Restanţă
Structuri Algebrice în Informatică
06/06/2021

Nume: .... **Punctaj parţial 1.................**

Prenume: .... **Punctaj parţial 2.................**

<u>IMPORTANT!!</u>. Punctul din oficiu este acordat pentru aflarea lui a şi b pe care, ulterior, le veţi înlocui în toate enunţurile problemelor. Pe foile voastre de examen veţi scrie enunţurile problemelor cu a şi b înlocuite cu valorile anterior determinate.

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu suma dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion atunci $a = 7 + 6 = 13$, suma dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu suma dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa atunci $b = 7+8+8 = 23$, suma dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea), 8 (nr. de litere al cuvântului Beatrice) şi 8 (nr. de litere al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
oficiu	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b + 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, b)(b+1, \ldots, b+a)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime b, respectiv a, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^2 = \sigma$.

3. Calculaţi $b^{b^{a^a}} \pmod{29}$.

4. Spunem că un polinom cu coeficienţi întregi $f(X)$ este *Eisenstein modulo* p, unde p este un număr prim, dacă există $d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(X+d)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein aplicat numărului prim p. Determinaţi toate numerele prime p pentru care $f(X) = X^3 + b$ este Eisenstein modulo p. În plus, pentru fiecare astfel de p, precizaţi şi un $d \in \mathbb{Z}$ ca mai sus.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 24 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^b}, +)$.

6. Considerăm pe $\mathbb{R}$ relaţia binară ρ dată astfel: $x\rho y$ dacă $x + y = a + b$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi 2021 şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă. Este $f : \mathbb{R}/\rho \mapsto \mathbb{R}$, $f(\widehat{x}) = 4x^2 - 4ax - 4bx + 4 + a^2 + 2ab + b^2$ o funcţie bine definită?

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax - b, & \text{dacă } \; x < -2, \\ 3x^2 + 6x + 3 - 2a - b, & \text{dacă } \; x \geq -2. \end{cases}$$

   Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-a-1, a+1])$ şi $f([-3, 0])$.

8. Determinaţi toate morfismele de grupuri de la $(\mathbb{Z}_a, +)$ la $(\mathbb{Z}_b, +)$. Precizaţi care dintre aceste morfisme sunt injective.

9. Determinaţi un generator al idealului din $\mathbb{Q}[X]$ generat de polinoamele $X^a - 1$, $X^b - 1$, $X^{a+b} - 1$.

6.06.2021

Restanță

Structuri algebrice în informatică

NUME: [redacted] $\Rightarrow a=5$

PRENUME: [redacted] $\Rightarrow b = 6+6 = 12$

GRUPA: 141

SEMNĂTURĂ:

1. Există permutări de ordin $5\cdot 12+1$ în grupul de permutări S_{5+12}?

$5\cdot 12+1=60+1=61$

$S_{5+12}=S_{17}$

σ - permutare $\Rightarrow \sigma = c_1\cdot c_2\cdot \ldots \cdot c_k$

~~ord(σ) = lungime c1 · lun~~

$ord(\sigma) = ord(c_1)\cdot ord(c_2)\cdot \ldots \cdot ord(c_k)$

$ord(\sigma) = 61 \Leftrightarrow ord(c_1)\cdot \ldots \cdot ord(c_k) = 61$ $\Big\} \Rightarrow$

61 este număr prim

$\Rightarrow ord(\sigma) = ord(c_1)\cdot ord(c_2) = 1\cdot 61$

$61 > 17 \Rightarrow$ nu pot exista cicli de lungime 61 în S_{17}

$\Rightarrow$ nu există nicio permutare de ordin 61 în S_{17}.

