

數 A 滿級分講義

Your Name

March 11, 2025

Contents

前言	5
1 數與式	6
1.1 觀念與公式	6
1.1.1 數系	6
1.1.2 絕對值運算	6
1.1.3 算術不等式	7
1.1.4 根號運算	7
1.2 例題解析	8
1.2.1 例題 1：複數運算（計算題）	8
1.2.2 例題 2：絕對值不等式（應用題）	8
1.2.3 例題 3：AM-GM 應用（觀念題）	8
1.2.4 例題 4：根號化簡（計算題）	8
1.3 圖形展示	8
1.4 題庫	9
2 直線與圓	12
2.1 觀念與公式	12
2.1.1 直線方程式	12
2.1.2 圓方程式	12
2.1.3 直線與圓的關係	13
2.2 例題解析	13
2.2.1 例題 1：直線方程式（計算題）	13
2.2.2 例題 2：圓方程式（計算題）	13
2.2.3 例題 3：直線與圓關係（應用題）	14
2.2.4 例題 4：幾何技巧（觀念題）	14
2.3 圖形展示	14
2.4 題庫	14
3 多項式	17
3.1 觀念與公式	17
3.1.1 多項式定義與運算	17
3.1.2 餘數定理與因式分解	17
3.1.3 根與係數關係	18
3.1.4 微分與局部特徵	18
3.1.5 泰勒展開與廣域特徵	18
3.1.6 牛頓插值法	18
3.2 例題解析	19

3.2.1	例題 1：餘數定理	19
3.2.2	例題 2：根與係數	19
3.2.3	例題 3：泰勒展開	19
3.2.4	例題 4：牛頓插值	19
3.3	圖形展示	19
3.4	題庫	20
4	數列與級數	23
4.1	觀念與公式	23
4.1.1	數列的基本概念	23
4.1.2	等差數列	23
4.1.3	等比數列	23
4.1.4	級數	24
4.1.5	數學歸納法	24
4.2	例題解析	24
4.2.1	例題 1：等差數列（計算題）	24
4.2.2	例題 2：等比數列（應用題）	24
4.2.3	例題 3：遞推數列（觀念題）	24
4.2.4	例題 4：數學歸納法	25
4.3	圖形展示	25
4.4	題庫	25
5	指數與對數	28
5.1	觀念與公式	28
5.1.1	指數的基本概念	28
5.1.2	指數函數	28
5.1.3	對數的基本概念	28
5.1.4	對數函數	29
5.1.5	指數與對數的互逆	29
5.2	例題解析	29
5.2.1	例題 1：指數運算（計算題）	29
5.2.2	例題 2：對數運算（計算題）	29
5.2.3	例題 3：解方程（應用題）	29
5.2.4	例題 4：應用問題	30
5.3	圖形展示	30
5.4	題庫	30
6	排列組合	33
6.1	觀念與公式	33
6.1.1	基本概念	33
6.1.2	排列的應用	33
6.1.3	組合的應用	33
6.1.4	卡特蘭數	34
6.2	例題解析	34
6.2.1	例題 1：條件排列	34
6.2.2	例題 2：分組應用	34
6.2.3	例題 3：卡特蘭數應用	34
6.2.4	例題 4：重複排列應用	34
6.2.5	例題 5：二項式應用	34

6.3	題庫	35
7	數據分析	38
7.1	觀念與公式	38
7.1.1	數據的表示與整理	38
7.1.2	中心量數	38
7.1.3	離散程度	38
7.1.4	數據分佈	39
7.1.5	雙變量數據分析	39
7.2	例題解析	39
7.2.1	例題 1：數據整理	39
7.2.2	例題 2：中心與離散	39
7.2.3	例題 3：相關係數	40
7.2.4	例題 4：迴歸直線	40
7.2.5	例題 5：應用題	40
7.3	圖形展示	40
7.4	題庫	40
8	機率	43
8.1	觀念與公式	43
8.1.1	基本概念	43
8.1.2	機率的性質與運算	43
8.1.3	條件機率	43
8.1.4	排列組合與機率	44
8.1.5	期望值	44
8.2	例題解析	44
8.2.1	例題 1：基本機率	44
8.2.2	例題 2：互斥事件	44
8.2.3	例題 3：條件機率	44
8.2.4	例題 4：排列組合應用	44
8.2.5	例題 5：期望值	44
8.3	圖形展示	45
8.4	題庫	45
9	三角	48
9.1	觀念與公式	48
9.1.1	基本三角比	48
9.1.2	正弦定理	48
9.1.3	餘弦定理	48
9.1.4	面積公式	49
9.1.5	內心與外心	49
9.2	例題解析	49
9.2.1	例題 1：基本三角比	49
9.2.2	例題 2：正弦定理	49
9.2.3	例題 3：餘弦定理	49
9.2.4	例題 4：面積與外心	49
9.2.5	例題 5：證明題	49
9.3	圖形展示	50
9.4	題庫	50

10 三角函數	53
10.1 觀念與公式	53
10.1.1 定義與基本性質	53
10.1.2 三角函數圖形	53
10.1.3 三角恆等式	53
10.1.4 應用與方程	54
10.2 例題解析	54
10.2.1 例題 1：基本性質	54
10.2.2 例題 2：圖形分析	54
10.2.3 例題 3：積化和差	54
10.2.4 例題 4：和差化積	55
10.2.5 例題 5：應用題	55
10.3 圖形展示	55
10.4 題庫	55
11 平面向量	58
12 空間向量	59
13 空間中平面與直線方程式	60
14 矩陣	61
15 題庫解答	62
15.1 CH1 題庫解答	62
15.2 CH2 題庫解答	64
15.3 CH3 題庫解答	66
15.4 CH4 解答	68
15.5 CH5 題庫解答	70
15.6 排組題庫解答	73
15.7 數據分析題庫解答	75
15.8 機率題庫解答	77
15.9 三角比題庫解答	79
15.10 三角函數題庫解答	81

前言

講義目標

本講義旨在幫助考生全面掌握台灣大學入學學力測驗（學測）數學 A 的考試範圍，並以追求滿級分為目標。學測數學 A 的特點在於「觀念熟悉但題目新穎」，因此我們不僅深入講解每個單元的基礎知識，還融入大學層次的解題技巧，讓你在考場上能快速應對各種變化。無論你是自然組的考生還是自學者，這份講義都將成為你通往高分的利器。

講義特色

- 觀念深度：從 108 課綱的高中數學 A 基礎出發，延伸至大學入門技巧（如線性代數、微積分初步），讓你理解背後的原理並靈活應用。
- 題型豐富：每個單元提供約 40 道題目，涵蓋計算題、應用題與觀念題，模擬學測命題風格，並加入自創題目與網路改編題，確保你面對陌生題型時也能從容應對。
- 解題加速：介紹大學層次的快捷方法（如向量法、矩陣運算、生成函數），讓你在限定時間內更有效率地解題。
- 圖形支援：使用 Python 生成動態圖形（如函數曲線、空間向量），並搭配 LaTeX 繪製靜態圖形（如三角形、向量分解），幫助你直觀理解抽象概念。
- 實用工具：附錄提供公式總表與 Python 程式碼範例，讓你隨時查閱與實作。

使用說明

1. 循序學習：建議按照單元順序閱讀，先掌握觀念與公式，再透過例題理解應用方式。
2. 反覆練習：每個單元的題庫是核心，建議至少完成一半題目，並檢討錯誤。題目來源包括學測歷年試題、補習班模擬題與自創題，涵蓋各種難度。
3. 活用技巧：特別留意「大學技巧」部分，這些方法能在關鍵時刻節省時間或提供新思路。
4. 圖形實作：若有興趣，可運行附錄中的 Python 程式碼，自行調整參數生成圖形，加深理解。

希望這份講義能陪伴你在學測數學 A 的準備路上，穩扎穩打，拿下滿級分！

1 數與式

1.1 觀念與公式

1.1.1 數系

數系是數學的基石，從最簡單的計數開始，逐步擴展到抽象的數學對象。以下逐一介紹：

- 自然數 (\mathbb{N})：1, 2, 3, ...，用於計數，最基本的數集合。
- 整數 (\mathbb{Z})：..., -2, -1, 0, 1, 2, ...，加入負數解決減法問題，如 $3 - 5 = -2$ 。
- 有理數 (\mathbb{Q})：形如 $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$)，解決除法需求，例如 $\frac{1}{2}$ 。
- 無理數：無法寫成分數的實數，如 $\sqrt{2}$ (證明：假設 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ，則 $2q^2 = p^2$ ， p 必為偶數，矛盾)，還有 π, e 。
- 實數 (\mathbb{R})：包含有理數與無理數，形成連續的數線，滿足完備性 (每個有上界的非空集合有最小上界)。
- 複數 (\mathbb{C})：形如 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$)，解決 $x^2 + 1 = 0$ 等方程。

應用：實數用於測量 (如長度)，複數用於電路分析與振動模型。

大學技巧：複數的極形式 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$ 。例如， $3 + 4i$ 的模為 5，幅角約 53.13° ，乘除時模相乘、幅角相加減，比代數形式更快。

1.1.2 絕對值運算

絕對值表示數到原點的距離，定義為：

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0, \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

例如， $|3| = 3$ ， $|-3| = 3$ 。

性質：

1. $|x| \geq 0$ ：距離非負。
2. $|-x| = |x|$ ：對稱性。
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ：乘法分配。
4. 三角不等式： $|x + y| \leq |x| + |y|$ ，證明：考慮平方 $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ 。

應用：測量距離（如 $|x - a|$ 是 x 到 a 的距離），解決含絕對值的方程。

大學技巧：解 $|x - a| < b$ 時，直接轉為 $a - b < x < a + b$ 。例如， $|x - 2| < 3$ 即 $-1 < x < 5$ ，幾何上是以 2 為中心，半徑 3 的區間。

1.1.3 算術不等式

不等式是優化與比較的工具，常見如下：

- **AM-GM 不等式**：對於非負數 a, b ， $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。證明：

- 代數法： $(a - b)^2 \geq 0$ ，展開得 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ，整理為 $(a + b)^2 \geq 4ab$ ，開根號即得。等號當 $a = b$ 。
- 拉格朗日乘子法：求 ab 最大值，受限於 $a + b = k$ 。定義函數 $f(a, b) = ab + \lambda(a + b - k)$ ，求偏導：

$$\frac{\partial f}{\partial a} = b + \lambda = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = a + \lambda = 0, \quad a + b = k$$

得 $a = b$ ，代入 $a + b = k$ ， $a = b = \frac{k}{2}$ ， $ab = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ ，驗證為最大值。

- **柯西-施瓦茨不等式**： $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ ，幾何上是向量內積與模的關係。

應用：求極值，如 $a + b = 10$ 時， ab 最大值為 25。

大學技巧：用 HM（調和平均）與 GM、AM 串聯： $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ，解決複雜優化問題。拉格朗日法適用於多變量受限極值。

1.1.4 根號運算

根號是平方根的符號， \sqrt{x} 表示滿足 $y^2 = x$ 且 $y \geq 0$ 的數。

基本運算：

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$)，如 $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ 。
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$)，如 $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ 。
- 化簡：提取完全平方數，如 $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ 。

複數根號：對於 $a + bi$ ，求 $\sqrt{a + bi}$ ，設結果為 $x + yi$ ：

$$(x + yi)^2 = a + bi \implies x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

比較實虛部：

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b, \quad |x + yi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

例如， $\sqrt{3 + 4i}$ ，模為 $\sqrt{25} = 5$ ，解得 $x = 2, y = 1$ （正根）。

應用：化簡表達式，解決二次方程。

大學技巧：複數根號用極形式更快， $\sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ 。

1.2 例題解析

1.2.1 例題 1：複數運算（計算題）

計算 $(3+4i)(2-i)$ 。

解：展開：

$$(3+4i)(2-i) = 6 - 3i + 8i - 4i^2 = 6 + 5i + 4 = 10 + 5i$$

大學技巧：極形式下， $3+4i$ 模為 5， $2-i$ 模為 $\sqrt{5}$ ，幅角相加後轉回，但此題代數法更直接。

1.2.2 例題 2：絕對值不等式（應用題）

解 $|2x-3| < 5$ 。

解：去絕對值：

$$-5 < 2x-3 < 5 \implies -2 < 2x < 8 \implies -1 < x < 4$$

解為 $x \in (-1, 4)$ 。

大學技巧：幾何法， $2x-3$ 到 0 的距離小於 5， x 到 $\frac{3}{2}$ 的距離小於 $\frac{5}{2}$ 。

1.2.3 例題 3：AM-GM 應用（觀念題）

若 $a+b=10$ ，求 ab 最大值。

解：由 AM-GM：

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \implies 5 \geq \sqrt{ab} \implies ab \leq 25$$

當 $a=b=5$ 時， $ab=25$ ，故最大值為 25。

大學技巧：拉格朗日法驗證， $f(a) = a(10-a)$ ，導數為 0 時 $a=5$ 。

1.2.4 例題 4：根號化簡（計算題）

化簡 $\sqrt{48} + \sqrt{75}$ 。

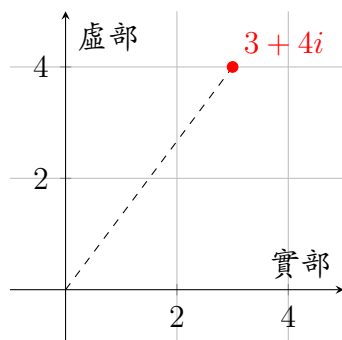
解：

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}, \quad \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} + \sqrt{75} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

大學技巧：檢查是否有進一步因式分解，此題已最簡。

1.3 圖形展示



複數 $3+4i$ 在複數平面：

1.4 題庫

1. 計算 $(2 + 3i) + (4 - 5i)$ 。
2. 求 $|5 - 2i|$ 。
3. 解 $|x - 2| = 3$ 。
4. 計算 $\frac{1+i}{1-i}$ 。
5. 求 $(1 + i)^3$ 。
6. 解 $|2x + 1| = 5$ 。
7. 計算 $|-3 + 4i|^2$ 。
8. 化簡 $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ 。
9. 解 $|x + 3| = |x - 1|$ 。
10. 計算 $\sqrt{5 + 12i}$ 的模。
11. 若 $|x - 5| < 2$ ，求 x 範圍。
12. 若 $a + b = 12$ ，求 ab 最大值。
13. 一點 x 到起點距離為 $|x|$ ，到終點 10 的距離為何？
14. 若 $a, b > 0$ ， $a + b = 8$ ，求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 最小值。
15. 價格 x 滿足 $|x - 100| \leq 10$ ，求範圍。
16. 若 $x^2 + y^2 = 2$ ，求 $|x| + |y|$ 最大值。
17. 圓心 $(3, 0)$ ，半徑 2，點 $(x, 0)$ 在圓內，求 x 範圍。
18. 若 $a + b + c = 15$ ，求 abc 最大值。
19. 若 $|x - 3| < |x + 2|$ ，求 x 範圍。
20. 若 $a^2 + b^2 = 4$ ，求 $a + b$ 最大值。
21. 證明 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。
22. 若 $|x| = 0$ ， x 為何？
23. AM-GM 等號條件是什麼？
24. 複數 z 與 \bar{z} 的模相等嗎？
25. 解釋 $|x - a| < b$ 的幾何意義。
26. 證明 $|x - y| \geq ||x| - |y||$ 。
27. 若 $a, b > 0$ ，比較 $\frac{a+b}{2}$ 與 \sqrt{ab} 。
28. z 與 $-z$ 的模是否相等？

