Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

3. Calculaţi $a^{a^{b^b}} \pmod{31}$.

4. Considerăm polinomul cu coeficienţi întregi $P(X) = X^3 - aX + b$. Determinaţi dacă polinomul $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{2^b}, +)$.

6. Fie p cel mai mic număr prim din descompunerea în factori primi a lui a şi q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu $a+b$, diferit de p. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $\exp_p(n)$ exponentul la care apare p în descompunerea în factori primi a lui n. Considerăm pe $\mathbb{N}$ relaţia binară ρ dată astfel: $m\rho n$ dacă $\exp_p(n) = \exp_p(m)$ şi $\exp_q(n) = \exp_q(m)$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi b şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă } x < -b, \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă } x \geq -b. \end{cases}$$

Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-1, b+1])$.

8. Demonstraţi că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a^2+a} | \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

9. Determinaţi constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinoamele $X^b - aX + 1$ şi $cX + d$ să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$.

25. ian. 2021

Examen - Structuri algebrice

[redacted] $\Rightarrow a = 8$

$\Rightarrow b = 6$

GRUPA 142

1. permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în S_{a+b}

$a+b = 8+6 = 14$

$a \cdot b - 1 = 8 \cdot 6 - 1 = 48 - 1 = 47$

47 - nr prim $\Rightarrow$ σ - permutare $\Rightarrow \sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_k$

$ord(\sigma) = 47 \Leftrightarrow ord(c_1) = ord(c_2) = \ldots = ord(c_k) = 47$

dar $47 < 14$ $\Rightarrow$ nu există nicio permutare de ordin 47 în S_{14}

3. $a^{a^{b^b}} \pmod{31} = ?$

$8^{8^{6^6}} \pmod{31}$ $\underset{\text{Euler}}{\not\Rightarrow}$ $8^{\varphi(31)} \equiv 1 \pmod{31}$

$(8, 31) = 1$ 　　 31 - prim

$\Rightarrow \varphi(31) = 30$

$8^{8^{6^6}}$ $\rightarrow$ calculez mai întâi $8^6 \pmod{31} = x$

după care $x^6 \pmod{31} = y$

apoi 8^y (mod 8

1/12

$\widehat{8^6} = \widehat{262.144} = \hat{8} = x$

$$
\begin{array}{r|l}
262.144 & 31 \\
\cline{2-2}
248 & 8456 \\
\cline{1-1}
=141 & \\
124 & \\
\cline{1-1}
174 & \\
155 & \\
\cline{1-1}
194 & \\
186 & \\
\cline{1-1}
=8 &
\end{array}
$$

$y = \widehat{x^6} = \widehat{8^6} = \hat{8}$

$\widehat{8^8} = \widehat{8^6} \cdot \widehat{8^2} = \hat{8} \cdot \widehat{64} = \hat{8} \cdot \hat{2} = \widehat{16}$

$$
\begin{array}{r|l}
64 & 31 \\
\cline{2-2}
62 & 2 \\
\cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

2. $\sigma = (1 \ldots 8)(9 \ldots 14) \in S_{14}$

$\tau \in S_{a+b}$ $\tau = ?$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

$\tau^3 = (\underbrace{1 \ldots 8}_{8})(\underbrace{9 \ldots 14}_{6})$

Fie $\tau = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_k \Rightarrow \tau^3 = c_1^3 \cdot c_2^3 \cdot \ldots \cdot c_k^3$

σ conține 2 cicli disjuncți de lungimi diferite

$\Rightarrow \tau^3 = c_1^3 \cdot c_2^3$ cu $ord(c_1) = 8$

$ord(c_2) = 6$

$3 \nmid 8 \Rightarrow c_1^3$ rămâne un 8 ciclu

$3 \mid 6 \Rightarrow c_2^3$ este produs de 3 cicli de lungime 2

$\Rightarrow$ nu convine

$\Rightarrow \nexists\, \tau \in S_{14}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

4. $P(X) = X^3 - aX + b = X^3 - 8X + 6$

Este $P(X)$ ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

Aplic criteriul lui Eisenstein

$\exists$ p prim ? a.î. $p \nmid 1$

$p \mid (-8)$; $p \mid 6$; $p^2 \nmid 6$

Observăm că pentru $p = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \mid (-8) & (A) \\ 2 \mid 6 & (A) \\ 4 \nmid 6 & (A) \end{cases}$

