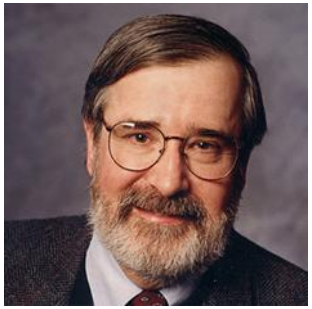
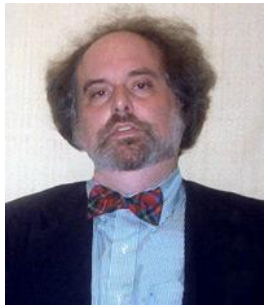
- Nachweis, dass SW, HW oder Protokolle eine bestimmte Spezifikation erfüllen
- „Beweis" der Korrektheit
- Problem: realistisches Erstellen der Spezifikation
- Recht hohe Komplexität

Fokus dieser Vorlesung 



SECENG SECURITY ENGINEERING

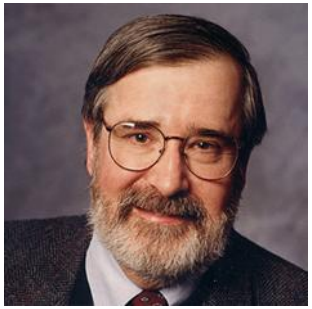
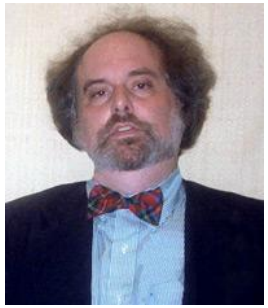
# Model Checking: Turing Award 2007

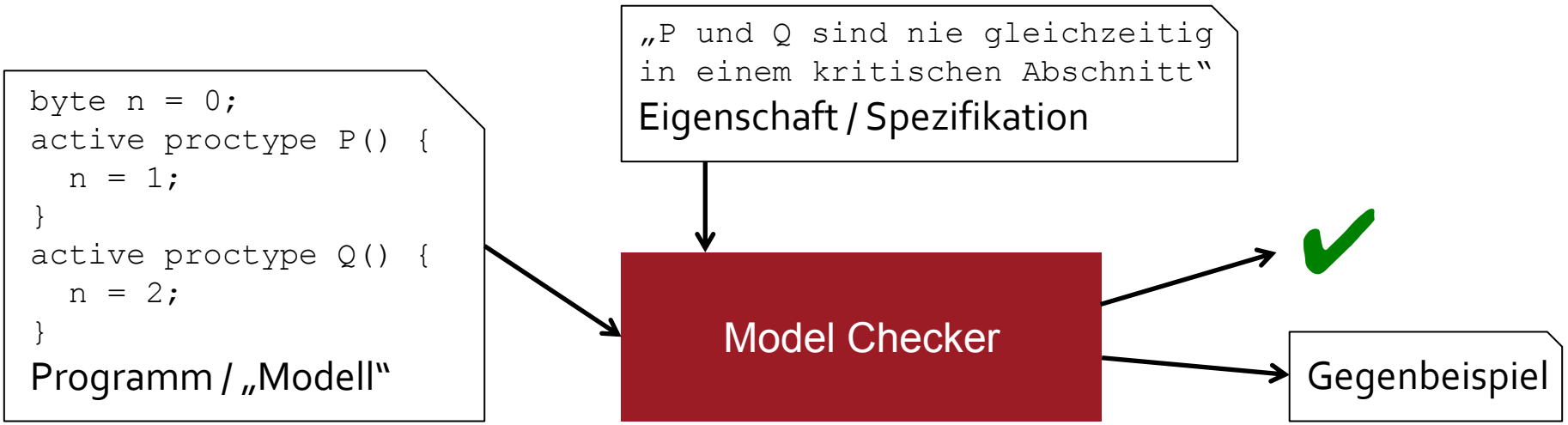

E. Clarke, A. Emerson, J. Sifakis

- Verfahren zum Nachweis der Korrektheit eines Systems
- Testet ein System (**Modell**) gegen eine **Spezifikation**
- Liefert „OK" oder ein **Gegenbeispiel**
- Anwendbar auf Hardware und Software

