Formale Grundlagen der Informatik I
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
21. Mai 2014

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Pumping-Lemma und Abschlusseigenschaften der Typ-2 Sprachklasse)
Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Sprache $L_1 := \{t\,t \mid t \in \Sigma^*\}$ ist kontextfrei.
Bemerkung: Zum Vergleich: Die Sprache der Palindrome, $L_0 := \{t\,t^{-1} \mid t \in \Sigma^*\}$, ist kontextfrei.

(b) Die Sprache $L_2 := \{s\,t\,s^{-1} \mid s, t \in \Sigma^*,\ |s| = |t|\}$ ist kontextfrei.

(c) Der Schnitt einer kontextfreien mit einer regulären Sprache ist wieder kontextfrei.

(d) Der Schnitt einer kontext*sensitiven* mit einer regulären Sprache ist kontext*frei*.

Lösung:

(a) L_1 ist nicht kontextfrei. Beweis durch Pumping-Lemma mit Wörtern $x_n := a^n b^n a^n b^n$.

(b) Auch L_2 ist nicht kontextfrei. Der Beweis kann wieder mittels Pumping-Lemmas mit Wörtern $x_n := a^n b^n a^n b^n b^n a^n$ geführt werden.

(c) Sei L kontextfrei und L' regulär. Die Idee: Konstruiere einen Produktautomaten, der *parallel* die beiden ursprünglichen Automaten simuliert. Formal: Sei $\mathscr{P} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A, \Gamma, \#)$ ein KA für L und $\mathscr{A}' = (\Sigma, Q', q_0', \delta', A')$ ein DEA für L'. Ein KA $\mathscr{P}'' = (\Sigma, Q'', q_0'', \Delta'', A'', \Gamma'', \#)$ für $L'' := L \cap L'$ ist dann wie folgt zu konstruieren:

$$
\begin{aligned}
Q'' &:= Q \times Q' \\
q_0'' &:= (q_0, q_0') \\
\Delta'' &:= \Big\{ \big((q,q'), \gamma, x, \beta, (p, \delta'(q', x))\big) \;\Big|\; (q, \gamma, x, \beta, p) \in \Delta,\ q' \in Q',\ x \in \Sigma \Big\} \\
&\quad \cup \Big\{ \big((q,q'), \gamma, \varepsilon, \beta, (p, q')\big) \;\Big|\; (q, \gamma, \varepsilon, \beta, p) \in \Delta,\ q' \in Q \Big\} \\
A'' &:= A \times A' \\
\Gamma'' &:= \Gamma
\end{aligned}
$$

Beachte die Unterscheidung in der Definition von Δ'', ob es sich um einen ε-Übergang handelt. Diese ist notwendig, da δ' nur auf Zeichen $x \in \Sigma$ definiert ist!

(d) Nein. Einfaches Gegenbeispiel: Schneide eine Typ-1 Sprache, die nicht Typ-2 ist, mit Σ^*. Etwas schwierigeres Gegenbeispiel: Schneide die Sprache L_1 mit $\mathrm{L}(a^* b^* a^* b^*)$.

Aufgabe G14 (Chomsky-Hierarchie)
Welche der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sind (i) regulär, (ii) kontextfrei, aber nicht regulär, oder (iii) nicht kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{x \in \Sigma^* : |x|_a > |x|_b\} \\
L_2 &= \{x \in \Sigma^* : |x|_a > |x|_b > |x|_c\} \\
L_3 &= \{x \in \Sigma^* : |x|_a > |x|_b \text{ und } |x|_b \le 17\} \\
L_4 &= \{x \in \Sigma^* : |x|_a > |x|_b \text{ und } |x|_b \ge 17\}
\end{aligned}
$$

Lösung:

L_1: L_1 ist kontextfrei, aber nicht regulär. Eine Grammatik für L_1 wäre

$$\begin{array}{llll} P: & X_0 & \to & XX_0 \mid aX_0 \mid aX \mid X_0 \mid a \\ & X & \to & XX \mid aXb \mid bXa \mid ab \mid ba \end{array}$$

L_1 ist nicht regulär. Angenommen L_1 wäre regulär. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und setze $x = a^{n+1}b^n$. Nach dem Lemma gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|uv| \leq n, v \neq \varepsilon$ und $uv^m w \in L_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, ist $v = a^k$ für $k \geq 1$. Also ist $uv^0 w = a^{n+1-k}b^n \notin L_1$. Widerspruch!

