$$\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X < x)$$
$$= F(x) - F(x-)$$
$$\hookrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)$$

Laborator 5:

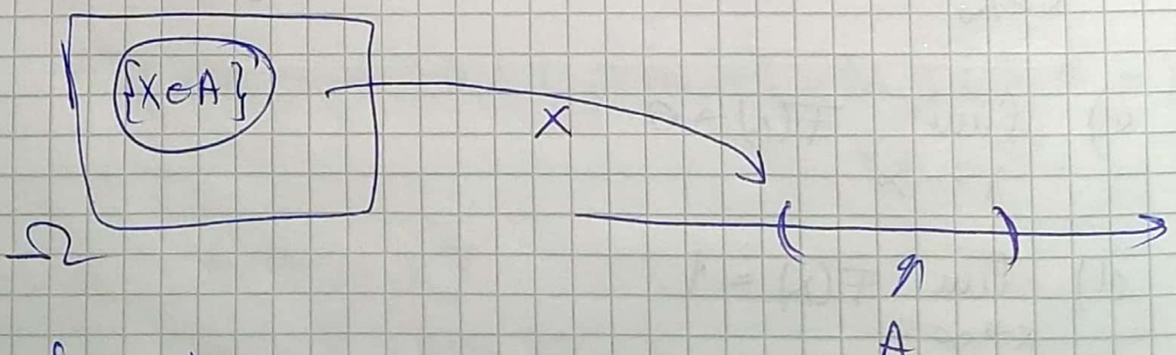
Extra:

Curs 6: 7 noiembrie

Variabile aleatoare. Repartiția unei v.a și fct. de repartiție.

V.a
$$\begin{cases} X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \{X \le x\} \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., X v.a și $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $\forall A \subset \mathbb{R}$ interval.



$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$$

$\boxed{\mathbb{P}_X(\cdot) = (\mathbb{P}\circ X^{-1})(\cdot)}$ $\leftarrow$ repartiția var. aleat. X

<u>Funcția de repartiție</u> (fct. cumulativă - <u>CDF</u>)

$F:\mathbb{R}\to[0,1]$

$F(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \le x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

<u>Exp.</u>: Arunceam de 3 ori cu banul.

X = #capete în cele 3 aruncări

Care este funcția de repartiție a lui X? + rep.

$\Omega = \{H, T\}^3$

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

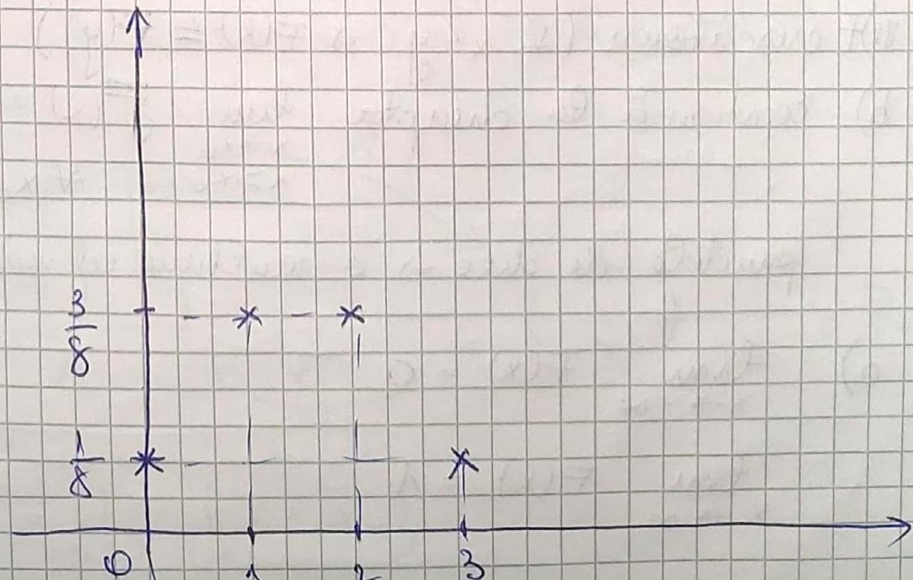
fct. de <u>masă</u>

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(\{TTT\})$

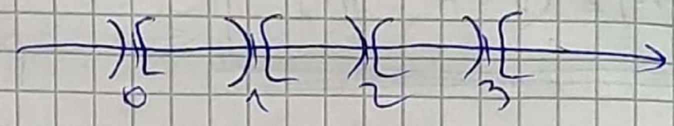
$\mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{8} \Rightarrow \{THH, HTH, HHT\}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{8} \Rightarrow \{THT, HTT, TTH\}$

