Oprea Tudor - 141 06.06.2022

Examen

1. Oprea → $a = 5$

Tudor → $b = 5$

$m = \min(5,5) = 5$

$M = \max(5,5) = 5$

2. câte permutări de ordin 5 se află în S_5?

~~numărul~~

$ord(S_5) = 5!$

pot exista astfel de permutări $\Leftrightarrow 5 \mid ord(S_5)$

$5 \mid 5!$

(A)

fie $\sigma \in S_5$ o permutare a.î. $\sigma = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$, $i_1 + i_2 + \ldots + i_k \leq 5$, este descompunerea în produs de cicli disjuncți.

$ord(\sigma) = [\,ord(c_{i_1}), ord(c_{i_2}) \ldots ord(c_{i_k})\,]$

$\Rightarrow 5 = [1, 5]$

$\Rightarrow \sigma$ se poate scrie drept un singur ciclu de lungime 5 $\Rightarrow c_5$

și $\exists$ $\frac{A_5^5}{5} = \frac{5!}{5} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

1

3. Se consideră permutarea

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12\ 13\ 14\ 15)$,

un produs de 3 cicli disjuncți din S_{15}. Determinați toate permutările $\tau \in S_{15}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$.

Fie $\tau \in S_{15}$ cu $\tau = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$, unde $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 15$, cu ~~$\forall$~~ i_j = lungimea ciclilor, — descompunerea în produs de cicli disjuncți

- $1 \le k < 15$ (dacă k ar fi 15, τ ar fi permutarea identică)

- $\tau^2 = c_{i_1}^2 \cdot c_{i_2}^2 \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^2$, pentru că ciclii disjuncți comută, iar descompunerea este unică

- ~~Avem două cazuri:~~ ~~l - lungimea unui ciclu~~

~~① $2 \mid l \rightarrow c_l^2$ - produs de 3 cicli disj. de lungime $l/$~~

~~② $2 \nmid l \rightarrow c_l^2$ - un singur ciclu de lungime l~~

Gvrea Tudor - 141

τ conține 3 cicli disj de lungimi egale

$\Rightarrow \tau^2 = c_1^2 c_2^2 c_3^2 \Rightarrow \mathrm{ord}(c_1)=5$
$\mathrm{ord}(c_2)=5$
$\mathrm{ord}(c_3)=5$

$\mathrm{ord}(\sigma) = [[5,5],5] = 5$

$$\mathrm{ord}(\tau^2) = \frac{\mathrm{ord}(\tau)}{(\mathrm{ord}(\tau),2)} = \frac{5}{1} = 5 \Rightarrow \mathrm{ord}(\tau) \,\vdots\, 5$$

$\mathrm{ord}(\tau) = 5$

$\tau = x^2 y^2 z^2$, cu x, y, z 5-cicli

$x^2 = (1\,2\,3\,4\,5) \Rightarrow x = (1\,4\,2\,5\,3)$
$y^2 = (6\,7\,8\,9\,10) \Rightarrow y = (6\,9\,7\,10\,8)$
$z^2 = (11\,12\,13\,14\,15) \Rightarrow z = (11\,14\,12\,15\,13)$

$\Rightarrow \tau = (1\,4\,2\,5\,3)(6\,9\,7\,10\,8)(11\,14\,12\,15\,13)$

Oprea Tudor - 141

4. Calculati $5^{5^{5^5}}$ (mod 31).

$(5, 31) = 1$

• Th Euler $\Rightarrow$ ~~Atunci că~~ $5^{30} \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow$ e suficient dacă aflăm $5^{5^5} \pmod{30}$

• $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$$\cancel{5^{5^5}} \equiv \begin{cases} x \equiv 0 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

Folosim Lema Chineză a Resturilor:

~~(5,2,3)=1~~ $(5,2) = 1 \quad (2,3) = 1 \quad (5,3) = 1$

$N = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$

$N_1 = 2 \cdot 3 = 6$

$N_2 = 5 \cdot 3 = 15$

$N_3 = 5 \cdot 2 = 10$

$\Rightarrow N_1 x_1 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 6x_1 \equiv 1 \pmod 5$
$x_1 \equiv \underline{1} \pmod 5$

$N_2 x_2 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 15 x_2 \equiv 1 \pmod 2$
$x_2 \equiv \underline{\underline{1}} \pmod 2$

$N_3 x_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 10 x_3 \equiv 1 \pmod 3$
$x_3 \equiv \underline{\underline{1}} \pmod 3$

$\Rightarrow$ sol. unică mod 30 este

$a_1 N_1 x_1 + a_2 N_2 x_2 + a_3 N_3 x_3 =$

$= 0 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 = 65 \pmod{30} = 5$

$\Rightarrow 5^{30x+5} \pmod{31} \equiv 5^5 \pmod{31} \equiv 25 \pmod{31}$ (4)

5. Det. cel mai mare nr. nat. de 4 cifre cu proprietatea că dacă îl împărțim pe rând la numerele 13, 14 respectiv 15, obținem resturile 5, 5, respectiv 5.