# Model Checking: Turing Award 2007


E. Clarke, A. Emerson, J. Sifakis



# Formale Methoden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Warum?**

- Exakte (mathematische) Verfahren im Design von Systemen
- Logik, Automaten, …
- Erhöht das Vertrauen in die Korrektheit eines Systems

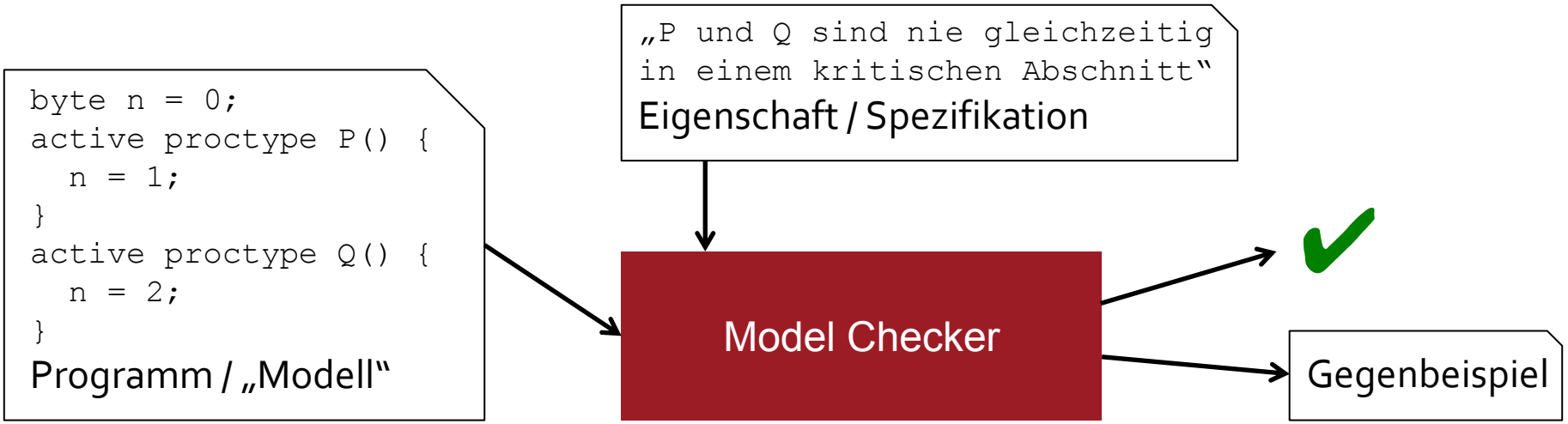
**Wozu?**

- Komplementiert andere Analyseverfahren und Tests
- Reduziert Zahl der Bugs
- Reduziert die Entwicklungszeit
- Automatisierbar!



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Model Checking
# Modell und Spezifikation




***Modell:***

- Abstrakte Repräsentation des Systems
- Meist formalisiert durch einen endlichen Automaten

***Spezifikation:***

- Eigenschaft, die das System erfüllen soll
- Meist formalisiert durch eine logische Formel

# Endliche Automaten, Wiederholung (1)

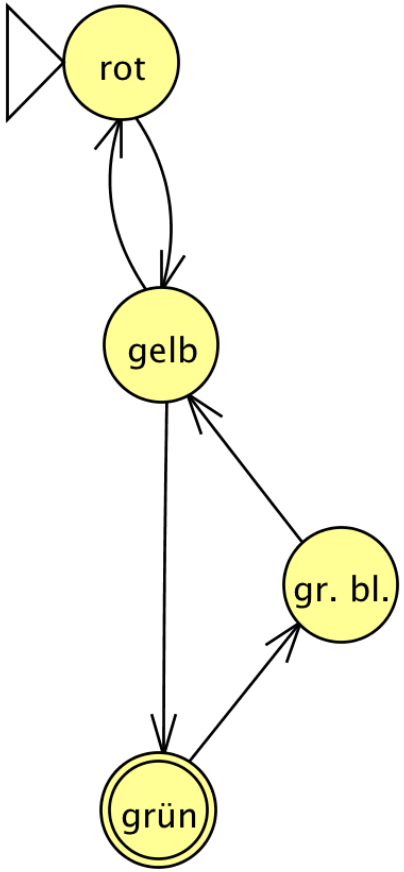
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Endliche Automaten bestehen aus:

- Zuständen (endlich viele)
- Zustandsübergängen
- einem Startzustand
- beliebig vielen Endzuständen

**Beispiel:** Ampelschaltung in Österreich

- 4 Zustände
- Zustandsübergänge
- Ein Startzustand
- Endzustand?