29. 若 $|x| = |y|$, $x = y$ 嗎?
30. 證明 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b \geq 0$)。
31. 解 $|x-1| + |x+1| = 4$ 。
32. 若 $|z-1| = 2$, 描述 z 軌跡。
33. 證明 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 。
34. 解 $|x-2| + |x-3| = 1$ 。
35. 求 $\max\{|x| + |y| \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 。
36. 若 $|z| = 1$, 求 $z + \frac{1}{z}$ 實部。
37. 解 $|x-1| < |x+2|$ 。
38. 若 $a+b=10$, 求 a^2+b^2 最小值。
39. 化簡 $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$ 。
40. 若 $|z-i| = |z+i|$, 求 z 性質。
41. 解 $|x-1| + |x-2| + |x-3| = 5$ 。
42. 若 $a+b=6$, 求 $(a-3)^2 + (b-3)^2$ 最小值。
43. 證明 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $a, b > 0$ 。
44. 求所有 z 滿足 $|z-1| = |z-i|$ 。
45. 若 $x+y+z=3$, 求 $x^2+y^2+z^2$ 最小值。
46. 解 $||x-1|-2| = 3$ 。
47. 若 $|z-2| = 1$ 且 $|z-i| = 2$, 求 z 。
48. 證明 $a^2+b^2 \geq 4ab$, 並找出等號條件。
49. 解 $|x-1| + |x+1| = |x-2| + |x+2|$ 。
50. 若 $a, b, c > 0$, $a+b+c=3$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 最小值。
51. 求滿足 $|x-1| + |x-2| = 1$ 的 x 個數。
52. 若 $x+y=xy$, 求 x^2+y^2 最小值。
53. 證明 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 。
54. 解 $|x| + |x-2| + |x-4| = 6$ 。
55. 若 $|z-1| + |z+1| = 4$, 求 z 軌跡。
56. 求 $\max\{x+y \mid x^2+y^2=1\}$ 。
57. 若 $a+b+c=9$, 求 $a^2+b^2+c^2$ 最小值。

58. 解 $|x - 1| = 2|x + 1|$ 。

59. 若 $|z| = 2$ ，求 $|z - 1| + |z + 1|$ 最大值。

60. 計算 $\sqrt{8 + 6i}$ 。

2 直線與圓

2.1 觀念與公式

2.1.1 直線方程式

直線是平面上最簡單的幾何圖形，常用以下形式表示：

- 斜截式： $y = mx + b$ ，其中 m 為斜率， b 為 y 軸截距。
- 一般式： $ax + by + c = 0$ ，適用於所有直線（包括垂直線）。
- 兩點式：給定兩點 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，方程式為：

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- 參數式： $x = x_0 + at$ ， $y = y_0 + bt$ ，其中 (a, b) 為方向向量。

性質：

- 斜率 $m = \tan \theta$ ， θ 為與 x 軸夾角。
- 兩直線平行若 $m_1 = m_2$ ，垂直若 $m_1 \cdot m_2 = -1$ 。
- 點到直線距離：點 (x_0, y_0) 到 $ax + by + c = 0$ 的距離為：

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

應用：描述軌跡、計算距離。

大學技巧：用向量法求距離，設直線法向量為 (a, b) ，點到直線的投影更快。

2.1.2 圓方程式

圓是以中心點為基準，所有點到中心的距離相等的圖形：

- 標準式： $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ，中心 (h, k) ，半徑 r 。
- 一般式： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，轉換為標準式：

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

中心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ，半徑 $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$ （若 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ ）。

性質：

- 圓周上的點滿足方程式。
- 切線斜率：圓上點 (x_0, y_0) 的切線斜率為 $\frac{h-x_0}{y_0-k}$ 。

應用：軌跡問題、幾何優化。

大學技巧：用參數式 $x = h + r \cos \theta$, $y = k + r \sin \theta$ 快速生成圓上點。

2.1.3 直線與圓的關係

直線 $ax + by + c = 0$ 與圓 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 的位置關係：

- 距離判別：中心 (h, k) 到直線距離 $d = \frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ：

$$\begin{cases} d > r & \text{相離 (無交點)} \\ d = r & \text{相切 (1 交點)} \\ d < r & \text{相交 (2 交點)} \end{cases}$$

- 交點計算：將直線代入圓方程式，解二次方程：

$$\Delta = r^2(a^2 + b^2) - (ah + bk + c)^2$$

$\Delta > 0$ (2 交點), $\Delta = 0$ (1 交點), $\Delta < 0$ (無交點)。

應用：判斷位置、求切線。

大學技巧：用幾何性質（如垂徑定理）或向量內積快速判斷關係。

2.2 例題解析

2.2.1 例題 1：直線方程式（計算題）

求過點 $(2, 3)$ 且與直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 平行的直線方程式。

解：原直線斜率 $m = \frac{3}{4}$ ，平行直線斜率相同。用點斜式：

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2) \implies 4y - 12 = 3x - 6 \implies 3x - 4y + 6 = 0$$

大學技巧：法向量 $(3, -4)$ ，新直線為 $3x - 4y + c = 0$ ，代入 $(2, 3)$ 得 $c = 6$ 。

2.2.2 例題 2：圓方程式（計算題）

將 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 化為標準式，求圓心與半徑。

解：配方：

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= 12 + 4 + 9 \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

圓心 $(2, -3)$ ，半徑 5。

大學技巧：直接用公式，中心 $(2, -3)$ ， $r = \sqrt{4 + 9 + 12} = 5$ 。

2.2.3 例題 3：直線與圓關係（應用題）

判斷直線 $y = x - 1$ 與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的關係。

解：代入 $y = x - 1$ ：

$$x^2 + (x - 1)^2 = 4 \implies x^2 + x^2 - 2x + 1 = 4 \implies 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

判別式：

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 4 + 24 = 28 > 0$$

有 2 交點，相交。

大學技巧：中心 $(0, 0)$ 到直線距離 $d = \frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$ ，相交。

2.2.4 例題 4：幾何技巧（觀念題）

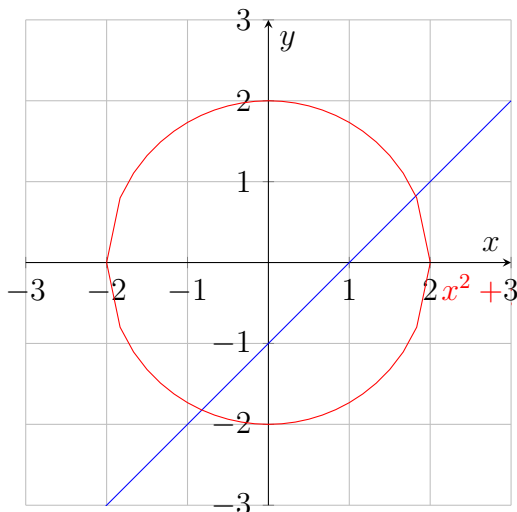
求點 $(3, 4)$ 到直線 $2x + y - 5 = 0$ 的距離。

解：公式：

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6 + 4 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

大學技巧：設垂足 (x, y) ，直線斜率 $-\frac{2}{1}$ ，垂線斜率 $\frac{1}{2}$ ，聯立解得交點 $(2, 1)$ ，距離 $\sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{5}$ 。

2.3 圖形展示



直線 $y = x - 1$ 與圓 $x^2 + y^2 = 4$ ：

2.4 題庫

1. 求過 $(1, -2)$ 且斜率為 3 的直線方程式。
2. 將 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 化為標準式。
3. 求直線 $2x - 3y + 6 = 0$ 的斜率與截距。
4. 求過 $(0, 0)$ 與 $(3, 4)$ 的直線方程式。

5. 求圓 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的中心與半徑。
6. 求點 $(2, 1)$ 到直線 $x + y - 3 = 0$ 的距離。
7. 判斷直線 $y = 2x$ 與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的關係。
8. 求過 $(1, 1)$ 且與 $x - 2y + 3 = 0$ 垂直的直線方程式。
9. 求直線 $x = 2$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 的交點。
10. 求點 $(0, 5)$ 到直線 $3x - 4y + 10 = 0$ 的距離。
11. 一點沿直線 $y = x + 1$ 移動，求其到 $(2, 0)$ 的最短距離。
12. 求圓心在 $(0, 0)$ ，過點 $(3, 4)$ 的圓方程式。
13. 若直線與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相切，求直線斜率（過 $(2, 3)$ ）。
14. 求點 $(1, 1)$ 到直線 $y = -x + 2$ 的垂足坐標。
15. 一圓過 $(0, 0)$ 與 $(2, 2)$ ，中心在 x 軸上，求方程式。
16. 求直線 $y = x$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的交點。
17. 若直線 $kx + y - 2 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = 2$ 相交，求 k 範圍。
18. 求過 $(3, 0)$ 且與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 相切的直線方程式。
19. 一點到直線 $2x - y + 1 = 0$ 的距離為 $\sqrt{5}$ ，求坐標。
20. 求圓心 $(1, 1)$ ，半徑 2 的圓上斜率為 1 的點。
21. 證明兩直線垂直時，斜率乘積為 -1 。
22. 若圓一般式 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ，圖形為何？
23. 直線與圓相離時，判別式 Δ 如何？
24. 說明點到直線距離公式的幾何意義。
25. 若直線過圓心，交點數為何？
26. 證明圓的切線垂直於半徑。
27. 兩直線平行時，法向量有何關係？
28. 圓心到直線距離等於半徑時，關係為何？
29. 說明如何用參數式表示直線。
30. 證明直線 $ax + by + c = 0$ 的法向量為 (a, b) 。
31. 求直線 $y = x - 2$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 的交點。
32. 若直線與圓 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ 相切，求直線方程式（過 $(0, 0)$ ）。
33. 求點 $(2, 3)$ 到直線 $x - y + 1 = 0$ 的垂線方程式。

34. 求圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上距離直線 $y = x$ 最遠的點。
35. 若直線 $3x + 4y + k = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相交，求 k 範圍。
36. 求過 $(1, 0)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相切的直線。
37. 求直線 $y = 2x - 1$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的弦長。
38. 若圓心 $(0, 0)$ ，過 $(1, 1)$ 與 $(2, 2)$ ，求方程式。
39. 求直線 $x + y = 1$ 與圓 $x^2 + y^2 - x - y = 0$ 的交點。
40. 若直線與圓相切，證明切點到圓心距離等於半徑。
41. 求過 $(0, 0)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切的直線。
42. 若直線 $y = mx + 1$ 與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 相交，求 m 範圍。
43. 求點 $(3, 4)$ 到直線 $2x + 3y - 6 = 0$ 的垂足與距離。
44. 求圓 $x^2 + y^2 = 2$ 與直線 $y = x - 1$ 的交點弦長。
45. 若直線 $ax + by + 1 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，求 a, b 關係。
46. 求過 $(2, 2)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 相交的直線範圍。
47. 求直線 $y = x$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 的交點。
48. 若圓過 $(0, 0)$ ，中心 (a, b) ，半徑 $\sqrt{2}$ ，求方程式範圍。
49. 求點 $(1, 2)$ 到直線 $3x - y + 1 = 0$ 的垂線與交點。
50. 若直線與圓 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相離，求過 $(0, 1)$ 的直線範圍。
51. 求圓 $x^2 + y^2 = 5$ 上到直線 $x + y = 1$ 距離最大的點。
52. 若直線 $y = kx$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 相切，求 k 。
53. 求過 $(0, 0)$ 與 $(1, 1)$ 且與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相交的直線。
54. 若直線 $2x + y + k = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = 2$ 相切，求 k 。
55. 求圓 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 與直線 $x - y = 0$ 的弦長。
56. 若直線過 $(3, 0)$ 與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 相交，求斜率範圍。
57. 求點 $(0, 0)$ 到直線 $x - 2y + 4 = 0$ 的垂足與距離。
58. 若圓心 $(1, 1)$ ，過 $(0, 0)$ 與 $(2, 2)$ ，求方程式。
59. 求直線 $y = 2x - 3$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的交點。
60. 若直線與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相交，求過 $(2, 0)$ 的直線範圍。

3 多項式

3.1 觀念與公式

3.1.1 多項式定義與運算

多項式是變數與係數的代數式，形式為：

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

n 為次數。

運算：

- 加減：同次項合併。
- 乘法：分配律，如 $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ 。
- 除法： $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$ ， $R(x)$ 次數低於 $D(x)$ 。
- 綜合除法：快速除以 $(x-a)$ ，如 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 除以 $(x-1)$ ：

$$[1, -3, 0, 2] \xrightarrow{1} [1, -2, -2, 0], \quad \text{商 } x^2 - 2x - 2, \text{ 餘數 } 0$$

應用：簡化、找根。

大學技巧：綜合除法比長除法高效。

3.1.2 餘數定理與因式分解

餘數定理： $P(x)$ 除以 $(x-a)$ ，餘數為 $P(a)$ 。若 $P(a) = 0$ ，則 $(x-a)$ 為因式（因式定理）。

因式分解：

- 提公因式： $2x^2 + 4x = 2x(x+2)$ 。
- 公式： $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ 。
- 試根法：用 $P(a) = 0$ 找根，再分解。

餘數關係延伸： $P(x)$ 除以二次式 $ax^2 + bx + c$ ，餘數為 $rx + s$ ，可用待定係數法求解。

應用：驗證根、分解多項式。

大學技巧：用微分確認根重數，若 $P'(a) = 0$ ， a 為重根。

3.1.3 根與係數關係

對於 $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ ，根 r_1, r_2, \dots, r_n 滿足 (Vieta's 公式)：

$$\sum r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \prod r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

如 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ，根和 6，乘積 6。

應用：求未知係數、驗證根。

大學技巧：結合微分分析根的分布。

3.1.4 微分與局部特徵

導數：

- $P'(x)$ ：斜率， $P'(x) = 0$ 為極值點。
- $P''(x)$ ：凹凸性， $P''(x) > 0$ 為凹向上。
- 重根： $P(a) = P'(a) = 0$ ， $P''(a) \neq 0$ 為二重根。