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{8}$



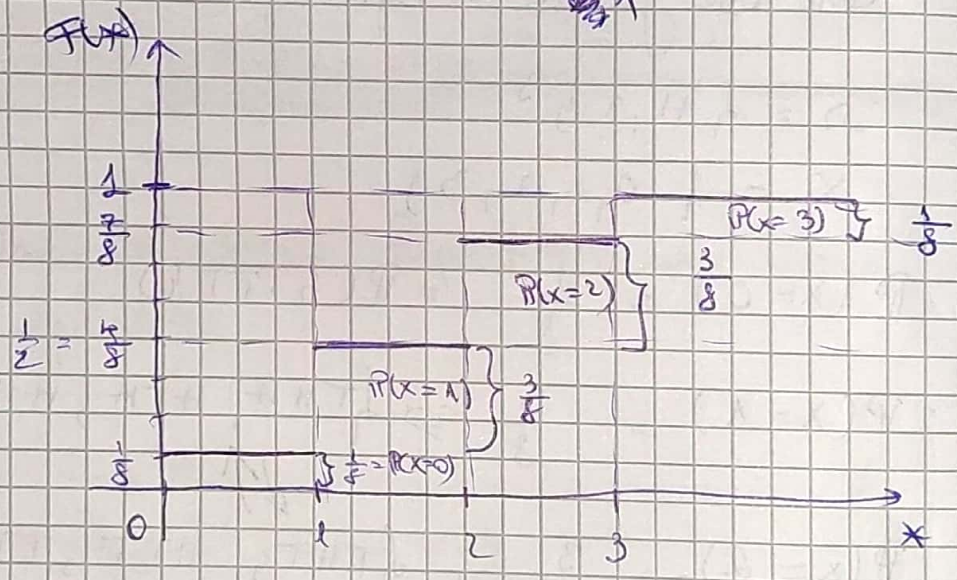
$F(x) = ?$



funcție cumulativă

$$F(x) = \begin{cases} 0 = P(\emptyset), & x<0 \\ \frac{1}{8}, & x \in [0,1) \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8} = \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \Rightarrow \{x=0 \cup x=1\} \\ \frac{1}{8}+2\cdot\frac{3}{8} = \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \Rightarrow \{x=0 \cup x=1 \cup x=2\} \\ 1 & x \ge 3 \Rightarrow \{x=0 \cup x=1 \cup x=2 \cup x=3\} \Rightarrow \Omega \end{cases}$$

Dacă $0 <= x < 1 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X = 0\} \Rightarrow P(X=0) = \frac{1}{8}$



Proprietățile funcției de repartiție:

a) F crescătoare ($\forall\, x<y \Rightarrow F(x) \le F(y)$) $\qquad F(x+)$

b) continuă la dreapta $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$

punctele de disc. ⇒ o mulțime cel mult numărabilă

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

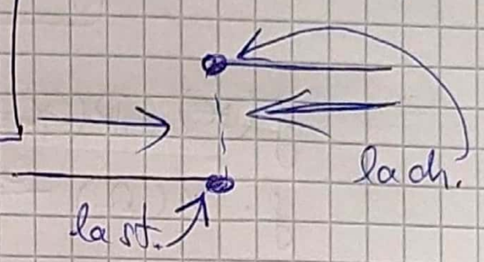
În plus,

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(X < x_0) = \cancel{F(x) - \mathbb{P}(}$

$\mathbb{P}(X \le x_0) - \mathbb{P}(X = x_0)$

$$= \boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)} \rightarrow F(x_0-)$$



f) $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)}$

Variabile aleatoare discrete

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a $\qquad X(\Omega)$ = mulțimea valorilor lui = imaginea lui X

