Einführung in Computational Engineering Grundlagen der Modellierung und Simulation

Prof. Dr. J. Peters, C. Daniel, M.Sc. und H. van Hoof, M.Sc.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2013/2014
Lösungsvorschlag der 3. Übung

Aufgabe 1 Differentialgleichungssysteme (10 Punkte)

a) Ordnen Sie Richtungsfelder aus Fig. 1 folgenden Differentialgleichungen zu:

$$\begin{array}{llll} (1) & \dot{x}(t) = \sin(t) - x(t) & (2) & \dot{x}(t) = -x(t)^2 + 2x(t) \\ (3) & \dot{x}(t) = \exp(-1/t) & (4) & \dot{x}(t) = x(t)^2\left(1 - x(t)^2\right) \end{array}$$

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung mit Anfangswert

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)} + \exp(t) - 4,\ x(0) = 3\,.$$

in eine autonomes Differentialgleichungssystem mit Anfangswerten.

c) Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{4}y(t) - 15\dot{y}(t) - 4y = 0$$

in ein Differentialgleichungssystem der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}$. Wählen Sie dazu einen passenden Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$.

d) Lösen Sie die Differentialgleichung aus Aufgabenteil c) mit Startwerte $y(0) = 0.5, \dot{y}(0) = 0$.

e) Zeigen Sie, durch Substitition der in Aufgabenteil d) gefundene Lösung für $y(t)$, dass die gefundene Antwort korrekt ist.

Lösungsvorschlag

a) $(A) \longleftrightarrow (3)$, $(B) \longleftrightarrow (2)$, $(C) \longleftrightarrow (4)$, $(D) \longleftrightarrow (1)$ (2 Punkte).

b) Hinzunahme einer weiteren Gleichung liefert System von 2 DGLn: Definiere $x_1(t) := x(t), x_2(t) := t$ und erhalte damit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\sqrt{x_1} + \exp(x_2) - 4 \\ \dot{x}_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 3, x_2(0) = 0$ (2 Punkte).

