Olăeriu Vlad Mihai
grupa 141

1. Olăeriu $\Rightarrow a=7$

Vlad-Mihai $\Rightarrow b=5$

2. Determinați numărul de permutări de ordin 7 din grupul de permutări $S_{12}$.

Presupunem că avem o permutare $\sigma \in S_{12}$ și că descompunerea ei în produs de cicli disjuncți este:

$$\sigma = C_{i_1} \cdot C_{i_2} \cdot \ldots \cdot C_{i_k}$$

Știm că $i_1 + i_2 + \ldots + i_k < 12$ dacă nu luăm în calcul ciclii de lungime 1.

$$\text{ord}\,\sigma = [\text{ord}(C_{i_1}), \text{ord}(C_{i_2}), \ldots, \text{ord}(C_{i_k})] = 7$$

$$\text{ord}(C_{i_j}) = \text{lungimea ciclului}$$

Pentru ca $\text{ord}(\sigma) = 7$ trebuie să avem $[1, 7] \Rightarrow$ un ciclu de ordin 7 și 5 ciclii de ordin 1

Numărul ciclilor de lungime 7 din $S_{12}$ este egal cu

$$\frac{A_{12}^{7}}{7} = \frac{\frac{12!}{(12-7)!}}{7} = \frac{12!}{5! \cdot 7} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{7} = 132 \cdot 90 \cdot 48$$
$$= 570240$$

Avem 570240 permutări de ordin 7 în $S_{12}$

Scanned with CamScanner

3. Avem $\sigma = (1 \dots 7)(8 \dots 12)(13 \dots 24)$ produs de 3 cicli disjuncți 7, 5, 12 din $S_{24}$. $\tau \in S_{2a+2b}$ aî $\tau^3 = \sigma$

Pp. că $\exists\ \tau \in S_{24}$ aî $\tau^3 = \sigma$ și $\tau = C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_k}$ descompunerea lui $\tau$ în prod. de cicli disjuncți.

$$\tau^3 = C_{i_1}^3 C_{i_2}^3 \dots C_{i_k}^3 = (1 \dots 7)(8 \dots 12)(13 \dots 24)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{7-1}(-1)^{5-1}(-1)^{12-1} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\tau^3 = \sigma \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = -1$$

$\Rightarrow 3 \mid i_j$, $i_j = 12 \Rightarrow C_{12}^3$ trebuie să fie un produs de 3 cicli disjuncți de lungime 4, însă este un ciclu de lungime 12 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu $\exists$ $\tau \in S_{24}$ aî... $\tau^3 = \sigma$

4. Calculați $7^{12^{5^{12}}} \pmod{41}$.

Știind $(7, 41) = 1 \xRightarrow{\text{Euler}} 7^{40} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow$ ajunge să aflăm restul împărțirii lui $12^{5^{12}}$ la 40

$$12^{5^{12}} \pmod{40} \qquad 40 = 2^3 \cdot 5$$

Vom folosi LCR

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 8 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$$

$(8, 5) = 1$

$N = 8 \cdot 5$, $m_1 = 8$, $m_2 = 5$

$N_1 = 5$, $N_2 = 8$

~~$N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{m_1} \Leftrightarrow 5x_1 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow x_1 \equiv 5 \pmod 8$~~

~~$N_2 x_2 \equiv 1 \pmod{m_2} \Leftrightarrow 8x_2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_2 \equiv 2 \pmod 5$~~

~~$x = x_1 a_1 N_1 + x_2 a_2 N_2 = 5 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 2 = 100 + 20 = 120$~~

$\cancel{12^{5^{12}} \pmod{40} \equiv}$

$N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{m_1} \Leftrightarrow 5x_1 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow x_1 \equiv 5 \pmod 8$

$N_2 x_2 \equiv 1 \pmod{m_2} \Leftrightarrow 8x_2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_2 \equiv 2 \pmod 5$

$x = x_1 a_1 N_1 + x_2 a_2 N_2 = 5 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 2 = 100 + 48 = 148$