SECENG SECURITY ENGINEERING

# Endliche Automaten, Wiederholung (2)

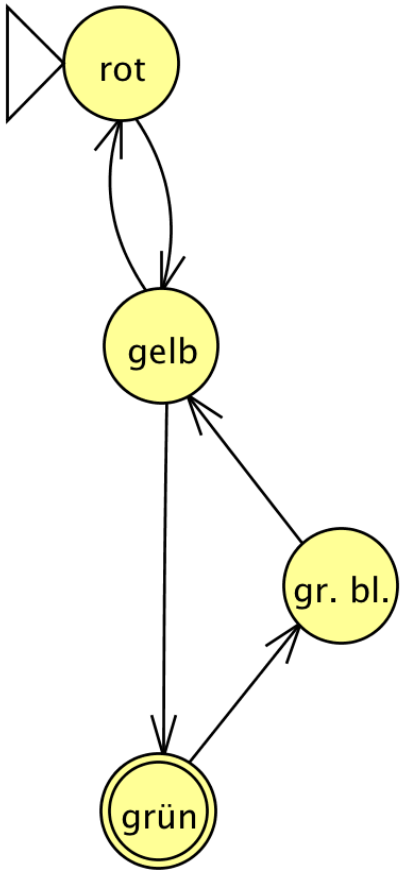
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Formal:**

- Endliche Menge an Zuständen $M$
- Endliches Alphabet $\Sigma$
- Zustandsübergänge: Relation $R \subseteq M \times \Sigma \times M$
- Startzustand $q \in M$
- Menge von Endzuständen: $E \subseteq M$

Endlicher Automat ist definiert als Tupel
$\mathcal{M} = (M, R, q, E, \Sigma)$

Beispiel der Ampelschaltung ➔ Tafel






SECENG SECURITY ENGINEERING

# Endliche Automaten, Wiederholung (3)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Endlicher Automat:**
$\mathcal{M} = (M, R, q, E, \Sigma)$

**Wörter** sind Elemente aus $\Sigma^*$ (Kleene-Stern)

Beispiel: $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$

Menge $\Sigma^*$ ist i.d.R. **unendlich groß**, die Wörter selbst aber immer **endlich lang**

Ein endlicher Automat **akzeptiert** ein Wort $w_0 w_1 w_2 \ldots w_n$ mit $w_i \in \Sigma$ wenn:

- es eine Sequenz von Zuständen $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ gibt sodass
- der erste Zustand der Startzustand des Automaten ist $(q_0 = q)$
- der letzte Zustand ein Endzustand des Automaten ist $(q_{n+1} \in E)$ und
- ein „gültiger" Zustandsübergang erfolgt: $(q_i, w_i, q_{i+1}) \in R$ für $0 \leq i \leq n$



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Endliche Automaten, Wiederholung (4)

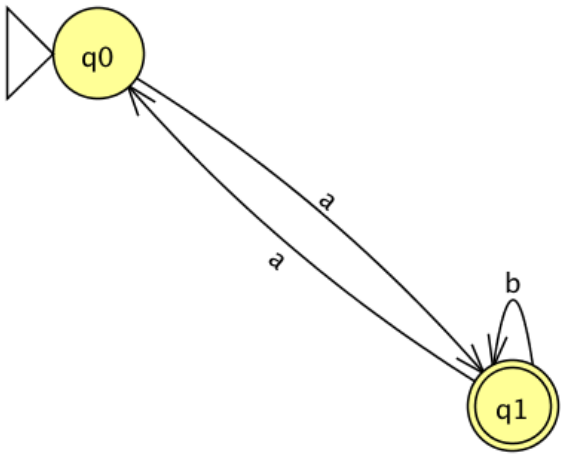
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ein endlicher Automat **akzeptiert** ein Wort $w_0 w_1 w_2 \ldots w_n$ mit $w_i \in \Sigma$ wenn:

- es eine Sequenz von Zuständen $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ gibt sodass
- der erste Zustand der Startzustand des Automaten ist $(q_0 = q)$
- der letzte Zustand ein Endzustand des Automaten ist $(q_{n+1} \in E)$ und
- ein „gültiger" Zustandsübergang erfolgt: $(q_i, w_i, q_{i+1}) \in R$ für $0 \leq i \leq n$

Die Menge aller akzeptierten Wörter eines Automaten $\mathcal{M}$ nennt man Sprache des Automaten $L(\mathcal{M})$

Beispiel:






SECENG Security Engineering

# Repräsentation der Modelle: Kripke Strukturen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Angelehnt an endliche Automaten, aber …

- Modellierung **reaktiver Systeme**, die keinen „Endzustand" kennen
- Relevant sind primär Zustandsänderungen, nicht Eingaben
- Zustände werden mit **„atomaren" Eigenschaften** versehen

Eine Kripke-Struktur $\mathcal{M} = (S, I, R, L)$ über einer Menge $P$ besteht aus

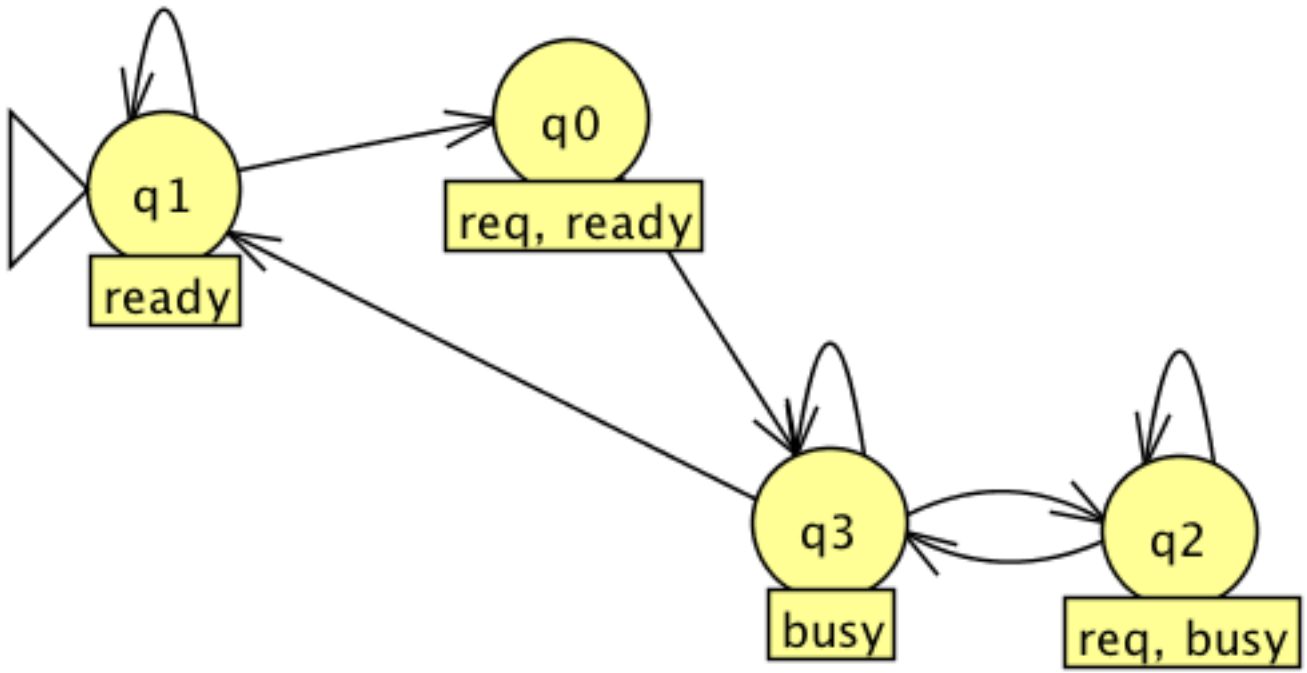
- einer endlichen Menge an Zuständen $S$ und Anfangszuständen $I \subseteq S$
- einer Übergangsrelation $R \subseteq S \times S$
- und einer Abbildung $L : S \to 2^P$