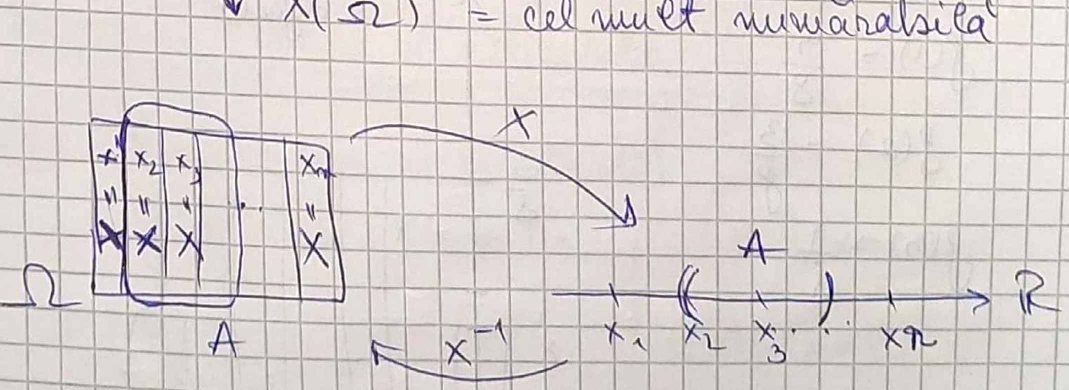
$X(\Omega)$ → cel mult numărabilă (= finit sau numărabil) $\Rightarrow$ X este v.a discretă

$\qquad$ → infinită, nenumărabilă $\Rightarrow$ X este continuă

X v.a. discretă, $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A) =$

$X(\Omega)$ = cel mult numărabilă



$$\Omega = \bigcup_{n \ge 1} \{X = x_n\}$$

$$P(X\in A) = P\Big(X\in \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)} \{x\}\Big) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} P(X=x)$$

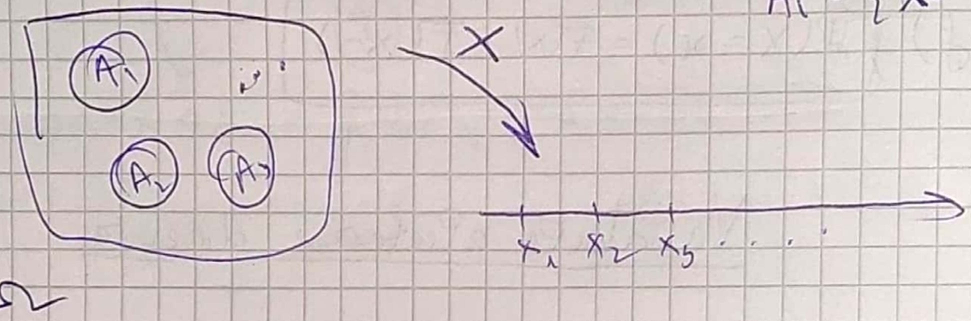
Fie $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$ c.p. și $X:\Omega \to \mathbb{R}$ o var. a. discretă.

Se numește $\boxed{\text{funcția de masă asociată}}$ (presc. PMF) șir

$$f(x) = P(X=x), \ \forall x\in X(\Omega)$$

$$f: X(\Omega) \to [0,1]$$

$A_i = \{X = x_i\}$



Obs. Se mai folosește și notația $p(x)$ sau $p_X(x)$

$A_i = \{X = x_i\}$

Exp: Aruncăm de 3 ori banul, X = # de H în cele 3 aruncări

Determinați fct. de masă a lui X.