L_2: L_2 ist nicht kontextfrei. Angenommen L_2 wäre kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und setze $x = a^{n+2}b^{n+1}c^n$. Nach dem Lemma gibt es eine Zerlegung $x = yuvwz$ mit $|uvw| \leq n, uw \neq \varepsilon$ und $yu^m vw^m z \in L_2$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $|uvw| \leq n$ kann uvw nicht sowohl a's als auch c's enthalten. Deshalb gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

- u und w enthalten nur a. Dann enthält yu^0vw^0z nicht mehr a's als b's und ist deshalb nicht in L_2 enthalten. Widerspruch!
- u und w enthalten a und b. Dann enthält yu^0vw^0z nicht mehr b's als c's und ist deshalb nicht in L_2 enthalten. Widerspruch!
- u und w enthalten nur b. Dann enthält yu^0vw^0z nicht mehr b's als c's und ist deshalb nicht in L_2 enthalten. Widerspruch!
- u und w enthalten b und c. Dann enthält yu^2vw^2z nicht mehr a's als b's und ist deshalb nicht in L_2 enthalten. Widerspruch!
- u und w enthalten nur c. Dann enthalt yu^2vw^2z nicht mehr b's als c's und ist deshalb nicht in L_2 enthalten. Widerspruch!

L_3: L_3 ist regulär. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$L_3^n = \{x \in \Sigma^* : |x|_a > n \text{ und } |x|_b = n\} = \{x \in \Sigma^* : |x|_a > n\} \cap \{x \in \Sigma^* : |x|_b = n\}$$

ein Durchschnitt von zwei regulären Sprachen und deshalb regulär. Es folgt, dass $L_3 = \bigcup_{n \leq 17} L_3^n$ auch regulär ist.

L_4: L_4 ist kontextfrei, aber nicht regulär. $L_4 = L_1 \cap \{x \in \Sigma^* : |x|_b \geq 17\}$ ist Durchschnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache und deshalb kontextfrei. Wäre L_4 auch noch regulär, dann wäre $L_1 = L_3 \cup L_4$ das auch. Wir haben aber oben gezeigt, dass L_1 nicht regulär ist.

Aufgabe G15 (Kellerautomaten)
Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der die folgende kontextfreie Sprache erkennt:

$$L = \{a^i b^j c^k : i = j + k\}.$$

Lösung: Sei $\mathscr{P} = (\Sigma, Q, q_a, \Delta, A, \Gamma, \#)$ der Kellerautomat mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, Zustandsmenge $Q = \{q_a, q_b, q_c\}$, q_a als Anfangszustand, $A = \{q_a, q_b, q_c\}$ als Menge der akzeptierenden Zustände, Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, |\}$ und Übergangsrelation Δ gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \{ & (q_a, \#, \varepsilon, \varepsilon, q_a) \\ & (q_a, \#, a, |, q_a) \\ & (q_a, |, a, ||, q_a) \\ & (q_a, |, b, \varepsilon, q_b) \\ & (q_a, |, c, \varepsilon, q_c) \\ & (q_b, |, b, \varepsilon, q_b) \\ & (q_b, |, c, \varepsilon, q_c) \\ & (q_c, |, c, \varepsilon, q_c) \quad \}. \end{array}$$

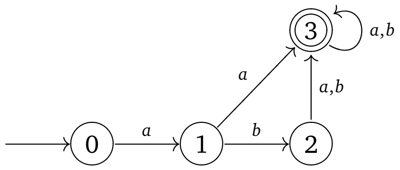
Dann erkennt $\mathscr{P}$ die Sprache L.

Hausübung

Aufgabe H13 (Grammatiken) (12 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Betrachten Sie den Automaten $\mathscr{A}$:



Geben Sie eine reguläre Grammatik an, die die Sprache $L(\mathscr{A})$ erzeugt.

