

Einführung in Computational Engineering



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Grundlagen der Modellierung und Simulation

5. Vorlesung: Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

11. November 2013

Prof. Dr. Jan Peters

MOODLE
TEST IN
ZWEI
FOLIEN

produziert vom

HRZ
Hochschulfrechenzentrum

IFIS

Bitte von der Meise...



- Vergesst nicht: Jeder Prof hat 'ne Meise! Meine darf Ihr füttern!
- Seit letztem Mal hungert die Meise... gebt doch bitte mehr Feedback!!!

Überblick der Vorlesungsinhalte



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Einführung
2. Diskrete Modellierung und Simulation
3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation
4. Teilschritte einer Simulationsstudie
5. Interpretation und Validierung
6. Modulare und objektorientierte Modellierung und Simulation
7. Parameteridentifikation von Modellen

MOODLE FRAGE

$$\dot{x} = Ax \rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \\ \lambda = A = 0,5$$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\dot{x} = 0,5x, \quad x(0) = 1. \quad x = \exp(\lambda t) \\ \lambda$$

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage $(\text{Re } \lambda > 0)$
beantworten!

$$x = 1 \leftarrow$$

$$|\dot{x}| = 0,5 > 0$$

$$\Rightarrow |x(t+\delta t)| > |x(t)|$$

$$\cancel{\exp(\lambda t)} \lambda = 0,5 \cancel{\exp(\lambda t)}$$

$$\Rightarrow \lambda = 0,5$$

$$\Rightarrow x = \exp(0,5t)$$

B



Grundlagen der Modellierung und Simulation

3. ZEITKONTINUIERLICHE MODELLIERUNG UND SIMULATION

3.4 Stabilität

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



- Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ bestimmen die Stabilität eines Systems
 - Reelle, konjugiert komplexe, einfache oder mehrfache Eigenwerte (EW) sind möglich
 - Vorzeichen des reellen Teils $Re(\lambda_i)$ der EW ist für die Stabilität entscheidend
 - Bestimmung der Eigenwerte z.B. mittels Charakteristischer Gleichung (Charakteristisches Polynom)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \dots$$

3.4 Stabilität

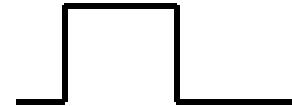
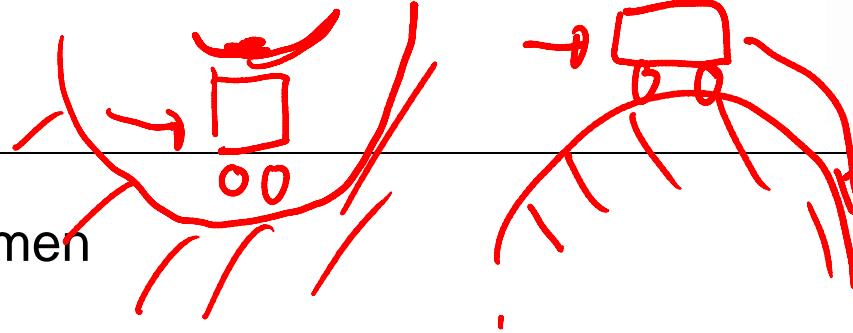
Stabil

Instabil



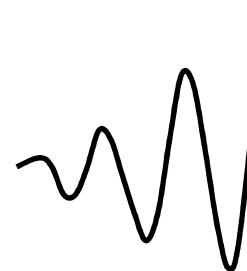
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Gefahr bei instabilen Systemen
 - Begrenzte Eingabe