$$f(x) = P(X=x), \ \forall x\in \{0,1,2,3\} = X(\Omega)$$

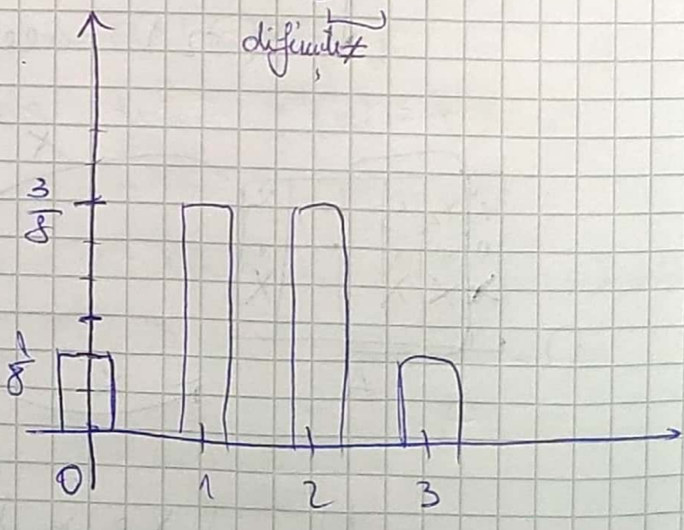
$f(0) = \frac{1}{8}$

$1<2<3<4<5$ diferiți $\neq$

$f(1) = \frac{3}{8}$

$f(2) = \frac{3}{8}$

$f(3) = \frac{1}{8}$



Obs: $X \in \{x_1, x_2, \dots x_n\}$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$ (X este repartizată astfel")

↳ nu e repartiția var. (notație)

Prop. funcției de masă:

a) $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ (pozitivă)

b) $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}\right) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1}$$ masa totală = 1

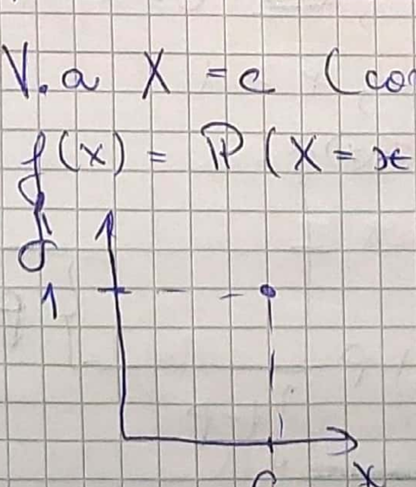
Obs: Legătura dintre funcția de masă și funcția de repartiție:

$$\begin{cases} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in X(\Omega)}} f(y) \\ f(x) = F(x) - F(x-) \end{cases}$$

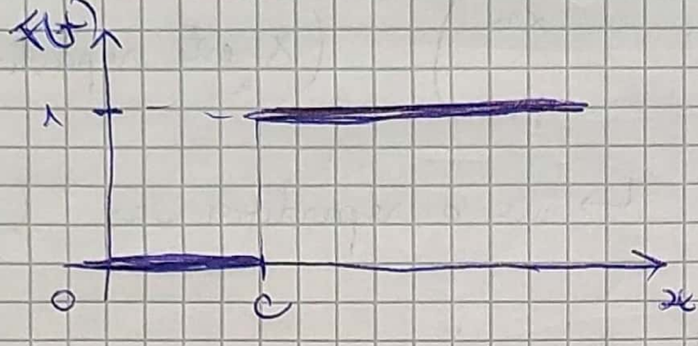
Exemple: de v.a. discrete:

① V.a $X = c$ (constantă)

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases}$$



$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}$$



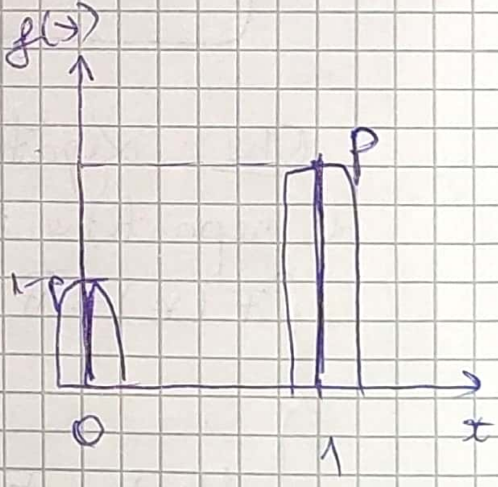
② Variabile aleatoare de tip Bernoulli

Avem un experiment și un eveniment A de interes.

