PRELIMINARII – RAPORT – TESTUL DE ORIENTARE (pb. 1,2) 20.02.2023

PI ACOPERIRI CONVEXE (3,4) AA

Seminar 1

săpt. 1

AA

SEM + LAB

100]

100]

. 1 pct.

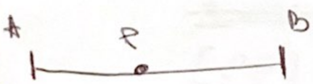
1. Fie $A=(1,2,3)$ și $B=(4,5,6)\in\mathbb{R}^3$

a) fie $C=(a,7,8)$. Să se ar. că $\exists\, r\in\mathbb{R}$ a.î. A, B, C să fie coliniare. Să se găsească raportul punctelor $r(A,B,C)$.

Lemă: Dacă $A,B\in\mathbb{R}^n$. Atunci pt. orice $P\in AB$, $\exists!$ $r\in\mathbb{R}$ a.î. $\vec{AP}=r\vec{PB}$. Reciproc, pt. $\forall\, r\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\exists!$ P a.î. $\vec{AP}=r\vec{PB}$.

Def: Scalarul r din lema anterioară se numește raportul ~~pte~~ pct. A, B, P și se not. $r(A,P,B)$.

Obs: ① $P\in(AB)$



$\Rightarrow$ $\vec{AP}=r\vec{PB}$; $\boxed{r>0}$

AP și PB au același sens

② $P\notin(AB)$

$\Rightarrow$ $\vec{AP}=r\vec{PB}$; $\boxed{r<0}$

A, B, C coliniare $\Rightarrow$ $\vec{AB}$ și $\vec{BC}$ coliniari

$\vec{AB}=B-A=(4,5,6)-(1,2,3)=(3,3,3)$

$\vec{BC}=C-B=(a,7,8)-(4,5,6)=(a-4,2,2)$

$\vec{AB}$ și $\vec{BC}$ colin $\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}$ a.î.

$$(3,3,3) = r(a-4,\ 2,\ 2)$$

$$\Rightarrow a-4 = 2 \qquad \boxed{a = 6} \qquad \boxed{r = \frac{3}{2}}$$

b) Să se det. P a.î. $r(A,P,B) = 1$

↳ P e mijl segm. AB

$$\vec{AP} = \vec{PB}$$

$\Rightarrow P =$ mijl AB

$$P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

$$P = \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(4,5,6)$$

$$P = \left(\frac{1}{2}+2,\ 1+\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}+3\right)$$

$$P = \left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2}\right)$$

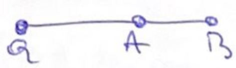
c) dați exemplu de un punct Q a.î. $r(A,B,Q) < 0$ și $r(A,Q,B) < 0$.

$B \notin [A,Q]$

$r(A,B,Q) < 0 \Rightarrow \cancel{Q \notin [A,B]}$

$r(A,Q,B) < 0 \Rightarrow \cancel{B \notin [A,B]}$

$Q \notin [A,B]$



Putem lua $Q = A - (1,1,1) =$

$= (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2)$

verif: • $\rightarrow r(A,B,Q)$

$\vec{AB} = (3,3,3)$

$\vec{BQ} = Q - B = (0,1,2) - (4,5,6) = (-4,-4,-4)$ $\Big\}\Rightarrow r<0$

$r(A,Q,B)$

• $\vec{AQ} = Q - A = (-1,-1,-1)$

• $\vec{QB} = B - Q = (4,4,4)$ $\Big\}\Rightarrow r<0.$

2. Se dau 2 pct. din $\mathbb{R}^2$ $P=(1,-1)$ și $Q=(3,3) \in \mathbb{R}^2$

a) Calculați val. determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia $\vec{PQ}$ și punctul $O=(0,0)$.

— a —

Rap: Fie $P=(p_1,p_2)$ și $Q=(q_1,q_2)$ și fie $R=(r_1,r_2)$.