2/10 2. $\sigma = (1,2,\dots 12)(13,14,\dots,17)$ un produs de 2 cicli disjuncți de lungime 12, respectiv 5 din S_{17}.
Determinați toate permutările $\tau \in S_{17}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$

Fie $\tau = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_k \Rightarrow \tau^2 = c_1^2 \cdot c_2^2 \cdot \dots \cdot c_k^2$

σ conține 2 cicli disjuncți de lungimi diferite

$\Rightarrow \tau^2 = c_1^2 \cdot c_2^2$; $ord(c_1) = 12$
$ord(c_2) = 5$

$2 \nmid 5 \Rightarrow c_2^2$ rămâne un singur ciclu de lungime 5

$2 \mid 12 \Rightarrow c_1^2$ devine produs de 2 cicli, fiecare de lungime $12/2 = 6$

$\Rightarrow \nexists\ \tau \in S_{17}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$

3/10 3. $12^{12^{5^5}} \pmod{29} = ?$

$12^{12^{5^5}} \pmod{29}$

$(12, 29) = 1$

$\overset{\text{t. Euler}}{\Longrightarrow} 12^{\varphi(29)} \equiv 1 \pmod{29}$

29 este prim $\Rightarrow \varphi(29) = 28$

$12^{12^{5^5}}$; $\cancel{12^5 =} \; 12^5 \pmod{29} = a \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow a^5 = b} \;\Rightarrow a^5 \pmod{29} = b \Rightarrow$

$\Rightarrow 12^b \pmod{29}$

$12^5 = 12^2 \cdot 12^2 \cdot 12 = 144 \cdot 144 \cdot 12 = 248\,832$

$[248\,832 : 29] = 8580$

$248\,832 - 29 \cdot 8580 = 248\,832 - 248\,820 = 12$

$\Rightarrow 12^5 \pmod{29} = a = 12$

$a^5 \pmod{29} = b \Leftrightarrow 12^5 \underset{(\text{mod } 29)}{=} b \Leftrightarrow b = 12$

$12^b \pmod{29} = 12^{12} \pmod{29} = 12^5 \cdot 12^5 \cdot 12^2$

$= 12 \cdot 12 \cdot 12^2 = 12^4 = 144 \cdot 144 = 20\,736$

$[20\,736 : 29] = 715$; $20\,736 - 29 \cdot 715 = 20736 - 20735 = 1$

$\Rightarrow 12^{12^{5^5}} \pmod{29} = 1$

4/10 4. $f(X)$ - polinom

$f(X)$ este Eisentein modulo p, p - nr prim, dacă $\exists d \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(X+d)$ este ireductibil cf criteriului lui Eisentein aplicat pe nr prim p.

Determinați toate numerele prime p pt care $f(X) = X^3 + b$ este Eisentein modulo p. Pentru fiecare p ales ~~pe~~ precizați un $d \in \mathbb{Z}$.

$$f(X) = X^3 + b = \underset{a_3}{X^3} + \underset{a_2}{0 \cdot X^2} + \underset{a_1}{0 \cdot X} + \underset{a_0}{12}$$

Fie $d = 0 \Rightarrow f(X+0) = X^3 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 12$

Fie $p = 2 \Rightarrow$

$p \mid a_0 \Leftrightarrow 2 \mid 12$ (A)

$p \mid a_1 \Leftrightarrow 2 \mid 0$ (A)

$p \mid a_2 \Leftrightarrow 2 \mid 0$ (A)

$p \nmid a_3 \Leftrightarrow 2 \nmid 1$ (A)

$p^2 \nmid a_0 \Leftrightarrow 2^2 \nmid 12 \Leftrightarrow 4 \nmid 12$ (F)

Fie $p = 3$

$3 \mid 12$ (A); $3 \mid 0$ (A); $3 \mid 0$ (A); $3 \nmid 1$ (A)

$3^2 \nmid 12 \Leftrightarrow 9 \nmid 12$ (A) $\Rightarrow$ am găsit o soluție

5/10 continuare 4

Soluție : $f(X+0)$ este ireductibil cf crit Eisenstein aplicat pe 3 ; ($p=3$; $d=0$ - sol)

