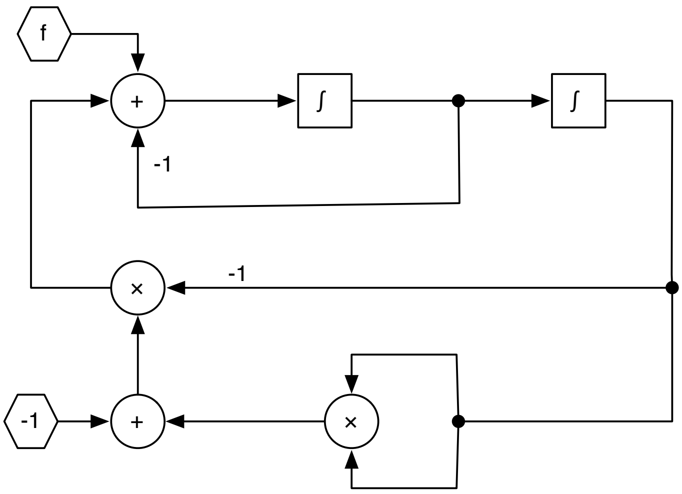
Einführung in Computational Engineering
Grundlagen der Modellierung und Simulation
Dr. Arne Nägel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2012/2013
Lösungsvorschlag der 10. Übung

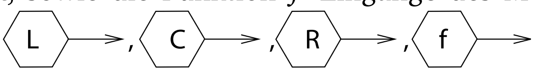
Aufgabe 1 Blockorientierte Darstellung des Systemmodells (10 Punkte)

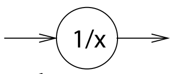
a) Übersetzen Sie folgende Blockdiagrammdarstellung in ein Differentialgleichungssystem:



b) Zeichnen Sie eine Blockdiagrammdarstellung für das Differentialgleichungssystem

$$LC \cdot \ddot{x} + RC \cdot \dot{x} + x = f.$$

Dabei sind die Parameter L, C, R, sowie die Funktion f Eingänge des Modells. Verwenden Sie in Ihrer Darstellung die Blöcke 

für Systemeingänge; 

für Funktionen und darüber hinaus nur solche Blöcke, die auch in Aufgabe (a) vorkommen.

Lösungsvorschlag

a) Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (5 Punkte):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1(x_1^2 - 1) - x_2 + f \end{pmatrix}\end{aligned}$$

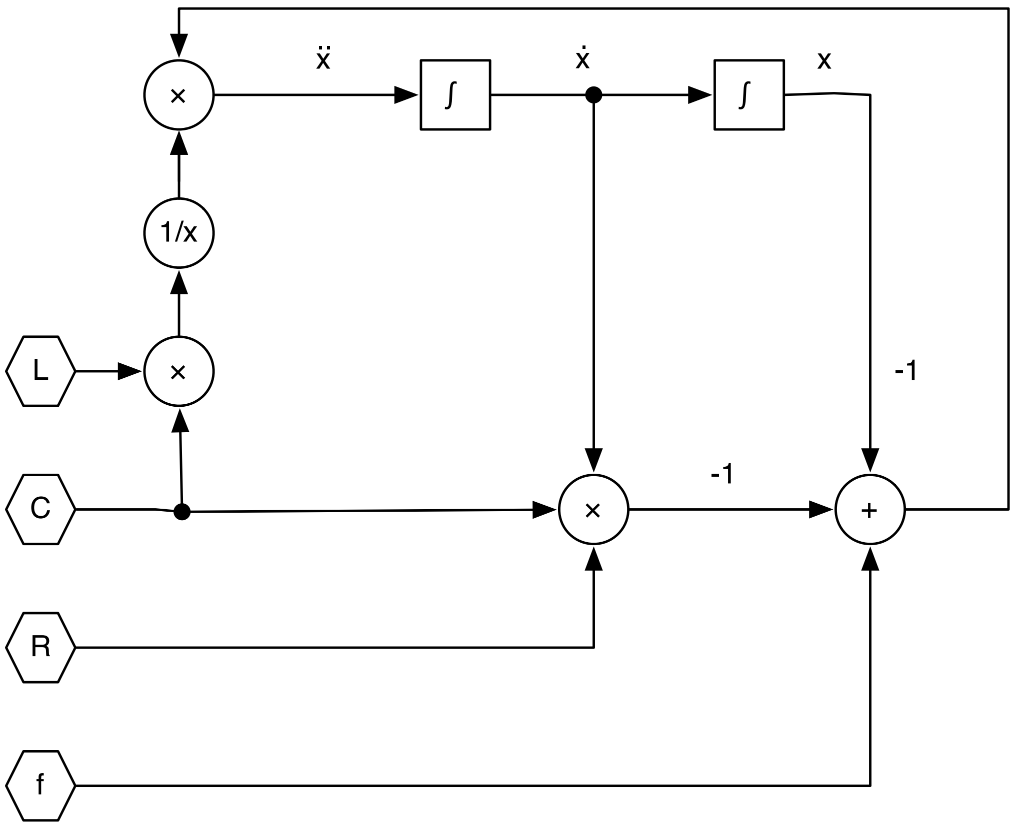


Abbildung 1: Blockdiagramm zu Aufgabe 1 b).

b) Auflösen nach $\ddot{x}$:

$$LC \cdot \ddot{x} + RC \cdot \dot{x} + x = f$$
$$\Longleftrightarrow \ddot{x} = \frac{1}{LC}\left(-RC \cdot \dot{x} - x + f\right).$$

Ein Beispiel ist in Abbildung 1 dargestellt (5 Punkte).