局部特徵：單根改變符號，重根不變。

應用：極值、單調性。

大學技巧： $P^{(k)}(a)$ 判斷 k 重根。

3.1.5 泰勒展開與廣域特徵

泰勒展開： $P(x)$ 在 $x = a$ ：

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

如 $x^3 - x$ 在 $x = 0$ ， $P(x) = -x + x^3$ 。

廣域特徵：

- n 次多項式有 n 個根 (含重根)。
- $x \rightarrow \pm\infty$ ， $P(x)$ 由 $a_n x^n$ 決定。

應用：近似、趨勢分析。

大學技巧：泰勒展開快速估計局部值。

3.1.6 牛頓插值法

用點 (x_i, y_i) 插值：

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$

差商： $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ 。

應用：數據擬合。

大學技巧：比拉格朗日插值更高效。

3.2 例題解析

3.2.1 例題 1：餘數定理

求 $x^3 - 2x^2 + x - 1$ 除以 $(x - 2)$ 的餘數。

解： $P(2) = 8 - 8 + 2 - 1 = 1$ 。綜合除法驗證：

$$[1, -2, 1, -1] \xrightarrow{2} [1, 0, 1, 1], \quad \text{餘數} 1$$

大學技巧：餘數定理直接得出。

3.2.2 例題 2：根與係數

若 $x^3 - kx^2 + 5x - 2 = 0$ 的根和為 3，求 k 。

解： $\sum r_i = \frac{k}{1} = 3$ ， $k = 3$ 。

大學技巧：試根 $P(1) = 2$ ，調整驗證。

3.2.3 例題 3：泰勒展開

求 $x^3 - 3x + 1$ 在 $x = 1$ 的泰勒展開（至二階）。

解： $P(1) = -1$ ， $P'(x) = 3x^2 - 3$ ， $P'(1) = 0$ ， $P''(x) = 6x$ ， $P''(1) = 6$ ：

$$P(x) = -1 + 0(x - 1) + 3(x - 1)^2$$

大學技巧：全展開等於原式。

3.2.4 例題 4：牛頓插值

用點 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 3)$ 插值。

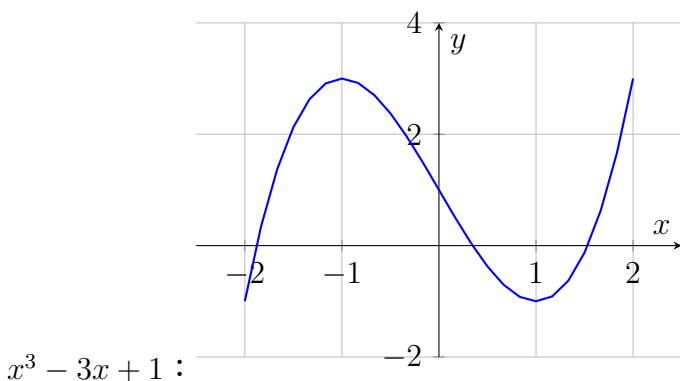
解：差商：

$$f[0, 1] = -1, \quad f[1, 2] = 3, \quad f[0, 1, 2] = 2$$

$$P(x) = 1 - x + 2x(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$$

大學技巧：驗證點值吻合。

3.3 圖形展示



3.4 題庫

1. 計算 $(x+1)(x^2-2x+1)$ 。
2. 分解 x^3-8 。
3. 求 x^3-3x^2+2x-1 除以 $(x-1)$ 的餘數。
4. 分解 x^4-16 。
5. 若 $P(x)=x^3-2x+1$ ，求 $P(2)$ 。
6. 用綜合除法求 x^3-4x^2+5x-2 除以 $(x-2)$ 的商。
7. 分解 x^2-4x+4 。
8. 求 x^3-x+1 在 $x=0$ 的泰勒展開（至二階）。
9. 若 $P(x)=x^3+x^2-x-1$ ，求 $P(-1)$ 。
10. 分解 x^3+27 。
11. 求 x^3-3x^2+3x-1 的實根與重數。
12. 若 $P(x)=x^3-5x^2+kx-2$ 根和為 5，求 k 。
13. 求 x^3-2x+1 在 $[0,1]$ 的最小值。
14. 用點 $(0,0), (1,1), (2,0)$ 插值多項式。
15. 求 x^4-4x^2+3 的極值點。
16. 若 $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ ，求根的乘積。
17. 求 x^3-x^2+x-1 在 $[-1,1]$ 的最大值。
18. 若 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ ，求單調區間。
19. 求 x^3-3x+2 的廣域趨勢。
20. 若 $P(x)=x^4-2x^2+1$ ，求 $P''(x)$ 的根。
21. 證明餘數定理： $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ 。
22. 若 $P(x)$ 有二重根， $P'(a)$ 如何？
23. 說明根與係數關係的應用。
24. 若 $P(x)$ 為三次多項式，實根數可能為何？
25. 證明泰勒展開對於多項式的有限項。
26. 說明綜合除法如何找根。
27. 若 $P(x)$ 趨向負無窮， a_n 如何？
28. 證明 x^3-x+1 至多 1 實根。

29. 說明牛頓插值如何保證唯一。
30. 若 $P(x)$ 除以 $(x^2 + 1)$ ，餘數形式為何？
31. 求 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 的所有實根。
32. 若 $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ ，求極值。
33. 求 $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 的局部特徵。
34. 用綜合除法求 $x^3 - 2x^2 + x - 1$ 除以 $(x - 1)$ 的商。
35. 求 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ 在 $x = 1$ 的泰勒展開（至一階）。
36. 若 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ ，求 $P'(x)$ 的根。
37. 求 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ 的實根數。
38. 若 $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ，求廣域特徵。
39. 用點 $(0, 1), (1, 2), (2, 5)$ 插值多項式。
40. 求 $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ 的根與重數。
41. 若 $P(x) = x^4 - 4x + 3$ ，求所有實根與極值。
42. 求 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 在 $x = 1$ 的泰勒展開（至三階）。
43. 若 $P(x) = x^5 - 5x + 4$ ，求實根數。
44. 求 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 的餘數關係（除以 $x - 3$ ）。
45. 若 $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ ，求極值與根。
46. 求 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 的所有實根。
47. 用綜合除法分解 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ 除以 $(x - 1)$ 。
48. 若 $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ，求 $x \in [-1, 1]$ 的最小值。
49. 求 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的根與係數關係。
50. 用點 $(0, 0), (1, 1), (2, 4)$ 插值多項式。
51. 若 $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ ，求極值。
52. 求 $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ 在 $[0, 1]$ 的最大值。
53. 若 $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ ，求單調區間。
54. 求 $x^4 - 4x^2 + 3$ 在 $[0, 2]$ 的最大值。
55. 若 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ，求 $P''(x)$ 的根。
56. 求 $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ 在 $x = 1$ 的泰勒展開（至二階）。
57. 若 $P(x) = x^4 - x^2 + 1$ ，求廣域特徵。

58. 求 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ 的所有實根。
59. 用綜合除法求 $x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ 除以 $(x - 2)$ 的商。
60. 若 $P(x) = x^5 - x^3 + x - 1$ ，求 $x \in [0, 1]$ 的最小值。

4 數列與級數

4.1 觀念與公式

4.1.1 數列的基本概念

數列是有序的數字序列，如 $1, 4, 7, 10, \dots$ 。
表示法：

- 通項： a_n ，如 $a_n = 3n - 2$ 。
- 遞推： $a_n = a_{n-1} + d$ ，需給初值。

類型：等差、等比、費氏數列。

應用：描述規律變化。

大學技巧：用生成函數分析遞推數列。

4.1.2 等差數列

每項與前項差為常數 d （公差）。

公式：

- 通項： $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 。
- 總和： $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ 或 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ 。

性質：線性增長。

應用：均勻增加問題。

大學技巧：用數學歸納法證總和公式。

4.1.3 等比數列

每項與前項比為常數 r （公比）。

公式：

- 通項： $a_n = a_1 r^{n-1}$ 。
- 總和： $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$ ($r \neq 1$)。
- 無限級數：若 $|r| < 1$ ， $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ 。

性質：指數增長或衰減。

應用：利息、折舊。

大學技巧：判斷級數收斂性。

4.1.4 級數

數列項的和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 。

類型：

- 有限級數：固定項數。
- 無限級數：需判斷收斂。

應用：累積總量。

大學技巧：泰勒級數近似函數。

4.1.5 數學歸納法

證明數列性質：

1. 基礎步：驗證 $n = 1$ 。
2. 歸納步：假設 $n = k$ 成立，證 $n = k + 1$ 。

應用：證總和公式。

大學技巧：證複雜遞推關係。

4.2 例題解析

4.2.1 例題 1：等差數列（計算題）

一等差數列首項 3，公差 2，求第 10 項與前 10 項和。

解：通項 $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2$ ， $a_{10} = 3 + 9 \cdot 2 = 21$ 。

總和 $S_{10} = \frac{10}{2}(3 + 21) = 5 \cdot 24 = 120$ 。

大學技巧：驗證 $a_{10} - a_9 = 2$ 。

4.2.2 例題 2：等比數列（應用題）

一物品價值 1000 元，每年折舊 20%，求第 5 年價值與 5 年總價值。

解： $a_n = 1000 \cdot (0.8)^{n-1}$ ， $a_5 = 1000 \cdot (0.8)^4 = 409.6$ 元。

$S_5 = 1000 \frac{1-(0.8)^5}{1-0.8} = 1000 \cdot \frac{1-0.32768}{0.2} = 3361.6$ 元。

大學技巧：無限折舊 $S_\infty = \frac{1000}{0.2} = 5000$ 元。

4.2.3 例題 3：遞推數列（觀念題）

費氏數列 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ，求 a_6 。

解： $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$ 。

大學技巧：黃金比例近似 $a_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ ， $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

4.2.4 例題 4：數學歸納法

證 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ 。

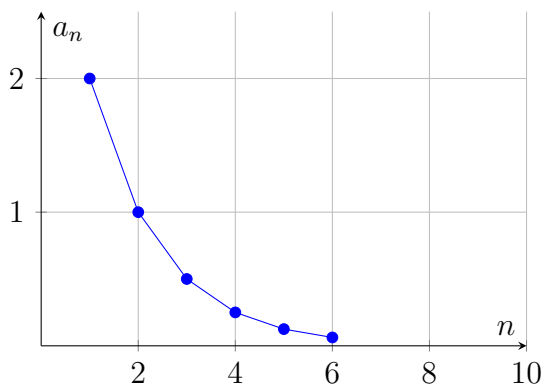
解： $n=1$ ， $S_1 = a_1$ 成立。假設 $n=k$ 成立， $n=k+1$ ：

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] + [a_1 + kd] = \frac{k+1}{2}[2a_1 + kd]$$

成立。

大學技巧：用連續和推導。

4.3 圖形展示



等比數列 $a_n = 2 \cdot (0.5)^{n-1}$ ：

4.4 題庫

1. 求等差數列 $a_1 = 5, d = 3$ 的 a_{10} 。
2. 求等比數列 $a_1 = 2, r = 2$ 的 S_5 。
3. 若 $a_n = 4n - 1$ ，求 S_{10} 。
4. 求等差數列 $a_1 = 1, a_5 = 9$ 的 d 。
5. 求等比數列 $a_1 = 3, r = \frac{1}{2}$ 的 a_6 。
6. 若 $a_1 = 2, d = -1$ ，求 S_{20} 。
7. 求 $a_n = a_{n-1} + 3, a_1 = 1$ 的 a_8 。
8. 求等比數列 $a_1 = 1, r = -2$ 的 S_4 。
9. 若 $a_1 = 10, d = 2$ ，求 a_{15} 。
10. 求等比數列 $a_1 = 4, r = 0.5$ 的 S_∞ 。
11. 一存款首年 1000 元，每年增 200 元，求第 10 年總額。
12. 一球從 10 公尺落下，每次反彈前高 0.8 倍，求總距離。
13. 若 $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1}$ ，求 S_6 。

14. 一數列 $a_1 = 3, d = 4$ ，求第幾項為 35。
15. 一物品首年值 5000 元，年折舊 10%，求 5 年總值。
16. 若 $S_n = 3n^2 + 1$ ，求 a_n 。
17. 一等差數列 $a_1 = 2, S_{10} = 110$ ，求 d 。
18. 一等比數列 $a_1 = 2, S_5 = 62$ ，求 r 。
19. 若 $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n$ ，求 a_5 。
20. 一數列 $a_1 = 5, r = \frac{1}{3}$ ，求 S_∞ 。
21. 證等差數列 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ 。
22. 等比數列 $|r| > 1$ 時， S_∞ 是否存在？
23. 說明數學歸納法的步驟。
24. 若 $a_n = a_{n-1} + 2$ ，求通項。
25. 證 $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$ 。
26. 等差數列總和公式有幾種形式？
27. 若 $a_n = 2^n$ ，求 S_n 。
28. 說明費氏數列的遞推關係。
29. 若 $S_n = n(n+1)$ ，求 a_n 。
30. 等比數列收斂條件為何？
31. 求 $a_1 = 1, d = 3, S_n = 100$ 的 n 。
32. 若 $a_1 = 2, r = 3$ ，求 a_5 與 S_5 。
33. 求 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 1$ 的 a_7 。
34. 若 $S_n = 2^n - 1$ ，求 a_n 。
35. 求 $a_1 = 4, d = -2, a_n = -10$ 的 n 。
36. 若 $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$ ，求 n 使 $S_n > 1.9$ 。
37. 求 $a_1 = 3, d = 5, S_{10}$ 。
38. 若 $a_1 = 2, r = -1$ ，求 S_{100} 。
39. 求 $a_n = 3n^2 - 1$ 的 S_5 。
40. 若 $a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1}$ ，求 a_6 。
41. 一等差數列 $a_1 = 2, a_{10} = 20$ ，求 S_{10} 。
42. 若 $a_1 = 1, r = 2$ ，求 n 使 $a_n > 1000$ 。

43. 求 $a_1 = 5, d = -3, S_n = -20$ 的 n 。
44. 若 $a_1 = 3, r = \frac{1}{2}$, 求 n 使 $S_n > 5.9$ 。
45. 求 $a_n = a_{n-1} + 2n, a_1 = 1$ 的 a_5 。
46. 若 $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 求 a_n 。
47. 求 $a_1 = 1, r = -2, S_6$ 。
48. 若 $a_1 = 4, d = 2$, 求 n 使 $S_n > 100$ 。
49. 求 $a_n = 2^n$ 的 S_{10} 。
50. 若 $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 3$, 求 S_8 。
51. 求 $a_1 = 3, r = 0.5, S_n = 5.25$ 的 n 。
52. 若 $a_1 = 1, d = 4$, 求 a_{20} 與 S_{20} 。
53. 求 $a_n = n^2$ 的 S_5 。
54. 若 $a_1 = 5, r = \frac{2}{3}$, 求 S_∞ 。
55. 求 $a_1 = 2, d = -1, S_{15}$ 。
56. 若 $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 求 a_8 。
57. 求 $a_1 = 10, r = 0.9, S_{10}$ 。
58. 若 $a_1 = 3, d = 2$, 求 n 使 $a_n = 45$ 。
59. 求 $a_n = 3n - 2$ 的 S_{10} 。
60. 若 $a_1 = 1, r = 3$, 求 n 使 $S_n > 1000$ 。

5 指數與對數

5.1 觀念與公式

5.1.1 指數的基本概念

指數表示連乘， $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n 次)， $a > 0$ 。
指數律：

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ， $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

應用：簡化運算。

大學技巧：指數的連續性， $a^x = e^{x \ln a}$ 。

5.1.2 指數函數

定義： $f(x) = a^x$ ， $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

性質：

- $a > 1$ ：單調遞增， $x \rightarrow \infty$ 時 $f(x) \rightarrow \infty$ 。
- $0 < a < 1$ ：單調遞減， $x \rightarrow \infty$ 時 $f(x) \rightarrow 0$ 。

應用：增長模型。

大學技巧：微分 $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ 。

5.1.3 對數的基本概念

若 $a^x = b$ ，則 $\log_a b = x$ ， $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

對數律：

- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
- $\log_a(m^n) = n \log_a m$
- 換底公式： $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

