Examen scris
Structuri Algebrice în Informatică
25/01/2021

Nume: .... **Punctaj parţial 1**................

Prenume: .... **Punctaj parţial 2**................

<u>IMPORTANT!!</u>. Punctul din oficiu este acordat pentru aflarea lui a şi b pe care, ulterior, le veţi înlocui în toate enunţurile problemelor. Pe foile voastre de examen veţi scrie enunţurile problemelor cu a şi b înlocuite cu valorile anterior determinate.

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion atunci $a = 7$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa atunci $b = 8$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea) şi 8 (nr. de litere atât al cuvântului Beatrice cât şi al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
oficiu	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

3. Calculaţi $a^{a^{b^b}} \pmod{31}$.

4. Considerăm polinomul cu coeficienţi întregi $P(X) = X^3 - aX + b$. Determinaţi dacă polinomul $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{2^b}, +)$.

6. Fie p cel mai mic număr prim din descompunerea în factori primi a lui a şi q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu $a+b$, diferit de p. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $\exp_p(n)$ exponentul la care apare p în descompunerea în factori primi a lui n. Considerăm pe $\mathbb{N}$ relaţia binară ρ dată astfel: $m\rho n$ dacă $\exp_p(n) = \exp_p(m)$ şi $\exp_q(n) = \exp_q(m)$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi b şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă} \quad x < -b, \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă} \quad x \geq -b. \end{cases}$$

   Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-1, b+1])$.

8. Demonstraţi că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a^2+a} | \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

9. Determinaţi constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinoamele $X^b - aX + 1$ şi $cX + d$ să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$.

[redacted]

GRUPA: 141 INFO

EXAMEN ALGEBRĂ

$a = 6$

$b = 4$

(1.) Există permutări de ordin 23 în grupul de permutări S_{10}?

$a+b$

~~verif ∃ numărul în intervalul $[1, 10]$ care înmulțite să rezulte $a \cdot b - 1$~~

(=) o permutare σ din S_{12} ce poate fi scrisă ca un produs de cicli disj. Dacă $ord(\sigma) = 23$ => ord. ciclilor disj care îl formează pe σ au cmmmc. pe 23. V: $23+1 = 24 > 10$ ✓

$\left.\begin{array}{l} 23 \vdots 23 \\ 23 \vdots 1 \end{array}\right\}$ => 23 e prim => ∄ ~~o singură~~ permutări de ordin 23 în S_{10}

(3.) $a^{a^{b^{b}}} = 6^{6^{4^{4}}} = 6^{6^{256}}$ Calculați $a^{a^{b^{b}}} (\text{mod } 31)$

$\cancel{6^{6^{4^4}}}$ $6^{6^{256}} (\text{mod}(31))$

$a \equiv b (\text{mod } n) \Leftrightarrow a^k \equiv b^k (\text{mod } n)$

$\left.\begin{array}{l} 6^3 = 216 \\ 31 \cdot 7 = 217 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 (\text{mod}(31))$

$6^3 \equiv -1 (\text{mod } 31)$

$3 \mid 6^{256} \Rightarrow 6^{256} = 3k$

$\xrightarrow[\text{a lui Fermat}]{\text{Mica th.}}$ $6^{6^{256}} = 6^{3k} = (6^3)^k \equiv (-1)^k \text{mod}(31)$

$6^{256} = 3k \Rightarrow 2 \mid 3k \Rightarrow 2 \mid k \Rightarrow k = 2t$ (par)

$6^{6^{256}} \equiv (-1)^{2t} \text{mod}(31) \equiv 1 \text{ mod}(31)$

$\Rightarrow 6^{6^{4^4}} \equiv 1 (\text{mod}(31))$

(4.) $P(X) = X^3 - 6X + 4$ ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

~~$\Leftrightarrow P(X+a)$ ireductibil pt. un $a \in \mathbb{Q}$ oarecare~~

~~Luăm~~ / ~~$p = 2$~~ Conform criteriului lui Eisenstein:

Luăm $p = 2$ prim și avem: $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$