instabiles
System

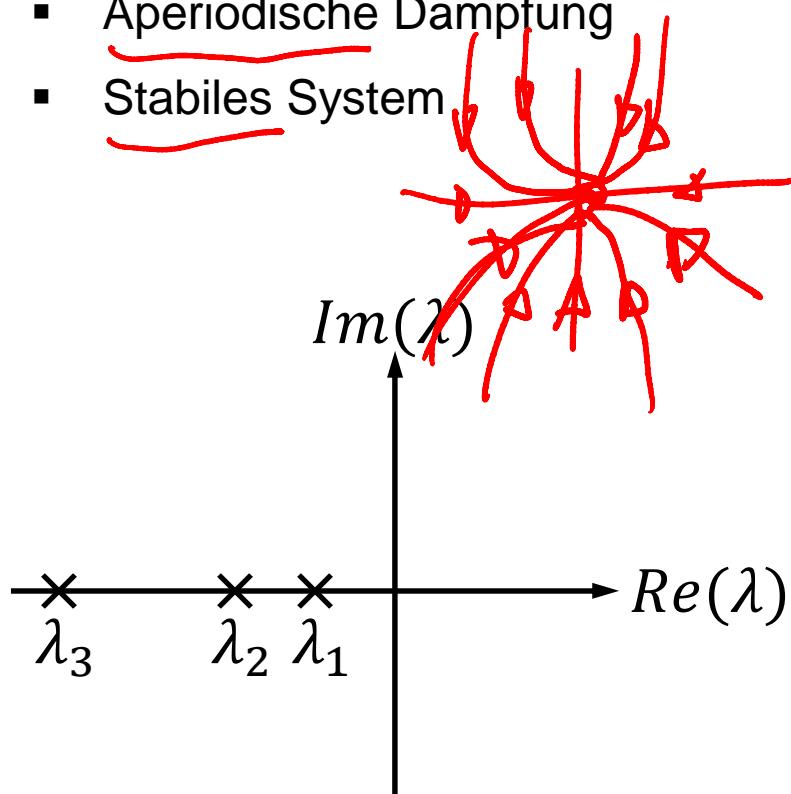
- Theoretisch unbegrenzte Ausgabe



3.4 Stabilität

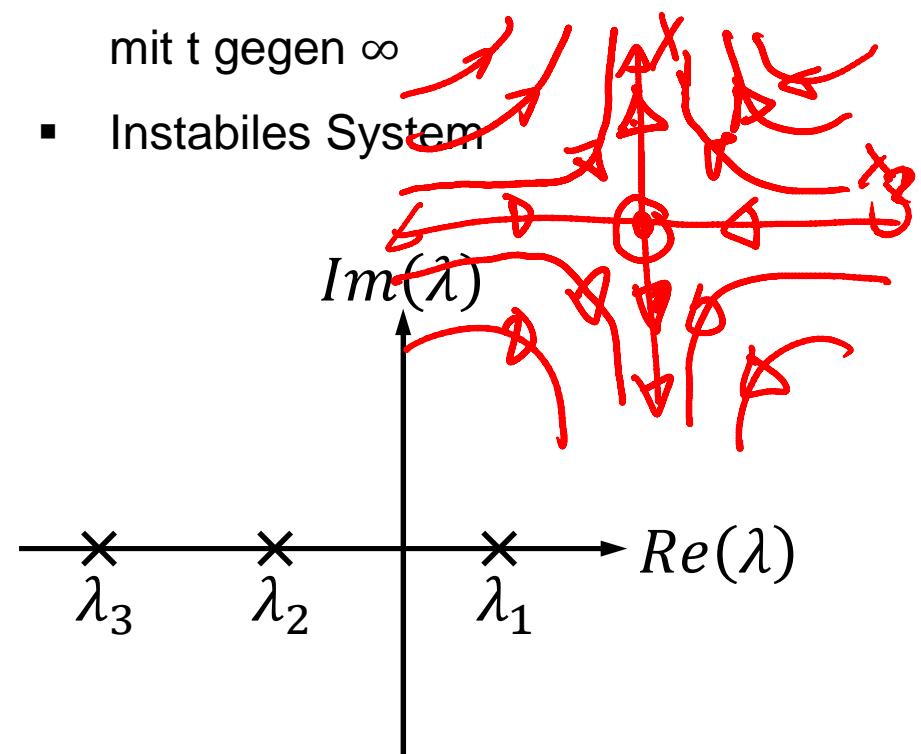
- Reelle, negative Eigenwerte

- Aperiodische Dämpfung
- Stabiles System

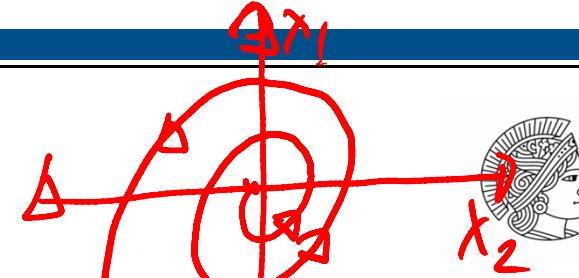


- Mindestens ein reell, positiver EW

- Zugehörige Eigenbewegung wächst mit t gegen ∞
- Instabiles System

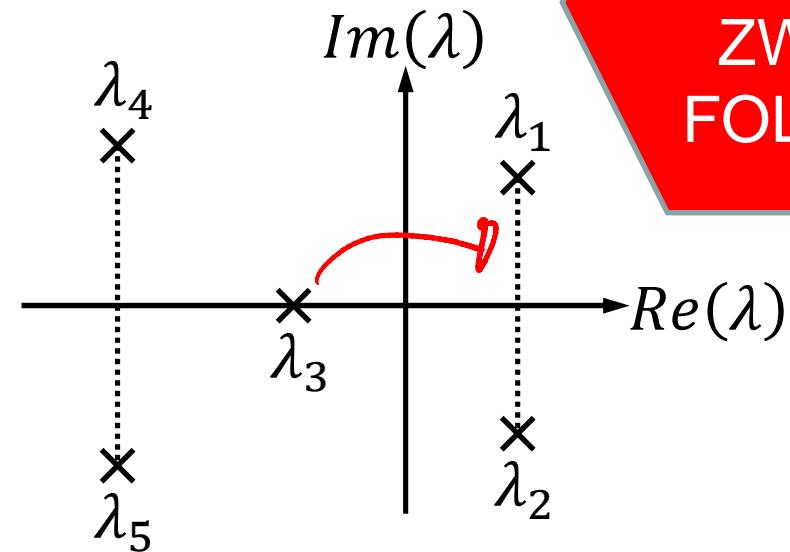
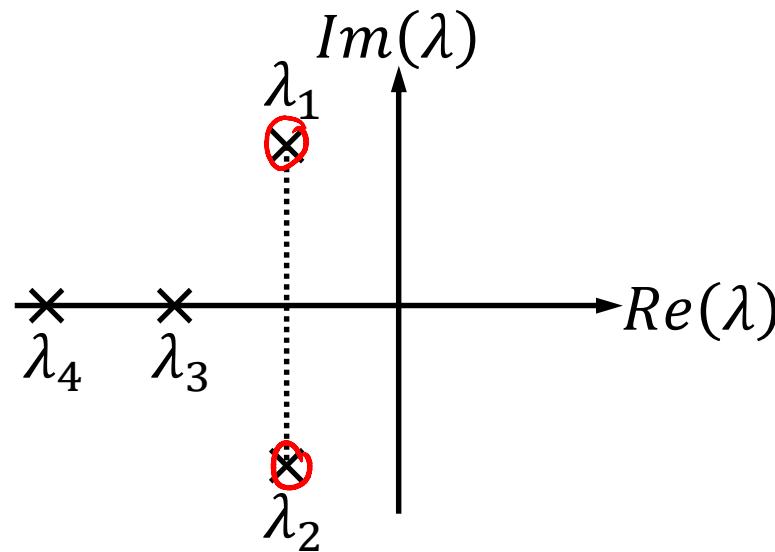


3.4 Stabilität



- Konjugiert komplexe Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$
 - Gedämpfte Oszillation
 - Stabiles System

- Konjugiert komplexe Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$
 - Ungedämpfte Oszillation
 - Instabiles System



MOODLE
TEST IN
ZWEI
FOLIEN

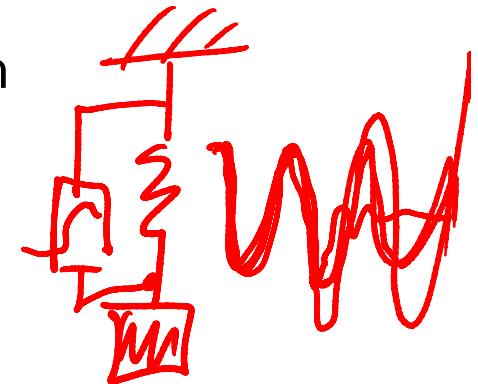
3.4 Stabilität (nach A.M. Lyapunov)



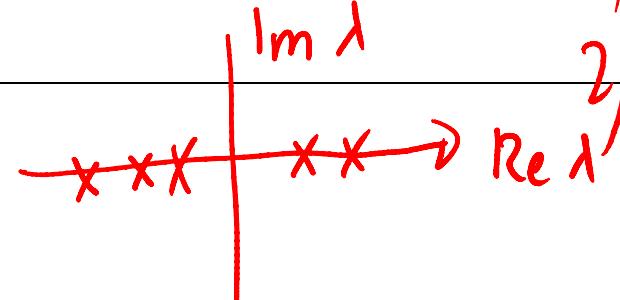
- Definition
 - (asymptotisch) stabile Gleichgewichtslage
 - Wenn kurze andauernde Störung (z.B. Sollwertsprung) eine Abweichung aus der Gleichgewichtslage verursacht und im Laufe der Zeit gegen Null strebt
 - Für das Übertragungsverhalten des nichtlinearen, dynamischen Systems wird eine Näherungsgleichung (lineare DGL) aufgestellt
 - Die Gleichgewichtslage des nichtlinearen Systems ist
 - (asymptotisch) stabil, wenn die Polstellen der Übertragungsfunktion, des linearen Systems definiert durch die Näherungsgleichung, alle negative Realteile aufweisen
 - instabil, wenn mindestens eine dieser Polstellen einen positiven Realteil aufweist

3.4 Stabilität (nach A.M. Lyapunov)

- Keine Aussage über Stabilität der Gleichgewichtslage möglich
 - Mindestens eine Polstelle weist einen Realanteil gleich null auf (Polstelle ist null oder rein imaginär), auch wenn die restlichen Polstellen negativen Realanteil haben



MOODLE FRAGE



1) Reell \Rightarrow Schwingt nicht!
2) Positive \Rightarrow Instabil!



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage
beantworten!

3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten

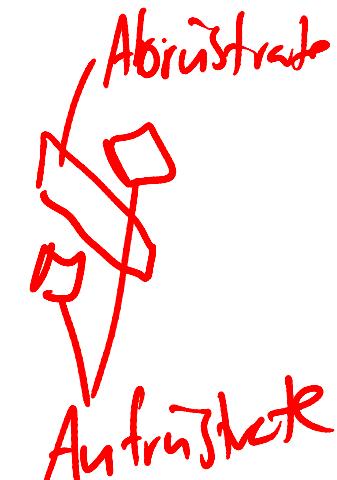


- Zustands DGLn

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -m & a \\ b & -n \end{pmatrix}}_{= A} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, m, n \in \mathbb{N}$$

Rüstungsausgaben

Aufrüstungsbeiträge



- Interpretation

- Rüstungsausgaben $x(t), y(t)$ von zwei Großmächten X und Y
- Abrüstraten $m, n > 0$ und Aufrüstraten $a, b > 0$
- Konstante Aufrüstbeiträge c, d
(bzw. Abrüstbeiträge, falls negativ)
- Im folgendem werden verschiedene Modelle betrachtet

3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten



- Betrachtung des 1. Modells

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Gleichgewichtslösung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$0 = \dot{x}$ \underbrace{A}_{\sim} $\underbrace{x_s}_{\sim}$ \downarrow $\Rightarrow x_s = A^{-1} b$

3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten

- Stabilität

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0,5 \\ 0,5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \lambda + 1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm \frac{1}{2}$$

~~λ = -1 ± 1/2~~

- Die Eigenwerte sind reell und negativ, d.h. Störungen der Gleichgewichts-/Ruhelage werden zu Null gedämpft
 - Folglich: Gleichgewichtslösung ist stabil