Pp. $\mathbb{P}(A) = p \in [0,1]$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$X(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

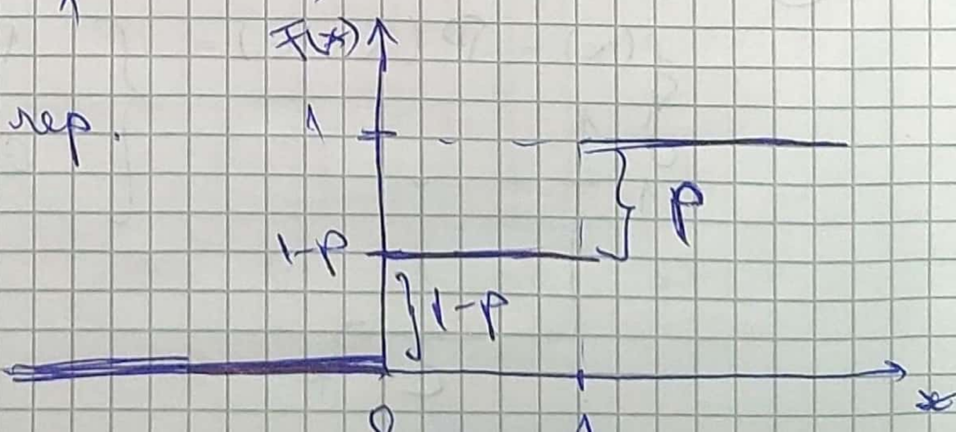


masă $f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A) = p$

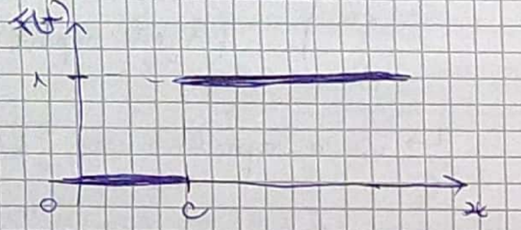
$f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(A^c) = 1 - p$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

fct. de rep.



$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}$



② Variabile aleatoare de tip Bernoulli

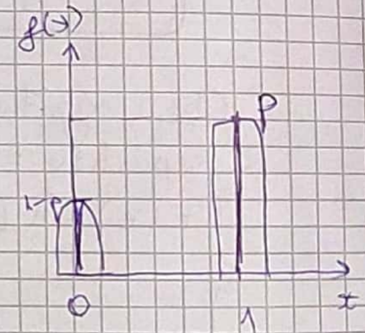
Avem un experiment și un eveniment A de interes.

Pp. $\mathbb{P}(A) = p \in [0,1]$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

~~XXXXX~~

$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

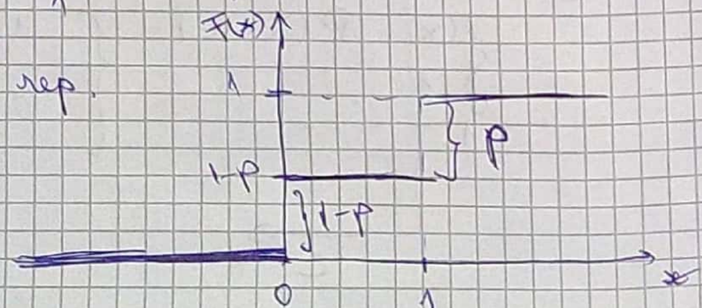


masă $f(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$

$f(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A^c) = 1-p$

$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

fct. de rep.



v. a. indicator: $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Not. $X \sim Ber(p)$ (sau $B(p)$)

"este repartizată ca ..."

Scrierea sub formă compactă a fct. de masă;

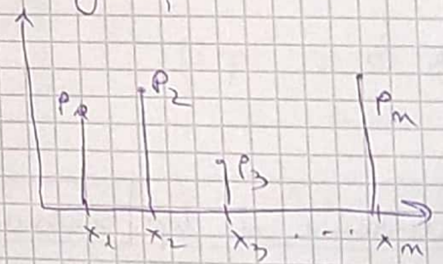
$\boxed{f(x) = p^x (1-p)^{1-x}}, x \in \{0,1\}$

③ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$

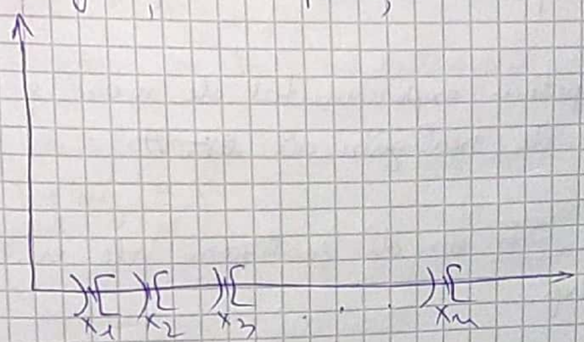
și să pp $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \in [0,1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

