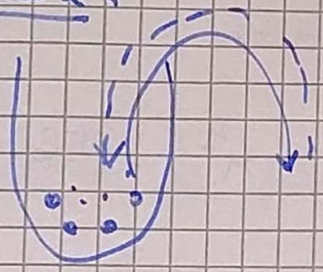
Curs III : 17 oct.

Modalități de eșantionare

1) Schema cu revenire (cu întoarcere)

Urnă cu n bile $1 \dots n$ și efectuăm k extrageri cu revenire.



• În câte moduri?

Reformulare: $\begin{cases} k \text{ bile } (1 \dots k) \\ n \text{ urne} \end{cases}$

$(x_1, \dots x_k)$

x_i = nr. urnei în care am pus bila i

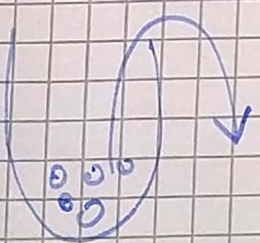
$\boxed{n^k \text{ moduri}}$

$f : \{k\} \to \{n\}$
(bile) (urne)
extrageri

→ nr. de șiruri de lungime k cu termeni oarecare din $\{1, \dots n\}$.

2) Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Urnă cu n bile $1 \dots n$ și efectuăm k extrageri fără întoarcere. $(k \leq n)$



• În câte moduri?

→ nr. șiruri de lungime k cu termeni distincți din $\{1, \dots n\}$

$$\boxed{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k}$$

Scanned with CamScanner

	ordinea contează (mai multe valori)	ordinea nu contează	Schema Bose-Einstein
cu revenire	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$ C_n^k	

Exp. 1) MATE

'M' 'A'
'T' 'E'

cu revenire: $4^4 = 256$

fără revenire: $\frac{4!}{1!} = 4! = 24$

2) 4 cărți mate
3 fizică
2 istorie
1 geografie

Vrem să păstrăm grupate cărțile din domenii.

$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$

Problema aniversării

n persoane.

Vrem să vedem care este probabilitatea ca cel puțin 2 să se fi născut în aceeași zi.

Ipoteze: - anul are 365 zile

- ~~(echirepartitie)~~ ? în realitate nu chiar așa :))
- echirepartiție
- nu avem gemeni / tripleți, etc.

Câmpul de probabilitate:

$$\Omega = \{(z_1, z_2, \dots z_n) \mid z_i \in \{1, \dots 365\}\}$$

$$|\Omega| = 365^n$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea ev. posibile

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{365^n}$$ - echirepartiția

rez.

A - cel puțin 2 persoane s-au născut în aceeași zi

$$A = \{(z_1, \dots z_n) \in \Omega \mid \exists i, j,\ i \neq j \text{ a.î. } z_i = z_j\}$$

$$\mathbb{P}(A) = ?\ ;\ \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

↳ toate cele n persoane s-au născut în zile diferite.

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-n+1)}{365^n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

$n = 23 \Rightarrow \mathbb{P}(A) \simeq 51\%$

dc. nu se pune problema de echiprob.

$\Rightarrow$ probab. crește.

---

1) Avem n persoane și vrem să formăm comisii de câte k persoane.

Reformulare: Nr. submulțimi cu k elem. a unei mulțimi cu n elem.

$\rightarrow$ ordinea $\boxed{\text{nu}}$ contează : $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

$\binom{n}{k}$

$(x_1, x_2, \ldots x_k) \longrightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$

$k!$

Exp : 1) 52 cărți

câte mâini de 5 cărți $= \binom{52}{5} = C_{52}^5$

Exp.: Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 ași, 2 popi și o damă?

$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1$

52 cărți de joc

- 4 culori: inimă roșie / neagră, romb, treflă
- 13 tipuri: 2, 3, ... 10, J, Q, K, A

3) În jocul de Poker vrem să det. probabil. să obținem Fullhouse

ex $\{Q, Q, 3, 3, 3\}$

$\Omega = \{\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \mid w_i \in$ cărți de joc $\}$

$|\Omega| = C_{52}^5$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P: \mathcal{F} \to [0,1]$; $P(\{w_1, w_2 \dots w_5\})$ echiprep. $= \frac{1}{C_{52}^5}$

A = ev. prin care am obținut Fullhouse

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} =$

echiprep.
Laplace

$|A|$ → putem alege pt. 2 cărți
- figura pt. pereche cu $\binom{13}{1}$
- culoarea : $\binom{4}{2}$

→ iar pt. cele 3 cărți
- → fig. $\binom{12}{1}$
- → culoarea $\binom{4}{3}$

$|A| = C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^3$

$P(A) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^3}{C_{52}^5}$

4) o pereche

B = ev. prin care avem o pereche

aceeași figură

restul diferite 2 câte 2 și culorile diferite.

$$\underbrace{13 \cdot \binom{4}{2}}\cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{4}{1}^3$$

Exp: Problema lui Newton - Pepys:

cel mai probabil

a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri.

b) Cel puțin 2 valori de 6 apar atunci când aruncăm 12 zaruri.

c) Cel puțin 3 valori de 6 apar atunci când aruncăm 18 zaruri.