$\Rightarrow$ conform criteriului Eisenstein $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

3/12

5. Numărul elementelor de ordin 8 din $(\mathbb{Z}_{2^a},+)\times(\mathbb{Z}_{2^b},+)$

$$(\mathbb{Z}_{2^a},+)\times(\mathbb{Z}_{2^b},+) \Leftrightarrow (\mathbb{Z}_{2^8},+)\times(\mathbb{Z}_{2^6},+)$$

$$(\mathbb{Z}_{2^8},+)\times(\mathbb{Z}_{2^6},+) = \{(\hat{x},\bar{y}) \mid x\in\mathbb{Z}_{2^8}; y\in\mathbb{Z}_{2^6}\}$$

$$ord((\hat{x},\bar{y})) = 8 \Leftrightarrow [ord(\hat{x}), ord(\bar{y})] = 8$$

$$\Updownarrow$$

$$ord(\hat{x}) = 8 \text{ sau } ord(\bar{y}) = 8$$

Din Lagrange $\Rightarrow ord(\hat{x}) \mid 2^8$

$ord(\bar{y}) \mid 2^6$

$$\Rightarrow (ord(\hat{x}), ord(\bar{y})) \in \{(1,8),(2,8),(4,8),(8,8),$$
$$(8,4),(8,2),(8,1)\}$$

pt $ord(\bar{y}) = 8 \Rightarrow \dfrac{2^6}{(2^6,y)} = 8 \Rightarrow (64,y) = 8$

$y = \{8,24,40,56\}$

$y < 64$

I pt $ord(\hat{x}) = 1 \Rightarrow \dfrac{2^8}{(2^8,x)} = 1$

$\Rightarrow (2^8,x) = 2^8 \Rightarrow x = 2^8 = 256$

$\Downarrow$

$\hat{x} = \hat{0}$

II $ord(\hat{x}) = 2 \Rightarrow \dfrac{2^8}{(2^8,x)} = 2 \Rightarrow (2^8,x) = 2^7$

$x \in \{2,6,10,14,18,22,$
$26,30,34,38,42,$
$46 \dots\}$

4/12

6. $a = 8 = 2^3 \Rightarrow p = 2$

$a + b = 8 + 6 = 14 \Rightarrow q = 13$

$exp_p(n)$ - exponentul la care apare p în n

$m \rho n$ dacă $exp_p(n) = exp_p(m)$ și $exp_q(n) = exp_q(m)$

ρ - rel de echiv, clasele de echiv ale lui a și b,

SCR

Simetria

$m \rho n \Leftrightarrow exp_p(n) = exp_p(m)$ și $exp_q(n) = exp_q(m)$

$\Downarrow$

$exp_p(m) = exp_p(n)$ și $exp_q(m) = exp_q(n)$

$\Downarrow$

$n \rho m \Rightarrow \rho$ simetrica

Reflexivitate

$$m \rho m \Leftrightarrow \begin{cases} exp_p(m) = exp_p(m) \\ \text{și} \\ exp_q(m) = exp_q(m) \end{cases} \text{Ⓐ} \Rightarrow \rho \text{ simetrica}$$

Tranzitivitate

$m \rho n, t \rho m \Rightarrow t \rho n$

$$m \rho n \Rightarrow \begin{cases} exp_p(n) = exp_p(m) \\ exp_q(n) = exp_q(m) \end{cases} (1)$$

5/12

$t \rho m \Rightarrow \begin{cases} exp_p(m) = exp_p(t) \\ exp_q(m) = exp_q(t) \end{cases}$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \begin{cases} exp_p(n) = exp_p(t) \\ exp_q(n) = exp_q(t) \end{cases} \Rightarrow n \rho t$