3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten

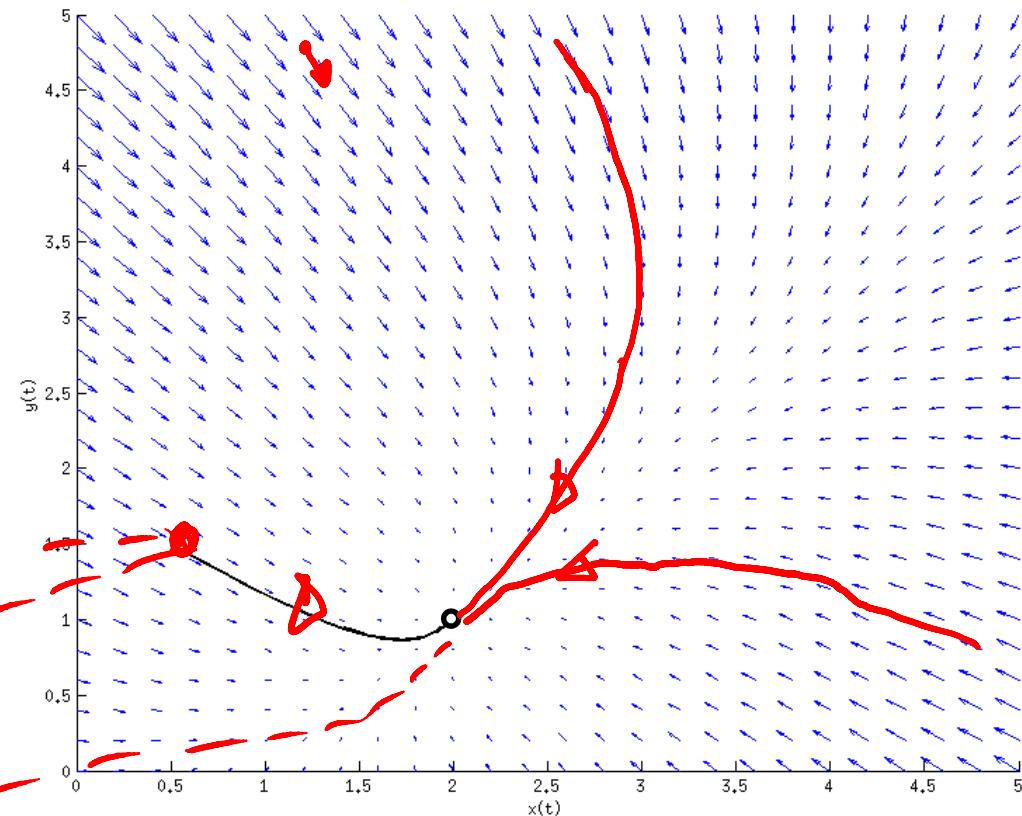


- Richtungsfeld
 - Visualisierungsform einer gewöhnlichen DGL

- Mündet in der Gleichgewichtslage für gegebenen

$$\text{Anfangswert } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

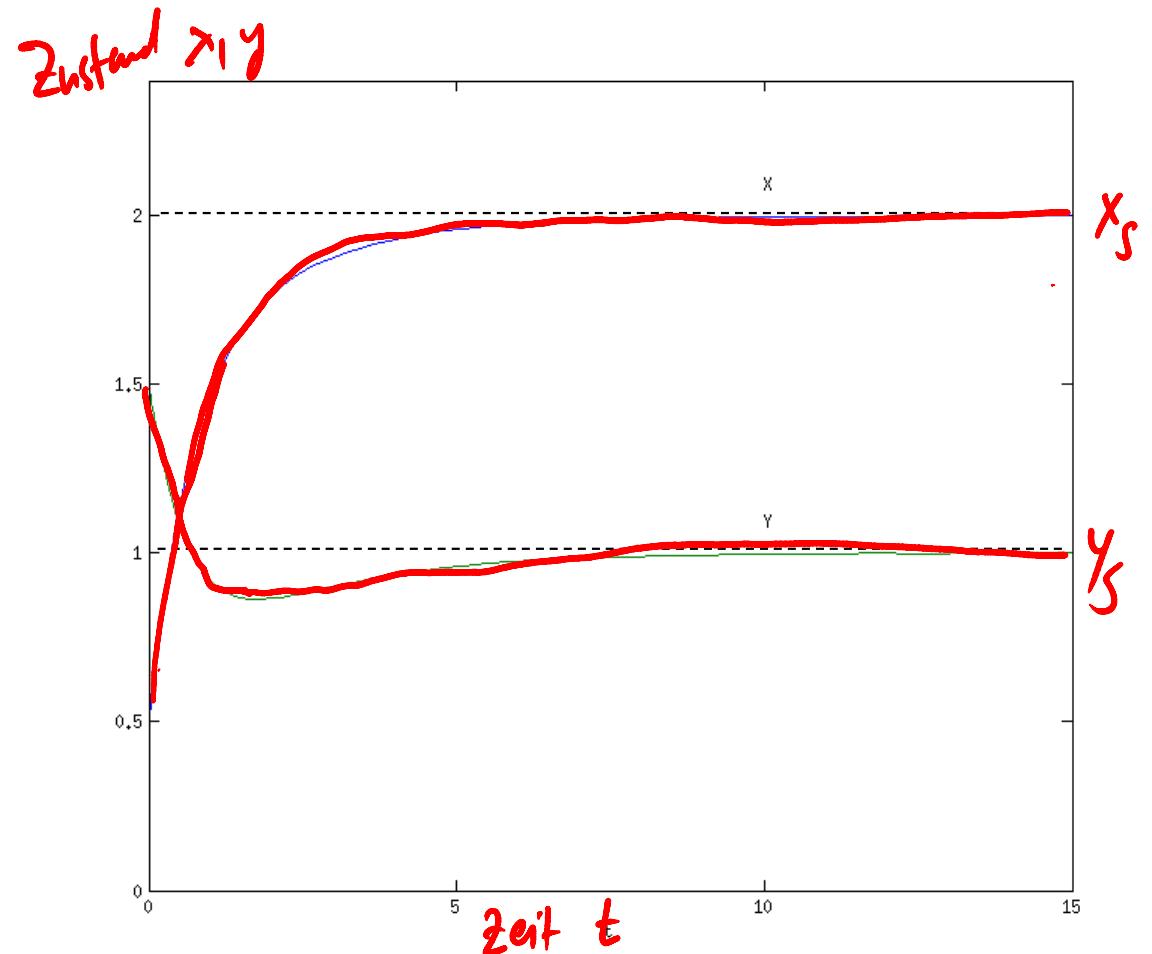
- ▲ Startpunkt
- Gleichgewichtslage



3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten



- Phasenraum
 - Visualisierungsform einer gewöhnlichen DGL
 - Asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage für den gegebenen Anfangswert



3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten

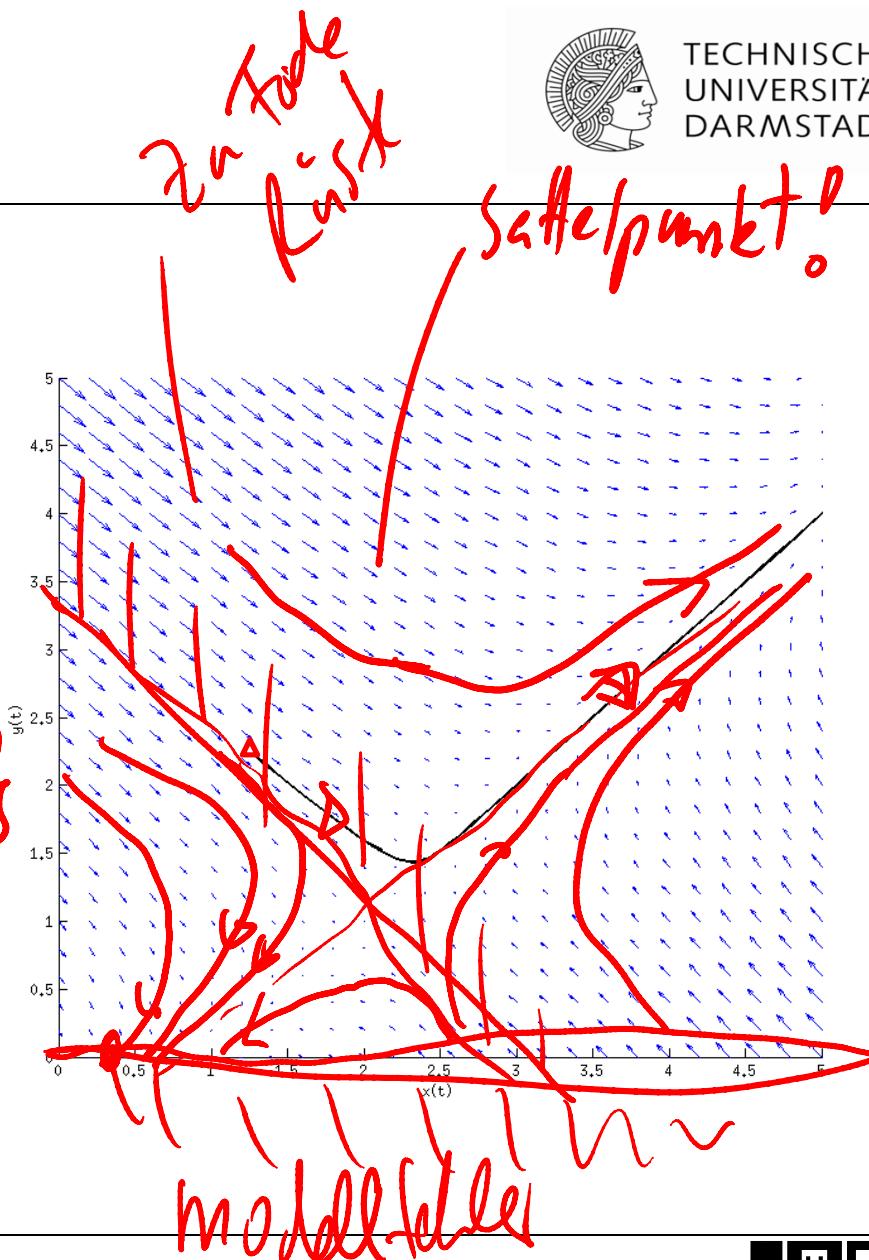


- Betrachtung des 2. Modells

- Mit $A = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/4 \end{pmatrix}$
- Gleichgewichtslage bei $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Anfangswert ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$
- Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm 1$ $e^{\left\{-\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\right\}}$
- Damit ist das System instabil

- Startpunkt

Keine Gleichgewichtslage!

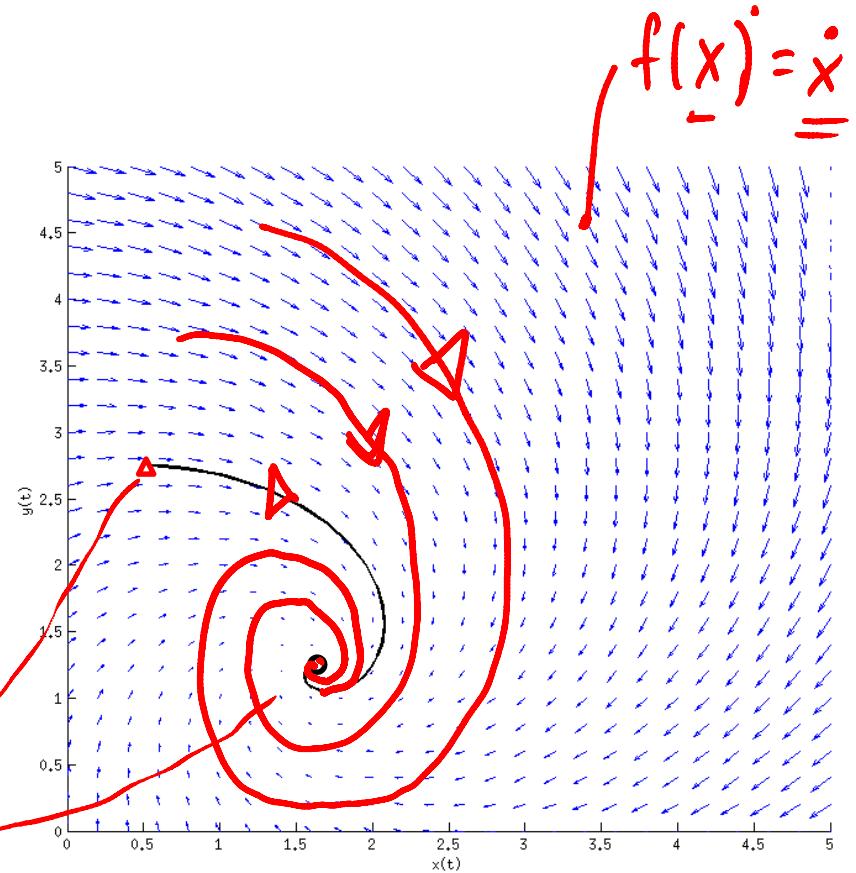


3.4 Stabilität: Beispiel Wettrüsten



- Betrachtung des 3. Modells

- Mit $A = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}$
 - Gleichgewichtslage bei $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$
 - Anfangswert ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 11/2 \end{pmatrix}$
 - Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm i$
 - Damit ist das System stabil
- Startpunkt Gleichgewichtslage
- Stabilität* *Schwingt*