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{13} \\ x \equiv 5 \pmod{14} \\ x \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$$

$(13, 14, 15) = 1$ deci putem folosi Lema Chineză a Resturilor

$N = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$

$N_1 = 14 \cdot 15 = 210$

$N_2 = 13 \cdot 15 = 195$

$N_3 = 13 \cdot 14 = 182$

$\Rightarrow N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 210 x_1 \equiv 1 \pmod{13}$

$2x_1 \equiv 1 \pmod{13} \quad | \cdot 7$

$x_1 \equiv 7 \pmod{13}$

$N_2 x_2 \equiv 1 \pmod{14} \Rightarrow 195 x_2 \equiv 1 \pmod{14}$

$13 x_2 \equiv 1 \pmod{14} \Rightarrow -x_2 \equiv 1 \pmod{14}$

$x_2 \equiv -1 \pmod{14}$

$N_3 x_3 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 182 x_3 \equiv 1 \pmod{15}$

$2x_3 \equiv 1 \pmod{15} \quad | \cdot 8$

$x_3 \equiv 8 \pmod{15}$

$\Rightarrow$ soluția unică modulo 2730 este

$5 \cdot N_1 x_1 + 5 \cdot N_2 x_2 + 5 \cdot N_3 x_3 =$

$= 5 \cdot 210 \cdot 7 + 5 \cdot 195 \cdot (-1) + 5 \cdot 182 \cdot 8 =$

$= 13655 \pmod{2730} = 5 \pmod{2730}$

<u>continuare 5</u>

5 (mod 2730) și dorim cel mai mare număr nat. de 4 cifre cu această proprietate

$2730 \cdot 4 = 10\,920$ (mai mult de 4 cifre)

$2730 \cdot 3 = 8190$

$\Rightarrow$ numărul cerut este $8190 + 5 = \underline{\underline{8195}}$

6. Determinați numărul elementelor de ordin 12 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^5}, +) \times (\mathbb{Z}_{6^5}, +)$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_{32}, +) \times (\mathbb{Z}_{7776}, +)$

Fie $(\hat{x}, \bar{y}) \in (\mathbb{Z}_{32}, +) \times (\mathbb{Z}_{7776}, +)$ cu $\begin{cases} \hat{x} \in \mathbb{Z}_{32} \\ \bar{y} \in \mathbb{Z}_{7776} \end{cases}$

Lagrange: $o(\hat{x}) \mid 32$, $ord(\hat{y}) \mid 7776$

$\Rightarrow o((\hat{x}, \hat{y})) = [o(\hat{x}), o(\hat{y})] = 12$

$12 = 12 \cdot 1$
$12 = 2 \cdot 6$
$12 = 3 \cdot 4$

I. $o(\hat{x}) = 12 \Rightarrow \dfrac{32}{(32, \hat{x})} = 12$

$\Rightarrow (32, \hat{x}) = \dfrac{32}{12} \Rightarrow (32, \hat{x}) = \dfrac{8}{3}$ X/4

<u>II</u> $o(\hat{x}) = 2 \Rightarrow \dfrac{32}{(32, \hat{x})} = 2 \Rightarrow (32, \hat{x}) = 16$

$\Rightarrow \hat{x} \in \{\widehat{16}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{8}, \hat{1}\}$

Gîrea Tudor - 141

7. Considerăm pe $\mathbb{R}$ relația binară ρ def. astfel :

$x \rho y$ dacă $x^2-5x+5-5 = y^2-5y+5-5$. Să se ar. că ρ este rel. de echivalență și să se determine un SCR pentru ea. Este funcția $f: \mathbb{R}/_\rho \to \mathbb{R}$,

$f(\hat{x}) = 2x^2-10x+25-25$ bine def?