Eine Kripke-Struktur nennt man **total**, wenn es für jeden Zustand $s \in S$ einen Zustand $s' \in S$ gibt mit $(s, s') \in R$



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Modelle: Kripke Strukturen, Beispiel



# Repräsentation der Modelle: Kripke Strukturen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eine Kripke-Struktur $\mathcal{M} = (S, I, R, L)$ über einer Menge $P$ besteht aus

- einer endlichen Menge an Zuständen $S$ und Anfangszuständen $I \subseteq S$
- einer Übergangsrelation $R \subseteq S \times S$
- und einer Abbildung $L : S \to 2^P$

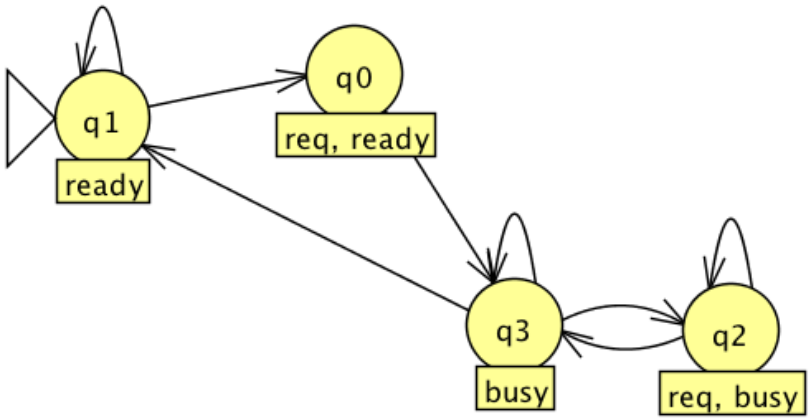
Ein **Pfad** $\pi$ in einer Kripke-Struktur ist eine **unendliche** Sequenz von Zuständen $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$ mit $(s, s') \in R$

Wir bezeichnen mit $\pi^i$ den Suffix eines Pfades, der ab der i-ten Position beginnt: $\pi^i = s_i s_{i+1} s_{i+2} \ldots$

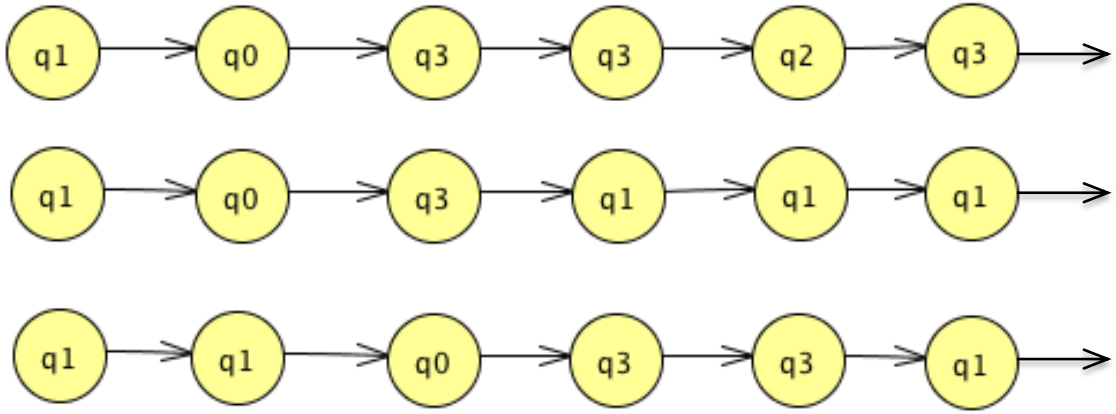


SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Modelle: Kripke Strukturen, Beispiele für Pfade




Einige Pfade:



# Repräsentation der Modelle: Kripke Strukturen, Computation Tree

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Computation Tree:**

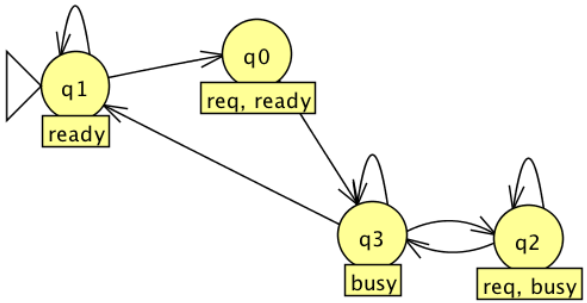
- Zusammenfassung **aller** möglicher Pfade durch eine Kripke-Struktur
- Kompakte Darstellung als Baum
- Zwei Pfade mit gleichem Präfix werden zusammengefasst
- Baum ist immer unendlich tief, da Pfade unendlich lang

