Probabilități și statistică

$\boxed{\text{Curs 2:}}$ 10. oct.

Câmp de probabilitate. Operații cu evenimente. Formule de calcul

exp. aleator $\rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$

Ω — spațiul stărilor — mulțimea evenimentelor elementare

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ — mulțimea ev. posibile

$\boxed{\text{Proprietăți } \mathcal{F}}$

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

a), b), c) — algebră

c') $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

a), b) + c') = σ-algebră

Probabilitate

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$$
$$A \mapsto p$$

→ Pp. că avem un experiment aleator și un eveniment A, de interes.

Repetăm experimentul (în condiții similare) de un nr. mare de ori N!

Not. $N(A)$ = nr. de realizări ale lui A

$$\boxed{\frac{N(A)}{N} = \text{frecvența relativă de realizare a lui } A}$$

$$P(A) \approx \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}$$

$$N(A) \in \{0, \dots, N\}$$

$$\Rightarrow \frac{N(A)}{N} \in [0,1]$$

$$\Rightarrow P(A) \in [0,1]$$

Dacă $A = \Omega$ (ev. sigur) $\Rightarrow N(\overset{\Omega}{A}) = N$

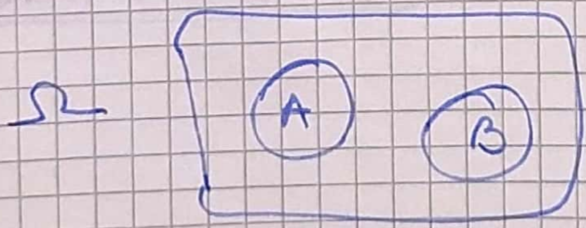
$$\Rightarrow \frac{N(\overset{\Omega}{A})}{N} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\Omega) = 1} \text{ (proprietate)}$$

$$P(A) \in [0,1]$$

$$P(\Omega) = 1$$

Fie $A, B \in \mathcal{F}$; $A \cap B = \emptyset$



$$A \cup B \in \mathcal{F}$$

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \Big/ :N$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

(! proprietate)
finit aditivitate

Măsură de probabilitate:

Def. O funcție $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ care verifică urm.

prop.: a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $(\forall)(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ disjuncte câte 2

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

s.n. <u>măsură de probabilitate</u> pe $(\Omega, \mathcal{F})$

// probabilitate

(σ-aditivitate)

<u>Experiment aleator</u> $\longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ = câmp de probabilitate.

<u>Exemplu</u>: a) Aruncatul cu banul.

— $\Omega = \{H, T\}$

— $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H,T\}\}$

— $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\{H\}) = p \in [0,1] \Rightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1-p$

$p = 1/2$ (moneda echilibrată)

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\{H,T\}, \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}}, \{0, p, 1-p, 1\} \right) \\ \text{câmpul de probabilitate} \end{array} \right\}$$

Exp. 2) Aruncatul cu zarul

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ are 2^6 elemente

izomorf cu $\{0,1\}^{\Omega} = \{ f : \Omega \to \{0,1\}\}$

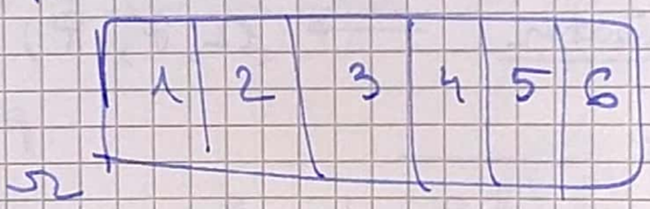
notație: $A^B = \{ f : A \to B \}$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\{i\}) = p_i \in [0,1]$, $i \in \{1, \dots 6\}$

suma $p_i = 1$



$\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$

$\Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_6 = 1$ pt. că $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Proprietăți (măs. de prob.):

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $(A_n)_n \in \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2

$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

c) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\Omega \cup \emptyset = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1$

(?) $\to$ sunt mult. finite

$\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset = 0)$

Scanned with CamScanner

Fie şirul $A_n = \emptyset$

$\bigcup_n A_n = \emptyset$

un prob. e între 0 şi 1

Pp. red. abs. $P(\emptyset) > 0$ — contradicție cu Ax

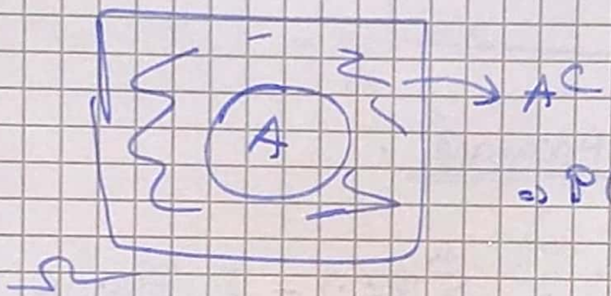
Aplicăm b) $P(\emptyset) = \underbrace{\sum_n P(\emptyset)}_{\infty}$

$\Downarrow$

$P(\emptyset) = 0$

d) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$; $A_1, A_2 \dots A_n$ disjuncte 2 câte 2.

e) $\underline{A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)}$ $\leftarrow$ de ce?