$x \rho y \Leftrightarrow x^2-5x = y^2-5y$

ρ relație de echivalență $\Leftrightarrow$ ρ reflexivă, simetrică, tranzitivă

1 $\to$ reflexivitate:

$x^2-5x = x^2-5x$ (A) $\Rightarrow \rho$ reflexivă

2 $\to$ simetrică : $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$$\left.\begin{array}{l} x \rho y : x^2-5x = y^2-5y \\ y \rho x : y^2-5y = x^2-5x \end{array}\right\} (A)$$

$\Rightarrow \rho$ simetrică

3 $\to$ tranzitivă :

$$\left.\begin{array}{l} x \rho y : x^2-5x = y^2-5y \\ y \rho z : y^2-5y = z^2-5z \\ x \rho y \wedge y \rho z \Leftrightarrow x \rho z \end{array}\right\} (A)$$

$\Rightarrow \rho$ tranzitivă

$(1),(2),(3) \Rightarrow \rho$ este relație de echivalență

- $f: \mathbb{R}/_\rho \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2-10x$ este bine definită.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită astfel

$$f(x) = \begin{cases} 5x-20, & x<5 \\ 20x^2-200x+375+130, & 5\le x\le 5 \\ 5x-25+5, & x>5 \end{cases}$$

$$f(5) = 20\cdot 25 - 200\cdot 5 + 375 + 130 = \underline{\underline{5}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 5x-20, & x\neq 5 \\ 5, & x=5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ putem scrie funcția $f(x) = 5x-20$

$f'(x) = 5$

- $f'(x) > 0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare

$\Rightarrow f$ este injectivă. (1)

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  f continuă pe $\mathbb{R}$ ca fc. obț. din operații elementare cu fcț. elementare

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ surjectivă (2)

(1),(2) $\Rightarrow f$ bijectivă

$f^{-1}([4,10]) = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in[4,10]\}$

$5x_1-20 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{24}{5}$

$5x_1-20 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{30}{5} = 6$

f este strict crescătoare

$\Rightarrow f^{-1}([4,10]) = [\frac{24}{5}, 6]$.

8

9. Determinați toate morfismele de grupuri $\phi: (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$ și specificați care dintre acestea sunt injective, surjective, respectiv bijective.

Grea Tudor - 141

$\phi : (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$ morfism de grupuri

$\Leftrightarrow \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_5$

$x = y = \hat{1} \quad \phi(2) = \phi(1) + \phi(1) = 2\phi(1)$

$x = \hat{2}, y = \hat{1} \quad \phi(3) = \phi(2) + \phi(1) = 2\phi(1) + \phi(1) = 3\phi(1)$

$\vdots$

$\underbrace{\phi(n) = n\,\phi(1)}_{\text{dem. prin inducție}}$ $\quad (\phi(x_1 + \dots + x_k) = \phi(x_1) + \phi(x_2) + \dots + \phi(x_k))$

$\phi(k) = k\,\phi(1) \; \forall k \in \mathbb{Z}_5$

$\Rightarrow$ Toate morfismele de gr. de la $(\mathbb{Z}_5, +)$ la $(\mathbb{Z}_5, +)$ sunt de forma $\phi_x(k) = kx$, cu $x \in \mathbb{Z}_5$

$\Rightarrow \phi_{\hat{1}}(k) = k$

$\phi_{\hat{2}}(k) = \hat{2}k$

$\phi_{\hat{3}}(k) = \hat{3}k \quad$ cu $\phi_i : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5 \; \forall i \in \overline{0,4}$

$\phi_{\hat{4}}(k) = \hat{4}k$

$\phi_{\hat{0}}(k) = \hat{0}$

Oricare dintre aceste funcții este injectivă și surjectivă, deci bijectivă.

(10) Determinați constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ a.î. polinoamele $X^5 - 5X + 1$ și $cX + d$ să fie în aceeași clasă de echivalență în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 20)$

Grupa Judan - 141

Fie $f \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow f = a_0 + a_1 \cancel{X}^1 + \dots + a_n X^n$

$$f = a_0 + a_1 X + X^2 \underbrace{(a_2 + a_3 X + \dots + a_n X^{n-2})}_{h \in \mathbb{Q}[X]}$$

$$\Rightarrow f = a_0 + a_1 X + X^2 h \in X^2 - 20$$

$$\Rightarrow \hat{f} = a_0 + a_1 X + X^2 h = \widehat{a_0 + a_1 X}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}[X] / _{X^2 - 20} = \{ \widehat{m + nX} \mid m, n \in \mathbb{Q} \}$$

$$\Rightarrow c\widehat{X + d} = \widehat{m + nX} \quad \forall\, c, d \in \mathbb{Q}$$