Restanţă
Structuri Algebrice în Informatică
06/09/2021

Nume: .... **Punctaj parţial 1.................**

Prenume: .... **Punctaj parţial 2.................**

<u>IMPORTANT!!</u>. Punctul din oficiu este acordat pentru aflarea lui a şi b pe care, ulterior, le veţi înlocui în toate enunţurile problemelor. Pe foile voastre de examen veţi scrie enunţurile problemelor cu a şi b înlocuite cu valorile anterior determinate.

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion, atunci $a = 7$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu, atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa, atunci $b = 8$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea) şi 8 (nr. de litere atât al cuvântului Beatrice, cât şi al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
oficiu	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Determinaţi numărul de permutări de ordin a din grupul de permutări S_b.

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^{11} = \sigma$.

3. Calculaţi $b^{b^{a^a}} \pmod{23}$.

4. Spunem că un polinom cu coeficienţi întregi $f(X)$ este *Eisenstein modulo* p, unde p este un număr prim, dacă există $d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(X+d)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein aplicat numărului prim p. Determinaţi toate numerele prime p, dacă există, pentru care $f(X) = X^3 - 3aX + 3b$ este Eisenstein modulo p. În plus, pentru fiecare astfel de p, dacă există, precizaţi şi un $d \in \mathbb{Z}$ ca mai sus.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 6 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{6^b}, +)$.

6. Determinaţi cel mai mic număr natural impar de 4 cifre n care are proprietatea că împărţit la 11 dă restul a şi împărţit la 13 dă restul b.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11, \text{ dacă } x \in [2, 6] \\ -x + 9, \text{ dacă } x > 6. \end{cases}$$

   Determinaţi mulţimile $\{f(x) |\ x \in (1, b)\}$ şi $\{x \in \mathbb{R} |\ b - a \leq f(x) \leq b\}$. Este funcţia bijectivă?

8. Determinaţi numerele $c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât clasa de echivalenţă a polinomului $X^3 - cX + d$ în inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - aX + b)$ să fie aceeaşi cu clasa de echivalenţă a polinomului $aX - b$.

9. Considerăm polinomul $P(X) = X^3 - aX + b$ care are rădăcinile complexe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Determinaţi polinomul monic cu coeficienţi complecşi, $F(X)$, care are rădăcinile $3\alpha_1 - 2, 3\alpha_2 - 2, 3\alpha_3 - 2$.

Structuri algebrice
în informatică.

[redacted] : $a = 5$

: $b = 6$

GRUPA : 141.

06.08.2021

1. Determinați numărul de permutări de ordin 5 din grupul de permutări S_6.

$\sigma \in S_6$ a.î. $\operatorname{ord}(\sigma) = 5$

Fie $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

$\operatorname{ord} \sigma = [\operatorname{ord}(\sigma_1), \operatorname{ord}(\sigma_2), \dots, \operatorname{ord}(\sigma_n)] \Rightarrow [\operatorname{ord}(\sigma_1) \dots \operatorname{ord}(\sigma_5)] = 5$

$\operatorname{ord}(\sigma_1) + \dots + \operatorname{ord}(\sigma_n) = 6.$

$\Rightarrow$ σ este alcătuit dintr-un 5-ciclu și un ciclu de lungime 1.

Așa că $\sigma = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)(x_6) = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$

#permutări $\frac{6!}{5} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144.$

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \dots, 5)(6, \dots, 11)$, un produs de 2 cicli disjuncți de lungime 5, respectiv 6 din S_{11}. Determinați toate permutările $\tau \in S_{11}$ astfel încât $\tau^{11} = \sigma$

Fie $\sigma \in S_{11}$, $\sigma = c_1 \dots c_n$ și $\sigma^k = c_1^k \dots c_n^k$.