3.4.1 Zeitcharakteristika

- Zeitcharakteristika T_i eines linearisierten Systems werden mit Hilfe der Eigenwerte λ_i bestimmt (für $i = 1, \dots, n$)

- Reelle Eigenwerte (Zeitkonstante) :

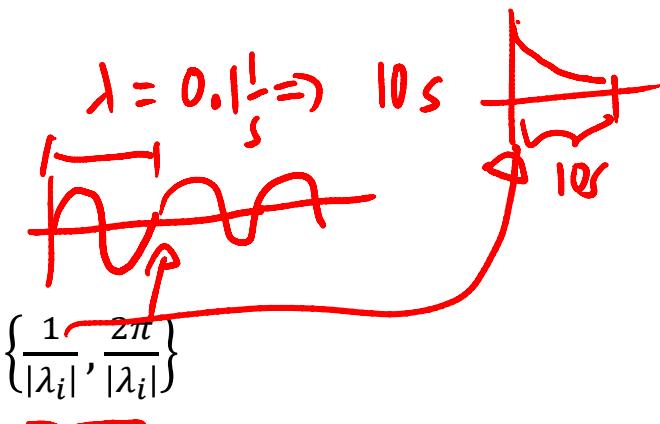
$$T_i = \frac{1}{|\lambda_i|}$$

- Rein imaginäre Eigenwerte (Periode):

$$T_i = \frac{2\pi}{|\lambda_i|}$$

- Komplex konjugierte Eigenwerte:

$$T_i = \min \left\{ \frac{1}{|\lambda_i|}, \frac{2\pi}{|\lambda_i|} \right\}$$



- Minimale Zeitcharakteristika:

$$\textcircled{C} T_{max} = \max\{T_i\}$$

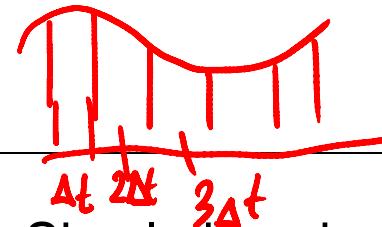
- Maximale Zeitcharakteristika:

$$\textcircled{C} T_{min} = \min\{T_i\}$$

3.4.1 Zeitcharakteristika

- Faustregel für Schätzen von sinnvoller Simulationsdauer

- Stabiles System: $t_f = 5 \cdot T_{max}$
 - Bis zum annäherndem Erreichen der Gleichgewichtslage
 - t_f steht für „final time“



- Instabiles System: $|x(t_f)| \geq \varepsilon$
 - ε ist eine selbst festgelegte Grenze um uninteressante Werte von der Beobachtung auszuschließen

- Diskretisierungsschrittweite

- $h = \Delta t \leq \alpha \cdot T_{min}$ mit $\alpha \in \left[\frac{1}{20}, \frac{1}{5} \right]$



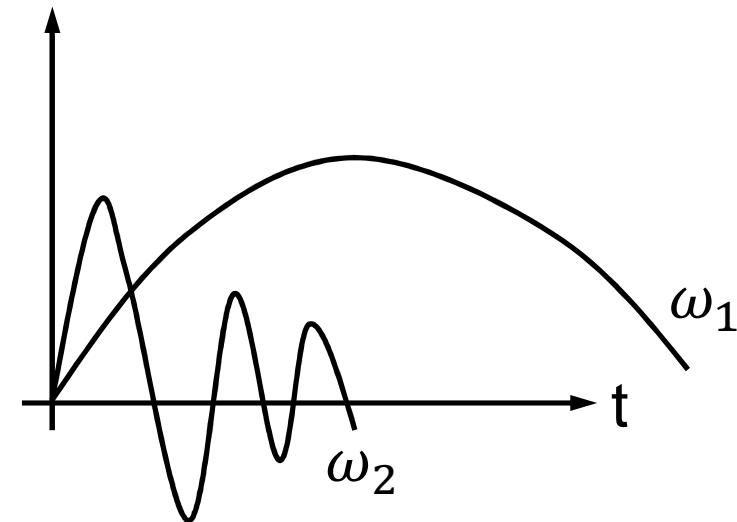
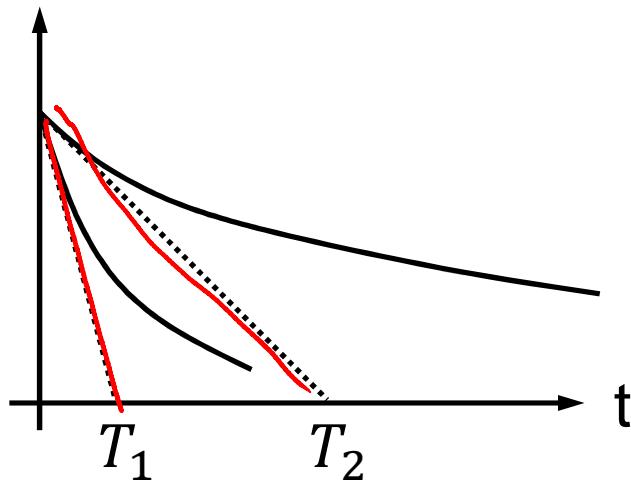
3.4.2 Steife Differentialgleichungen



- Steifheitsmaß
 - Verhältnis der minimalen und der maximalen Zeitkonstanten

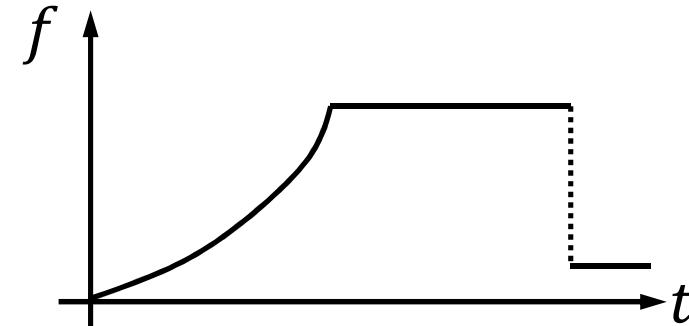
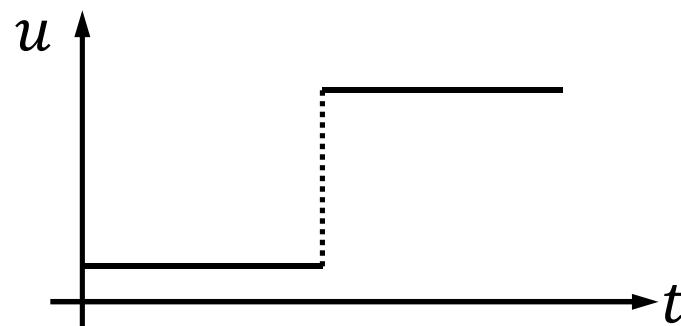
$$s = \frac{T_{max}}{T_{min}} > 10^3 \dots 10^7 \Leftrightarrow \text{DGL ist steif}$$

- Numerische Lösung benötigt Rechenzeit proportional zu s



3.4.3 Unstetige rechte Seite

- Rechte Seite f einer DGL $\dot{x} = f(x, u)$ (oder eine ihrer Ableitungen) kann unstetig sein
 - Numerische Integrationsverfahren beruhen auf mehrfach stetig differenzierbarer rechter Seite
 - Verbesserung numerischer Integrationsverfahren durch Detektion der Unstetigkeiten und abschnittsweiser Berechnung



MOODLE FRAGE

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & a \\ 0 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow y_s = \frac{d}{n}$$

(D)

Bitte jetzt auf Moodle eine Frage beantworten!

$$\dot{y} = -ny + d \Rightarrow \text{Kann jetzt auf Schreibtisch rechnen!}$$

$$\dot{x} = (\dots) + ay$$

$$\lambda \in \{-0,92, -0,82\} \Rightarrow T_i \in \left\{ \frac{1}{0,92}, \frac{1}{0,82} \right\} \Rightarrow \frac{1}{0,92} \approx 10^n \cdot \frac{1}{0,82}$$

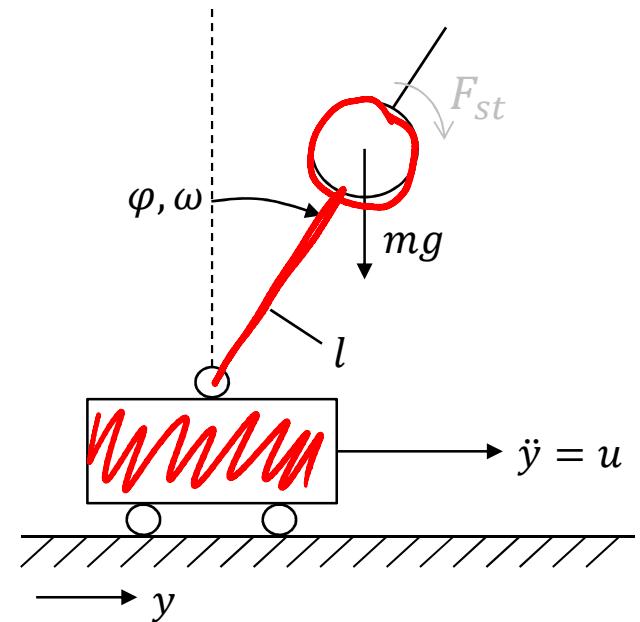
$\frac{1}{0,92}$ $\frac{1}{0,82}$

$n > 3$

3.4.4 Beispiel



- Nun folgt ein etwas größeres Beispiel, welches folgende Inhalte erneut thematisiert
 - Berechnung der Gleichgewichtslage
 - Allgemeine Linearisierung
 - Linearisierung um die Gleichgewichtslage
 - Stabilitätsuntersuchung um die Gleichgewichtslage
 - Linearisierung um die Referenztrajektorie
- Hinweis:** Störkraft F_{st} wird hierbei vernachlässigt