應用：化簡複雜運算。

大學技巧：自然對數 $\ln x$ ，底 $e \approx 2.718$ 。

5.1.4 對數函數

定義： $f(x) = \log_a x$ ， $x > 0$ 。

性質：

- $a > 1$ ：單調遞增，過 $(1, 0)$ 。
- $0 < a < 1$ ：單調遞減。

應用：壓縮數據。

大學技巧：微分 $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$ 。

5.1.5 指數與對數的互逆

- $a^{\log_a x} = x$ ($x > 0$)
- $\log_a(a^x) = x$

應用：解方程。

大學技巧：泰勒展開，如 $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ 。

5.2 例題解析

5.2.1 例題 1：指數運算（計算題）

化簡 $2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 4^2$ 。

解： $4 = 2^2$ ，則：

$$2^3 \cdot 2^{-1} \cdot (2^2)^2 = 2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4 = 2^{3-1+4} = 2^6 = 64$$

大學技巧：用 $a^x = e^{x \ln a}$ 驗算。

5.2.2 例題 2：對數運算（計算題）

化簡 $\log_2 8 + \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)$ 。

解：

$$\log_2 8 + \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \left(8 \cdot \frac{1}{4}\right) = \log_2 2 = 1$$

大學技巧：換底公式驗證。

5.2.3 例題 3：解方程（應用題）

解 $3^{x+1} = 27$ 。

解： $27 = 3^3$ ，則：

$$3^{x+1} = 3^3 \implies x+1 = 3 \implies x = 2$$

或取對數： $\log_3(3^{x+1}) = \log_3 27$ ， $x+1 = 3$ 。

大學技巧：用 \ln 解， $\ln(3^{x+1}) = \ln 27$ 。

5.2.4 例題 4：應用問題

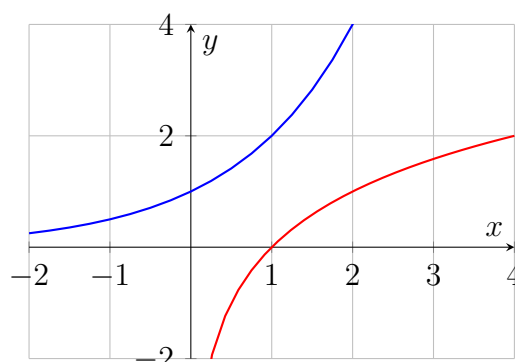
一物質每小時衰減 20%，求半衰期。

解：設初量 Q_0 ， $Q(t) = Q_0(0.8)^t$ ，半衰期時 $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$ ：

$$(0.8)^t = 0.5 \implies t \log 0.8 = \log 0.5 \implies t = \frac{\log 0.5}{\log 0.8} \approx 3.1 \text{ 小時}$$

大學技巧：用 \ln ， $t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.8}$ 。

5.3 圖形展示



指數函數 $y = 2^x$ 與對數函數 $y = \log_2 x$ ：

5.4 題庫

1. 化簡 $3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 9$ 。
2. 計算 $\log_4 16$ 。
3. 化簡 $\log_5 25 + \log_5 125$ 。
4. 求 $2^{-2} \cdot 8$ 。
5. 計算 $\log_3 81$ 。
6. 化簡 $4^{\frac{3}{2}}$ 。
7. 求 $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$ 。
8. 化簡 $10^2 \cdot 10^{-1}$ 。
9. 計算 $\log_{10} 1000$ 。
10. 求 $5^0 \cdot 5^3$ 。
11. 解 $2^x = 16$ 。
12. 一存款 1000 元，年利率 5% 複利，求 5 年後金額。
13. 解 $\log_3(x - 1) = 2$ 。
14. 一物質半衰期 10 小時，求每小時衰減率。

15. 解 $4^{x-1} = 64$ 。
16. 若 $\log_a 8 = 3$ ，求 a 。
17. 一人口每年增長 2%，幾年後翻倍。
18. 解 $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$ 。
19. 若 $pH = -\log_{10}[H^+]$ ， $[H^+] = 10^{-7}$ ，求 pH 。
20. 解 $5^{2x} = 125$ 。
21. 證 $a^{\log_a x} = x$ 。
22. 說明指數函數的單調性。
23. 證 $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ 。
24. 若 $a^x = a^y$ ，則 x, y 關係為何？
25. 說明對數函數的定義域。
26. 證 $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ 。
27. 若 $\log_a b = c$ ，則 b 如何表示？
28. 說明換底公式的推導。
29. 指數函數與對數函數的圖形關係為何？
30. 若 $a > 1$ ， $\log_a x$ 的範圍為何？
31. 解 $2^{x+1} = 3$ （近似值）。
32. 若 $\log_2 x = 3 + \log_2(x-1)$ ，求 x 。
33. 求 3^x 在 $x = 2$ 的泰勒展開（至一階）。
34. 解 $10^{2x-1} = 100$ 。
35. 若 $\log_a 5 + \log_a 2 = 1$ ，求 a 。
36. 求一物質衰減率 0.1/小時，半衰期。
37. 解 $2^x + 2^{-x} = 5$ 。
38. 若 $\log_3(x^2) = 4$ ，求 x 。
39. 解 $\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$ 。
40. 若 $y = \ln x$ ，求 $x = 1$ 時斜率。
41. 解 $3^{x+2} = 5^{x-1}$ （近似值）。
42. 若 $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$ ，求 x 。
43. 求 $\ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒展開（至三階）。

44. 解 $4^x - 2^x = 3$ 。
45. 若 $\log_a 3 = 0.5$ ，求 a 。
46. 一物質每小時衰減至前值的 $\frac{1}{3}$ ，求半衰期。
47. 解 $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ 。
48. 若 $\log_2(x+2) = 2 + \log_2 x$ ，求 x 。
49. 解 $\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = 2$ 。
50. 若 $y = 2^x$ ，求 $x = 0$ 時斜率。
51. 解 $5^x = 2^{x+1}$ (近似值)。
52. 若 $\log_{10} x = 2 - \log_{10}(x-1)$ ，求 x 。
53. 求 e^x 在 $x = 0$ 的泰勒展開 (至二階)。
54. 解 $3^{x-1} + 3^{1-x} = 10$ 。
55. 若 $\log_a 4 = 2 \log_a 2$ ，求 a 。
56. 一人口首年 1000，每年增長 10%，求 10 年後人口。
57. 解 $2^x - 2^{-x} = 1$ 。
58. 若 $\log_5(x^2 - 1) = 2$ ，求 x 。
59. 解 $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) = 3$ 。
60. 若 $y = \log_3 x$ ，求 $x = 9$ 時斜率。

6 排列組合

6.1 觀念與公式

6.1.1 基本概念

排列與組合處理選擇與排列問題。

定義：

- 排列： $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ，從 n 個取 k 個有序排列。
- 組合： $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，從 n 個取 k 個無序組合。
- 階乘： $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$ ， $0! = 1$ 。

應用：計數問題。

大學技巧：用生成函數求解。

6.1.2 排列的應用

公式：

- 全排列： $n!$ 。
- 環狀排列： $(n-1)!$ 。
- 有重複排列： $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 。
- **Hn** 取 **k**：從 n 個不同物取 k 個（可重複）， n^k 。

應用：排隊、密碼。

大學技巧：容斥原理處理限制。

6.1.3 組合的應用

公式：

- 基本組合： $\binom{n}{k}$ 。
- 二項式定理： $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ 。
- 性質： $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ，帕斯卡公式 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ 。

應用：選物、分組。

大學技巧：組合恆等式。

6.1.4 卡特蘭數

定義： $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 。

應用：

- 括號配對： $C_3 = 5$ 。
- 不越界路徑：從 $(0, 0)$ 到 (n, n) 。

值： $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14$ 。

大學技巧：遞推 $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$ 。

6.2 例題解析

6.2.1 例題 1：條件排列

5 人排隊，A, B 相鄰，求方法數。

解：視 A, B 為一組，則 4 個單位 (AB, 3 人)，全排列 $4! = 24$ ，AB 內部 2 種排法，總數 $24 \cdot 2 = 48$ 。

大學技巧：容斥法驗證。

6.2.2 例題 2：分組應用

從 6 人選 3 人分給 A 組，餘下給 B 組，求方法數。

解：選 3 人給 A 組， $\binom{6}{3} = 20$ ，餘下自動分 B 組，總數 20。

大學技巧：考慮組內排列。

6.2.3 例題 3：卡特蘭數應用

求 4 個節點的二叉樹數量。

解：二叉樹數為 $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{70}{5} = 14$ 。

大學技巧：用路徑計數。

6.2.4 例題 4：重複排列應用

從 3 種顏色選 4 個塗 4 格（可重複），求方法數。

解： $H(3, 4) = 3^4 = 81$ 。

大學技巧：生成函數 $(x_1 + x_2 + x_3)^4$ 。

6.2.5 例題 5：二項式應用

求 $(3x - 2)^5$ 的 x^3 項係數。

解： $(3x)^{5-k}(-2)^k$ ， $5 - k = 3$ ， $k = 2$ ：

$$\binom{5}{2} \cdot 3^3 \cdot (-2)^2 = 10 \cdot 27 \cdot 4 = 1080$$

大學技巧：用係數提取。

6.3 題庫

1. 求 $P(5, 3)$ 。
2. 求 $\binom{6}{2}$ 。
3. 求 $4!$ 。
4. 用 A, A, B 排 3 位序列，求方法數。
5. 求 $(x+2)^4$ 的 x^2 項係數。
6. 求 $P(7, 2)$ 。
7. 求 $\binom{8}{3}$ 。
8. 用 1, 1, 2 排 3 位序列，求方法數。
9. 從 4 人排成一圈，求方法數。
10. 求 $\binom{5}{4}$ 。
11. 5 人排隊，A, B 相鄰，求方法數。
12. 從 6 人選 3 人組成委員會，A 必選，求方法數。
13. 4 人圍圓桌，A, B 不相鄰，求方法數。
14. 從 8 本書選 4 本分給 2 人，每人 2 本，求方法數。
15. 用 0, 1 組成 5 位數（可重複），至少 1 個 0，求方法數。
16. 6 個不同球分 3 堆（可空），求方法數。
17. 從 5 男 3 女選 4 人，至少 1 女，求方法數。
18. 求 $(2x-1)^6$ 的 x^4 項係數。
19. 5 人排隊，A 在 B 前，求方法數。
20. 從 7 個數字選 3 個，至少 1 奇數，求方法數。
21. 6 人圍圓桌，A, B, C 順時針連續，求方法數。
22. 用 A, B, C 排 4 位序列，至少 2 個 A，求方法數。
23. 從 10 人選 5 人，至少 2 人為特定組（4 人），求方法數。
24. 5 個不同物分 2 堆（不可空），求方法數。
25. 從 4 種顏色選 3 格塗色（可重複），求方法數。
26. 7 人排隊，A, B 相鄰且 C 在 D 前，求方法數。
27. 求 C_4 （卡特蘭數）。
28. 從 6 個數字選 3 個排成 3 位數，至少 1 個 5，求方法數。

29. 8 人選 4 人分 2 組，每組 2 人，求方法數。
30. 從 5 人選 3 人排隊，A, B 不相鄰，求方法數。
31. 證 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 。
32. 說明環狀排列的公式推導。
33. 證帕斯卡恆等式。
34. 若有重複物，排列公式為何？
35. 說明二項式定理如何求係數。
36. 卡特蘭數如何應用於路徑計數？
37. 若從 n 個取 k 個可重複，方法數為何？
38. 證 $P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ 。
39. 說明組合與排列的區別。
40. 二項式展開的總係數和為何？
41. 從 6 人選 3 人排隊，A 必須在首位，求方法數。
42. 求 $(3x+2)^5$ 的 x^3 項係數。
43. 用 A, A, B, C, D 排 5 位序列，求方法數。
44. 求 C_5 (卡特蘭數)。
45. 從 8 人選 4 人，A, B 必選，求方法數。
46. 若 $(x-3)^7$ 的 x^5 項為 kx^5 ，求 k 。
47. 6 人排隊，A, B, C 中至少 2 人相鄰，求方法數。
48. 從 5 種數字選 4 個 (可重複)，至少 1 個 1，求方法數。
49. 7 人圍圓桌，A, B 相鄰且 C 不在 D 旁，求方法數。
50. 從 9 人選 5 人，至少 3 人為特定組 (4 人)，求方法數。
51. 6 人排隊，A, B 相鄰且 C, D 不相鄰，求方法數。
52. 求 $(2x-y)^6$ 的 x^4y^2 項係數。
53. 5 個不同球分 3 堆，至少 1 堆空，求方法數。
54. 用 A, A, A, B, B, C 排 6 位序列，求方法數。
55. 從 7 男 3 女選 5 人，至少 2 男 2 女，求方法數。
56. 8 人圍圓桌，A, B, C 順時針連續且 D 不在 E 旁，求方法數。
57. 若 $(x+2y)^8$ 的 x^4y^4 項為 kx^4y^4 ，求 k 。

58. 從 6 個數字選 3 個，至少 1 個 5 且 1 個 7，求方法數。

59. 5 人排隊，A 在 B 前且 C 在 D 前，求方法數。

60. 從 10 本書選 5 本分 3 人，每人至少 1 本，求方法數。

7 數據分析

7.1 觀念與公式

7.1.1 數據的表示與整理

數據分析從整理開始。

方法：

- 頻率表、分組頻率表。
- 圖表：直方圖、折線圖、圓餅圖、莖葉圖、箱形圖（五數概要： Q_1, Q_2, Q_3 , 最小值, 最大值）。

應用：視覺化數據。

大學技巧：用 Python 繪圖。

7.1.2 中心量數

衡量數據集中趨勢。

公式：

- 平均數： $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ 。
- 中位數：排序後中間值。
- 眾數：出現次數最多值。

應用：比較數據特性。

大學技巧：加權平均。

7.1.3 離散程度

衡量數據分散性。

公式：

- 全距：最大值 - 最小值。
- 四分位距： $IQR = Q_3 - Q_1$ 。
- 變異數： $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ （樣本用 $n - 1$ ）。
- 標準差： $s = \sqrt{s^2}$ 。

應用：數據穩定性。

大學技巧：常態分佈 68-95-99.7 規則。

7.1.4 數據分佈

描述數據形狀。

類型：

- 對稱分佈：平均數 \approx 中位數。
- 偏態分佈：右偏（平均數 $>$ 中位數）、左偏（平均數 $<$ 中位數）。
- 常態分佈：鐘形曲線。

應用：判斷特性。

大學技巧：標準化 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ 。

7.1.5 雙變量數據分析

探索兩變量關係。

方法：

- 散佈圖：觀察數據點分佈。
- 相關係數（皮爾森）： $r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$ ，範圍 $-1 \leq r \leq 1$ 。
- 迴歸直線： $y = ax + b$ ，斜率 $a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$ 。

性質：

- $r > 0$ ：正相關， $r < 0$ ：負相關， $r \approx 0$ ：無線性相關。
- $|r|$ 接近 1 表示強相關，接近 0 表示弱相關。