1) $p | a_0, \dots, p | a_{n-1}$

$2 | 4$, $2 | 6$ OK

2) $p \nmid a_n$

$2 \nmid 1$ OK

3) $p^2 \nmid a_0$ FALS

$2^2 | 4$

$4 | 4$

$\Rightarrow$ conform criteriului lui Eisenstein $P(X)$ este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$

$x_0 = \frac{p}{q}$ $p | a_0 \Rightarrow p \in \{\pm 1; \pm 2\}$
$q | a_n \Rightarrow q \in \{\pm 1\}$

$P(1) = -1 \neq 0$
$P(-1) = 9 \neq 0$
$P(2) = 8 - 12 + 4 = 0$ (are rădăcini)
deci este reductibil

---

(5) Determinați nr. elem? de ordin 8 din grupul produs direct

$(\mathbb{Z}_{2^6}, +) \times (\mathbb{Z}_{2^4}, +)$

$\sigma(\hat{x}, \bar{y})$, $x \in \mathbb{Z}_{64}$, $y \in \mathbb{Z}_{16}$

$ord(\hat{x}, \bar{y}) = [ord(\hat{x}), ord(y)] = 8$

$8 = 2^3 \Rightarrow ord(\hat{x}) = 8$ sau $ord(\bar{y}) = 8$

I $ord(\hat{x}) = 8 \Rightarrow ord(\bar{y}) \in D_{16} \Rightarrow 16 = 2^4 \Rightarrow$ ~~$|D_{16}| = 5$~~ $|D_{16}| = 5$ elem ord 8

II $ord(\bar{y}) = 8 \Rightarrow ord(\hat{x}) \in D_{64} \Rightarrow 64 = 2^6 \Rightarrow |D_{64}| = 7$ elem ord 8

din I și II $\Rightarrow 5 + 7 = 13$ elemente de ordin 8 în $(\mathbb{Z}_{16}, +) \times (\mathbb{Z}_{64}, +)$

⑦ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 28 & \text{dacă } x < -b \\ 6x^2 + 132x + b^3 - 2 \cdot b^2 + b + 4, & \text{dacă } x \geq -b \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6x+28, & \text{dacă } x < -4 \\ 6x^2 + 132x + 154, & \text{dacă } x \geq -4 \end{cases}$$

$f.$ inj $\Rightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x, y$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ($x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$)

$f.$ surj $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$ ($Im(f) = B$)

$f.$ bij $\Rightarrow f.$ inj $+$ $f.$ bij

(I) $x < -4$

inj: $6x + 28 = 6y + 28$

$6x + \cancel{28} - 6y - \cancel{28} = 0$

$6(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ inj (1)

surj: $6x + 28 = y \Rightarrow x = \frac{y-28}{6} \in \mathbb{R} \Rightarrow f.$ surj (2)

(1), (2) $\Rightarrow f.$ bij, $\forall x < -4$

(II) $x \geq -4$

inj: $6x^2 + 132x + 154 = 6y^2 + 132y + 154$

$6(x^2 - y^2) + 132(x-y) + \cancel{154} - \cancel{154} = 0$

$\Rightarrow 6(x^2 - y^2) + 132(x-y) = 0$

$6(x+y)(x-y) + 132(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(6x + 6y + 132) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = y \\ \text{sau} \\ x = \frac{132}{6} - y \end{array} \right. \Rightarrow f.$ neinj (3) surj: $6x^2 + 132x + 154 = y$

$\Rightarrow y = \cancel{x}$ $x(6x+132) + 154 = y$

$x(6x+132) = y - 154$

$\Rightarrow 6x+132 = \frac{y-154}{x}$

$\Rightarrow 6x = \frac{\frac{y-154}{x} - 132}{6}$ $\Rightarrow$ f. nesurjectivă (1)

$\Rightarrow$ f. nebijectivă ~~pt~~ $x \geq -4$

$\Rightarrow$ f. nu are inversă pt $x \geq -4$

$f^{-1}([-5,5]) \Rightarrow$ f. are inversă doar pt $x \in [-5,-4)$

$6x+28 = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-28}{6}, \forall x \in [-5,4)$