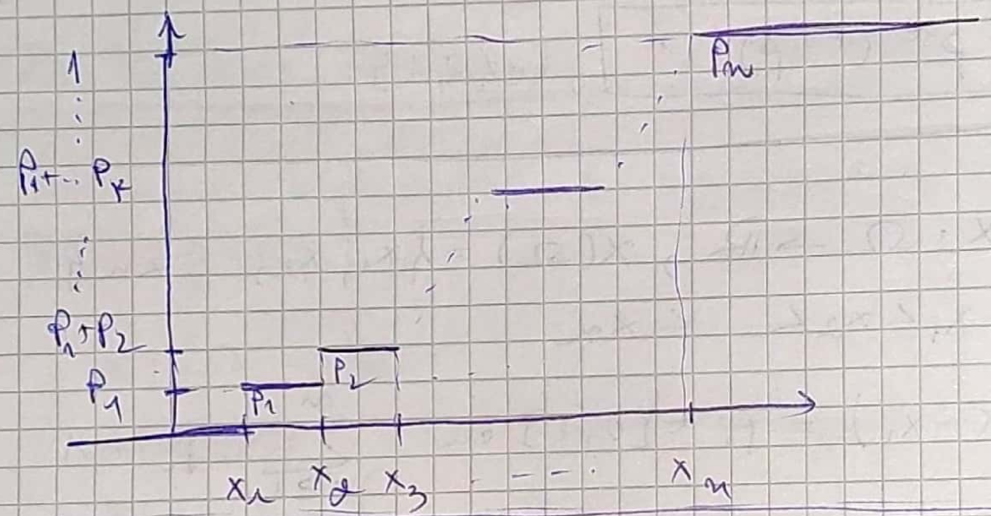
Graficul funcției de masă:



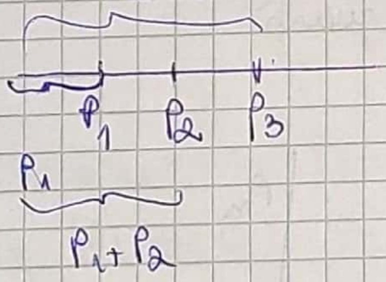
Graficul funcției de repartiție:



$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ p_1 & , x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & , x_2 \le x < x_3 \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{k} p_i & , x_k \le x < x_{k+1} \\ \dots & \dots \\ 1 & , x \ge x_n \end{cases}$$



$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$



4) Variabile aleatoare de tip $\boxed{\text{binomial}}$

Presupunem că avem un exp. aleator și A un ev. de interes.

Repetăm experimentul de n ori, și ne interesăm ca nr. de realizări ale ev. A.

X = # nr. de realizări ale ev. A în n repetări ale exp.

$\boxed{X \sim B(n,p)}$ = v.a. repartizată binomial de

param. n și p

$p \to$ prob. de realizare a ev. A în cadrul exp. $\mathbb{P}(A)$

$n \to$ nr. de repetiții ale exp.

$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Funcția de masă. $f(k) = \mathbb{P}(X=k) = ?$ $k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k} \cdot p^{k}$$

$n=6$, $k=2$

T H T T T H

C_6^2 $\quad A_1^c \, A_2 \, A_3^c \, A_4^c \, A_5^c \, A_6$

$= (1-p)(p)(1-p)(1-p)(1-p)(p)$

$= (1-p)^4 \cdot p^2$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) \overset{?}{=} 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^{n-k} p^{k} = (1-p+p)^{n} = 1 \text{ (A)}$$

binomul lui Newton

Obs.: $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$; $Y_i \sim B(p)$

Exp: Urnă cu bile albe și negre.

N bile, M negre

Extragem n bile cu întoarcere.

X = nr. de bile negre din cele n bile extrase este

$$X \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

prob. să pice o bilă neagră

(5) V.a. repartizată hipergeometric:

Avem o urnă cu N bile albe și negre și M de culoare neagră.

Extragem n bile fără întoarcere și ne interesăm la nr de bile negre din cele n extrase.