3.4.4 Linearisierung um einen Punkt: Beispiel



- Man betrachte wieder das DGL-System des inversen Pendels:

$\varphi = \text{Position}$ $\omega = \text{Geschwindigkeit!}$

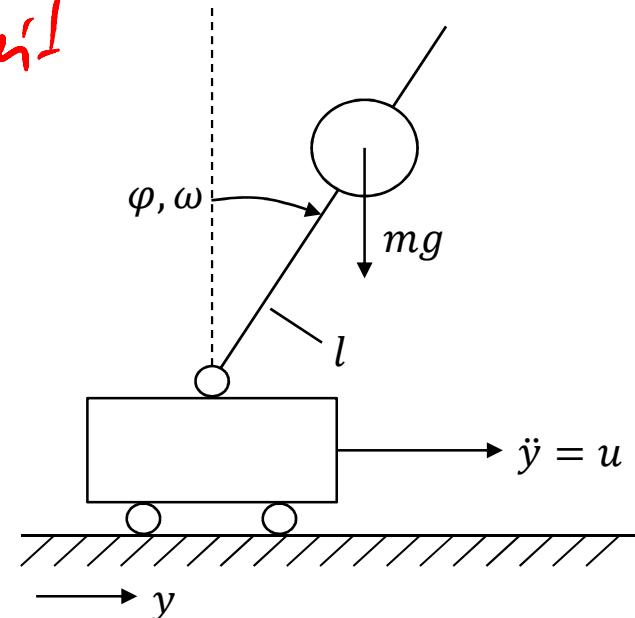
$$\dot{\varphi} = \underline{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{l} \sin(\varphi) - \left(\frac{\mu}{m} \right) \cdot \omega - \frac{1}{ml} \cos(\varphi) u$$

Schwerkraft

Reibung

Motor



- Vernachlässigung der viskosen Reibung

$$-\left(\frac{\mu}{m} \right) \cdot \underline{\omega}, \text{ d.h. } \mu = 0$$

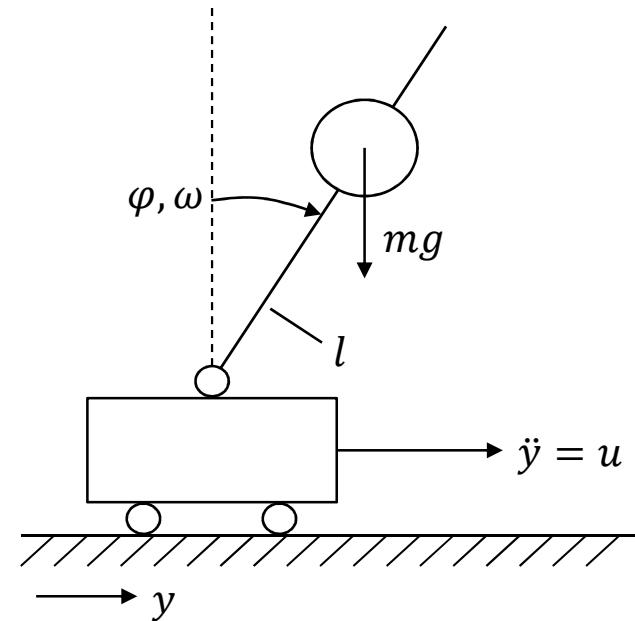
3.4.4 Linearisierung um einen Punkt: Beispiel



- Man betrachte wieder das DGL-System des inversen Pendels:

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{l} \sin(\varphi) - \frac{\mu}{m} \omega - \frac{1}{ml} \cos(\varphi) u$$



- Zuerst müsste man die allgemeine Form der Linearisierung für beliebige Punkte φ_0, ω_0, u_0 aufstellen

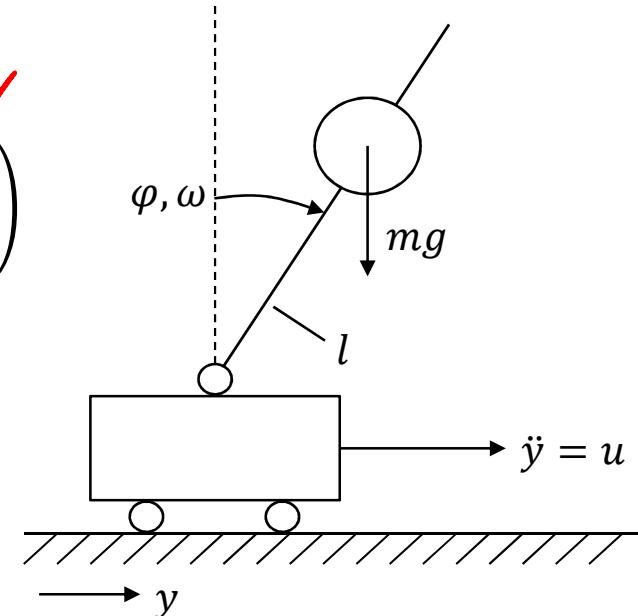
3.4.4 Linearisierung um einen Punkt: Beispiel



- Allgemeines Vorgehen:
 - Jacobi Matrix des DGL Systems bestimmen

$$A = J_{\varphi, \omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) \end{pmatrix}$$

$$B = J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \cos(\varphi_0) \end{pmatrix}$$



- Aufstellen der Linearisierung

$$\dot{\begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix}} = J_{\varphi, \omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0) \cdot \Delta u$$

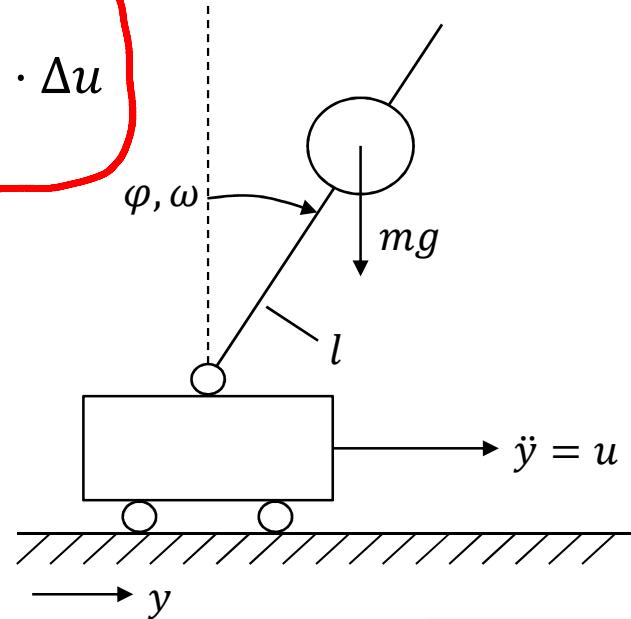
3.4.4 Linearisierung um einen Punkt: Beispiel

- Allgemeine Form der Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \end{pmatrix} = J_{\varphi,\omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0) \cdot \Delta u$$

- Gleichgewichtslösung berechnen

Frage: Man setze $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ und $u_0 = 0$



- Linearisierung um die Gleichgewichtslage

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \end{pmatrix} = J_{\varphi,\omega}(0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + J_u(0,0,0) \cdot \Delta u$$

3.4.4 Linearisierung um einen Punkt: Beispiel



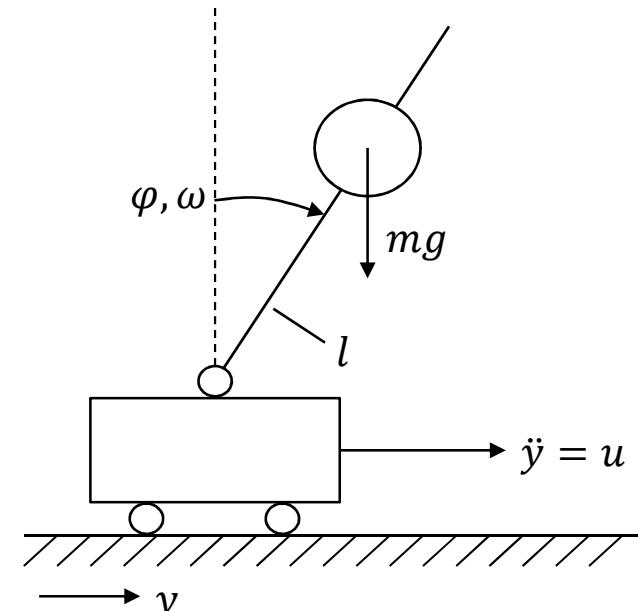
- Linearisierung um die Gleichgewichtslage

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\omega} \end{pmatrix} = J_{\varphi,\omega}(0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + J_u(0,0,0) \cdot \Delta u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m} \\ \frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \cdot \Delta u$$

A *B*

$$= \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \frac{g}{l}\Delta\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta u}{l} \end{pmatrix}$$



