Curs 7 : 14. noiembrie

Ex.: O urnă cu bile numerotate de la 1 la 100.

→ Extragem 5 bile din urnă (succesiv):

a) Care este repartiția variabilei aleatoare care ne dă nr. bilelor ≥ 70?

b) Cum este repartizată v.a. care ne dă a 3-a extragere?

c) Care este probabilitatea ca nr. 79 să fie extras cel puțin o dată?

Sol.:

I Extragerea cu revenire

a) $X \sim B(5, \frac{31}{100})$ binomială

nr. de extrageri

prob. să avem succes am extras o bilă ≥ 70

b) $X_1, X_2, \ldots X_5 \in \{1, \ldots 100\}$

$X_1 \sim U(\{1, \ldots 100\})$ uniformă

X_2

$\vdots$

X_5

(extragere cu revenire)

c) $P(\{79 \text{ să fie extras cel puțin o dată}\}) =$
$P(\{X_1 = 79\} \cup \{X_2 = 79\} \cup \{X_3 = 79\} \cup \{X_4 = 79\} \cup$
$\cup \{X_5 = 79\})$

(extr. cu rev. → ev. indep.)

$= 1 - P(\{X_1 \neq 79\} \cap \{X_2 \neq 79\} \cap \{X_3 \neq 79\} \cap \{X_4 \neq 79\}$
$\cap \{X_5 \neq 79\}) = 1 - P(X_1 \neq 79) \cdot P(X_2 \neq 79) \cdot$
$\cdot P(X_3 \neq 79) \cdot P(X_4 \neq 79) \cdot P(X_5 \neq 79)$

Scanned with CamScanner

$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5$

II Extragere fără întoarcere:

a) $Y \sim HG(5, 100, 81)$ hipergeometrică

b) $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$

$Y_1 \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots 100\})$

$Y_2 \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots 100\})$

$$P(Y_2 = j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{100}}_{\text{f. prob. totale}} P(Y_2 = j \mid Y_1 = i) \cdot P(Y_1 = i)$$

O partiție a unui $\Omega = \underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n}_{\text{disj. 2 câte 2}}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(Y_2 = j \mid Y_1 = i) = \begin{cases} 0, & j = i \\ \frac{1}{99}, & j \neq i \end{cases}$$

$$P(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} P(Y_2 = j \mid Y_1 = i) \cdot P(Y_1 = i)$$

$$= 99 \cdot \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow Y_2 \text{ e tot uniformă}$$

c) $P() = P(\{Y_1 = 79\} \cup \dots \{Y_5 = 79\})$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{5}}_{\text{disj. 2 câte 2}} P(Y_i = 79) = \frac{5}{100}$$

6) Repartiția geometrică și negativ binomială

Aruncăm cu o monedă în mod repetat cu șansa de succes $= p$ $(\mathbb{P}(\{H\}) = p)$

$X =$ v.a. care ne dă nr. de aruncări până obținem pt. prima oară succes (H) incluzând succesul (I succes)

$X \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$

TTH $\Rightarrow X = 3$

H $\Rightarrow X = 1$

$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p; \; k \geq 1$

$\underbrace{TT\dots T}_{k-1}H$

$X \sim G(p)$ $\Rightarrow$ v. geometrică

Geom(p)

funcții de masă: $\rightarrow f(x) \geq 0$

$\sum_x f(x) = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(1-p)}_{\ell}{}^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} \ell^{k-1} = \frac{p}{1-\ell} = \frac{p}{p} = 1$$

$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

$\frac{\ell^{n+1}}{\ell - 1} \xrightarrow{n \to \infty}$

$\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$

$Y =$ nr. de eșecuri până la I succes

$Y \in \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$

$Y = X - 1$

$\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^k \cdot p$

Scanned with CamScanner

Def. V.a. Z care ne dă nr. de aruncări necesare până obținem pt. a r-a oară succes s.n. binomială negativ

(nu consec. neapărat)

$$Z \sim NB(r, p)$$

$Z \in \{r, r+1, \dots\}$

$r = 3$

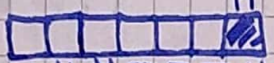
$P(Z = k) = ?$

nr. de arunc. necesare pt. a obține pt. a 3-a oară succes.

$\{Z = k\}$ $k = 7$, $r = 3$

?

H



T H H T T T H

H T T H T T H

H T T H T H

H T T T T $\underbrace{\dots}_{\text{doar T}}$ T H H

$$P(Z = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r$$

$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_r$

$X_i \sim G(p)$

$X_i \to$ geometrică

indep.