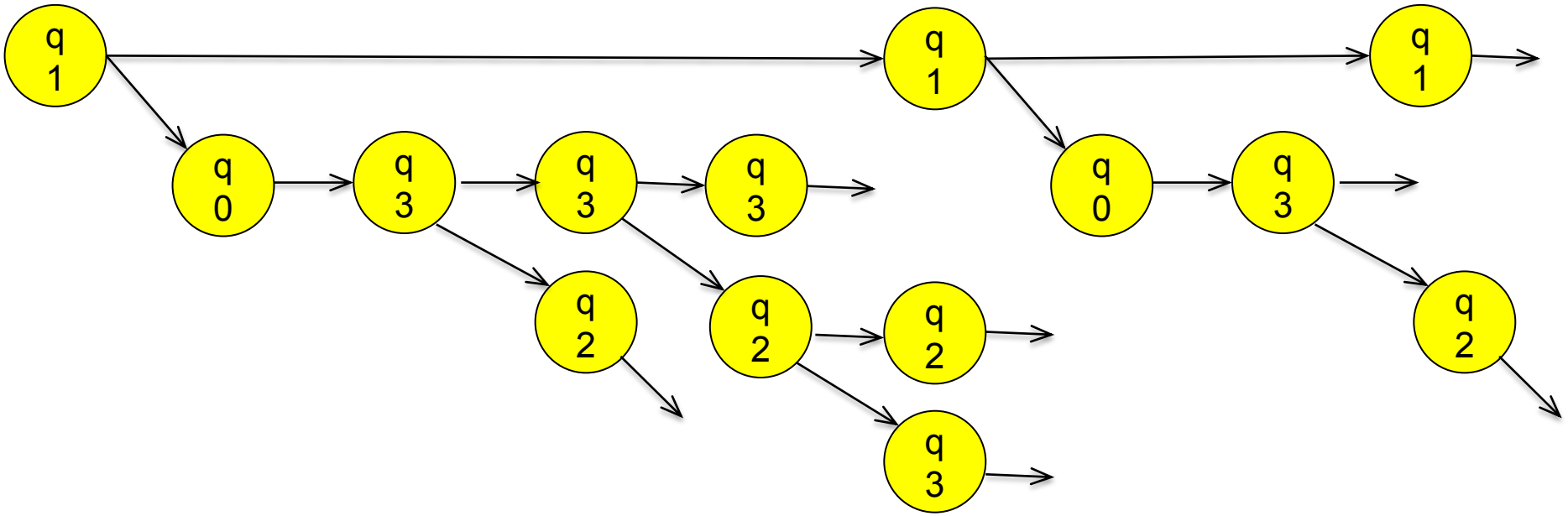
- Computation Tree ist „Grundlage" für Verifikation
- Muss implizit gespeichert werden (unendlich groß)