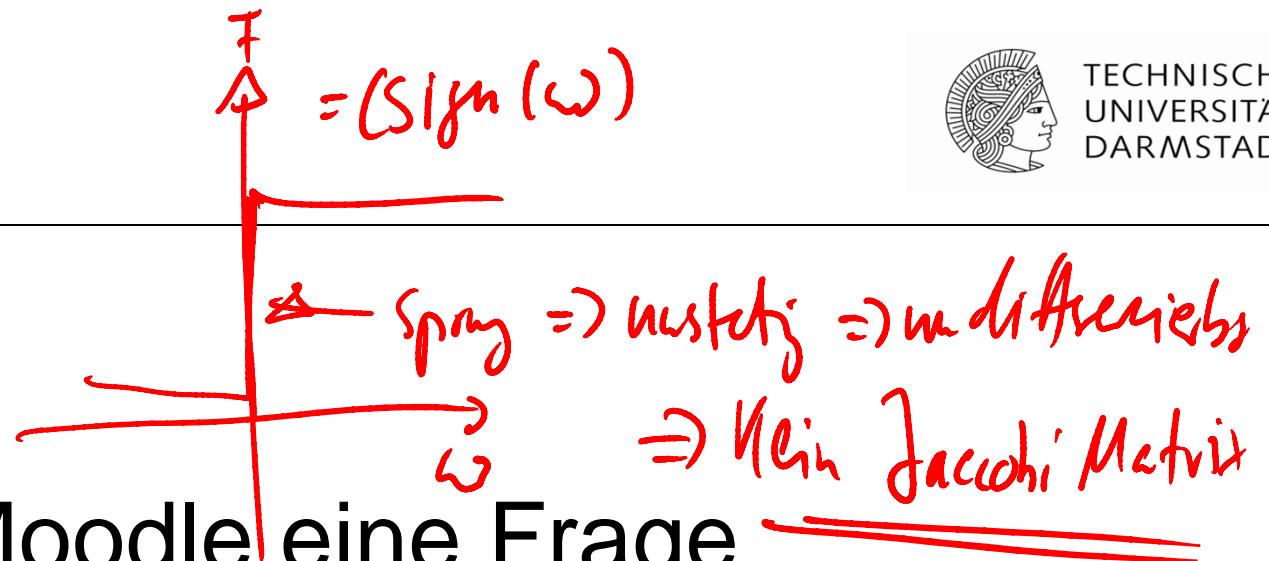


Klasse Video!

- Im folgendem betrachten wir ein ausgeregeltes inverses Pendeln (hierbei wird der Regler sogar mit Methoden des maschinellen Lernens gelernt)

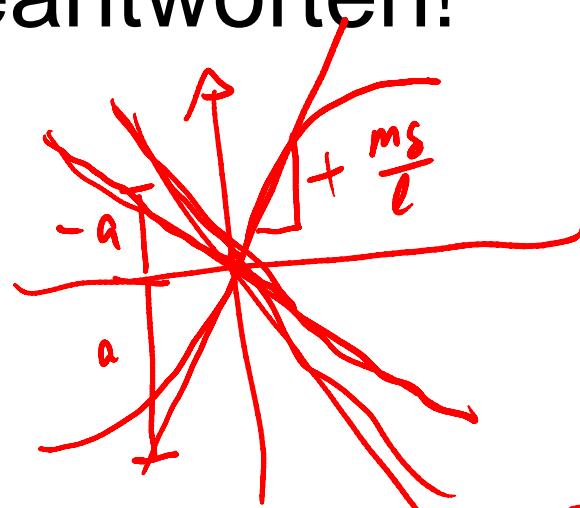


MOODLE FRAGE



Bitte jetzt auf Moodle eine Frage

beantworten!



$$K \geq -\frac{mg}{l}$$

Regelungstechnik?

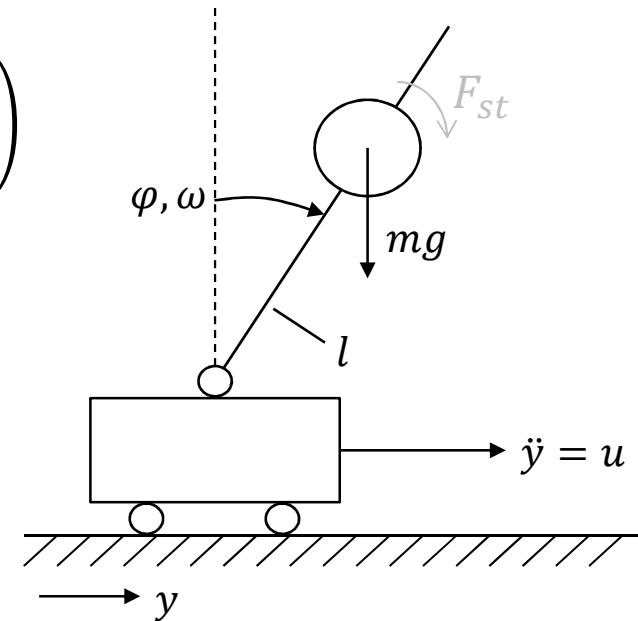
3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel



- Berechnung der Eigenwerte von

$$\Delta = J_{\varphi, \omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) & 0 & \frac{\mu}{m} \\ -\frac{1}{m} & \frac{\mu}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} \cos(\varphi_0) & 0 \end{pmatrix}$$



- Hinweis:** Zweite Spalte von $J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0)$ beschreibt Störkraft F_{st} , die nicht betrachtet wurde

3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

- Berechnung der Eigenwerte von

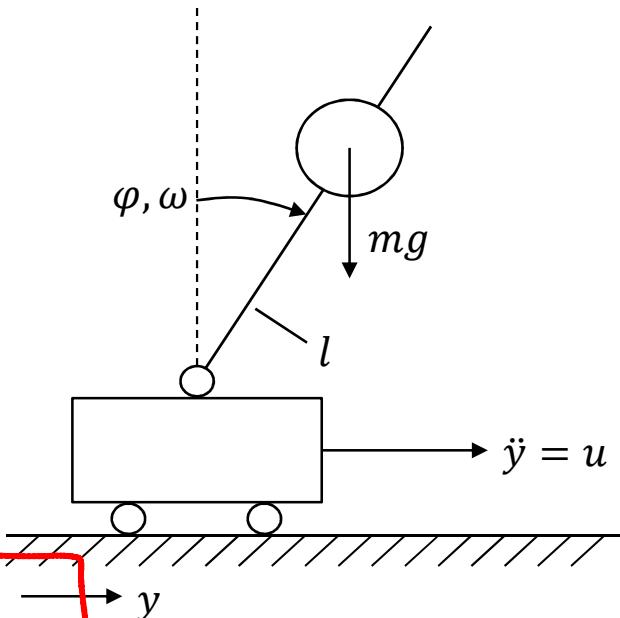
$$A = J_{\varphi, \omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}$$

$\text{det}(A - \lambda I) = 0$

$$\left| \begin{array}{cc} (-\lambda) & 1 \\ \frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) & \left(-\lambda - \frac{\mu}{m} \right) \end{array} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{-\frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) + \mu^2}$$

$\sqrt{\mu^2}$



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

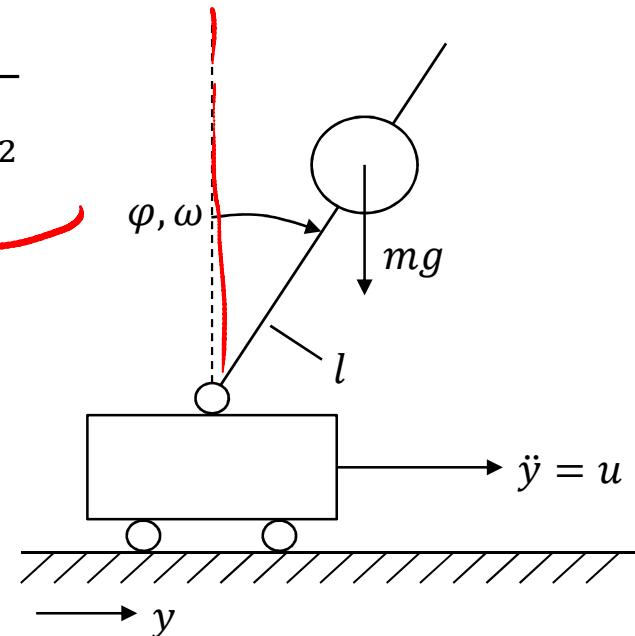


- Auswertung der Eigenwerte λ_1, λ_2

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{ + \frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) + \mu^2 }$$

$\in \{\text{Negativ, Positiv}\} \geq 0$

- Stab steht aufrecht: $\underline{\varphi_0 = 0}$, Reibung $0 \leq \mu < \left(\frac{g}{l}\right)^2$
 - Reelle Eigenwerte größer und kleiner null
 - Instabil!



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

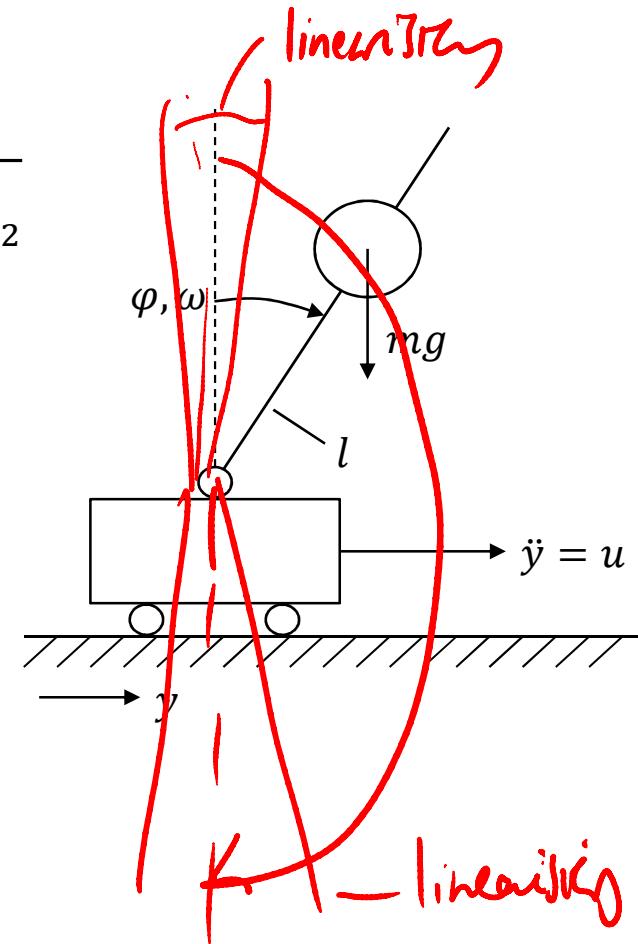


- Auswertung der Eigenwerte λ_1, λ_2

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{-\frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_0) + u_0 \cdot \sin(\varphi_0)) + \mu^2}$$

