Limite de șiruri:

1. Euler: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

2. Stolz - Cesaro: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$, crescător mărginit

$$l = \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}}$$

3. Criteriul raportului: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, șir pozitiv $= l'$

$$l = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$ dacă $l > 1 \Rightarrow l' = +\infty$; $l < 1 \Rightarrow l' = 0$

4. Criteriul radicalului: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, șir pozitiv

$$l = \frac{a_{n+1}}{a_n} \lim_{n\to\infty}$$

5. Categoria $\frac{0}{0}$:
   1. $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$
   2. $\lim\limits_{n\to 0}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$
   3. $\lim\limits_{n\to 0}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n} = r$

6. Trigonometrice: $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$

analog pentru: arcsin, tg, arctg

Limita superioară:

$$\lim_{n\to\infty}\sup = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\left(\sup_{k\ge n} x_k\right)$$

Limita inferioară:

$$\lim_{n\to\infty}\inf = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\left(\inf_{k\ge n} x_k\right)$$

! calculăm limita pentru toate cazurile și alegem maximul și minimul

Dacă: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \neq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Dacă: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ șir mărgini

! $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Convergența simplă și uniformă

$f_n \xrightarrow{s} f$ CONVERGE SIMPLU

$f_n \xrightarrow{u} f$ CONVERGE UNIFORM

1) calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ considerând x constant

2) găsim A a.î. $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ c. simplă

3) fixăm $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in A} g(x)$

4) calculăm $g'(x)$, facem tabelul de semne și $\sup\limits_{x\in A} g(x)$

5) dacă $\sup(g(x)) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ c. uniformă, altfel nu

Continuitatea

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) identificăm unde e sigur continuă

2) căutăm 2,3 funcții ($y = x$, $y = -x$, $y = x^2$)

3) calculăm limitele funcțiilor înlocuind cu funcțiile alese cu $x \to x_0$ (unde nu e continuă)

4.1) dacă nu sunt egale $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

deci nu e continuă în (x_0, y_0)

4.2) dacă sunt egale demonstrăm că $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = L$ deci e continuă

Se evaluează $|f(x,y) - L|$ pentru a aplica criteriul cleștelui:

$$0 \le |f(x,y) - L| \le g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$$

Și calculăm:

$f(x_0, y_0) = L = 0$

Serii de numere

0. **Criteriul zero**: $x_n \to 0 \Leftarrow \sum^{n} x_n$ convergent

1. **Criteriul comparației**

   1.1. **inegalități**:

   $\sum b_n$ convergent, $a_n \leq b_n \Rightarrow a_n$ convergent

   $\sum a_n$ divergent, $a_n \leq b_n \Rightarrow b_n$ divergent

   1.2. **limită**: $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

   - $l \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n$
   - $l = 0$ și $\sum b_n$ convergent $\Rightarrow \sum a_n$ convergent
   - $l = \infty$ și $\sum b_n$ divergent $\Rightarrow \sum a_n$ divergent

2. **Criteriul condensării** (Cauchy)

   $a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum a_n \sim \sum 2^n \cdot a_{2^n}$

3. **Criteriul raportului** (D'Alembert)

   $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \Rightarrow$
   - $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converg.
   - $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverg.

4. **Criteriul radicalului** (Cauchy)

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = l \Rightarrow$
   - $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converg.
   - $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverg.

5. **Raabe - Duhamel** $a_n > 0$

   $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$
   - $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverg.
   - $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ conver.

6. **Abel - Dirichlet**

   $a_n \searrow 0 \Rightarrow \exists M$ a.î. $\left|\sum\limits_{k=1}^{M} x_k\right| \leq M \Rightarrow \sum a_n x_n$ conv.

7. **Leibniz** (serie alternantă)

   $a_n \geq 0$ $\sum (-1)^n a_n$

   a_n descrescător, $a_n \to 0$ $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ conv.