應用：預測與解釋。

大學技巧：最小平方法、 r^2 解釋變異。

7.2 例題解析

7.2.1 例題 1：數據整理

10 人身高 (cm)：155, 160, 165, 170, 155, 168, 172, 160, 165, 170。求五數概要。

解：排序：155, 155, 160, 160, 165, 165, 168, 170, 170, 172。

五數：最小 155, $Q_1 = 157.5$, $Q_2 = 165$, $Q_3 = 170$, 最大 172。

7.2.2 例題 2：中心與離散

數據：4, 6, 8, 10, 12。求平均數與標準差。

解： $\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$ 。

$s^2 = \frac{(4-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (12-8)^2}{5} = 8$, $s = \sqrt{8} \approx 2.83$ 。

7.2.3 例題 3：相關係數

身高 (cm) 與體重 (kg)：(160, 50), (165, 55), (170, 60), (175, 65)。求 r 。

解： $\bar{x} = 167.5$, $\bar{y} = 57.5$ 。

計算： $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 150$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 125$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 125$ 。
 $r = \frac{150}{\sqrt{125 \cdot 125}} = 1$ ，完全正相關。

大學技巧：驗證 $r^2 = 1$ 。

7.2.4 例題 4：迴歸直線

同上數據，求迴歸直線。

解：斜率 $a = \frac{150}{125} = 1.2$ ，截距 $b = \bar{y} - a\bar{x} = 57.5 - 1.2 \cdot 167.5 = -143.5$ 。

方程： $y = 1.2x - 143.5$ 。

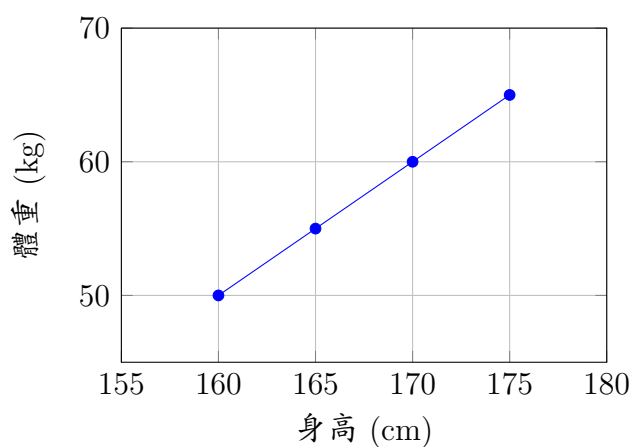
7.2.5 例題 5：應用題

手機時數：1, 2, 3, 5, 9。求 IQR 與離群值。

解： $Q_1 = 1.5$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 7$, $IQR = 5.5$ 。

範圍：-6.75 至 15.25，無離群值。

7.3 圖形展示



散佈圖（例題 3 數據）：

7.4 題庫

1. 數據：3, 5, 7, 9。求平均數。
2. 數據：2, 4, 6, 8, 10。求中位數。
3. 數據：1, 1, 2, 3, 4。求眾數。
4. 數據：5, 10, 15。求全距。
5. 數據：2, 4, 6。求標準差。
6. 數據：1, 3, 5, 7, 9。求 Q_2 。

7. 數據：4, 8, 12, 16。求變異數。
8. 數據：10, 20, 30, 40。求 IQR。
9. 數據：2, 2, 3, 3, 4。求平均數。
10. 數據：5, 6, 7, 8。求標準差。
11. 身高 (cm)：150, 155, 160, 165, 170。求五數概要。
12. 銷量：10, 12, 15, 20, 25。求標準差。
13. 分數：60, 70, 80, 90, 100。求離群值。
14. 身高與體重：(150, 45), (160, 50), (170, 55)。求 r 。
15. 手機時數：1, 2, 3, 5, 9。求 IQR。
16. 溫度 ($^{\circ}\text{C}$)：20, 22, 25, 28, 30。求平均數與全距。
17. 數據：5, 5, 6, 7, 8, 9。判斷偏態。
18. 銷售額 (萬)：2, 4, 6, 8, 10。求 r 與時間 (1-5)。
19. 身高：145, 150, 155, 160, 165, 170。求 Q_1, Q_3 。
20. 分數：50, 60, 70, 80, 90。求中位數與離群值。
21. 步數：3000, 4000, 5000, 6000, 7000。求迴歸斜率。
22. 價格與銷量：(10, 50), (20, 40), (30, 30)。求 r 。
23. 成績：40, 50, 60, 70, 80, 90。求五數概要。
24. 降雨量 (mm)：0, 2, 5, 10, 20。求標準差。
25. 年齡：20, 25, 30, 35, 40, 45。求平均數與 IQR。
26. 身高與鞋碼：(160, 38), (165, 39), (170, 40)。求迴歸直線。
27. 顧客數：5, 10, 15, 20, 25。求變異數。
28. 用電 (度)：50, 60, 70, 80, 90。求全距與中位數。
29. 數據：1, 3, 5, 7, 9, 11。求 Q_2 與莖葉圖。
30. 身高與體重：(155, 48), (160, 52), (165, 56), (170, 60)。求 r 。
31. 平均數與中位數差異？
32. 標準差如何衡量分散？
33. 何謂五數概要？
34. r 的範圍與意義？
35. 何謂右偏分佈？

36. 全距與 IQR 區別？
37. 變異數計算步驟？
38. 散佈圖如何判斷相關性？
39. 何謂離群值？
40. 常態分佈特徵？
41. 數據：2, 4, 6, 8, 10, 12。求 $x = 10$ 的 z -分數。
42. 數據： $\bar{x} = 50, s = 3$ ，求 $x = 56$ 的 z -分數。
43. 數據：1, 2, 3, 4, 5。求樣本變異數。
44. 身高與體重： $(150, 45), (160, 50), (170, 55)$ 。求迴歸直線。
45. 數據：10, 20, 30, 40, 50。求 Q_3 與離群值範圍。
46. 常態分佈： $\mu = 100, \sigma = 15$ ，求 $P(85 < x < 115)$ 。
47. 銷量：5, 10, 15, 20（天數 1-4）。求 r 。
48. 數據：3, 6, 9, 12, 15。求樣本標準差。
49. 年齡：20, 25, 30, 35, 40。求 r 與時間（1-5）。
50. 身高與時間： $(1, 150), (2, 155), (3, 160)$ 。求迴歸方程。
51. 數據：1, 3, 5, 7, 9。求樣本與母體標準差。
52. 身高：150, 155, 160, 165, 170, 200。求離群值。
53. 常態分佈： $\mu = 50, \sigma = 10$ ，求 $x = 70$ 百分位。
54. 數據：2, 4, 6, 8, 10。求 r 與時間（1-5）。
55. 身高與體重： $(160, 50), (165, 55), (170, 60), (175, 65)$ 。求 r 與迴歸。
56. 溫度：20, 22, 25, 28, 30, 40。求 IQR 與離群值。
57. 數據：10, 15, 20, 25, 30。求樣本變異數與 r 。
58. 身高與成績： $(150, 60), (160, 70), (170, 80)$ 。求迴歸直線。
59. 數據：5, 10, 15, 20, 25, 30。求五數與常態假設。
60. 調查：1, 2, 3, 5, 10, 15。求 r 與時間（1-6）。

8 機率

8.1 觀念與公式

8.1.1 基本概念

機率衡量事件可能性。

定義：

- 樣本空間：所有可能結果。
- 事件：樣本空間子集。
- 機率： $P(A) = \frac{\text{有利結果數}}{\text{總結果數}}$ （古典機率）。

應用：簡單計數。

大學技巧：集合論描述。

8.1.2 機率的性質與運算

公式：

- 補事件： $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 。
- 互斥事件： $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 獨立事件： $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 。

應用：多事件組合。

大學技巧：樹狀圖分析。

8.1.3 條件機率

定義： $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ， $P(B) > 0$ 。

性質： $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ 。

應用：依序事件。

大學技巧：貝氏定理 $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$ 。

8.1.4 排列組合與機率

用排列組合計算機率。

應用：

- 樣本空間： $n!$ 、 $P(n, k)$ 、 $\binom{n}{k}$ 。
- 有利事件：條件計數。

大學技巧：生成函數。

8.1.5 期望值

衡量隨機變量的平均結果。

公式： $E(X) = \sum x_i \cdot P(x_i)$ ， x_i 為結果， $P(x_i)$ 為機率。

應用：遊戲收益、試驗平均值。

大學技巧：二項分佈期望值 $E(X) = np$ 。

8.2 例題解析

8.2.1 例題 1：基本機率

一袋有 3 紅 4 藍球，隨機抽 1 球，求紅球機率。

解： $P(\text{紅}) = \frac{3}{7}$ 。

8.2.2 例題 2：互斥事件

擲骰子，求點數為奇數或 6 的機率。

解： $P(\text{奇}) = \frac{3}{6}$ ， $P(6) = \frac{1}{6}$ ， $P(\text{奇或 } 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。

8.2.3 例題 3：條件機率

袋有 5 紅 3 藍，抽 2 次（放回），求第 2 紅且第 1 藍機率。

解： $P(\text{第 1 藍}) = \frac{3}{8}$ ， $P(\text{第 2 紅}) = \frac{5}{8}$ ， $P = \frac{15}{64}$ 。

8.2.4 例題 4：排列組合應用

5 人選 3 人排隊，A 在 B 前機率。

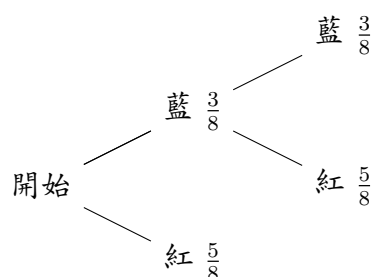
解：總數 $P(5, 3) = 60$ ，A 在 B 前 24， $P = \frac{2}{5}$ 。

8.2.5 例題 5：期望值

擲骰子，贏點數美元，求期望收益。

解： $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$ 美元。

8.3 圖形展示



樹狀圖 (例題 3):

8.4 題庫

1. 擲骰子，求點數 4 機率。
2. 袋 3 紅 2 藍，求紅機率。
3. 擲 2 骰子，求和 7 機率。
4. 抽撲克，求紅心機率。
5. 擲 2 幣，求至少 1 正機率。
6. 袋 4 白 3 黑，求白機率。
7. 擲骰子，求點數 < 4 機率。
8. 抽 2 牌 (放回)，求皆黑機率。
9. 擲骰子，求期望點數。
10. 袋 5 球 3 紅，求非紅機率。
11. 袋 3 紅 4 藍，抽 2 次 (放回)，求皆紅機率。
12. 5 人排隊，A, B 相鄰機率。
13. 擲 2 骰子，求和偶數機率。
14. 袋 5 紅 3 藍，抽 2 次 (不放回)，求第 2 紅且第 1 藍機率。
15. 抽撲克，求第 1A 且第 2K 機率 (不放回)。
16. 6 人圍圓桌，A, B 不相鄰機率。
17. 袋 4 白 6 黑，抽 2 次 (不放回)，求皆白機率。
18. 擲 3 幣，求恰 2 正機率。
19. 遊戲：贏 5 元 ($\frac{1}{3}$)，輸 2 元 ($\frac{2}{3}$)，求期望收益。
20. 袋 3 紅 2 藍 1 綠，抽 2 次 (放回)，求不同色機率。
21. 擲骰子 2 次，求第 2 $>$ 第 1 機率。

22. 5 張牌選 2 張，求皆紅心機率。
23. 袋 6 球 4 紅，抽 2 次（不放回），求至少 1 紅機率。
24. 4 男 3 女選 2 人，至少 1 女機率。
25. 擲骰子，點數奇數得 3 元，偶數失 2 元，求期望收益。
26. 袋 5 白 3 黑，抽 2 次（不放回），求第 2 白 | 第 1 黑機率。
27. 6 人排隊，A 在 B 前機率。
28. 抽 3 牌（放回），求至少 1 黑機率。
29. 袋 4 紅 3 藍，抽 2 次（放回），求恰 1 紅期望次數。
30. 擲 2 骰子，求和 >10 機率。
31. 何謂樣本空間？
32. 互斥事件機率如何算？
33. 獨立事件定義？
34. 條件機率公式？
35. 補事件意義？
36. 古典與實驗機率差異？
37. 如何用排列計算機率？
38. 何謂期望值？
39. 機率值範圍？
40. 樹狀圖如何幫機率計算？
41. 袋 3 紅 4 藍，抽 2 次（不放回），求第 2 紅 | 第 1 紅機率。
42. 擲 2 骰子，求和 $8 |$ 第 1 為 4 機率。
43. 5 人排隊，A, B, C 順序機率。
44. 袋 5 白 3 黑，抽 3 次（放回），求恰 2 白機率。
45. 抽撲克，求第 2 紅 | 第 1 黑機率（不放回）。
46. 擲 3 幣，求期望正面次數。
47. 袋 4 紅 3 藍，抽 2 次（不放回），求不同色機率。
48. 從 7 人選 4 人，A, B 必選機率。
49. 擲 2 骰子，求和 $<6 |$ 差 <3 機率。
50. 袋 5 球 3 紅，抽 2 次（放回），求紅次數期望值。

51. 袋 3 紅 2 藍，抽 3 次（不放回），求至少 2 紅機率。
52. 5 人排隊，A, B 相鄰且 C 在 D 前機率。
53. 擲 2 骰子，求和 9 | 至少 1 個 5 機率。
54. 袋 4 白 5 黑，抽 3 次（放回），求至少 2 白機率。
55. 遊戲：贏 10 元 ($\frac{1}{4}$)，贏 5 元 ($\frac{1}{2}$)，輸 3 元 ($\frac{1}{4}$)，求期望收益。
56. 抽撲克 3 次（不放回），求恰 1A 機率。
57. 從 8 人選 3 人，至少 2 男（5 男 3 女）機率。
58. 擲 3 骰子，求和 10 機率。
59. 袋 3 紅 4 藍，抽 2 次（不放回），求第 2 紅 | 第 1 藍機率。
60. 擲 2 骰子，求和期望值。

9 三角

9.1 觀念與公式

9.1.1 基本三角比

直角三角形的邊角關係。
定義：

- $\sin \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}。$
- $\cos \theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}。$
- $\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}。$

特殊角度：

- $30^\circ: \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $45^\circ: \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $60^\circ: \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

應用：直角三角形求解。
大學技巧：單位圓。

9.1.2 正弦定理

公式： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為外接圓半徑）。

應用：求邊長或角度。

大學技巧：證明用面積與外心。

9.1.3 餘弦定理

公式：

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A。$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B。$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C。$

應用：求邊長或角度。
大學技巧：向量內積。

9.1.4 面積公式

公式：

- $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 。
- 海倫公式： $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ， $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。

應用：面積計算。

大學技巧：用餘弦定理推導。

9.1.5 內心與外心

內心（內切圓中心）：

- 內心到三邊距離相等，內切圓半徑 $r = \frac{S}{s}$ ， S 為面積， $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。

外心（外接圓中心）：

- 外心到三頂點距離相等，外接圓半徑 $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4S}$ 。

應用：幾何性質與證明。

大學技巧：坐標幾何求心。

9.2 例題解析

9.2.1 例題 1：基本三角比

直角三角形， $\angle A = 30^\circ$ ，斜邊 10，求對邊。

解： $a = 10 \sin 30^\circ = 5$ 。

9.2.2 例題 2：正弦定理

$\triangle ABC$ ， $a = 5$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，求 b 。

解： $\angle C = 105^\circ$ ， $b = 5 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 5\sqrt{2}$ 。