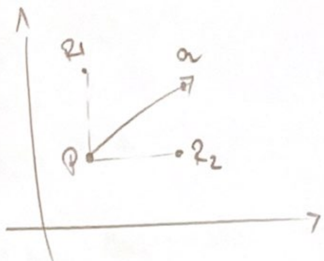
Se calc. det.:

$$\boxed{\Delta(P,Q,R) = \begin{vmatrix}1&1&1\\p_1&q_1&r_1\\p_2&q_2&r_2\end{vmatrix}}$$

$\Delta = 0 \Rightarrow P, Q, R$ colin.

$\Delta > 0 \Rightarrow R$ se află la stg. segm. orient. PQ

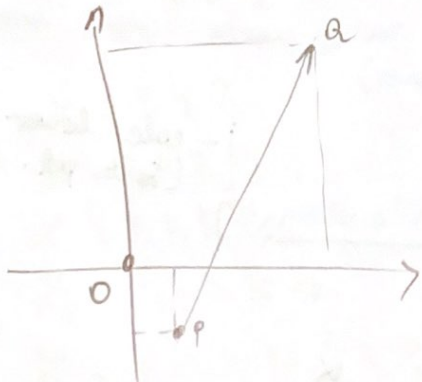
$\Delta < 0 \Rightarrow R$ —— " —— dr —— " —— PQ



— b —

$$\Delta_{PQO} = \begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&0\\-1&3&0\end{vmatrix} = 3+3 = 6 > 0 \Rightarrow O \text{ se află la stânga lui } PQ$$

Se verifică și pe desen



ACOPERIRI CONVEXE (1)

b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui α pentru care R_α se află la dr. lui $\overrightarrow{PQ}$.

$$\Delta_{PQR_\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 3 & -\alpha \end{vmatrix} = -3\alpha + 3 - \cancel{\alpha} + 3 - 3\alpha + \cancel{\alpha} = 6-6\alpha = 6(1-\alpha)$$

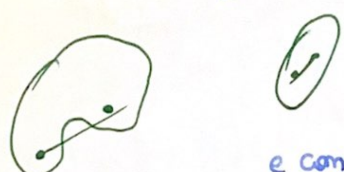
R_α se află la dr. $\Leftrightarrow$ $\Delta < 0$

$6(1-\alpha) < 0$

$\alpha > 1$

Def: Fie M o mulț. de puncte din $\mathbb{R}^n$. Spunem că M e convexă dacă $\forall\ p, q \in M$, $[pq]$ e inclus în M.

ex:



nu e conv. e conv.

Sol

1.

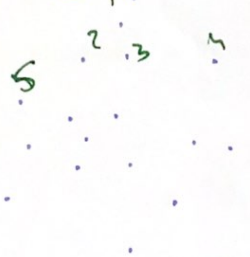
$\Rightarrow O(n^3)$ luam toate per. de pct. și verif. orient.

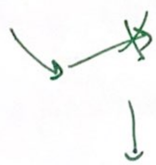
→ verif dacă fiecare muchie face parte din acoperire (dacă nu ∃ puncte decât într-o sg. parte)

⇒ ineficient.

2. Alg optim : Graham's Scan

– calc. lower și upper (sort. pct. lexicografic



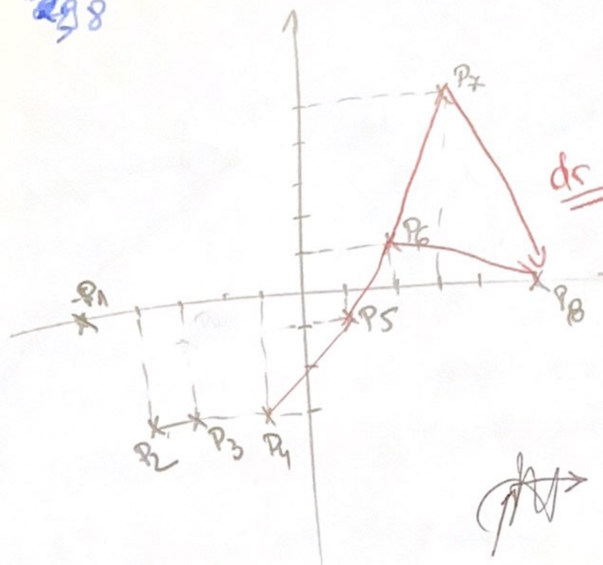


Graham's Scan:

1) Sort. pct. lexicografic
2) Adaugă pe rând pct, după care le elimină

3. Fie $M = \{P_1, P_2 \ldots P_8\}$

$P_1 = (-5, 0)$
$P_2 = (-4, -3)$
$P_3 = (-3, -3)$
$P_4 = (-1, -3)$
$P_5 = (1, -1)$
$P_6 = (2, 1)$
$P_7 = (3, 5)$
$P_8 = (5, 0)$



dr => îl sc pe P7

îl sc pe P6

și pe P5.

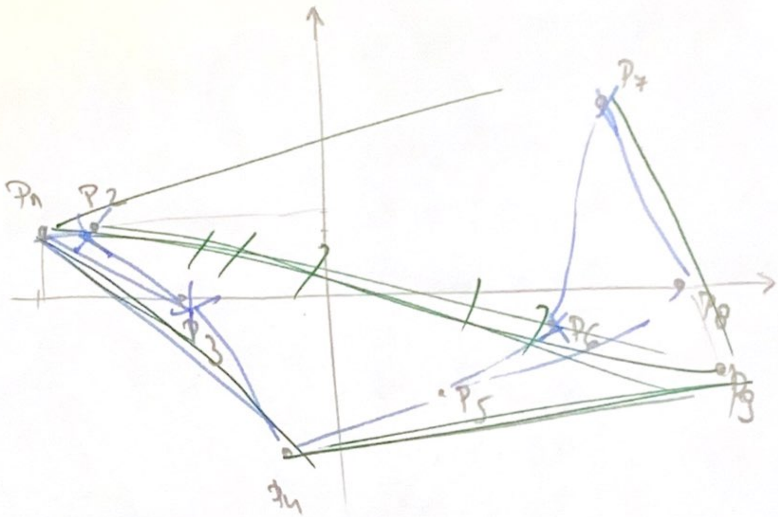
1. Sort. lexicografic → $P_1 \to P_8$

2. $L = P_1$
$L = P_1 P_2$ — toate sunt mai la dreapta
$L = P_1 P_2 P_3$ — verif dc P_4 e mai la stg pt P_2, P_3
$L = P_1 P_2 \cancel{P_3} P_4$ — nu e => îl scot pe 3

$L = P_1 P_2 P_4$
$L = P_1 P_2 P_4 P_5$
$L = P_1 P_2 P_4 P_6$
$L = P_1 P_2 P_4 P_6 P_7$
$L = P_1 P_2 P_4 \cancel{P_5} \cancel{P_6} \cancel{P_7} P_8$
$L = P_1 P_2 P_4 P_8$

4. Dați ex. de mulțime M din $\mathbb{R}^2$ pt. care la final $\mathcal{L}$ are 3 elem., dar pe parcursul alg. nr. max. de elem. a lui $\mathcal{L}$ este 6.

$P_1 = (-10, 4)$
$P_2 = (-8, 4)$
$P_3 = (-5, 0)$
$P_4 = (-3, -10)$
$P_5 = (1, -6)$
$P_6 = (4, -2)$
$P_7 = (6, 6)$
$P_8 = (8, 0)$
$P_9 = (10, -4)$



dreapta + scoate

$\mathcal{L} = P_1$
$\mathcal{L} = P_1 P_2$
$\mathcal{L} = P_1 \cancel{P_2} P_3 \quad = P_1 P_3$
$P_1 \cancel{P_3} P_4$
$P_1 P_4$
$P_1 P_4 P_5$
$P_1 P_4 P_5 P_6$
$P_1 P_4 P_5 P_6 P_7$ — 6 elem
$P_1 P_4 P_5 \cancel{P_6} \cancel{P_7} P_8$
$P_1 P_4 P_8 P_9$
$\boxed{P_1 P_4 P_9}$

n log n

5. un alg divide et impera pentru det. acop. conv.

n.n. refăs. mai multe le combinăm.

cel mai din