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$

$\{1, \dots 5\}$

A = ev. de interes

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6}$$

b) $\Omega = \{1, 2, \dots 6\}^{12}$

B = cel puțin 2 zaruri au val. 6 în 12 zaruri.

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = 1 - P(B^c)$$

$P(B^c)$ = ori 1 zar de 6, ori nicio val. de 6.

+ sunt disjuncte

$= 1 - P(\text{nicio val de } 6) - P(\text{o valoare de } 6)$

$$= 1 - \left(\frac{5^{12}}{6^{12}} + \frac{C_{12}^{1}}{6^{12}} \cdot 5^{4}\right) \quad <$$

c) C = ev. cel puțin 3 val. de 6 în 18 aruncări

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\}^{18}$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = 1 - P(C^c) =$$

$= 1 - \left(P(\text{să nu am niciuna}) + P(\text{să am una}) + P(\text{să am } 2) \right)$

disjuncte

$= 1 - \left(P(\text{nicio val}) + P(\text{o val.}) + P(2\text{ val}) \right)$

$$= 1 - \left(\frac{5^{18}}{6^{18}} + \frac{\binom{18}{1} \cdot 5^{17}}{6^{18}} + \frac{\binom{18}{2} \, 5^{16}}{6^{18}} \right) \quad <$$

Partiții $\longrightarrow$ coeficientul multinomial

Avem o mulțime cu n elemente și fie $n_1, n_2, \dots n_k \in \mathbb{N}$ a.î. $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Considerăm o partiție cu k submulțimi a.î. submulțimea i să aibă n_i elemente.

ex.: $k = 2$: $n_1 + n_2 = n$

$$\binom{n}{n_1}$$

$\Longrightarrow$ Echivalent cu mulțimea șirurilor de lungime n cu n_1 el. de tip 1

n_2 el. de tip 2

$\vdots$

n_k el. de tip k.

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \times \dots\dots$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$A_1 \qquad A_2 \qquad A_3$

$$\dots \times \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

$\downarrow$

A_k

$$= \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots$$

$$\dots \frac{\cancel{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}}{n_k!\underbrace{(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!}_{n}}$$

$0! = 1$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots n_k}$$

coef. multinomial.

Exp. 1) MATEMATICA — multime cu 10 el. pe care o partit.

M → 2

A → 3

T → 2

I → 1

C → 1

E → 1

în $\binom{10}{2, 3, 2, 1, 1, 1}$ moduri o putem partitiona

2) 4 băieți și 12 fete

Profes. formează în mod aleator în 4 subgrupe de câte 4 studenți.

Care este probabilitatea ca în fiecare subgrupă să fie un băiat? → A

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$$

partiții de 4 submulțimi cu 4 elemente a mulțimii de cardinal 16.

$$\mathbb{P}(w) = \frac{1}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$ echiprob.

$\boxed{B|B|B|B}$

4! moduri

$$\binom{12}{3,3,3,3}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4!\binom{12}{3,3,3,3}}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$

moduri aleg băieții

moduri distribui fetele în grupe

distribui studenți în grupe.

→ Extragerea cu revenire + ordinea nu contează.

În câte moduri putem plasa k bile care nu se disting între ele în n urne care se disting între ele? (B-E) $= \binom{n+k-1}{k}$ → bilele

|oo| |ooo|o|oooo|oo|

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$ → pereți

$n=6$

$k=12$

moduri pot așeza obiectele: bilă, perete
k n

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

$x_i \in \mathbb{N}$

Apl: Problema lui Montmort

n plicuri

m scrisori

A = Care este probabilitatea ca cel puțin o scrisoare să fi ajuns la destinatarul de drept?

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$

$\hookrightarrow$ ev. ca niciun scris. nu a ajuns unde trb.

$= \frac{|A^c|}{1.}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ $\sigma : \{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots n\}$

$\Omega = S_n = \{\sigma : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\}, \text{ bijective}\}$

$\Rightarrow n!$ funcții

$\mathbb{P}$ echiprop.

$A = \{\sigma \in S_n$ cu prop. $\exists\, i \in \{1, \dots n\}$ a.î. $\sigma(i) = i\}$

$n \to \infty \quad p \Rightarrow 1 - \frac{1}{e}$

Fie A_j - ev. prin care destinatarul j a primit scrisoarea destinată lui.

$= \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) = j\}$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum \cancel{P(A_1) + \ldots + P(A_3)}$$

Poincaré

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} (A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

sau $k-1$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$\cancel{\frac{1}{e}}$ e

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e}$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$