$12^{5^{12}} \pmod{40} \equiv 148 \pmod{40} \equiv 12 \pmod{40}$

$\cancel{7^{12^{5^{12}}} \pmod{41} \equiv 7}$

$12^{5^{12}} = 40 \cdot m + 12$

$7^{12^{5^{12}}} \pmod{41} \equiv 7^{40 \cdot m + 12} \pmod{41} \equiv (7^{40})^m \, 7^{12} \pmod{41}$

$7^{40} \equiv 1 \pmod{41}$

$\equiv 7^{12} \pmod{41} \equiv 49^6 \pmod{41} \equiv (+8)^6 \pmod{41}$

$\equiv 64^3 \pmod{41} \equiv 23^3 \pmod{41} \cancel{\equiv 15625 \pmod{41}}$

$\equiv 12167 \pmod{41} \equiv 31 \pmod{41}$

6. Determinați numărul elementelor de ordin 9 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^7},+)\times(\mathbb{Z}_{3^5},+)$

$\{(\hat{a},\bar{b})\in\mathbb{Z}_{3^7}\times\mathbb{Z}_{3^5} \mid ord(\hat{a},\bar{b})=9\}$

Știm că $ord((\hat{a},\bar{b}))=[ord(\hat{a}),ord(\bar{b})]=9$

$\Rightarrow \exists$ posibilitățile: $(1,9),(3,9),(9,3),(9,1)$

I

$\hat{a}\in(\mathbb{Z}_{3^7},+)$ și $ord(\hat{a})=1\Rightarrow\hat{a}=\hat{0}$ în $(\mathbb{Z}_{3^7},+)$

$\bar{b}\in(\mathbb{Z}_{3^5},+)$ și $ord(\bar{b})=9 \Leftrightarrow ord(\bar{b})=\frac{3^5}{(3^5,b)}=9$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(3^5,b)=3^3\\ b<3^5\end{array}\right| \Rightarrow b\in\{3^3\cdot1,3^3\cdot2\}\Rightarrow$ soluțiile $(\hat{0},\overline{3^3}),(\hat{0},\overline{3^3\cdot2})$ (2 soluții)

II

$\hat{a}\in(\mathbb{Z}_{3^7},+)$, $ord(\hat{a})=3\Rightarrow\frac{3^7}{(3^7,a)}=3\Rightarrow(3^7,a)=3^6\Rightarrow a\in\{3^6\cdot1,3^6\cdot2\}$

$\bar{b}\in(\mathbb{Z}_{3^5},+)$, $ord(\bar{b})=9$ analog $b\in\{3^3\cdot1,3^3\cdot2\}$

$\Rightarrow$ ~~soluțiile~~ 4 soluții: $\{(\widehat{3^6},\overline{3^3}),(\widehat{3^6},\overline{3^3\cdot2}),(\widehat{3^6\cdot2},\overline{3^3}),(\widehat{3^6\cdot2},\overline{3^3\cdot2})$

III

$\hat{a}\in(\mathbb{Z}_{3^7},+)$, $ord(\hat{a})=9\Rightarrow\frac{3^7}{(3^7,a)}=9\Rightarrow(3^7,a)=3^5\Rightarrow a\in\{3^5\cdot1,3^5\cdot2\}$

$\bar{b}\in(\mathbb{Z}_{3^5},+)$, $ord(\bar{b})=3\Rightarrow\frac{3^5}{(3^5,b)}=3\Rightarrow(3^5,b)=3^4\Rightarrow b\in\{3^4,3^4\cdot2\}$

$\Rightarrow$ 4 soluții

IV

$\hat{a}\in(\mathbb{Z}_{3^7},+)$, $ord(\hat{a})=9\Rightarrow$ analog $a\in\{3^5,3^5\cdot2\}$

$\bar{b}\in(\mathbb{Z}_{3^5},+)$, $ord(\bar{b})=1\Rightarrow(3^5,b)=3^5\Rightarrow b=3^5=\hat{0}$ în $(\mathbb{Z}_{3^5},+)$