9.2.3 例題 3：餘弦定理

$\triangle ABC$ ， $b = 3$ ， $c = 4$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，求 a 。

解： $a^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13$ ， $a = \sqrt{13}$ 。

9.2.4 例題 4：面積與外心

$\triangle ABC$ ， $a = 6$ ， $b = 8$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，求面積與 R 。

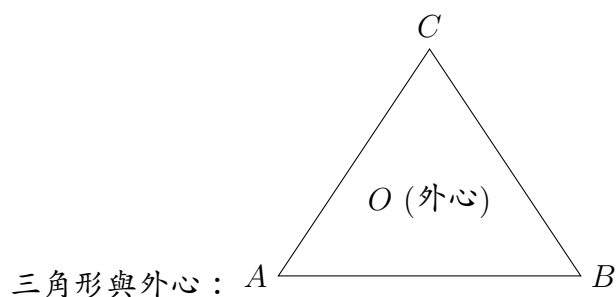
解： $S = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ ， $R = \frac{6}{2 \sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$ 。

9.2.5 例題 5：證明題

證明餘弦定理（用距離公式）。

解：設 $B(0, 0)$ ， $C(b, 0)$ ， $A(c \cos A, c \sin A)$ ，計算 $BA^2 = a^2$ ，得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。

9.3 圖形展示



9.4 題庫

1. $\angle A = 45^\circ$ ，斜邊 8，求對邊。
2. $\angle B = 60^\circ$ ，鄰邊 5，求斜邊。
3. $a = 7$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，求 b 。
4. $b = 5$ ， $c = 6$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，求 a 。
5. $a = 4$ ， $b = 5$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，求面積。
6. $\angle A = 30^\circ$ ，對邊 3，求斜邊。
7. $a = 8$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，求 c 。
8. $b = 3$ ， $c = 4$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，求 a 。
9. $a = 6$ ， $b = 7$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，求面積。
10. $a = 5$ ， $b = 6$ ， $c = 7$ ，求 R 。
11. $a = 5$ ， $b = 6$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，求 c 。
12. 梯靠牆，底距 3m，與地 45° ，求梯長。
13. $a = 10$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，求面積。
14. $b = 8$ ， $c = 9$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，求 a 。
15. 旗杆影子 6m，仰角 60° ，求高。
16. $a = 4$ ， $b = 5$ ， $c = 6$ ，求 $\angle A$ 。
17. $a = 7$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，求 b 。
18. 河寬， $AB=10\text{m}$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，求 AC。
19. $b = 3$ ， $c = 4$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，求面積與 r 。
20. $a = 12$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，求 c 。
21. 建築傾斜，底距 5m，頂與地 30° ，求高。

22. $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, 求面積。
23. $b = 8$, $c = 10$, $\angle A = 90^\circ$, 求 a 。
24. $a = 6$, $b = 8$, $\angle C = 45^\circ$, 求 c 。
25. 山坡傾角 30° , 斜長 10m, 求高。
26. $a = 9$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, 求 b 。
27. $b = 5$, $c = 6$, $\angle A = 60^\circ$, 求面積。
28. 兩點距 8m, 仰角 45° , 求高。
29. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, 求 R 。
30. $a = 10$, $b = 12$, $\angle C = 60^\circ$, 求面積。
31. 證明正弦定理 (用面積)。
32. 證明餘弦定理 (用畢氏)。
33. 證明 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 。
34. 特殊角度 60° 的三角比?
35. 證明 $R = \frac{a}{2 \sin A}$ 。
36. 餘弦定理如何求角度?
37. 證明內切圓半徑 $r = \frac{S}{s}$ 。
38. 正弦定理與外心關係?
39. 證明海倫公式。
40. 餘弦定理與向量關係?
41. $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, 求 $\angle B$ 。
42. $a = 8$, $\angle A = 30^\circ$, 面積 12, 求 b 。
43. $b = 4$, $c = 5$, $\angle A = 60^\circ$, 求 a 與 R 。
44. $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$, 求面積與 r 。
45. $a = 10$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, 求 c 。
46. $b = 3$, $c = 4$, 面積 5, 求 $\angle A$ 。
47. $a = 5$, $b = 6$, $\angle C = 90^\circ$, 求 c 與 R 。
48. $a = 9$, $b = 12$, $\angle C = 60^\circ$, 求 c 。
49. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, 求外心到 A 距離。
50. $b = 7$, $c = 8$, $\angle A = 45^\circ$, 求 a 與面積。

51. $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, 求最大角與 R 。
52. 兩岸測距, $AB = 10\text{m}$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, 求 AC 。
53. $a = 8$, $b = 10$, 面積 20, 求 $\angle C$ 與 r 。
54. $b = 6$, $c = 8$, $\angle A = 60^\circ$, 求面積與外心到 B 距離。
55. $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, 求 $\angle A$ 與內心到 A 距離。
56. $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$, 求 R 與面積。
57. $a = 4$, $b = 5$, $\angle C = 60^\circ$, 求 c 與 S 。
58. 山坡, 斜長 12m, 仰角 30° , 底角 45° , 求水平距與高。
59. $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, 求面積與 r 。
60. 證明: 三角形內心到三邊距離相等。

10 三角函數

10.1 觀念與公式

10.1.1 定義與基本性質

基於單位圓。

定義：

- $\sin \theta = y$ ， $\cos \theta = x$ 。
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 。

性質：

- 週期： $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ 。
- 奇偶： $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ， $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 。

應用：角度計算。

大學技巧： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。

10.1.2 三角函數圖形

波形分析。

公式：

- $y = A \sin(Bx + C)$ ：振幅 $|A|$ ，週期 $\frac{2\pi}{|B|}$ ，相位移 $-\frac{C}{B}$ 。

應用：週期現象。

大學技巧：傅立葉級數。

10.1.3 三角恆等式

基本關係與變換。

基本公式：

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。
- $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 。

- $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 。

積化和差：

- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ 。
- $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$ 。
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ 。
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ 。

和差化積：

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ 。
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ 。
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ 。
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ 。

應用：化簡與證明。

大學技巧：積分應用。

10.1.4 應用與方程

應用：

- 週期運動： $x = A \sin(\omega t)$ 。
- 方程： $\sin x = k$ ，解 $x = \arcsin k + 2n\pi$ 。

大學技巧：反三角函數。

10.2 例題解析

10.2.1 例題 1：基本性質

求 $\sin 150^\circ$ 。

解： $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。

10.2.2 例題 2：圖形分析

$y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ ，求週期。

解：週期 $\frac{2\pi}{3}$ 。

10.2.3 例題 3：積化和差

化簡 $\sin 60^\circ \cos 30^\circ$ 。

解： $\frac{1}{2}[\sin(60^\circ + 30^\circ) + \sin(60^\circ - 30^\circ)] = \frac{1}{2}[\sin 90^\circ + \sin 30^\circ] = \frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2}] = \frac{3}{4}$ 。

10.2.4 例題 4：和差化積

化簡 $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ 。

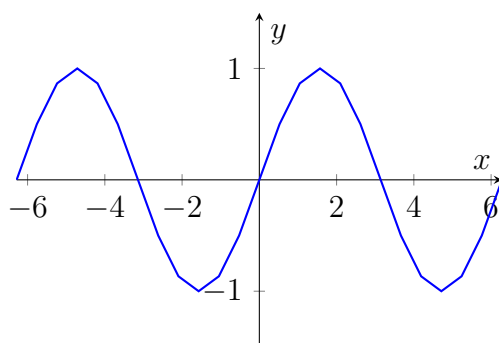
解： $2 \sin\left(\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\right) = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

10.2.5 例題 5：應用題

波動 $y = 3 \cos(2t)$ ，求最大值。

解：最大值 3。

10.3 圖形展示



$y = \sin x$ ：

10.4 題庫

1. 求 $\sin 135^\circ$ 。
2. 求 $\cos 300^\circ$ 。
3. $y = 3 \sin(2x)$ ，求週期。
4. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ$ 。
5. $\sin 45^\circ + \sin 15^\circ$ 。
6. 求 $\cos 120^\circ$ 。
7. $y = 2 \cos(4x)$ ，求振幅。
8. $\cos 60^\circ \cos 30^\circ$ 。
9. $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ 。
10. $\sin \theta \sin 2\theta$ ，化簡。
11. 求 $\sin 105^\circ$ 。
12. $y = 4 \sin(3x - \pi)$ ，求週期。
13. 化簡 $\cos 45^\circ \sin 15^\circ$ 。
14. 一波 $y = 5 \sin(2t)$ ，求最大值。

15. 求 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \leq x < 2\pi$ 。
16. 化簡 $\sin 75^\circ + \sin 45^\circ$ 。
17. $y = 2 \cos(3x + \frac{\pi}{2})$, 求週期。
18. 化簡 $\sin 60^\circ \sin 30^\circ$ 。
19. 一物振動 $y = 3 \sin(4t)$, 求頻率。
20. 求 $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ$ 。
21. $\cos x = -\frac{1}{2}$, $0 \leq x < 2\pi$ 。
22. $y = 5 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 求相位移。
23. 化簡 $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$ 。
24. 波動 $y = 4 \cos(5t)$, 求週期。
25. 求 $\sin 285^\circ$ 。
26. $\sin 2\theta \cos \theta$, 化簡。
27. $y = 3 \sin(2x + \pi)$, 求振幅。
28. 化簡 $\sin 165^\circ - \sin 105^\circ$ 。
29. 一鐘擺 $y = 2 \cos(6t)$, 求週期。
30. 求 $\sin 45^\circ \cos 15^\circ + \cos 45^\circ \sin 15^\circ$ 。
31. 積化和差的用途?
32. 和差化積如何推導?
33. 證明 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ 。
34. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 的意義?
35. 證明 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ 。
36. 週期如何定義?
37. 證明 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ 。
38. 相位移的作用?
39. 證明 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ 。
40. 二倍角公式的應用?
41. 化簡 $\sin 3\theta \cos \theta$ 。
42. $y = 3 \sin(2x) + 4 \cos(2x)$, 求振幅。
43. 化簡 $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$ 。

44. 求 $\cos x = 0$, $0 \leq x < 2\pi$ 。
45. $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 求最小值。
46. 化簡 $\sin 135^\circ + \sin 45^\circ$ 。
47. $\sin x + \cos x = 1$, $0 \leq x < 2\pi$ 。
48. 化簡 $\cos 30^\circ \sin 60^\circ$ 。
49. $y = 5 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$, 求最大值。
50. 求 $\sin 105^\circ \cos 15^\circ$ 。
51. $y = \sin x + \cos x$, 求振幅。
52. 證明 $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ 。
53. 化簡 $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ 。
54. $y = 4 \sin(2x) - 3 \cos(2x)$, 求振幅。
55. 化簡 $\cos 255^\circ - \cos 105^\circ$ 。
56. $\sin 2x = \cos x$, $0 \leq x < 2\pi$ 。
57. 證明 $\cos 2\theta \sin \theta = \frac{1}{2}[\sin 3\theta - \sin \theta]$ 。
58. $y = 3 \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$, 求最小值。
59. 化簡 $\sin 75^\circ \cos 45^\circ + \cos 75^\circ \sin 45^\circ$ 。
60. 求 $\cos 135^\circ + \cos 45^\circ$ 。

11 平面向量

11.1 觀念與公式

11.1.1 基本概念

向量表示大小與方向。

定義：

- 幾何向量：箭頭表示。
- 坐標向量： $\vec{v} = (x, y)$ 。
- 模： $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

應用：位置表示。

大學技巧：線性空間定義。

11.1.2 向量運算

基本運算規則。

公式：

- 加法： $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ 。
- 減法： $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ 。
- 數乘： $k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$ 。
- 內積： $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 。

應用：方向與大小。

大學技巧：矩陣表示。

11.1.3 向量性質

幾何與代數性質。

性質：

- 平行： $\vec{a} = k\vec{b}$ 。
- 垂直： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。
- 單位向量： $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ 。

應用：夾角計算。

大學技巧：投影。

11.1.4 幾何應用

向量在平面幾何中應用。

公式：

- 中點向量： $\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ 。
- 三角形面積： $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \cdot \vec{b} \sin \theta|$ （或行列式）。

應用：物理與測量。

大學技巧：外積 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 。

11.2 例題解析

11.2.1 例題 1：基本運算

$\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (1, -2)$ ，求 $\vec{a} + \vec{b}$ 與 $|\vec{a}|$ 。

解： $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$ ， $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。

11.2.2 例題 2：內積與夾角

$\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, -1)$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 與夾角。

解： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 1$ 。

$|\vec{a}| = \sqrt{5}$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{10}$ ， $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{50}}$ ， $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)$ 。

11.2.3 例題 3：平行與垂直

判斷 $\vec{a} = (2, -4)$ 與 $\vec{b} = (-1, 2)$ 是否平行。

解： $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，平行。

11.2.4 例題 4：幾何應用

點 $A(1, 1)$ ， $B(3, 5)$ ，求中點向量與 AB 長度。

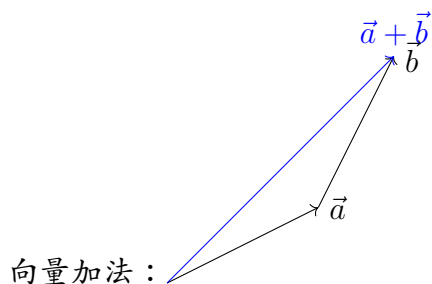
解： $\vec{AB} = (2, 4)$ ，中點 $\vec{M} = (2, 3)$ ， $|\vec{AB}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 。

11.2.5 例題 5：應用題

力 $\vec{F} = (3, 4)$ 沿 $\vec{d} = (1, 1)$ 分解，求分量。

解：投影 $|\vec{F}| \cos \theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{7}{\sqrt{2}}$ ，分量 $\frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right)$ 。

11.3 圖形展示



11.4 題庫

1. $\vec{a} = (2, 3)$ ，求 $|\vec{a}|$ 。
2. $\vec{a} = (1, -1)$ ， $\vec{b} = (2, 3)$ ，求 $\vec{a} + \vec{b}$ 。
3. $\vec{a} = (4, 0)$ ，求 $2\vec{a}$ 。
4. $\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。
5. $\vec{a} = (1, 1)$ ，求單位向量。
6. $\vec{a} = (5, -2)$ ，求 $|\vec{a}|$ 。
7. $\vec{a} = (2, -1)$ ， $\vec{b} = (1, 2)$ ，求 $\vec{a} - \vec{b}$ 。
8. $\vec{a} = (0, 3)$ ， $\vec{b} = (4, 0)$ ，求夾角。
9. $\vec{a} = (6, 8)$ ，求 $|\vec{a}|$ 。
10. $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, 1)$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。
11. $\vec{a} = (3, 1)$ ， $\vec{b} = (2, -2)$ ，求 $\vec{a} + \vec{b}$ 與夾角。
12. 點 $A(2, 3)$ ， $B(5, 7)$ ，求 \vec{AB} 與長度。
13. $\vec{a} = (1, 3)$ ， $\vec{b} = (-3, 9)$ ，判斷是否平行。
14. $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ ，求是否垂直。
15. 力 $\vec{F} = (4, 3)$ 沿 $\vec{d} = (1, 0)$ ，求分量。
16. $\triangle ABC$ ， $A(0, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(1, 3)$ ，求面積。
17. $\vec{a} = (5, 2)$ ， $\vec{b} = (1, -1)$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 與 θ 。
18. 點 $P(1, 2)$ ， $Q(4, 6)$ ，求中點向量。
19. $\vec{a} = (3, -2)$ ，分解成 $\vec{b} = (1, 1)$ 方向的分量。
20. $\vec{a} = (4, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 3)$ ，求面積。