~~Singurele numere prime pe care putem~~

Fie $d=2 \Rightarrow f(X+2)=X^3+2X^2+4X+8+12=X^3+2X^2+4X+20$

Fie $p=2 \Rightarrow 2|20$ (A)

$2|4$ (A)

$2|2$ (A)

$2\nmid 1$ (A)

$2^2\nmid 20 \Leftrightarrow 4\nmid 20$ (F)

Observăm că nu există soluții pt $p=2$ deoarece dacă d este impar atunci a_0 devine $12+$nr impar $=$ nr impar iar ~~$2\nmid a_0$~~ $2|a_0$ devine fals iar dacă d este par, de forma $2k \Rightarrow a_0$ devine $12+(2k)^3=4\cdot 3+4\cdot 2k^3$, iar $4\nmid a_0$ devine fals

Observăm că pt $p=5$ nu există soluții deoarece dacă d nu este multiplu de 5, atunci $5|a_1$ și $5|a_2$ devin false, iar dacă d este multiplu de 5, $a_0=12+5k \not\vdots 5$ deci ~~$5\nmid a_0$ de~~ $5|a_0$ devine fals

Se face analog de la cazul $p=5$ și pentru celelalte numere prime și observăm că singura soluție este $p=3$ și $d=0$

6/10

5. Numărul de elemente de ordin 24 din $(\mathbb{Z}_{2^5},+)\times(\mathbb{Z}_{3^{12}},+)$

$(\mathbb{Z}_{2^5},+)(\mathbb{Z}_{3^{12}},+)=\{\hat{x},\bar{y} \mid x\in\mathbb{Z}_{2^5}, y\in\mathbb{Z}_{3^{12}}\}$

$ord((\hat{x},\bar{y}))=24 \Leftrightarrow [ord(\hat{x}),ord(\bar{y})]=24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ord(\hat{x})=24$ sau $ord(\bar{y})=24$

Din Lagrange $\Rightarrow \begin{cases} ord(\hat{x}) \mid 2^5 \ (=32) \\ ord(\hat{y}) \mid 3^{12} \ (=81^3=531441) \end{cases}$

(1) $24 \nmid 32$ (deoarece $3 \nmid 32$)

(2) $24 \nmid 3^{12}$ (deoarece $2 \nmid$ nr impar

orice produs de numere impare = nr impar)

Din (1), (2) $\Rightarrow \nexists$ elemente de ordin 24

în $(\mathbb{Z}_{2^5},+)\times(\mathbb{Z}_{3^{12}},+)$

7/10 6. Considerăm pe $\mathbb{R}$ relația binară dată astfel: $x \rho y$ dacă și numai dacă $x=y$ sau $x+y=5+12$. Să se arate că ρ este relație de echivalență, să se calculeze clasele de echivalență ale lui a și 2021 și să se determine un sistem complet de reprezentanți pentru această relație de echivalență. Este $f: \mathbb{R}/\rho \to \mathbb{R}$, $f(\hat{x}) = 4x^2 - 4\cdot 5x - 4\cdot 12x + 4\cdot 5^2 + 2\cdot 5\cdot 12 + 12^2$ o funcție bine definită?

ρ - relație de echivalent $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho \text{ - reflexivă} \\ \rho \text{ - simetrică} \\ \rho \text{ - tranzitivă} \end{cases}$

- reflexivă: $x \rho x \Leftrightarrow \underset{(A)}{x=x}$ sau $x+x=12+5=17$

$\Rightarrow \rho$ - reflexivă (1)

- simetrică: $x \rho y$: $x=y$ sau $x+y=17$

$x \rho y \Leftrightarrow y \rho x$: $y=x$ sau $y+x=17$

$\Rightarrow \rho$ - simetrică (2)