Fie $\tau \in S_{11}$ a.î. $\tau^{11} = \sigma \Rightarrow \tau$ este produs de doi ciclii: unul de lungime 5 și unul de lungime 6;

$$\tau = (x_1\ x_2 \cdots x_5)(x_6\ x_7 \cdots x_{11}) \Rightarrow \cancel{x_1\ x_2 \cdots x_n})$$

$$\Rightarrow (x_1\ x_2 \cdots x_5)^{11} (x_6\ x_7 \cdots x_{11})^{11} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$$

$$\Leftrightarrow (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)(x_6\ x_{11}\ x_{10}\ x_9\ x_8\ x_7) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \\ (x_6\ x_{11}\ x_{10}\ x_9\ x_8\ x_7) = (6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7)$$

3. Calculați $6^{6^{5^5}} \pmod{23}$

Mica teoremă a lui Fermat $\varphi(23) = 22$

$6^{\varphi(23)} = 6^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 6^{22k} = 1 \pmod{23}$

Vreau $6^{5^5} \equiv ? \pmod{22 = 2 \cdot 11}$

$6^{5^5} \equiv 0 \pmod{2}$

$6^{5^5} \pmod{11} = 6^{3125} \pmod{11}$

(Fermat) $\varphi(11) = 10$

$\Rightarrow 6^{5^5} \pmod{11} = 6^5 \pmod{11} = 7776 \pmod{11} = 10.$

$6^{5^5} \equiv 0 \pmod{2}$

$6^{5^5} \equiv 10 \pmod{11}$ Trebuie ca x să îndeplinească ambele condiții

$x = 10 \cdot 6 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 11 = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6^{5^5} \equiv 120 \pmod{22} = 10 \pmod{22} \Rightarrow 6^{6^{5^5}} \equiv 6^{10} \pmod{23} = (6^2)^5 \pmod{2}$

$= 36^5 \pmod{23} = 13^5 \pmod{23} = (13^2)^2 \cdot 13 \pmod{23} = (169)^2 \cdot 13 \pmod{2}$

$= 8^2 \cdot 13 \pmod{23} = 64 \cdot 13 \pmod{23} = 18 \cdot 13 \pmod{23} = 4 \pmod{2}$

4. Spunem că un polinom cu coeficienți întregi $f(X)$ este Eisenstein modulo p, unde p este un nr. prim, dacă există $d \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(X+d)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein aplicat numărului prim p. Determinați toate numerele prime p, dacă există, pt. care $f(X) = X^3 - 3 \cdot 5 X + 3 \cdot 6$ este Eisenstein modulo p. În plus, pt fiecare astfel de p, dacă există, precizați și un $d \in \mathbb{Z}$ ca mai sus.

$f(X) = X^3 - 15X + 18$ Eisenstein modulo p $\Leftrightarrow$ $\exists d \in \mathbb{Z}$ a.î. $(x+d)$ e ireductibil Eisenstein pt. nr p.

$$(x+d)^3 - 15(x+d) + 11 = x^3 + 3dx^2 + 3d^2x - 15x - 15d + 11 + d^3$$
$$= x^3 + x^2(3d) + x(3d^2 - 15) + (d^3 - 15d + 11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \mid d^3 - 15d + 11 \\ p \mid 3d^2 - 15 \\ p \mid 3d \quad \Rightarrow p \mid 3 \Rightarrow p = 3 \text{ sau } p \mid d \\ p \nmid 1 \\ p^2 \nmid d^3 - 15d + 11 \end{cases}$$

caz $p \mid d$ $\Rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} p \mid d^3 \\ p \mid d^3 - 15d + 11 \end{array} \right\}$ $\Rightarrow p \mid 11 \Rightarrow \boxed{p = 11}$

$\boxed{\text{Aleg } d = 0 \in \mathbb{Z}}$

caz $p = 3$ $\quad \left. \begin{array}{l} 3 \mid d^3 - 15d + 11 \\ 3 \mid 15d \end{array} \right\}$ $\Rightarrow 3 \mid d^3 + 11$

5\. Determinați numărul elementelor de ordin 6 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^5},+)\times(\mathbb{Z}_{6^6},+)$

$a=5$

$b=6$

$$(\mathbb{Z}_{243},+)\times(\mathbb{Z}_{46656},+)$$

Fie $(x,y)\in(\mathbb{Z}_{243},+)\times(\mathbb{Z}_{46656},+)$

$\mathrm{ord}((x,y)) = 6 \Rightarrow [\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)] = 6$

$\Rightarrow (\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)) \in \cancel{\{(1,6),(2,6),(3,6),(6,6),(6,3),(6,2),(6,1)\}}$