(2) $\sigma = (1,2,3,4,5,6)(7,8,9,10)$ produs de 2 cicli disjuncți de lungime 6, respectiv 4 din S_{10}. Det. toate permutările τ din S_{10} a.î. $\tau^3 = \sigma$

Det $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$

$7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 7$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$\tau \in ?$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

$\tau(\tau(\tau(x_1))) = 2$

$\tau(\tau(\tau(x_2))) = 3$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{pmatrix}$$

σ nu poate fi m-ciclu

- - - -

$\tau(\tau(\tau(x_5))) = 6$

$Ci_6^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ $a_k^i = a_{k+i}$

$Ci_6 = (1\ \_\_\ )$

$Ci_4^3 = (7\ 8\ 9\ 10)$

$Ci_4 = (7\ \_\ )$

$\sigma = Ci_6 Ci_4$

(4.)

(6) Fie p cel mai mic nr. din desc. în fact primi a lui 6 și q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu 10, diferit de p.
Pt. un nr. nat nenul n, notăm $exp_p(n)$ exp. la care apare p în desc în fact. prim a lui n.
Pe $\mathbb{N}$ rel. bin ρ a.î. $m \rho n$ dacă $exp_p(n) = exp_p(m)$ și $exp_q(n) = exp_q(m)$

Să se arate că ρ este rel. ech., clase echiv, $S \subset R$.

$q \leq 10$, $q \neq p$, q prim $\Rightarrow q = 7$ $\quad q = 7^1 \cdot 1$

$a = 6$ $\quad a = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 1$

$\Rightarrow p = 2$

$exp_2(n) = exp_2(m)$

$exp_7(n) = exp_7(m)$

pt. a demonstra că "ρ" este rel de echiv, tb. dem că ρ este reflexivă, tranzitivă simetrică

1) reflexivitate:

$exp_p(m) = exp_p(n)$ $\quad \forall m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ $exp_p(n) \, \rho \, exp_p(n)$ $\Rightarrow$

$exp_q(m) = exp_q(n)$ $\quad$ $exp_q(n) \, \rho \, exp_q(n)$

ρ este reflexivă

2) simetrie: fie $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ $exp_p(m) = exp_p(n)$, $exp_q(m) = exp_q(n)$ $\Rightarrow$ ρ este simetrică $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$

3) tranzitivitate: fie $n, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow exp_p(n) \overset{m \rho n}{=} exp_p(m)$ și $exp_p(m) \overset{m \rho h}{=} exp_p(h)$

$\Rightarrow exp_p(n) = exp_p(h) \Rightarrow n \rho h$

analog pt $exp_q(m, n, h)$

$\Rightarrow \rho$ tranzitivă

din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ "ρ" este relație de echivalență

~~$\mathbb{N}/_\rho = \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$~~

~~pt un $m \in \mathbb{N}^*$ $[m] = \{n \in \mathbb{N}^* \mid m \rho n\}$~~

clase echiv:

$\hat{6} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \sim 6\}$

$x \sim 6 \Rightarrow \exp_2(x) = \exp_2(6) = 1$

$\exp_7(x) = \exp_7(6) = 0 \Rightarrow x = \{2, 6\}$

$\hat{4} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \sim 4\}$

$x \sim 4 \Rightarrow \exp_2(x) = \exp_2(4) = 2$

$\exp_7(x) = \exp_7(4) = 0 \Rightarrow x = \{4\}$

SCR: $\mathbb{N}/_\rho = \{[x] \mid x \in \mathbb{N}^*\} = \{[x] \mid x \in S\}$

un SCR pt ρ poate fi puterile lui ~~P~~ $p \cdot q$ sau = puterile lui 14

$S = \{14^0, 14^1, 14^2, \ldots, 14^n\}$

CHERIM EROL

141 INFO

erol.cherim@s.unibuc.ro

erol.cherim@gmail.com

8) Demonstrați că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2-3a^4-a)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$ unde $\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a^2+a} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$

9.) Determinați constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ a.î. polinoamele $X^b - aX + 1$ și $cX + d$ să fie în aceeași clasă de echivalență în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$.