$\Downarrow$

ρ tranzitivă

$\Rightarrow \rho$ relaţie de echiv

$\hat{a} = \hat{8} = \{x \mid exp_2(x) = 3$ şi $exp_{13}(x) = 0\} =$

$= \{x \mid x = 8k ; 2 \nmid k, 13 \nmid k\} =$

$= \{8k \mid (2, k) = 1 ; (13, k) = 1\}$

$\hat{b} = \hat{6} = \{x \mid exp_2(x) = 1$ şi $exp_{13}(x) = 0\} =$

$\widehat{2 \cdot 3}$

$= \{x \mid x = 2k ; 2 \nmid k ; 13 \nmid k\} =$

$= \{2k \mid (2, k) = 1 ; (13, k) = 1\}$

<u>SCR</u> : $\{x, y, x \cdot y \mid x \in D_2 ; y \in D_{13}\}$

Astfel SCR va conţine toate posibilităţile ca 2 să fie la o putere, la fel şi 13, dar şi produsul dintre ele.

7. $f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a) & \text{dc. } x < -b \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dc } x \geq -b \end{cases}$

Fie $f_1(x) = ax + b(1+a)$ dc $x < -b$

$\Rightarrow f_1$ este continuă - ecuație de gradul I

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (ax + b(1+a)) = -\infty$

$\lim\limits_{x \nearrow -b} f_1(x) = \lim\limits_{x \nearrow -b} [ax + b(1+a)] = -ab + b(1+a) =$

$= b(-a+1+a) = b = 6$

$\mathrm{Im} f_1 = (-\infty, b) = (-\infty, 6)$

Fie $f_2(x) = ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b$

f continuă $\Rightarrow$ funcție polinomială

$\lim\limits_{x \searrow -b} [ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b] =$

$a=8$

$b=6$

$= ab^2 + 2a(a-1)(-b) + a^3 - 2a^2 + a + b$

$= 8 \cdot 36 + 2 \cdot 8 \cdot 7(-6) + 8^3 - 2 \cdot 64 + 8 + 6 =$

$= \underbrace{288 - 672 + 512 - 128}_{0} + 14 = 14 = f_2(-b)$

$\left.\lim\limits_{x \to \infty} f_2(x) = \infty\right/ \Rightarrow \mathrm{Im} f_2 = [14, \infty)$

f injectivă $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f_1 \cap \mathrm{Im} f_2 = \emptyset$

$(-\infty, 6) \cap [14; \infty) = \emptyset$

$\Rightarrow f$ injectivă

$7/12$

Surjectivitatea

f surjectivă $\Leftrightarrow Im f_1 \cup Im f_2 = \mathbb{R}$

$Im f_1 = (-\infty, 6)$

$Im f_2 = [14, \infty)$ $\not\Rightarrow$

$\Rightarrow (-\infty, 6) \cup [14, \infty) \neq \mathbb{R} \Rightarrow f$ nu e surjectivă

f inj

f nesurj $\not\Rightarrow f$ nu e bijectivă

$f^{-1}([-b-1, b+1]) = f^{-1}([-6-1, 6+1]) =$

$= f^{-1}([-7, 7])$

$f^{-1}(-7) = ? \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = -7$

$Im f_1 = (-\infty, 6) \Rightarrow -7 \in$ prima ramură

$8x + 6 \cdot 9 = -7$

$8x = -7 - 54$

$8x = -61 \Rightarrow x = -\frac{61}{8}$

$f^{-1}(6) = ?$ $6 \in$ prima ramură

$8x + 6 \cdot 9 = 6 \Rightarrow 8x = -6 \cdot 8$

$x = -6$

$$\begin{array}{r} 54- \\ 7 \\ \hline 47 \end{array}$$

$Im f = (-\infty, 6) \cup [14, \infty)$

$[6, 7] \notin Im f \Rightarrow f^{-1}([-7, 7]) = f^{-1}([-7, 6)] =$

$= [-\frac{61}{8}, -6)$

f_1 continuă $\Rightarrow f^{-1}(Im f_1) =$ continuă

8/12

Enunț 7

$$f(x) = \begin{cases} 8x + 6\cdot 7 & x < -6 \\ 8x^2 + 2\cdot 8\cdot 7x + 8^3 - 2\cdot 8^2 + 8 + 6 & x \geq -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 42 & x < -6 \\ 8x^2 + 112x + 512 - 128 + 14 & x \geq -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 42 & x < -6 \\ 8x^2 + 112x + 398 & x \geq -6 \end{cases}$$