Aufgabe 2 Bestimmen von Parametern eines Modells (10 Punkte)

Betrachtet wird ein physikalisches Modell eines Magnetschwebefahrzeugs der Masse $m = 3\text{kg}$, welches über ein hochwirksames Bremssystem verfügt. Dieses spricht sofort an und entfaltet ohne zeitliche Verzögerung die volle Bremsleistung mit einer Bremskraft $F_b = 1.5\text{N}$. Es wird angenommen, dass die Länge des Bremswegs x der folgenden Modellgleichung folgt:

$$m\ddot{x}(t) = -F_b,\ \dot{x}(t_0) = V_0,\ x(t_0) = 0$$

Dabei ist $V_0 = 4\text{m/s}$ die Geschwindigkeit zum Beginn des Bremsvorgangs. Für den Abbremsvorgang bei $t_0 = 0$ wurde experimentell folgende Messreihe erstellt:

j	1	2	3
$t_j[s]$	1	2	4
$\hat{x}_j[m]$	3.5	7.5	11.5

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der o.g. Bewegungsgleichung.

b) Es herrscht Unstimmigkeit bzgl. der im Experiment verwendete Anfangsgeschwindigkeit V_0. Ingenieur A ist der Meinung, dass das diese falsch eingestellt war. Er meint, dass durch eine nachträgliche Anpassung von V_0 im Modell eine bessere Übereinstimmung erzielt werden kann. Ihre Aufgabe ist es, ihm zu helfen. Stellen Sie dazu die Funktion

$$\varphi(V_0) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(x(t_j;V_0) - \hat{x}_j\right)^2$$

auf. Bestimmen Sie denjenigen Wert V_0^*, für den diese Funktion minimal wird.

c) Der Kollege B vertritt die Meinung, dass weitere, im Modell nicht berücksichtigte Effekte eine Rolle spielen. Helfen Sie auch ihm und nennen Sie zwei verschiedene Aspekte, warum Detailliertheit und Parameter des Modells mit den gegebenen Messwerten noch nicht allgemein und ausreichend validiert werden können.

d) Da das Modellfahrzeug sehr klein ist, wurde z.B. der Einfluss des Luftwiderstands vernachlässigt. Wie muss man die Modellgleichungen ändern, wenn man statt eines Modells ein reales Fahrzeug berücksichtigen würde? (Hier genügt hier eine qualitative Beschreibung, eine exakte Formel ist nicht gefragt.) Erscheint Ihnen das Modell ansonsten plausibel? Geben Sie eine Antwort und begründen Sie diese.

e) Die obige Gleichung können Sie analytisch lösen. Was müssen Sie ferner berücksichtigen, wenn Sie Modellgleichungen auf dem Rechner numerisch lösen?

Lösungsvorschlag

a) Schrittweises integrieren und abgleichen der Integratiosnkonstanten mit den Anfangswerten liefert (2 Punkte):

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= -F_b/m \\
\dot{x}(t) &= -F_b/mt + V_0 \\
x(t) &= -\frac{1}{2}F_b/mt^2 + V_0 t
\end{aligned}$$

b) Dass Minimum erhält man z.B. über die Nullstellen der ersten Ableitung bzgl. V_0. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial V_0}\varphi(V_0) &= \sum_{j=1}^{N}(x(t_j) - \hat{x}_j)\,\frac{\partial}{\partial V_0}x(t_j) \\
\frac{\partial^2}{\partial V_0^2}\varphi(V_0) &= \sum_{j=1}^{N}\left((x(t_j) - \hat{x}_j)\,\frac{\partial^2}{\partial V_0^2}x(t_j) + \left(\frac{\partial}{\partial V_0}x(t_j)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Speziell:

$$\frac{\partial x(t_j)}{\partial V_0} = t_j,\ \frac{\partial^2 x(t_j)}{\partial V_0^2} = 0$$

Also ist notwendige Bedingung fur ein Minimum (2 Punkte):

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{N} \big(x(t_j) - \hat{x}_j \big)\, t_j \\
&= \sum_{j=1}^{N} \Big(-\frac{F}{2m} t_j^2 + V_0 t_j - \hat{x}_j \Big)\, t_j
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \frac{F}{2m} t_j^2 + \hat{x}_j)\, t_j = V_0 \sum_{j=1}^{N} t_j^2
$$

Diese Bedingung ist für

$$
V_0^* = \frac{\sum_{j=1}^{N} (\frac{F}{2m} t_j^3 + \hat{x}_j t_j)}{\sum_{j=1}^{N} t_j^2} = \frac{3.75 + 17 + 62}{1 + 4 + 16} = \frac{82.75}{21} \approx 3.9405
$$

erfüllt (1 Punkt). Wegen

$$
\frac{\partial^2}{\partial V_0^2} \varphi(V_0^*) = \sum_{j=1}^{N} t_j^2 > 0
$$

liegt auch tatsächlich ein Minimum vor (1 Punkt).

c) Mögliche Antworten (2 Punkte):

- Angabe zu Messaufbau und insbesondere zu den Messungenauigkeiten fehlen.
- Zu wenig Messwerte um eine verlässliche Aussage über das dynamische Verhalten zu rechtfertigen.

d) Reibungsvorgänge sollten die Geschwindigkeit selbst berücksichtigen (1 Punkt). Die DGL sollte also von der Form

$$
m\ddot{x}(t) = -F_b + k\dot{x}(t)
$$

sein. Für den Luftwiderstand bei Fahrzeugen ist k u.a. selbst wieder proportional zu $\dot{x}(t)$ (vgl. c_w-Wert).

e) Einfluss von Diskretisierungs- und Rundungsfehler (1 Punkt).