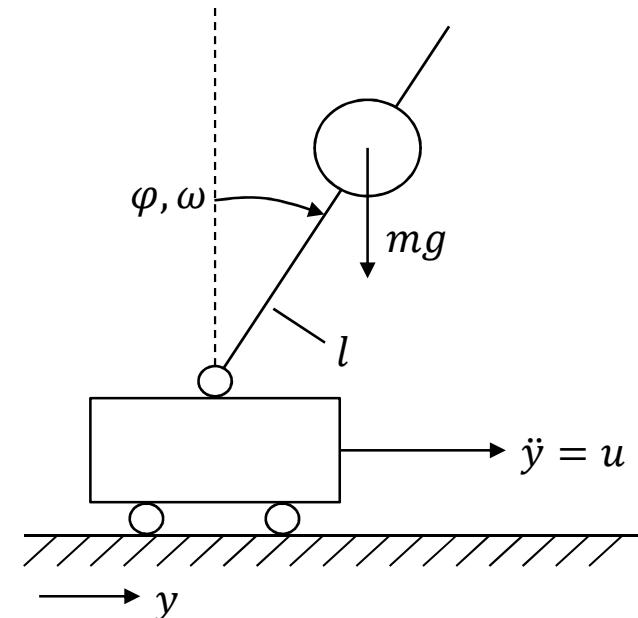
- Stab hängt nach unten: $\varphi_0 = \pi$, Reibung $\mu = 0$

- Komplex konjugierte Eigenwerte ohne $\text{Re } \lambda < 0$
- Keine Aussage möglich!



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

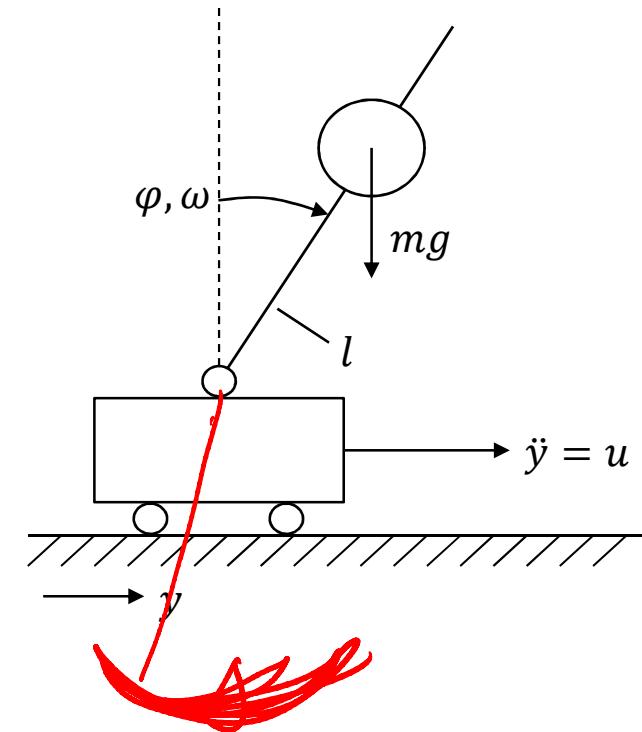
- Stab hängt nach unten: $\varphi_0 = \pi, \mu = 0$
 - Komplex konjugierte Eigenwerte
 - **Keine Aussage möglich!**
- Jedoch gilt für die Eigenwerte:
 - $\underline{Re\{\lambda_i\} = 0} \quad \forall i \in \{1,2\}$
 - $\underline{Im\{\lambda_1\} > 0}$
 - $\underline{Im\{\lambda_2\} < 0}$
 - Aussagen über Stabilität des realen Systems sind dennoch möglich!



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

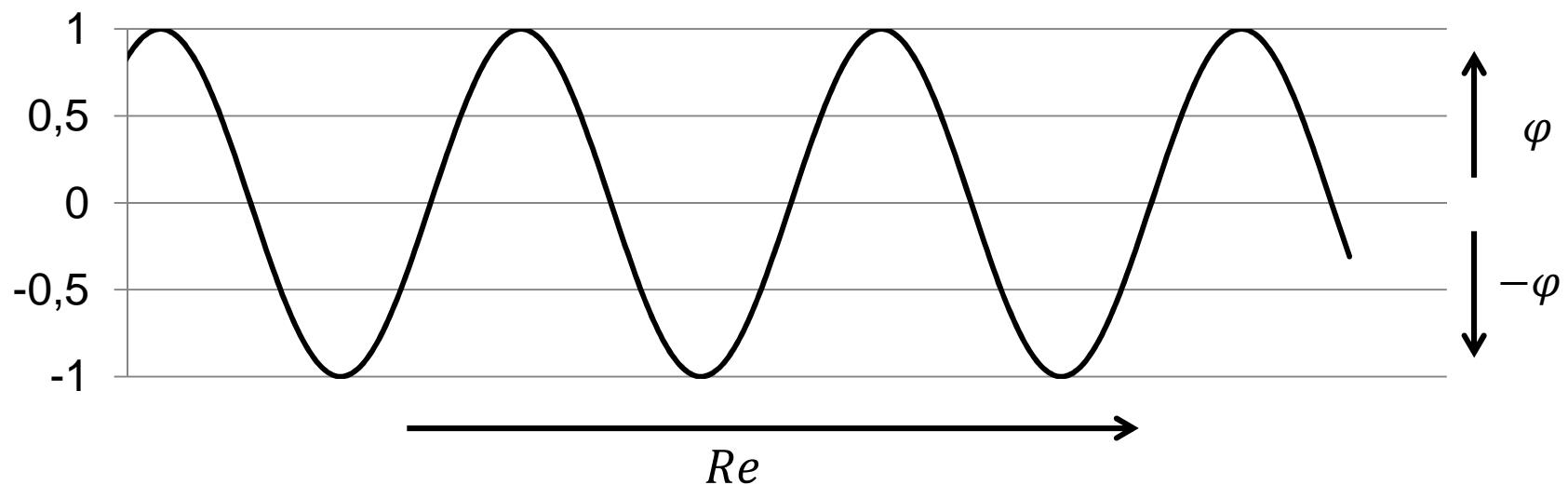


- Jedoch gilt für die Eigenwerte:
 - $Re\{\lambda_i\} = 0 \quad \forall i \in \{1,2\}$
 - $Im\{\lambda_1\} > 0$
 - $Im\{\lambda_2\} < 0$
- Konstantes Verhalten der Amplitude
 - Pendel schwingt für immer und das ohne Verluste durch Reibung $\mu = 0$
 - In der Realität wäre diese Gleichgewichtslage **stabil**, insofern keine externe Kraft hinzugeführt wird



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

- Betrachtung des inversen Pendels im Modell um die Gleichgewichtslage mit $\varphi_0 = \pi$
- Schwingt für immer weiter mit einer Auslenkung von φ im Imaginärteil



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

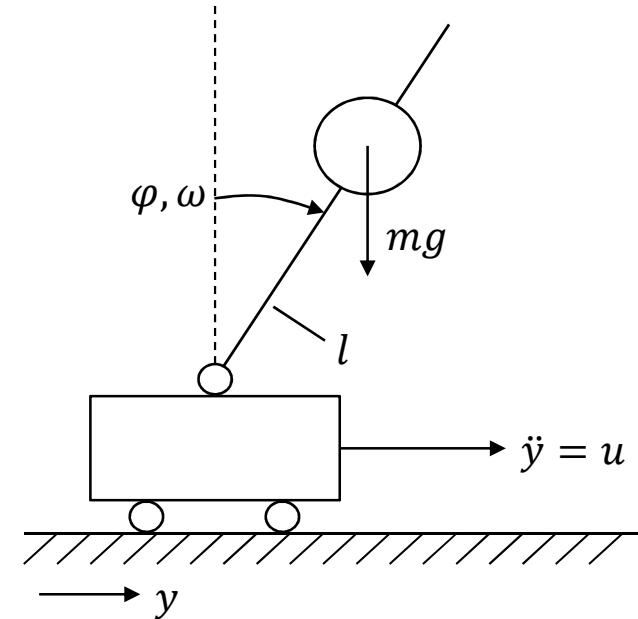


- Man betrachte wieder das DGL-System des inversen Pendels
- Allerdings gelte nun $\mu > 0$

$\mu > 0$

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{l} \sin(\varphi) - \left(\frac{\mu}{m} \right) \cdot \omega - \frac{1}{ml} \cos(\varphi) u$$



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel



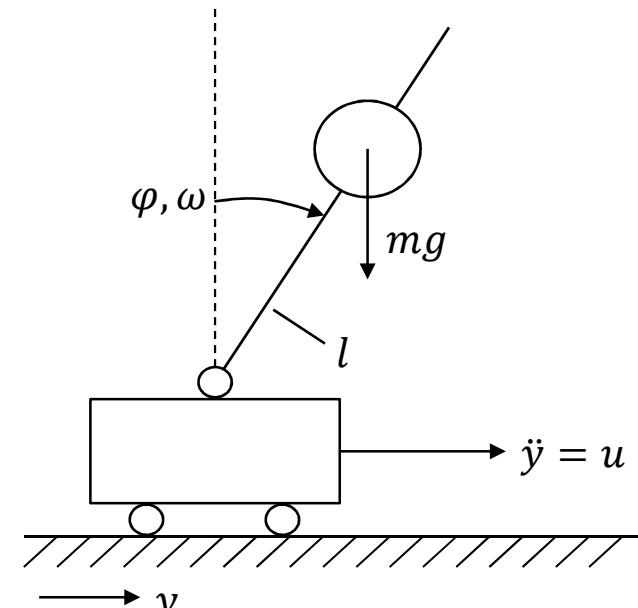
- Aufstellen der Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \end{pmatrix} = J_{\varphi,\omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0) \cdot \Delta u,$$

mit

$$J_{\varphi,\omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$J_u(\varphi_0, \omega_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \end{pmatrix}$$