Seria $\sum x_n$ e **absolut convergentă** $\sum |x_n|$ **conv**

! orice serie absolut convergentă e convergentă

! dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sum x_n \neq 0 \Rightarrow x_n$ divergentă

Serii de puteri

Forma generală: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $a_0 = a_n(0)$

1) scriem sub forma generală și identificăm a_n, x_0, a_0
2) calculăm $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ și aflăm raza de convergență ρ : $\rho = 1/L$
3) aflăm intervalul de convergență $(x_0-\rho, x_0+\rho)$
4) aflăm D calculând seria în capete $x_0-\rho$ și $x_0+\rho$ știind că: $(x_0-\rho, x_0+\rho) \subseteq D \subseteq [x_0-\rho, x_0+\rho]$

   dacă seria în $x_0+\alpha$ e convergentă $\Rightarrow x_0+\alpha \in D$
5) 1. dacă D coincide cu intervalul $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ atunci f e de clasă C^∞ adică e derivabilă și integrabilă de ∞ de ori

   2. altfel, f e de clasă C^∞ pe $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ și f continuă în $x_0-\rho$ și/sau $x_0+\rho$ (dacă $x_0+\alpha \in D$)

   Se calculează $f(x_0-\rho)$ și/sau $f(x_0+\rho)$

   $$f(x_0-\rho) = \lim_{\substack{x\to x_0-\rho \\ x > x_0-\rho}} f(x)$$, analog pentru $x_0+\rho$
6) aflăm forma funcției corespunzătoare seriei $f: D \to \mathbb{R}$ integrând sau derivând și știind $f(x_0)=a_0$

Serii remarcabile:

1. $\sum (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}$, $\forall x \in (-1,1)$
2. $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in (-1,1)$
3. $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
4. $\sum \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
5. $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Derivata parțială:

$$l_i = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial e_i} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

= derivată de $f(x_0)$ după x_i unde restul variabilelor sunt constante

Pentru $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

x_i = variabilă oarecare, $i = \overline{1,m}$

1. calculăm $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}$ derivatele parțiale ale funcției și aflăm cazurile speciale $(\mathbb{R}^m \setminus \{(y_1, \dots, y_m)\})$
2. studiem existența deriv. parțiale în $(y_1, \dots, y_m)$ folosind definiția

dacă $l \in \mathbb{R}$ => admite deriv. parțiale în $(y_1, \dots, y_m)$ $\forall x_i, i = \overline{1,m}$ și toate l_i sunt egale

dacă $l \notin \mathbb{R}$ => nu admite

unde: $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$

Diferențiabilitatea (derivabilitatea)

1. studiem continuitatea lui f pe $\mathbb{R}^m$
2. calculăm derivatele parțiale și vedem unde nu e derivabilă (x_0, y_0)
3. calculăm: unde $\|(x,y) - (x_0, y_0)\|$ distanță

$$l = \boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0, y_0)|}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|}}$$

folosind continuitatea

dacă $\nexists\, l$ (nu e continuă) => nu e derivabilă în (x_0, y_0)
altfel e diferențiabilă pe $\mathbb{R}^m$

! derivatele parțiale trebuie să fie continue

Puncte de extrem

1. se studiază continuitatea și diferențiabilitatea
2. se determină punctele critice rezolvând sistemul (x_0, y_0)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

în mulțimea de definiție D

$f : D \to \mathbb{R}$

3. se identifică punctele critice unde nu e deriv. de 2 ori

Se calculează: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$

4. se construiește HESSIANA lui f în fiecare punct critic în care f e deriv. de 2 ori

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11}$

$\Delta_2 = \det Hf$

dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0 \Rightarrow x_0 =$ minim local

dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0 \Rightarrow x_0 =$ maxim local

dacă $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0$ și cel puțin unul $= 0$ atunci nu ne putem pronunța

altfel, $x_0 \neq$ punct extrem local

5. se aplică definiția pe punctele de extrem loc. pentru: puncte discontinue, puncte nederiv., unde nu e deriv. de 2 ori și unde nu merge Hf

ex. $f(x,y) - f(x_0, y_0) \geq 0 \Rightarrow$ minim

6. $(4) \cup (5) =$ mulțimea punctelor de extrem local