8. Dem că $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 64 - 8) \Leftrightarrow \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 72)$

este izomorf cu $(\mathbb{Q}[\sqrt{8^2+8}], +, \cdot) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathbb{Q}[\sqrt{72}], +, \cdot)$ unde $\mathbb{Q}[\sqrt{72}] = \{\alpha + \beta\sqrt{72} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$

Creez funcția $\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\sqrt{72}]$

$$\varphi(f) = f(\sqrt{72})$$

$\hookrightarrow$ morfism de inele

Arăt că φ este surjectivă

$\forall\ \alpha + \beta\sqrt{72}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ $\exists\ \varphi(\alpha + \beta X)$ aî

$\varphi(\alpha + \beta X) = \alpha + \beta\sqrt{72} \Rightarrow \varphi$ surjectivă

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Q}[\sqrt{72}]$

9/12

Arăt că $\operatorname{Ker}\varphi = (x^2-72)$

"$\subseteq$" Fie $f \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(f(x)) = f(\sqrt{72}) = 0$

$f(x) = (x^2-72)g(x) + r(x)$ cu $\operatorname{grad}(r(x)) < 2$

$f(\sqrt{72}) = r(\sqrt{72}) = \alpha + \beta\sqrt{2} = 0$ $\qquad g(x) \in \mathbb{Q}[x]$

caz I $\alpha \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ $\overset{\text{cu}}{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}}$ fals

$\Downarrow$

$\alpha = 0$

caz II $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow r(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = (x^2-72)g(x)$ $\Rightarrow f = (x^2-72)g$

$g(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$\Downarrow$

$f \in (x^2-72)$

$\Downarrow$

$\operatorname{Ker}\varphi \subseteq (x^2-72)$

(1)

"$\supseteq$" $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq (x^2-72)$

Fie $f \in (x^2-72) \Rightarrow f(x) = (x^2-72)g(x)$ cu $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$\varphi(f(x)) = f(\sqrt{72}) = \underbrace{((\sqrt{72})^2 - 72)}_{0} g(\sqrt{72}) = 0$

$\Rightarrow f \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow (x^2-72) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = (x^2-72)$

10/12

Deci $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\sqrt{72}]$ morfism de inele

$\text{Im}\varphi = \mathbb{Q}[\sqrt{72}]$

$\text{Ker}\varphi = (X^2-72)$ $\overset{\text{TFI}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{Q}[X]/_{(X^2-72)} \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{72}]$

Morfism de inele pt că

$\varphi(f+g) = \varphi(f)+\varphi(g) = f(\sqrt{72})+g(\sqrt{72})$

$\hookrightarrow (f+g)(\sqrt{72}) = f(\sqrt{72})+g(\sqrt{72})$

$\varphi(f\cdot g) = \varphi(f)\cdot\varphi(g) = f(\sqrt{72})\cdot g(\sqrt{72})$

$\hookrightarrow (fg)(\sqrt{72}) = f(\sqrt{72})\cdot g(\sqrt{72})$

$\varphi(1) = 1$

$\downarrow$

$f(X)=1 \Rightarrow f(\sqrt{72})=1$

9. $c,d \in \mathbb{Q}$; $c,d=?$ a.î.

X^6-8X+1 și $cX+d$ să fie în aceeași clasă

de echivalență în $\mathbb{Q}[X]/_{(X^2-72)}$

Fie $f\in\mathbb{Q}[X] \Rightarrow f = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$

$f = a_0+a_1X+X^2\underbrace{(a_2+a_3X+\ldots+a_nX^{n-2})}_{h\in\mathbb{Q}[X]}$

$$\Rightarrow f = a_0 + a_1 x + x^2 h \in (x^2 - 72)$$

$$\Rightarrow \hat{f} = \widehat{a_0 + a_1 x + x^2 h} = \widehat{a_0 + a_1 x}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^2-72) = \{\widehat{m + nx} \mid m, n \in \mathbb{Q}\}$$

$$\Rightarrow \widehat{cx+d} = \widehat{m + nx} \quad \forall c, d \in \mathbb{Q}$$