- tranzitivă: $x \rho y$: $x=y$ sau $x+y=17$

$y \rho z$: $y=z$ sau $y+z=17$

$x \rho y$ și $y \rho z \Leftrightarrow x \rho z$

8/10

continuare 6

Verificare dacă $x \rho z$

I $x = y$ și $y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x \rho z$

II $x = y$ și $y + z = 17 \Rightarrow x + z = y + z = 17 \Rightarrow x \rho z$

III $x + y = 17$ și $y = z \Rightarrow x + z = x + y = 17 \Rightarrow x \rho z$

IV $x + y = 17$ și $y + z = 17$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$y = 17 - x \quad y = 17 - z \Rightarrow 17 - x = 17 - z \Rightarrow x = z$

$\Rightarrow x \rho z$

Din cele 4 cazuri $\Rightarrow \rho$ - tranzitivă (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \rho$ - relație de echivalență pe $\mathbb{R}$

~~$\hat{a} = \hat{5} = \{x$ SCR: $\{x, y, x \cdot y \mid x \in$~~

$\hat{a} = \hat{5} = \{x \mid x = 5$ sau $x + 5 = 17\}$

$= \{x \mid x = 5$ sau $x = 12\}$

$= \{x \mid x \in \{5, 12\}\}$

$\hat{b} = \hat{12} = \{x \mid x = 12$ sau $x + 12 = 17\}$

$= \{x \mid x = 12$ sau $x = 5\}$

$= \{x \mid x \in \{12, 5\}\}$

$SCR = \{x, y, x \cdot y \mid x \in \Delta_5$ și $y \in \Delta_{12}\}$

Astfel SCR obține toate posibilitățile $5^c \cdot 12^d$, $c, d \in \mathbb{Z}$

9/10 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 12, & x < -2 \\ 3x^2 + 6x + 3 - 2 \cdot 5 - 12, & x \geq -2 \end{cases}$$

f - inj, surj, bij? $f^{-1}[-\cancel{5}-1, \cancel{5}+1]$ și $f([-3, 0])$

I $x < -2$

$f'(x) = 5 > 0 \Rightarrow f$ - str cresc pe $(-\infty, -2) \Rightarrow f$ - inj pe $(-\infty, -2)$

$f(x) = 5x - 12 = y \Rightarrow x = \frac{y+12}{5} \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ - surj pe $(-\infty, -2)$

$\Rightarrow f$ - bij pe $(-\infty, -2)$

II $x \geq -2$

$\cancel{f'(x) = 6x + 6}$ $\cancel{x \geq -2}$ $\cancel{\Rightarrow f'(x) \geq}$ ~~fie $f(x) = f(y), x \neq y$~~

$\cancel{\Rightarrow 3x^2 + 6x - 19 = 3y^2 + 6y - 19 \Leftrightarrow 3(x-y)(x+y) = 6(y-x)}$

$\cancel{x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0}$

$\cancel{\Leftrightarrow 3(x+y) = 6}$

fie $f(x) = f(y), x \neq y$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x - \cancel{19} = 3y^2 + 6y - \cancel{19}$

$\Leftrightarrow \cancel{3}x(x+2) = \cancel{3}y(y+2)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - y^2 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(y - x)$

$\Leftrightarrow (\cancel{x-y})(x+y) = 2(\cancel{y-x}) \Leftrightarrow x + y = -2 \Leftrightarrow \cancel{x = -2-y}$

10/10 continuare 7

~~x=~~ $x=-2-y$ $\Rightarrow$ $x \neq y$ dar $f(x)=f(y)$

$\underbrace{\le -2}_{\ge 0}$ $\Rightarrow f$ - neinj pe $[-2,+\infty)$

$\Rightarrow f$ - nebij pe $[-2,+\infty)$

$f(x)=3x^2+6x-19=y \Leftrightarrow 3x(x+2)=y+19$

8. Determinați toate morfismele de grupuri de la $(\mathbb{Z}_{51},+)$ la $(\mathbb{Z}_{12},+)$. Precizați ~~care~~ care dintre aceste morfisme sunt injective

9. Determinați un generator al idealului din $\mathbb{C}[X]$ generat de polinoamele $X^5-1, X^{12}-1, X^{17}-1$