$\{(1,6),(2,6),(3,6),(6,6),(6,3),(6,2),(6,1)\}$

$\mathrm{ord}(x) = 1 \Rightarrow x = \hat{0}$

$\mathrm{ord}(x) = 2 \Rightarrow \frac{243}{(243,x)} \Rightarrow$

$\cancel{6 \nmid 243}$

$\mathrm{ord}(x) = 1 \Rightarrow x = \hat{0}$

$\mathrm{ord}(x) = 2 = \frac{243}{(243,x)} \Rightarrow (243,x) = \frac{243}{2}.$

$\mathrm{ord}(y) = 1 \Rightarrow y = \hat{0}$

$\mathrm{ord}(y) = 2 \Rightarrow \frac{46656}{4}$

$\cancel{6 \nmid 243 \Rightarrow \nexists}$ ~~elem de ordin 6~~

$6 \nmid 243 \Rightarrow \exists$ elemente de ordin 6 în $(\mathbb{Z}_{243},+)\times(\mathbb{Z}_{46656},+)$

5/9

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11, & \text{dacă } x \in [2, 6] \\ -x + 9, & \text{dacă } x > 6 \end{cases}$$

Determinați $\{f(x) \mid x \in (1, 5)\}$ și $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \le f(x) \le 6\}$.

Este f bijectivă?

6. Determinați cel mai mic nr. natural impar de 4 cifre n care are proprietatea că împărțit la 11 dă restul 5 și împărțit la 13 dă restul 6.

8. Deter. numerele $c, d \in \mathbb{R}$ a.î. clasa de echivalență a polinomului $X^3 - cX + d$ din inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 5X + 6)$ să fie aceeași cu clasa de echivalență a polinomului $5X - 6$.

$\widehat{5x+6} = \widehat{x^3 - cx + d} \Rightarrow \exists\ P \in \mathbb{Q}[x]$ a.î. $x^3 - cx + d =$

$= P(x^2 - 5x + 6) + 5x - 6$

luăm $P = (x+5)$ $\Big| \Rightarrow x^3 - cx + d = (x+5)(x^2 - 5x + 6) + 5x - 6$

$\Leftrightarrow x^3 - cx + d = (x^3 - 4x + 30) + 5x - 6$

$\Leftrightarrow x^3 - cx + d = x^3 + x - 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -1,\ d = \cancel{-27}\ -24$

9

Considerăm polinomul $P(x) = x^3 - 5x + 6$ care are rădăcinile complexe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Aflați polinomul monic cu coeficienți complecși, $F(x)$, care are rădăcinile $3\alpha_1 - 2$, $3\alpha_2 - 2$, $3\alpha_3 - 2$.

$P(x) = x^3 - 5x + 6$

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = x^3 - 5x + 6.$

Viete $s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -5$

$s_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -6.$

Fie $s_1' = (3\alpha_1 - 2) + 3(\alpha_2 - 2) + 3(\alpha_3 - 2)$

$= 3[(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 2] = 3 \cdot 0 - 2 = -2.$

$s_2' = (3\alpha_1 - 2)(3\alpha_2 - 2) + (3\alpha_1 - 2)(3\alpha_3 - 2) + (3\alpha_2 - 2)(3\alpha_3 - 2)$

$= (9\alpha_1\alpha_2 - 6\alpha_1 - 6\alpha_2 + 4) + (9\alpha_1\alpha_3 - 6\alpha_1 - 6\alpha_3 + 4) +$

$+ (9\alpha_2\alpha_3 - 6\alpha_2 - 6\alpha_3 + 4)$

$= 9 s_2 - 12 s_1 + 12 = -33.$

$s_3' = (3\alpha_1 - 2)(3\alpha_2 - 2)(3\alpha_3 - 2)$

$s_3' = 27\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_3 + 4 \cdot 3\alpha_1 + 12\alpha_2 + 12\alpha_3$

$s_3' = 27 s_3 - 2 s_2 + 2 s_1$

$= -162 + 10 = -152$

Așa că $F(x) = x^3 - s_1' x^2 + s_2' x - s_3'$

$= x^3 + 2x^2 - 33x + 152.$