$A \cap A^c = \emptyset$

$A \cup A^c = \Omega$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(\underbrace{A \cup A^c}_{\parallel}) = P(\Omega) = 1$

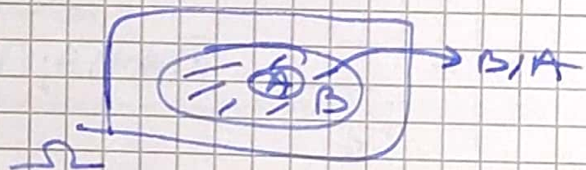
$P(A) + P(A^c)$

f) Proprietatea de monotonie:

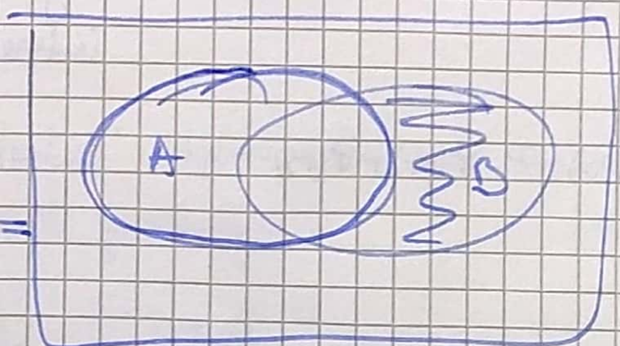
$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$\parallel$

$P(A) + P(B \setminus A)$



g) $A, B \in \mathcal{F}$; $P(A \cup B) = ?$



$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

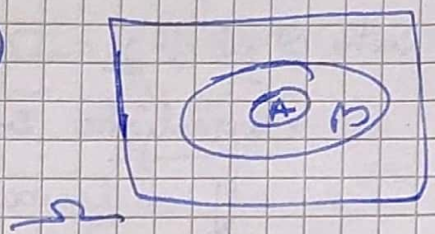
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) =$

$B = B \setminus (A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ca la PIE

g')

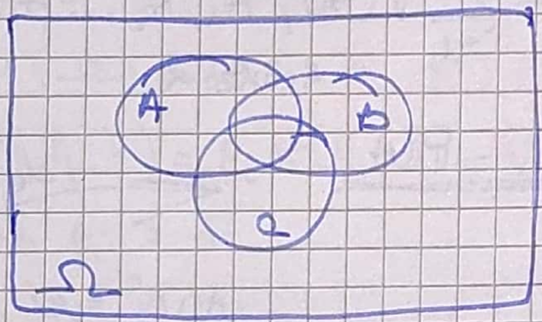


$A \subseteq B \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)}$

$\Downarrow$

$\boxed{\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)}$

A, B, C $\quad \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$



h) Formula lui Poincaré:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

→ demonstrație prin inducție (temă) (?)

$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) & \text{ineg. lui Bonferoni (:))} \\ & \text{interesantă pt. ineg. f. mici} \\ \mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 & \text{interesantă pt. ineg. f. mari} \end{cases}$

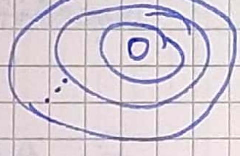
exc.: Dacă $\mathbb{P}(\{H\}) \in (0,1)$ e mai > decât 0

$A = \{$ va pica H mai devreme sau mai târziu $\}$

atunci ⇒ $\mathbb{P}(A) = 1$

—— $A = \bigcup_n A_n$ unde $A_n = \{$ vom obține H în n aruncări $\}$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Longrightarrow$



și cresc. ⇒ lim. e reuniunea

descresc. ⇒ lim. e intersecția

supremum $\cup$

infimum $\cap$

$\bigcup_n A_n = \lim_n A_n$

$$\boxed{\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)}$$

$\underbrace{1 - \underbrace{(1-p)^n}_{\to 0}}_{\to 1}$

$(1-p)^n$ → prob. să nu obținem niciun H în n ar.

Modelul clasic de ~~posibilit~~ probabilitate

⇔ Modelul lui Laplace

Ω

Fie $N \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ și considerăm un experiment aleator cu N rezultate posibile.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_N\}$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (2^N elemente)

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ (echirepartiția $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{N}}$
$i \in \{1, \dots N\}$)

repartiția uniformă discretă

reuniune finită

Fie $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{w_i \in A} \{w_i\}\Big) = \sum_{w_i \in A} \mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{w_i \in A} 1$$

ex: $A = \{w_1, w_7, w_8\} = \frac{3}{N}$

$$= \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

doar dacă [mulțimea rez. e finită
apare echirepartiția (fiecare ev. are aceeași prob. să se întâmple)

Analiză combinatorică:

a) Formula sumei

A, B finite, disjuncte $\Rightarrow$ ~~$|A|$~~

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B|}$$

$\rightarrow$ oarecare : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Principiul includerii - excluderii : PIE

$A_1, A_2, \dots\dots A_n$ - finite

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| .$$

Apl.:

$f(n) =$ nr. de nr. prime $\leq n$

fct lui Euler

$f(n) = n \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ sau $n-1$ dacă n e prim

b) Formula produs:

A, B - finite $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B|}$$

$A^n = \{\underbrace{(a_1, \ldots a_n)}_{n\text{-uplui}} \mid a_i \in A\}$ cu card $|A|^n$