X = # bile negre din cele n extrase este rep. hipergeometric $HG(n, N, M)$

n – nr. extrageri fără întoarcere; N – nr. bile total; M – nr bile negre

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\boxed{X \sim HG(n, N, M)}$$

$X = \{0, 1, \dots, \min(M, n)\}$

---

6 din 49 $\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

Care e prob. să nimerești $k = 3$ nr.? $\quad C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$

$N = 49$

$M = 6$ bile negre

$n = 6$

$$P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}$$

fct de masă

$X = \{3, 4, 5, 6\}$

$P(X \in \{3, 4, 5, 6\}) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

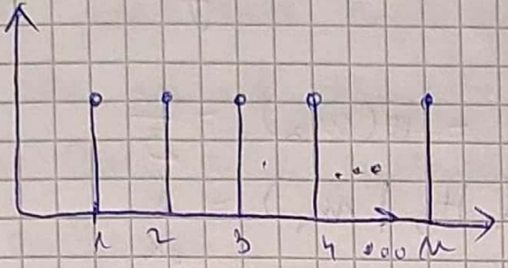
$$\sum_{k=0}^{\min(M,n)} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n} \Rightarrow (1+x)^M (1+x)^{N-M} = (1+x)^N$$

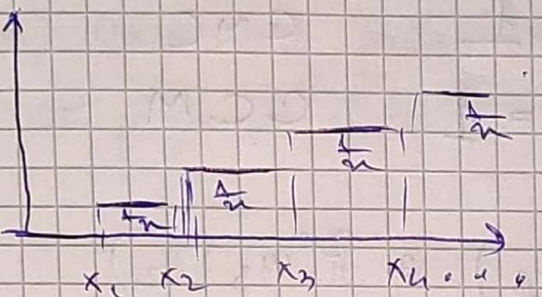
Relația lui Vandermonde

⑥ Uniforma pe $\{1,2,\dots n\}$ => echirepartiția

$X:\Omega\to\mathbb{R}$; $X(\Omega)=\{1,2,\dots n\}$ (D finită)

$f(k)=P(X=k)=\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{|D|}\right)$; $\forall k\in\{1,2,\dots n\}$



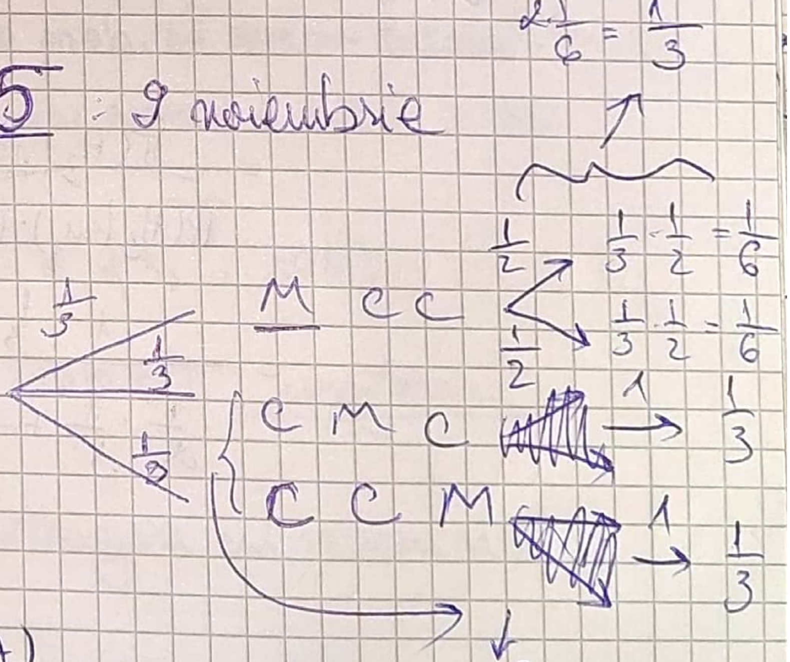


$P(X\in A)=\frac{|A\cap D|}{|D|}$; $\forall A\subseteq\mathbb{R}$

Laborator 6 : 9 noiembrie

Metoda 2

Am ales (ușa nr. 1)



$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$

B = moderatorul deschide ușa i

A = mașina se află în spatele ușii j.

=> sunt șanse mai mari să nimerești ~~mas~~ premiul de schimbi decizia $=\frac{2}{3}$, altfel $\frac{1}{3}$.