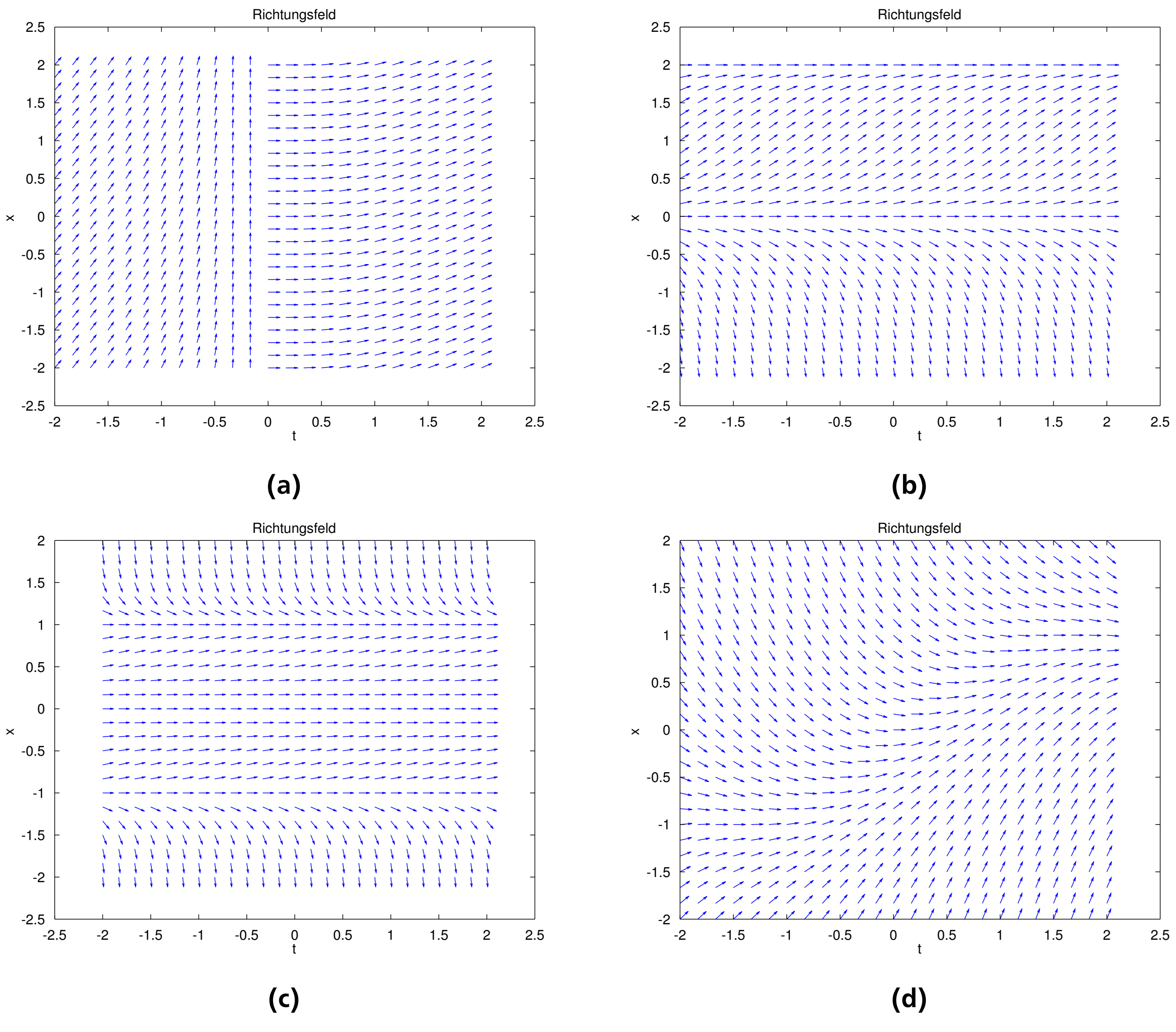

Abbildung 1: Richtungsfelder zu Aufgabe 1

c) Das System lautet wie folgt (2 Punkte):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3.75 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

d) Das charakteristische Polynom

$$(0-\lambda)(15/4-\lambda)-1=0$$

hat die Lösungen $\lambda = -0.25$ und $\lambda = 4$.

Substitution in $(A-\lambda I)\boldsymbol{x}$ ergibt die Eigenvektoren: $(0+0.25)x_1 + x_2 = 0 \rightarrow v = (-4,1)^T$ und $(0-4)x_1 + x_2 = 0 \rightarrow v = (0.25,1)^T$.

Die algemeine Lösung ist also

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.25t} + c_2 \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Mit den Anfangswerten kann die spezielle Lösung gefunden werden:

$$y(0) = 0.5, \dot{y}(0) = 0 \rightarrow \boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0} + c_2 \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{0.5}{4.25} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.25t} + \frac{0.5}{4.25} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

(2 Punkte).

e) $\boldsymbol{x} = (y, \dot{y})$, also $y = \frac{2}{4.25} e^{-0.25t} + \frac{0.125}{4.25} e^{4t}$. Differenzieren ergibt

$$\dot{y} = -\frac{0.5}{4.25} e^{-0.25t} + \frac{0.5}{4.25} e^{4t},$$

$$\ddot{y} = \frac{0.125}{4.25} e^{-0.25t} + \frac{2}{4.25} e^{4t}.$$

Substitition in $\ddot{4}y(t) - 15\dot{y}(t) - 4y$:

$$\begin{aligned}
& 4\left(\frac{0.125}{4.25} e^{-0.25t} + \frac{2}{4.25} e^{4t}\right) - 15 \cdot (-\frac{0.5}{4.25} e^{-0.25t} + \frac{0.5}{4.25} e^{4t} - 4 \cdot (\frac{2}{4.25} e^{-0.25t} + \frac{0.125}{4.25} e^{4t})) \\
= & \left(4\frac{0.125}{4.25} + 15\frac{0.5}{4.25} - 4\frac{2}{4.25}\right) e^{-0.25t} + \left(4\frac{2}{4.25} - 15\frac{0.5}{4.25} - 4\frac{0.125}{4.25}\right) e^{4t} \\
= & 0e^{-0.25t} + 0e^{4t} = 0
\end{aligned}$$

(2 Punkte).

Aufgabe 2 Stabilität (6 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 5y \\ \dot{y} &= x^2 - 2x + y - 3\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die möglichen Ruhelagen dieses Systems. .

b) Führen Sie für diese Punkte nun eine Linearisierung um die Ruhelage durch. Bestimmen Sie dazu die Jacobi-Matrix und Ihre Eigenwerte. Sind die Ruhelagen stabil oder instabil? .

Lösungsvorschlag

a) Wir setzen die rechte Seite gleich 0 und erhalten: $y = 0$, $x \in 3, -1$, Daher sind $\mathbf{p}_0 = (3, 0)^T$ und $\mathbf{p}_1 = (-1, 0)^T$ die Ruhelagen. (2 Punkte)

b) Durch elementweises differenzieren ergibt sich die Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{J} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2x-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Ansatz

$$0 = |\mathbf{J} - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 5 \\ 2x-2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 5(2x-2)$$

errechnet man die Eigenwerte. Für $\mathbf{p}_0$ gilt:

$$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2}$$

Daraus folgt

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -4$$

Somit ist einer der Eigenwerte positiv; die Ruhelage im Punkt $\mathbf{p}_0$ ist folglich instabil.

Für $\mathbf{p}_1$ gilt

$$\lambda_1 = \frac{1 + i\sqrt{(79)}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - i\sqrt{(79)}}{2}$$

Positive Reelle Anteile und konjugierte komplexe Anteile weisen auf ein schwingendes, instabiles System hin. (4 Punkte)

Aufgabe 3 Richtungsfelder plotten (4 Punkte)

Implementieren Sie Matlabcode um die Richtungsfelder aus Aufgabe 1a) selbst zu plotten. Ihr Code soll *keine Loops* enthalten. Hilfreiche Funktionen sind *meshgrid* und *quiver*. Geben Sie den Code und die Plots als Loesung ab.

Lösungsvorschlag