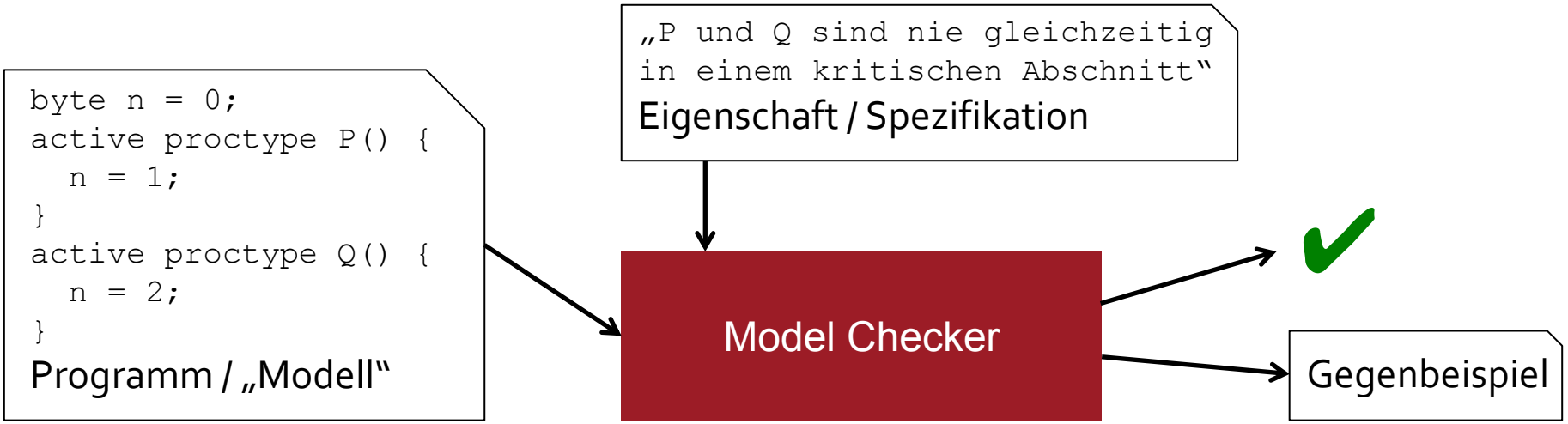
SECENG Security Engineering

# Repräsentation der Modelle: Kripke Strukturen, Computation Tree, Beispiel



# Model Checking
# Modell und Spezifikation




***Modell:***

- *Kripke-Struktur*
- *meist Spezifikation in „Hochsprache“*

***Spezifikation:***

**?**

# Repräsentation der Spezifikation: Aussagenlogik, Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Syntax der Aussagenlogik:

- Menge von Variablen $\mathcal{P}$ (Beispiel: $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, \ldots\}$ )
- Junktoren: $\vee, \wedge, \neg, \leftrightarrow, \rightarrow$
- Konstanten: $\top, \bot$

Die Menge der aussagenlogischen Formen ist die *kleinste* Menge für die gilt:

- Die Konstanten $\top, \bot$ sowie alle Variablen in $\mathcal{P}$ sind aussagenlogische Formeln.
- Sind $\varphi$ und $\psi$ aussagenlogische Formeln, so sind auch $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ aussagenlogische Formeln. (Induktive Definition)



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Spezifikation: Syntax der Aussagenlogik, Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Menge der aussagenlogischen Formen ist die *kleinste* Menge für die gilt:

- Die Konstanten $\top, \bot$ sowie alle Variablen in $\mathcal{P}$ sind aussagenlogische Formeln.
- Sind $\varphi$ und $\psi$ aussagenlogische Formeln, so sind auch $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ aussagenlogische Formeln. (Induktive Definition)

Beispiele: Sind die folgenden Strings aussagenlogische Formeln?

Nehmen wir an dass $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, \ldots\}$

| | | |
|---|---|---|
| $(\top \rightarrow p)$ | $(p \rightarrow (q\vee))$ | $(\bot \wedge (p \rightarrow (q \wedge r)))$ |
| $(\top \rightarrow))$ | $(p \rightarrow (q \vee q))$ | $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$ |
| $((p(q \vee r)) \wedge p)$ | $(\top \rightarrow \bot)$ | $(p * (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$ |



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Spezifikation: Semantik der Aussagenlogik, Wiederholung (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Interpretation:** Abbildung $I : \mathcal{P} \to \{\top, \bot\}$
weist jeder Variable entweder den Wahrheitswert TRUE oder FALSE zu.

Beispiel: $\mathcal{P} = \{p, q\}$

| | $p$ | $q$ |
|---|---|---|
| $I_1$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $I_2$ | $\bot$ | $\top$ |
| $I_3$ | $\top$ | $\bot$ |
| $I_4$ | $\top$ | $\top$ |

Wie werte ich nun eine Formel wie $(p \to (q \to p))$ unter einer Interpretation aus?