21. $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 。
22. 點 $A(0, 1)$, $B(3, 4)$, 求 $|\vec{AB}|$ 。
23. $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (2, 2)$, 求夾角。
24. $\vec{F} = (6, 8)$ 沿 $\vec{d} = (3, 4)$, 求分量大小。
25. $\triangle ABC$, $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 4)$, 求面積。
26. $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (4, 1)$, 求 $\vec{a} - \vec{b}$ 。
27. 點 $P(0, 0)$, $Q(2, 3)$, $R(4, 1)$, 求 $\vec{PQ} + \vec{PR}$ 。
28. $\vec{a} = (5, 0)$, $\vec{b} = (0, 5)$, 求是否垂直。
29. $\vec{a} = (3, 4)$, 求單位向量。
30. $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, -1)$, 求 $2\vec{a} - \vec{b}$ 。
31. 向量模的意義？
32. 內積如何判斷垂直？
33. 平行向量的條件？
34. 向量加法的幾何意義？
35. 單位向量的定義？
36. 內積與夾角的關係？
37. 如何用向量求面積？
38. 數乘向量的效果？
39. 向量分解的原理？
40. 中點向量的公式？
41. $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 求投影分量於 \vec{b} 。
42. $\triangle ABC$, $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 3)$, 求面積。
43. $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 4)$, 求 θ 。
44. $\vec{a} = (5, 2)$, 分解成 $\vec{b} = (1, 1)$ 與垂直分量。
45. $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, -2)$, 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 。
46. 點 $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, $C(4, 1)$, 求 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 。
47. $\vec{a} = (4, -3)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 求面積。
48. $\vec{F} = (6, 8)$ 沿 $\vec{d} = (1, 0)$, 求分量與垂直分量。

49. $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (-1, 3)$, 求 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 。
50. $\triangle ABC$, $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(4, 0)$, 求中點 M 向量。
51. $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, -1)$, 求 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量。
52. $\triangle ABC$, $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 4)$, 求面積與 \vec{AC} 單位向量。
53. $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 求 $\vec{a} + \vec{b}$ 與面積。
54. $\vec{F} = (5, 5)$ 分解成 $\vec{d} = (1, 0)$ 與垂直分量。
55. 點 $A(1, 1)$, $B(4, 3)$, $C(2, 5)$, 求面積。
56. $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (4, 1)$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 與 θ 。
57. $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 與夾角。
58. $\triangle ABC$, $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(2, 4)$, 求面積。
59. $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (-2, 5)$, 求投影與垂直分量於 \vec{b} 。
60. 點 $P(0, 0)$, $Q(2, 3)$, $R(4, 1)$, 求 $\vec{PQ} \cdot \vec{PR}$ 。

12 空間向量

13 空間中平面與直線方程式

14 矩陣

15 題庫解答

15.1 CH1 題庫解答

1. $(2 + 3i) + (4 - 5i) = 6 - 2i$ 。
2. $|5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ 。
3. $|x - 2| = 3 \implies x = 5$ 或 -1 。
4. $\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$ 。
5. $(1 + i)^2 = 2i$ ， $(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$ 。
6. $|2x + 1| = 5 \implies x = 2$ 或 -3 。
7. $|-3 + 4i|^2 = 9 + 16 = 25$ 。
8. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ，和為 $8\sqrt{2}$ 。
9. $|x + 3| = |x - 1|$ ，分段得 $x = -1$ 。
10. $\sqrt{5 + 12i}$ 模為 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ 。
11. $3 < x < 7$ 。
12. $ab \leq 36$ ， $a = b = 6$ 時為 36 。
13. $|10 - x|$ 。
14. $\frac{8}{ab}$ ， $ab \leq 16$ ，最小值 0.5 ($a = b = 4$)。
15. $90 \leq x \leq 110$ 。
16. $|x| + |y| \leq 2$ ， $x = y = 1$ 時為 2 。
17. $1 < x < 5$ 。
18. $abc \leq 125$ ， $a = b = c = 5$ 時為 125 。
19. $x < 0.5$ 。
20. $a + b \leq 2\sqrt{2}$ ， $a = b = \sqrt{2}$ 時達成。
21. $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ ，得證。
22. $x = 0$ 。

23. $a = b$ 。
24. 是，因 $|z| = |\bar{z}|$ 。
25. x 到 a 的距離小於 b 。
26. $|x| \leq |x - y| + |y|$ ，同理得證。
27. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。
28. 是，因 $|-z| = |z|$ 。
29. 否，如 $x = 1, y = -1$ 。
30. $(a - b)^2 \geq 0$ ，整理得證。
31. $x \in [-1, 1]$ 。
32. 圓心 $(1, 0)$ ，半徑 2。
33. $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ ，得證。
34. $x \in [2, 3]$ 。
35. $\sqrt{2}$ ， $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
36. 實部為 0。
37. $x < -0.5$ 。
38. 最小值 50， $a = b = 5$ 。
39. $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 。
40. z 在實軸上。
41. $x \in [1, 4]$ 。
42. 最小值 0， $a = b = 3$ 。
43. $(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}})^2 \geq 0$ ，得證。
44. z 在 $x = y$ 直線上。
45. 最小值 3， $x = y = z = 1$ 。
46. $x \in [-4, -2] \cup [0, 4]$ 。
47. $z = 2 \pm i\sqrt{3}$ 。
48. $(a - 2b)^2 + (2b)^2 \geq 0$ ， $a = 2b$ 時成立。
49. $x = 0$ 。
50. 最小值 9， $a = b = c = 1$ 。
51. 2 個解。

52. 最小值 0, $x = y = 0$ 。
53. 用 AM-GM 與 HM-GM 證。
54. $x \in [0, 4]$ 。
55. 橢圓。
56. $\sqrt{2}$ 。
57. 最小值 27, $a = b = c = 3$ 。
58. $x = -\frac{1}{3}$ 。
59. 最大值 4。
60. $2 + i$ (模為 $\sqrt{10}$)。

15.2 CH2 題庫解答

1. $y + 2 = 3(x - 1) \implies 3x - y - 5 = 0$ 。
2. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, 中心 $(-1, 2)$, 半徑 3。
3. $m = \frac{2}{3}$, y 截距 2。
4. $y = \frac{4}{3}x$ 。
5. 中心 $(1, -2)$, 半徑 3。
6. $d = \frac{|2+1-3|}{\sqrt{2}} = 0$ 。
7. $x^2 + (2x)^2 = 1 \implies 5x^2 = 1$, $\Delta > 0$, 相交。
8. $m = 2$, $2x - y - 1 = 0$ 。
9. $x = 2$, $y = \pm 2$, 交點 $(2, 2)$ 與 $(2, -2)$ 。
10. $d = \frac{|0-20+10|}{\sqrt{25}} = 2$ 。
11. 垂足 $(1, 2)$, 距離 $\sqrt{2}$ 。
12. $x^2 + y^2 = 25$ 。
13. $d = \sqrt{13}$, $m = \pm \frac{2}{3}$ 。
14. 垂線 $y = x$, 交點 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。
15. $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ 。
16. $x = 1$, 交點 $(1, 1)$ 。
17. $|k| < \sqrt{2}$ 。
18. $y = \pm x + 3$ 。

19. 如 $(1, 2)$ ，滿足條件。
20. $x = 1 + 2 \cos \theta$ ， $y = 1 + 2 \sin \theta$ ， $m = 1$ 時，點 $(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ 。
21. 內積為 0，得證。
22. 無實數解，空集。
23. $\Delta < 0$ 。
24. 垂線長度。
25. 2 個。
26. 切線與半徑內積為 0。
27. 平行。
28. 相切。
29. 方向向量參數化。
30. 法向量垂直於直線。
31. $x = 1 \pm \sqrt{2}$ ，交點 $(1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1)$ ， $(1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2} + 1)$ 。
32. $y = -x$ 。
33. $x + y - 5 = 0$ 。
34. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 。
35. $|k| < 5$ 。
36. $x = 1$ 。
37. $2\sqrt{5}$ 。
38. 不存在（半徑矛盾）。
39. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ， $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。
40. 切點到圓心等於半徑。
41. $y = x - 2$ ， $y = -x + 2$ 。
42. $|m| < \sqrt{3}$ 。
43. 垂足 $(\frac{12}{13}, \frac{18}{13})$ ，距離 $\frac{9}{\sqrt{13}}$ 。
44. 2。
45. $a^2 + b^2 = 1$ 。
46. $|m - 1| < 1$ 。
47. $(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ ， $(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ 。

48. $x^2 + y^2 = 2$ °
49. $3x - y - 1 = 0$, 交點 $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ °
50. $|m| > 1$ °
51. $(\sqrt{5} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$ °
52. $k = \pm 2$ °
53. $y = x$ °
54. $k = \pm 2$ °
55. $2\sqrt{2}$ °
56. $|m| < 1$ °
57. 垂足 $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$, 距離 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ °
58. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ °
59. $(1 + \sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2})$ °
60. $|m| < \sqrt{3}$ °

15.3 CH3 題庫解答

1. $x^3 - x^2 - x + 1$ °
2. $(x-2)(x^2 + 2x + 4)$ °
3. $P(1) = -1$ °
4. $(x-2)(x+2)(x^2 + 4)$ °
5. $P(2) = 5$ °
6. 商 $x^2 - 2x + 1$, 餘數 0 °
7. $(x-2)^2$ °
8. $P(0) = 1$, $P'(0) = -1$, $1 - x$ °
9. $P(-1) = -4$ °
10. $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$ °
11. $x = 1$ (三重根) °
12. $\sum r_i = 5$, $k = 8$ °
13. $P(0) = 1$ °
14. $P(x) = x^2 - x$ °

15. $x = 0, \pm\sqrt{3}$ 。
16. 6。
17. $P(0) = -1$ 。
18. $(-\infty, -5)$ 減, $(-5, 1)$ 增, $(1, \infty)$ 減。
19. $x \rightarrow \infty$, $P(x) \rightarrow \infty$ 。
20. $x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ 。
21. 用多項式除法證。
22. $P'(a) = 0$ 。
23. 求未知係數。
24. 0, 1, 2, 3。
25. $P^{(n+1)}(x) = 0$ 。
26. $P(a) = 0$ 。
27. $a_n < 0$ 且 n 為奇數。
28. $P'(x) > 0$, 單調增。
29. n 階差商為常數。
30. $rx + s$ 。
31. $x = 1, 2$ 。
32. $x = 0, \pm 1$ 。
33. $x = 1$ (二重根)。
34. $x^2 - x$ 。
35. $P(1) = 0$, $P'(1) = 3$, $3(x - 1)$ 。
36. $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{3}$ 。
37. $x = 1$, 1 個。
38. $x \rightarrow \infty$, $P(x) \rightarrow \infty$ 。
39. $P(x) = x^2 + 1$ 。
40. $x = 1$ (二重根), 2。
41. $x = \pm\sqrt{3}$, 極值 $3, -\frac{9}{4}$ 。
42. $(x - 1)^3$ 。
43. 3 個。

- 44. $P(3) = 2$ °
- 45. $x = \pm\sqrt{3}$, 極值 $-3, 0$ °
- 46. $x = -1, 2, 3$ °
- 47. 商 $x^3 - 2x^2 + 1$, 餘數 0 °
- 48. $P(-1) = -2$ °
- 49. $x = 1, 2, 3$, 和 6 , 乘積 6 °
- 50. $P(x) = x^2 + 1$ °
- 51. $x = 1$, 極值 0 °
- 52. $P(1) = -1$ °
- 53. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 減 °
- 54. $P(2) = 3$ °
- 55. $x = \frac{2}{3}$ °
- 56. $0 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2$ °
- 57. $x \rightarrow \infty$, $P(x) \rightarrow \infty$ °
- 58. $x = -1, 2, 3$ °
- 59. $x^2 - 2x - 1$ °
- 60. $P(1) = -1$ °

15.4 CH4 解答

- 1. $a_{10} = 5 + 9 \cdot 3 = 32$ °
- 2. $S_5 = 2 \frac{1-2^5}{1-2} = 62$ °
- 3. $S_{10} = 195$ °
- 4. $d = 2$ °
- 5. $a_6 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{32}$ °
- 6. $S_{20} = 10 \cdot (2 - 19) = -170$ °
- 7. $a_8 = 1 + 7 \cdot 3 = 22$ °
- 8. $S_4 = 1 \cdot \frac{1-(-2)^4}{1-(-2)} = -5$ °
- 9. $a_{15} = 10 + 14 \cdot 2 = 38$ °
- 10. $S_\infty = \frac{4}{1-0.5} = 8$ °

11. $S_{10} = 5 \cdot (1000 + 2800) = 19000$ 元。

12. $S_{\infty} = 10 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{0.8}{1-0.8} = 90$ 公尺。

13. $S_6 = 1 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} = 63$ 。

14. $n = 9$ 。

15. $S_5 = 5000 \cdot \frac{1-0.9^5}{0.1} \approx 19531$ 元。

16. $a_n = 6n - 3$ 。

17. $d = 2$ 。

18. $r = 2$ 。

19. $a_5 = 15$ 。

20. $S_{\infty} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = 7.5$ 。

21. 用歸納法證。

22. 不存在。

23. 基礎步與歸納步。

24. $a_n = 2n - 1$ 。

25. 用幾何級數求和。

26. 兩種。

27. $S_n = 2^n - 1$ 。

28. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 。

29. $a_n = 2n$ 。

30. $|r| < 1$ 。

31. $n = 7$ 。

32. $a_5 = 162, S_5 = 242$ 。

33. $a_7 = 13$ 。

34. $a_n = 2^{n-1}$ 。

35. $n = 8$ 。

36. $n = 7$ 。

37. $S_{10} = 255$ 。

38. $S_{100} = 0$ 。

39. $S_5 = 195$ 。

- 40. $a_6 = 243$ °
- 41. $S_{10} = 110$ °
- 42. $n = 10$ °
- 43. $n = 8$ °
- 44. $n = 6$ °
- 45. $a_5 = 31$ °
- 46. $a_n = n^2$ °
- 47. $S_6 = -21$ °
- 48. $n = 10$ °
- 49. $S_{10} = 1023$ °
- 50. $S_8 = 92$ °
- 51. $n = 4$ °
- 52. $a_{20} = 77, S_{20} = 790$ °
- 53. $S_5 = 55$ °
- 54. $S_{\infty} = 15$ °
- 55. $S_{15} = 0$ °
- 56. $a_8 = 21$ °
- 57. $S_{10} \approx 65.6$ °
- 58. $n = 22$ °
- 59. $S_{10} = 125$ °
- 60. $n = 7$ °

15.5 CH5 題庫解答

- 1. $3^{-1} = \frac{1}{3}$ °
- 2. 2 °
- 3. $\log_5 3125 = 5$ °
- 4. 2 °
- 5. 4 °
- 6. 8 °