(b) Sei

$$L = \{x \in \Sigma^* : |x|_a = |x|_b\}.$$

Zeigen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik angeben, die diese Sprache erzeugt. (Und begründen Sie Ihre Antwort!)

Lösung:

(a)

$$\begin{array}{lcl} X_0 & \to & aX_1 \\ X_1 & \to & aX_3 \,|\, bX_2 \\ X_2 & \to & aX_3 \,|\, bX_3 \\ X_3 & \to & aX_3 \,|\, bX_3 \,|\, \varepsilon \end{array}$$

(b)

$$X_0 \to \varepsilon \,|\, X_0X_0 \,|\, aX_0b \,|\, bX_0a$$

Aufgabe H14 (Chomsky-Normalform) (12 Punkte)

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{X_0\}, P, X_0)$ mit

$$\begin{array}{llcl} P: & X_0 & \to & aXY \,|\, bXb \,|\, a \\ & X & \to & aXa \,|\, bY \,|\, \varepsilon \\ & Y & \to & bX_0a \,|\, aX_0 \end{array}$$

Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.

Lösung: 1. Schritt (elimiere ε-Produktionen):

$$\begin{array}{lcl} X_0 & \to & aXY \,|\, bXb \,|\, a \,|\, aY \,|\, bb \\ X & \to & aXa \,|\, bY \,|\, aa \\ Y & \to & bX_0a \,|\, aX_0 \end{array}$$

2. Schritt (Variablen vor Buchstaben):

$$\begin{array}{lcl} X_0 & \to & Z_aXY \,|\, Z_bXZ_b \,|\, Z_a \,|\, Z_aY \,|\, Z_bZ_b \\ X & \to & Z_aXZ_a \,|\, Z_bY \,|\, Z_aZ_a \\ Y & \to & Z_bX_0Z_a \,|\, Z_aX_0 \\ Z_a & \to & a \\ Z_b & \to & b \end{array}$$

3. Schritt (eliminiere $X \to X_0 \dots X_k$ mit $k \geq 3$):

$$\begin{array}{lcl} X_0 & \to & Z_aU \,|\, Z_bV \,|\, Z_a \,|\, Z_aY \,|\, Z_bZ_b \\ X & \to & Z_aW \,|\, Z_bY \,|\, Z_aZ_a \\ Y & \to & Z_bT \,|\, Z_aX_0 \\ U & \to & XY \\ V & \to & XZ_b \\ W & \to & XZ_a \\ T & \to & X_0Z_a \\ Z_a & \to & a \\ Z_b & \to & b \end{array}$$

Aufgabe H15 (Kellerautomaten) (12 Punkte)

Konstruieren Sie einen PDA für die Sprache L der Palindrome über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Lösung: Ein PDA für L ist $\mathscr{P} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A, \Gamma, \#)$ mit $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Gamma = \{\#, A, B\}$, $A = \{q_1\}$ und Transitionen

$$
\begin{array}{lllllll}
\{ & (q_0, & \#, & \varepsilon, & \varepsilon, & q_1) & \\
 & (q_0, & \#, & a, & \varepsilon, & q_1) & \\
 & (q_0, & \#, & b, & \varepsilon, & q_1) & \\
 & (q_0, & \#, & a, & A, & q_0) & \\
 & (q_0, & \#, & b, & B, & q_0) & \\
 & (q_0, & A, & a, & AA, & q_0) & \\
 & (q_0, & B, & a, & AB, & q_0) & \\
 & (q_0, & A, & b, & BA, & q_0) & \\
 & (q_0, & B, & b, & BB, & q_0) & \\
 & (q_0, & A, & a, & A, & q_1) & \\
 & (q_0, & B, & a, & B, & q_1) & \\
 & (q_0, & A, & b, & A, & q_1) & \\
 & (q_0, & B, & b, & B, & q_1) & \\
 & (q_0, & A, & A, & \varepsilon, & q_1) & \\
 & (q_0, & B, & b, & \varepsilon, & q_1) & \\
 & (q_1, & A, & a, & \varepsilon, & q_1) & \\
 & (q_1, & B, & b, & \varepsilon, & q_1) & \}.
\end{array}
$$