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Spezifikation: Semantik der Aussagenlogik, Wiederholung (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Auswertungsfunktion**:
Erweiterung der Abbildung auf aussagenlogische Formeln über eine Auswertungsfunktion $v_I$, die einer Formel einen Wahrheitswert zuweist

$$v_I(p) = I(p) \quad v_I(\top) = \top \quad v_I(\bot) = \bot$$

$$v_I(\neg\varphi) = \begin{cases} \top & v_I(\varphi) = \bot \\ \bot & \text{sonst} \end{cases} \qquad v_I(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} \top & v_I(\varphi) = v_I(\psi) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$$v_I(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} \top & v_I(\varphi) = \top \text{ und } v_I(\psi) = \top \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$$v_I(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} \top & v_I(\varphi) = \top \text{ oder } v_I(\psi) = \top \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$$v_I(\varphi \rightarrow \psi) = \begin{cases} \top & v_I(\varphi) = \bot \text{ oder } v_I(\psi) = \top \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Spezifikation: Semantik der Aussagenlogik, Wiederholung (3)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Beispiel**: $\mathcal{P} = \{p, q\}$

| | $p$ | $q$ |
|---|---|---|
| $I_1$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $I_2$ | $\bot$ | $\top$ |
| $I_3$ | $\top$ | $\bot$ |
| $I_4$ | $\top$ | $\top$ |

$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

Wir bestimmen: $v_{I_2}(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

➔ Tafel



SECENG Security Engineering

# Repräsentation der Spezifikation: Erfüllbarkeit, Gültigkeit (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Erfüllbarkeit:**

- Falls $v_I(\varphi) = \top$ schreiben wir auch $I \models \varphi$
  „ $I$ erfüllt $\varphi$ “
- Eine aussagenlogische Formel $\varphi$ ist **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $I$ gibt mit $I \models \varphi$

**Gültigkeit:**

- Eine Formel $\varphi$ ist **gültig**, wenn für alle Interpretationen $I$ gilt: $I \models \varphi$
- Wir schreiben dann: $\models \varphi$



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Spezifikation: Erfüllbarkeit, Gültigkeit (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eine aussagenlogische Formel $\varphi$ ist **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $I$ gibt mit $I \models \varphi$
- Eine Formel $\varphi$ ist **gültig**, wenn für **alle** Interpretationen $I$ gilt: $I \models \varphi$

Beispiele: Sind die folgenden aussagenlogische Formeln erfüllbar und/oder gültig?

$p$

$p \vee \neg p$

$(p \vee \neg p) \rightarrow r$

$(p \wedge (\neg p \vee q)$

$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

$(p \wedge \neg p) \rightarrow r$



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Modelle: Modellierung durch Logik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundlegende Eigenschaften von Programmen sind in Aussagenlogik formulierbar
- Erste Idee: beschreibe alle mögliche Zustände eines Programms $P$ als aussagenlogische Formel $\varphi_P$ ➔ Meist zu komplex!

- **Formalisierung bestimmter wichtiger Aussagen**
  - *Der Drucker ist gerade beschäftigt*
  - *Der Drucker ist nicht beschäftigt und nimmt Aufträge an*
  - *Es existieren keine Aufträge für den Drucker*
  - *Der Inhalt des Registers R1 ist der Wert 6*
  - *…*



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Modelle: Modellierung durch Logik, Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Formalisierung bestimmter Aussagen:

- *Der Drucker ist gerade beschäftigt*

  $P = \{idle\}, \varphi_1 = \neg idle$

- *Der Drucker ist nicht beschäftigt und nimmt Aufträge an*

  $P = \{idle, accept\_req\}, \varphi_2 = idle \wedge accept\_req$

- *Es existieren keine Aufträge für den Drucker*

  $P = \{N_0, N_1, N_2, \ldots, N_7\}, \varphi_3 = \neg N_0 \wedge \neg N_1 \wedge \ldots \wedge \neg N_7$



SECENG SECURITY ENGINEERING

# Repräsentation der Modelle: Grenzen der Aussagenlogik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Modellierung von „Zeit“ ist schwierig

- Modellierung der folgenden Aussagen nicht möglich:
  - Der Inhalt des Registers R1 wird irgendwann im Ablauf des Programms den Wert 0 enthalten.
  - Der Inhalt des Registers R1 ändert sich unendlich oft.
  - Jeder Request wird irgendwann auch beantwortet.
  - Das Programm wird immer wieder in einen initialen Zustand gelangen.
  - …

- Hierfür ist eine Logik nötig die zeitliche Abhängigkeiten berücksichtigt!
  ➔ nächste Woche!



SECENG SECURITY ENGINEERING