7. -3° 。
8. 10° 。
9. 3° 。
10. 125° 。
11. $x = 4^\circ$ 。
12. $1000 \cdot (1.05)^5 \approx 1276.28$ 元。
13. $x = 10^\circ$ 。
14. 0.933 ，約 6.7% 。
15. $x = 4^\circ$ 。
16. $a = 2^\circ$ 。
17. $t \approx 35$ 年。
18. $x = 2^\circ$ 。
19. $pH = 7^\circ$ 。
20. $x = 1.5^\circ$ 。
21. 由定義證。
22. $a > 1$ 增， $0 < a < 1$ 減。
23. 用指數形式證。
24. $x = y^\circ$ 。
25. $x > 0^\circ$ 。
26. 用指數形式證。
27. $b = a^c$ 。
28. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ 。
29. 互為反函數，鏡像對稱。
30. $(-\infty, \infty)^\circ$ 。
31. $x \approx 1.585^\circ$ 。
32. $x = 2^\circ$ 。
33. $9 + 9 \ln 3(x - 2)^\circ$ 。
34. $x = 1.5^\circ$ 。
35. $a = 10^\circ$ 。

36. $t \approx 6.93$ 小時。

37. $x \approx 2.29$ 。

38. $x = \pm 9$ 。

39. $x = 3$ 。

40. $\frac{1}{x} = 1$ 。

41. $x \approx 2.27$ 。

42. $x = 3$ 。

43. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ 。

44. $x \approx 1.585$ 。

45. $a = 9$ 。

46. $t \approx 0.63$ 小時。

47. $x = 1, 2$ 。

48. $x = 2$ 。

49. $x = 4$ 。

50. $\ln 2$ 。

51. $x \approx 1.76$ 。

52. $x = 11$ 。

53. $1 + x + \frac{x^2}{2}$ 。

54. $x = 1$ 。

55. $a > 0$ (恆等)。

56. 2593.74 人。

57. $x \approx 0.96$ 。

58. $x = \pm 6$ 。

59. $x = 5$ 。

60. $\frac{1}{9 \ln 3}$ 。

15.6 排組題庫解答

1. 60°
2. 15°
3. 24°
4. $\frac{3!}{2!} = 3^\circ$
5. 24°
6. 42°
7. 56°
8. $\frac{3!}{2!} = 3^\circ$
9. $(4-1)! = 6^\circ$
10. 5°
11. $5! \cdot 2/2 = 48^\circ$
12. $\binom{5}{2} = 10^\circ$
13. $(4-1)! - 2 \cdot 2 = 2^\circ$
14. $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} / 2 = 210^\circ$
15. $2^5 - 1^5 = 31^\circ$
16. $3^6 = 729^\circ$
17. $\binom{8}{4} - \binom{5}{4} = 65^\circ$
18. 240°
19. $\frac{5!}{2} = 60^\circ$
20. $\binom{7}{3} - \binom{4}{3} = 31^\circ$
21. $(3-1)! = 2^\circ$
22. $3! + 3! + 2! = 14^\circ$
23. $\binom{4}{2} + \binom{6}{3} = 26^\circ$
24. $\binom{5}{1} = 5^\circ$
25. $4^3 = 64^\circ$
26. $6! \cdot 2/2 \cdot \frac{6!}{2}/2 = 8640^\circ$
27. 14°
28. $P(6, 3) - P(5, 2) = 110^\circ$

29. $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} / 2 = 210$ 。

30. $P(5, 3) - 2 \cdot P(4, 2) = 36$ 。

31. $k!(n-k)! = (n-k)!k!$ 。

32. 固定一點，減 1 自由度。

33. 用組合定義證。

34. $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 。

35. 找 k 次項係數。

36. 不越 $y = x$ 的路徑。

37. n^k 。

38. 逐步選取證。

39. 排列有序，組合無序。

40. 2^n 。

41. $1 \cdot P(5, 2) = 20$ 。

42. 540。

43. $\frac{5!}{2!1!1!1!1!} = 60$ 。

44. 42。

45. $\binom{6}{2} = 15$ 。

46. -567 。

47. $6! - 3 \cdot 5! + 3 \cdot 4! = 312$ 。

48. $5^4 - 4^4 = 369$ 。

49. $5! \cdot 4 = 480$ 。

50. $\binom{4}{3} + \binom{5}{2} = 14$ 。

51. $5! - 4! = 96$ 。

52. 240。

53. $3^5 - 2^5 = 211$ 。

54. $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ 。

55. $\binom{7}{2}\binom{3}{2} + \binom{7}{3}\binom{3}{1} = 168$ 。

56. $4! \cdot 3 = 72$ 。

57. 1792。

58. $\binom{6}{1} + \binom{5}{1} = 11$ 。

59. $\frac{5!}{2} \cdot \frac{4!}{2} = 720$ 。

60. $\binom{10}{2} + \binom{10}{1}\binom{8}{1} + \binom{10}{5} = 341$ 。

15.7 數據分析題庫解答

1. 6。

2. 6。

3. 1。

4. 10。

5. 2。

6. 5。

7. 24。

8. 20。

9. 2.8。

10. 1.22。

11. 150, 152.5, 160, 167.5, 170。

12. 5.48。

13. 無離群值。

14. 1。

15. 5.5。

16. 25, 10。

17. 對稱。

18. 1。

19. 150, 167.5。

20. 70，無離群值。

21. 1000。

22. -1。

23. 40, 50, 60, 75, 90。

24. 7.07。

25. 32.5, 15°。
26. $y = 0.2x + 6$ °。
27. 50°。
28. 40, 70°。
29. 7，略°。
30. 1°。
31. 平均數受極值影響，中位數不受°。
32. 標準差越大，分散越大°。
33. 最小、 Q_1 、中位數、 Q_3 、最大°。
34. $-1 \leq r \leq 1$ ，正負相關°。
35. 平均數 $>$ 中位數°。
36. 全距整體，IQR 中間 50%°。
37. 差平方平均°。
38. 點分佈趨勢°。
39. $Q_1 - 1.5IQR$ 或 $Q_3 + 1.5IQR$ 外°。
40. 鐘形，68-95-99.7°。
41. 1°。
42. 2°。
43. 2.5°。
44. $y = 0.5x - 30$ °。
45. 40, (-10, 70)°。
46. 68%°。
47. 1°。
48. 4.74°。
49. 1°。
50. $y = 5x + 145$ °。
51. $s = 3.16, \sigma = 2.83$ °。
52. 200°。
53. 97.5%°。

54. 1°

55. $r = 1, y = x - 110^\circ$

56. $8.25, 40^\circ$

57. $50, 1^\circ$

58. $y = \frac{2}{3}x + 50^\circ$

59. $, \quad^\circ$

60. 0.97°

15.8 機率題庫解答

1. $\frac{1}{6}^\circ$

2. $\frac{3}{5}^\circ$

3. $\frac{1}{6}^\circ$

4. $\frac{1}{4}^\circ$

5. $\frac{3}{4}^\circ$

6. $\frac{4}{7}^\circ$

7. $\frac{1}{2}^\circ$

8. $\frac{1}{4}^\circ$

9. 3.5°

10. $\frac{2}{5}^\circ$

11. $\frac{9}{49}^\circ$

12. $\frac{2}{5}^\circ$

13. $\frac{1}{2}^\circ$

14. $\frac{15}{56}^\circ$

15. $\frac{4}{663}^\circ$

16. $\frac{4}{5}^\circ$

17. $\frac{4}{15}^\circ$

18. $\frac{3}{8}^\circ$

19. $\frac{1}{3}^\circ$

20. $\frac{26}{36}^\circ$

21. $\frac{15}{36}$ 。
22. $\frac{13}{20}$ 。
23. $\frac{4}{5}$ 。
24. $\frac{15}{28}$ 。
25. 0.5。
26. $\frac{15}{28}$ 。
27. $\frac{1}{2}$ 。
28. $\frac{127}{219}$ 。
29. 1。
30. $\frac{1}{12}$ 。
31. 所有可能結果集合。
32. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
33. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 。
34. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 。
35. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 。
36. 理論 vs 頻率。
37. 計數樣本空間。
38. 隨機變量平均值。
39. $0 \leq P \leq 1$ 。
40. 分步計算。
41. $\frac{1}{3}$ 。
42. $\frac{1}{5}$ 。
43. $\frac{1}{20}$ 。
44. $\frac{50}{125}$ 。
45. $\frac{26}{51}$ 。
46. 1.5。
47. $\frac{4}{7}$ 。
48. $\frac{1}{7}$ 。
49. $\frac{11}{30}$ 。

50. 1.2°

51. $\frac{7}{10}^\circ$

52. $\frac{1}{5}^\circ$

53. $\frac{2}{7}^\circ$

54. $\frac{148}{243}^\circ$

55. 3.75°

56. $\frac{48}{1275}^\circ$

57. $\frac{27}{56}^\circ$

58. $\frac{25}{216}^\circ$

59. $\frac{5}{12}^\circ$

60. 7°

15.9 三角比題庫解答

1. $4\sqrt{2}^\circ$

2. 10°

3. 14°

4. $\sqrt{11}^\circ$

5. 10°

6. 6°

7. $11\sqrt{3}^\circ$

8. 5°

9. 10.5°

10. $\frac{7}{2\sqrt{3}}^\circ$

11. 7°

12. $3\sqrt{2}^\circ$

13. $25\sqrt{6}^\circ$

14. 11°

15. $6\sqrt{3}^\circ$

16. $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)^\circ$

17. $7\sqrt{2}$ 。
18. 20。
19. $6, \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。
20. $6\sqrt{6}$ 。
21. $5\sqrt{3}$ 。
22. $14\sqrt{3}$ 。
23. 6。
24. 10。
25. 5。
26. $9\sqrt{2}$ 。
27. 15。
28. 8。
29. $\frac{6}{\sqrt{3}}$ 。
30. 60。
31. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ，推 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 。
32. 直角三角形延伸證。
33. 底·高證。
34. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 。
35. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 證。
36. $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 。
37. 三邊平分證。
38. $2R = \frac{a}{\sin A}$ 。
39. 餘弦定理推 S 。
40. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 證。
41. $\cos^{-1}(\frac{13}{28})$ 。
42. 8。
43. $\sqrt{13}, \frac{5}{2}$ 。
44. $20\sqrt{15}, \frac{20\sqrt{15}}{21}$ 。
45. $11\sqrt{3}$ 。

46. $\sin^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)^\circ$
47. $7\sqrt{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}^\circ$
48. 15°
49. $3\sqrt{3}^\circ$
50. $\sqrt{29}, 14\sqrt{2}^\circ$
51. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{14}\right), \frac{7}{2\sqrt{3}}^\circ$
52. $5\sqrt{2}^\circ$
53. $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right), \frac{8}{3}^\circ$
54. $24, 4^\circ$
55. $22.5^\circ, \frac{5\sqrt{3}}{2}^\circ$
56. $\frac{9}{4\sqrt{5}}, 28\sqrt{5}^\circ$
57. $6, 10^\circ$
58. $6\sqrt{2}, 6^\circ$
59. $55\sqrt{11}, \frac{55\sqrt{11}}{33}^\circ$
60. 角平分線證。

15.10 三角函數題庫解答

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}^\circ$
2. $\frac{1}{2}^\circ$
3. π°
4. $\frac{\sqrt{3}}{4}^\circ$
5. $\frac{\sqrt{6}}{2}^\circ$
6. $-\frac{1}{2}^\circ$
7. 2°
8. $\frac{\sqrt{3}}{4}^\circ$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}^\circ$
10. $\frac{1}{2}[\cos \theta - \cos 3\theta]^\circ$
11. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}^\circ$

12. $\frac{2\pi}{3}$ 。
13. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$ 。
14. 5。
15. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 。
16. $\sqrt{2}$ 。
17. $\frac{2\pi}{3}$ 。
18. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。
19. 2。
20. $-\sqrt{2}$ 。
21. $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 。
22. $\frac{\pi}{8}$ 。
23. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
24. $\frac{2\pi}{5}$ 。
25. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 。
26. $\frac{1}{2}[\sin 3\theta + \sin \theta]$ 。
27. 3。
28. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
29. $\frac{\pi}{3}$ 。
30. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
31. 將乘積轉和差。
32. 令 $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 等證。
33. 用和差公式推。
34. 單位圓性質。
35. 用 $\sin u \cos v$ 推。
36. 重複間隔。
37. 用 $\cos(\alpha + \beta)$ 證。
38. 平移圖形。
39. 用 $\sin(\alpha - \beta)$ 證。

40. 化簡角度。
41. $\frac{1}{2}[\sin 4\theta + \sin 2\theta]$ 。
42. 5° 。
43. $-\sqrt{2}$ 。
44. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 。
45. -2 。
46. $\sqrt{2}$ 。
47. $0, \frac{\pi}{2}$ 。
48. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。
49. 5° 。
50. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 。
51. $\sqrt{2}$ 。
52. 用 $\sin(2\theta + \theta)$ 。
53. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。
54. 5° 。
55. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。
56. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 。
57. 用積化和差證。
58. -3° 。
59. 1° 。
60. 0° 。

15.11 平面向量題庫解答

1. $\sqrt{13}$ 。
2. $(3, 2)$ 。
3. $(8, 0)$ 。
4. 5° 。
5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 。
6. $\sqrt{29}$ 。

7. $(1, -3)^\circ$
8. 90°
9. 10°
10. 0°
11. $(5, -1), \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{10}\sqrt{5}}\right)^\circ$
12. $(3, 4), 5^\circ$
13. 是, $\vec{b} = -3\vec{a}$
14. 是, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
15. $(4, 0)^\circ$
16. 3°
17. $3, \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{29}\sqrt{2}}\right)^\circ$
18. $(2.5, 4)^\circ$
19. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\circ$
20. 6°
21. $\sqrt{10}^\circ$
22. $3\sqrt{2}^\circ$
23. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^\circ$
24. 10°
25. 2.5°
26. $(-2, -4)^\circ$
27. $(6, 4)^\circ$
28. 是, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
29. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^\circ$
30. $(-1, 5)^\circ$
31. 大小
32. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
33. $\vec{a} = k\vec{b}$
34. 平行四邊形

- 35. $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ 。
- 36. $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 。
- 37. 內積或行列式。
- 38. 縮放大小。
- 39. 投影分量。
- 40. $\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ 。
- 41. $-\frac{4}{\sqrt{5}}$ 。
- 42. 6。
- 43. $\cos^{-1} \left(-\frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{20}} \right)$ 。
- 44. $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$ 。
- 45. $\sqrt{5}$ 。
- 46. 5。
- 47. 11。
- 48. $(6, 0), (0, 8)$ 。
- 49. $(8, 11)$ 。
- 50. $(2, 1)$ 。
- 51. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 。
- 52. $6, \left(0, \frac{4}{5} \right)$ 。
- 53. $(1, 3), 7$ 。
- 54. $(5, 0), (0, 5)$ 。
- 55. 4。
- 56. $10, \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \right)$ 。
- 57. $1, 45^\circ$ 。
- 58. 10。
- 59. $\left(\frac{7}{29}, \frac{35}{29} \right), \left(\frac{109}{29}, -\frac{14}{29} \right)$ 。
- 60. 10。