3.4.5 Stabilitätsberechnung: Beispiel

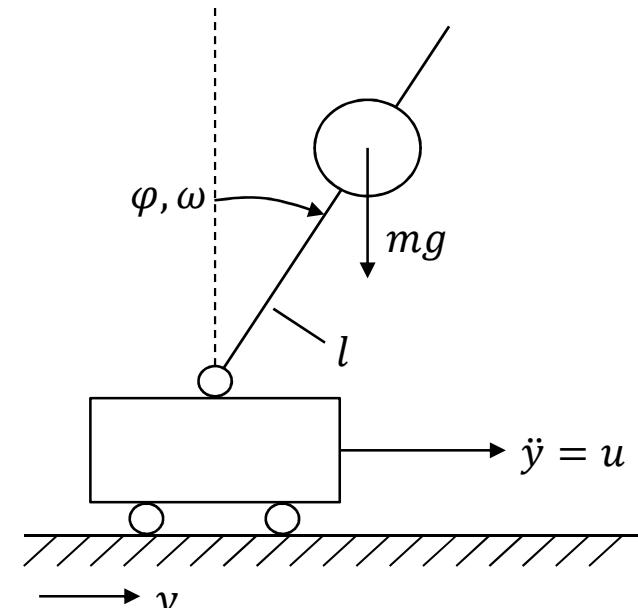


- Damit folgt für die Eigenwerte

$$\det(J_{\varphi,\omega}(\varphi_0, \omega_0, u_0) - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2m} \left(\underline{\mu} + \sqrt{\frac{1}{l}(-4gm^2 + l\mu^2)} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2m} \left(\underline{\mu} - \sqrt{\frac{1}{l}(-4gm^2 + l\mu^2)} \right)$$



- Nun ist der Gleichgewichtspunkt stabil!

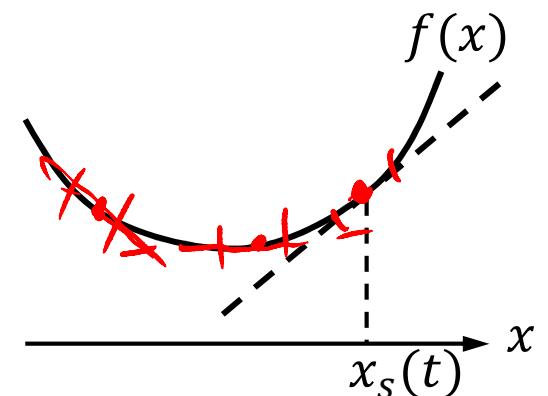
3.4.6 Linearisierung um die Referenztrajektorie



- Statt um eine konstante Ruhelage x_s, u_s kann das System auch um eine zeitveränderliche Referenztrajektorie mit zugehöriger Steuergröße linearisiert werden

- $\underline{\Delta x(t)} = \underline{x(t)} - \underline{x_s(t)}$ und $\underline{\Delta u(t)} = \underline{u(t)} - \underline{u_s(t)}$

- $\Delta x(t), \Delta u(t)$ müssen betragsmäßig „klein“ sein, da wir sonst zu ungenaue Werte der linearisierten Funktion erhalten



3.4.6 Linearisierung um die Referenztrajektorie



- $x_s(t)$ und $u_s(t)$ sind zeitveränderliche Steuergrößen, daher gilt

$$\underline{\Delta \dot{x}(t)} = \dot{x}(t) - \dot{x}_s(t) \text{ und } \underline{\Delta \ddot{u}(t)} = \ddot{u}(t) - \dot{u}_s(t)$$

- Mit $\dot{x}(t) = f(x_s(t) + \Delta x(t), u_s(t) + \Delta u(t))$ folgt dann

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) + \dot{x}_s(t) &= f(x_s(t) + \Delta x(t), u_s(t) + \Delta u(t)) \\ \Leftrightarrow \underline{\Delta \dot{x}(t)} &= f(x_s(t) + \Delta x(t), u_s(t) + \Delta u(t)) - \dot{x}_s(t) \\ \Leftrightarrow T_{f,1}(x, u) &- T_{f,0}(x, u) \end{aligned}$$

3.4.6 Linearisierung um die Referenztrajektorie



- Mit $T_{f,1}(x, u) - T_{f,0}(x, u)$ erhält man die gewohnte Form der Linearisierung, nun aber um die Referenztrajektorie

$$\Delta \dot{x}(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_s(t), u_s(t)} A}_{\text{zustand}} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_s(t), u_s(t)} B}_{\text{Motorsteuerung / Aktion}} \cdot \Delta u(t)$$

- Nun ergibt sich das lineare DGL-System von der Form

$$\Delta \dot{x}(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{Zustandsmatrix}} \cdot \underbrace{\Delta x(t)}_{\text{Sugkunstige Zustandsänderung}} + \underbrace{B(t)}_{\text{Einhoppl matrix}} \cdot \underbrace{\Delta u(t)}_{\text{Motorsteuerung}}$$

- Intuition:** Linearisierung um eine zeitveränderliche Gleichgewichtslage

3.4.6 Linearisierung um die Referenztrajektorie: Beispiel



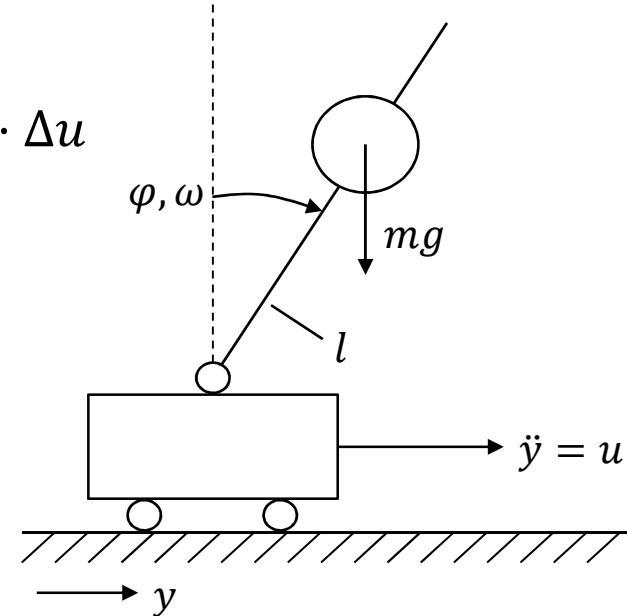
- Linearisierung um die Referenztrajektorie

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\omega} \end{pmatrix} = J_{\varphi,\omega}(\varphi_s, \omega_s, u_s) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix} + J_u(\varphi_s, \omega_s, u_s) \cdot \Delta u$$

mit $\varphi_s = \varphi_s(t)$, $\omega_s = \underline{\omega_s(t)}$ | $\text{ns}(t)$

- Aufstellen der Linearisierung

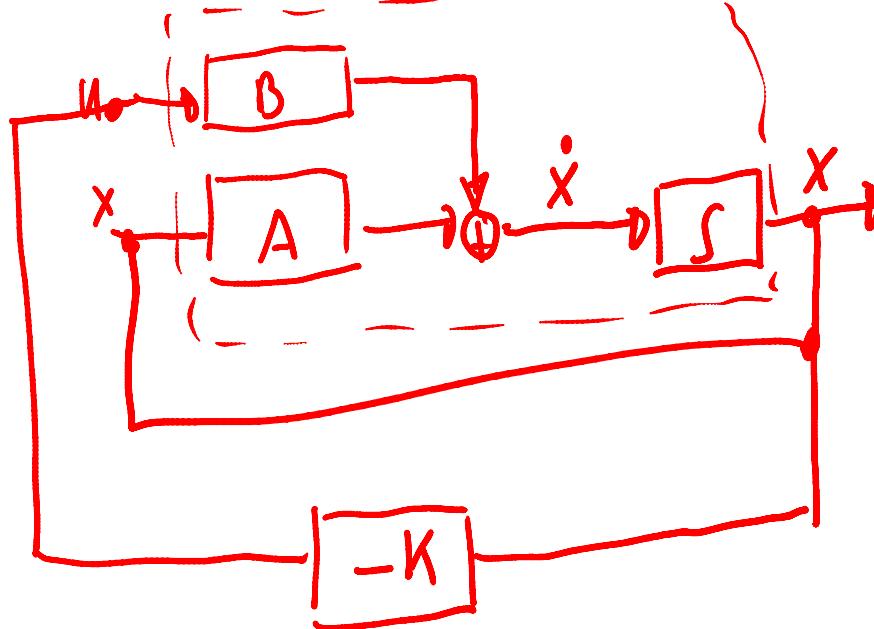
$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\varphi}(t) \\ \Delta\dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \cdot (g \cdot \cos(\varphi_s) + u_s(t) \cdot \sin(\varphi_s)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varphi(t) \\ \Delta\omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \cos(\varphi_s) \end{pmatrix} \Delta u(t)$$



3.4.6 Künstliche Reibung

M System

Regelgestützter
= "Künstliche Reibung"



$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & u &= -Kx \\ &= Ax - BKx \\ &= (A - BK)x \end{aligned}$$

$$\det((A - BK) - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(K) < 0$$

Große Ziel jeder Regeltechnik!