$\Rightarrow$ 2 soluții

În total avem $2+4+4+2=10$ elemente de ordin 9

Scanned with CamScanner

8. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 7x + 40, & x < -5 \\ 7x^2 + 84x + 247, & x \geq -5 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 7 \cdot (-5) + 40 = 5$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

f. continuă pe ramuri deoarece este obținută prin operații cu funcții continue

$\Rightarrow Im f_1 (-\infty, 5)$ pe prima ramură

$f'(x) = 14x + 84, x > -5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 14x + 84 = 0 \Rightarrow x = \frac{-84}{14} = -6$

| $x$ | $-5$ | $-6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+ + + +$ | $0$ | $+ + + +$ |
| $f(x)$ | $2$ ↗ | $f(-6)$ | ↗ |

$f(-5) = 7 \cdot 25 - 84 \cdot 5 + 247 = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$

$Im f_2 = [2, +\infty)$ pentru a doua ramură

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $5$ |

din tabele $\Rightarrow$ f. nu este injectivă ①

$Im f_1 \cup Im f_2 \Leftrightarrow [-\infty, 5) \cup [2, +\infty] = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \Rightarrow$

f. este surjectivă ②

① + ② $\Rightarrow$ f. nu este bijectivă

$f^{-1}([-12,12]) = f^{-1}([-12,12])$ preimaginea

$f^{-1}([-12,12]) = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \le f(x) \le 12\}$

I

$-12 \le f(x) \le 5 \quad , x < -5$

$-12 \le 7x+40 \le 5$

$-42 \le 7x \le -35$

$-6 \le x \le -5$

$x \in [-6,-5]$ (I)

II

$5 \le f(x) \le 12, \; x > -5$

$5 \le 7x^2+84x+247$

$7x^2+84x+242 \ge 0$

$\Delta = 84^2 - 7 \cdot 4 \cdot 242 = 7056 - 6776$

$= 280$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + + + + | | 0 | - - - | 0 | + + + + + | |

$x \in \left(-\infty, \frac{-84-\sqrt{280}}{14}\right] \cup \left[\frac{-84+\sqrt{280}}{14}, +\infty\right)$ (1)

$7x^2+84x+247 \le 12$

$7x^2+84x+235 \le 0$

$\Delta = 84^2 - 7 \cdot 4 \cdot 235 = 7056 - 6580$

$= 476$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + + + + | | 0 | - - - | 0 | + + + + + | |

$x \in \left[\frac{-84-\sqrt{476}}{14}, \frac{-84+\sqrt{476}}{14}\right]$ (2)

$x > -5$ (3)

$\Rightarrow x \in \left[\frac{-84+\sqrt{280}}{14}, \frac{-84+\sqrt{476}}{14}\right]$ (II)

(I) + (II) $\Rightarrow x \in [-6,-5] \cup \left[\frac{-84+\sqrt{280}}{14}, \frac{-84+\sqrt{476}}{14}\right]$

10. $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{11} \\ x \equiv 8 \pmod{12} \\ x \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$ Determinați toate numerele întregi x cu proprietate că:

Vom folosi Lema chineză a resturilor:

$N = 11 \cdot 12 \cdot 13$

$m_1 = 11,\ m_2 = 12,\ m_3 = 13$

$N_1 = 12 \cdot 13 = 156,\ N_2 = 11 \cdot 13 = 143,\ N_3 = 11 \cdot 12 = 132$

$N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{m_1} \Leftrightarrow 156 x_1 \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow 2x_1 \equiv 1 \pmod{11}$

$x_1 \equiv 6 \pmod{11}$

$143 x_2 \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow 11 x_2 \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow x_2 \equiv 11 \pmod{12}$

$132 x_3 \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow 2x_3 \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow x_3 \equiv 7 \pmod{13}$

$x = N_1 x_1 a_1 + N_2 x_2 a_2 + N_3 x_3 a_3$

$= 12 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 6 + 11 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 8 + 11 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 9$

$= 12 \cdot 7 (13 \cdot 6 + 11 \cdot 9) + 121 \cdot 13 \cdot 8$

$= 84 (78 + 99) + 121 \cdot 104$

$= 84 \cdot (99 + 78) + 12584 = 14868 + 12584 = 27452$

$27452 \pmod{N} \equiv 27452 \pmod{1716} \equiv 1712 \pmod{1716}$

Scanned with CamScanner