---

7) V.a. de tip Poisson

Def.: Spunem că o v.a. este repartizată Poisson de parametru λ dacă $X \in \mathbb{N}$ și

3,89

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Când se folosește?

când n e mare

și prob. f. mică

$$\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \ ? \qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Aproximarea Poisson a binomialei

$X \sim B(n, p)$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Pp. că n este mare și p este mic a.î. $np \xrightarrow{aprox.} \lambda$

$p \to \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \simeq \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{1^\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \to e^{-\lambda}, \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} \to 1$$

$$\frac{(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-1)n}{n^k}$$

$$\frac{n-k-1}{n} \cdot \frac{n-k-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n}$$

$$\to 1 \qquad \to 1 \qquad \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n\cdot\frac{n}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{n}}$$

$$= e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Funcții de v.a

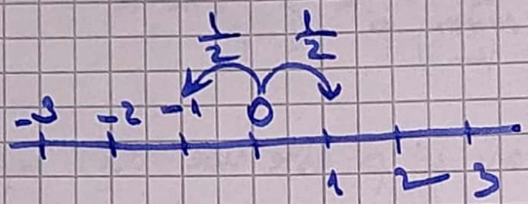
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $\quad X$ v.a. $\quad g$ v.a.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \text{ at.}$$

$g \circ X$ este o v.a.

Obs.: Dacă X este discretă $\Rightarrow$ $g \circ X$ este v.a. discretă

Exp.:



n pași

Fie Y v.a care ne dă poziția după n pași.

Vrem $\mathbb{P}(Y = k) = ?$

Considerăm X v.a. care ne dă nr. de pași spre dreapta, at. $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

Dacă $X = i$ at. a făcut $n-i$ pași spre stânga și poziția ei este $i-(n-i) = 2i-n$

$$Y = 2X - n$$

$$Y = g(X)$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(2X - n = k) = \mathbb{P}\left(X = \frac{k+n}{2}\right)$$

$$= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \cdot p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Care este distanța față de origine?

$\hookrightarrow Z = |Y| = h(Y) = h(g(X))$

$P(Z=k)$

$k=0$ $\qquad$ $Y=0 \Rightarrow P(Z=0)$

$k \neq 0$

$$P(Z=k) = P(Y=k \text{ sau } Y=-k)$$
$$= P(Y=k) + P(Y=-k)$$
$$= 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

cu $p = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}^{\cancel{\frac{n+k}{2}}}$

$$= 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$Y = g(X)$

$$P(Y=y) = P(g(X)=y) \qquad \{g(X)=y\} = \{X \in g^{-1}(y)\}$$
$$= \sum_{\{x \mid g(x)=y\}} P(X=x)$$

<u>Exp.</u>: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$Y = X^2 \Rightarrow Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

X_1, X_2, X_3 $\qquad$ $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(X_1, X_2, X_3)$ v.a.

$X_1 + X_2 + X_3$

$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$

$\max(X_1, X_2, X_3)$

Independența v.a.

Intuitiv: 2 var. a. X și Y sunt independente dacă realizarea uneia nu influențează în niciun mod realizarea celeilalte.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și X și Y două v.a.

Spunem că X și Y sunt independente: $X \perp\!\!\!\perp Y$, dacă ev. $X = x$ și $Y = y$ sunt independente pt. ~~…~~ $\forall x, y$

(P) Fie X și Y: 2 var. a. discrete atunci
$X \perp Y$ ~~dacă~~ $\overset{\text{dc. și numai dc.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x) \cdot \mathbb{P}(Y \le y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$

(P) $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$
$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ (intervale)

(P) ~~…~~ Dacă X și Y v.a. a.î. $X \perp\!\!\!\perp Y$ și g și h 2 funcții atunci $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$

Obs.: $X \perp Y$ at. $3x + 7^x \cdot \sin(x) \perp Y^9 - \cos(Y^7)$

Def.: $X_1, X_2, \dots X_n$ sunt independente dacă
$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots X_n \le x_n) =$
$= \mathbb{P}(X_1 \le x_1) \times \mathbb{P}(X_2 \le x_2) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \le x_n)$,
$\forall x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$

Aplicație: $X \sim B(n, p)$ și [redacted]
$Y \sim B(m, p)$ $\Big\}$ independente
$\longrightarrow X + Y \sim B(n + m, p)$

Dacă $X \sim Poisson(\lambda_1)$ și $Y \sim Poisson(\lambda_2)$
indep $\Rightarrow$ $X+Y \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X+Y=n \mid X=k) \cdot P(X=k).$$

pt. $k > n \Rightarrow$ prob. sunt nule

$$= \sum_{k=0}^{n} P(Y=n-k \mid X=k) \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(Y=n-k) \cdot P(X=k)$$

Media unei v.a. discrete

Repetăm un experiment de N ori și ne interesăm la valorile unei v.a. X de interes.

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$
$1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 8$

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$\frac{1+1+1+3+3+5+16}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\frac{3\times 1 + 2\times 3 + 1\times 5 + 2\times 8}{8} = \frac{30}{8}$$

$\{X = x\}$

$$P(X=x) = f(x) \simeq \frac{N(x)}{N}$$

$$N(x) \simeq f(x) \cdot N$$

$$m = \frac{\sum x \cdot N(x)}{N} = \frac{\sum x \cdot f(x) \cdot N}{N}$$

$$= \boxed{\sum x \cdot f(x) = m}$$

Scanned with CamScanner

Def. Fie X o v.a. discretă. Se numește media lui X, valoarea

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x f(x) = \sum_{x} x \mathbb{P}(X = x)$$

ori de câte ori $\sum_{x} |x| \cdot f(x) < \infty$

Dacă $\sum |x| \cdot f(x) = \infty$ atunci spunem că X nu are medie

V. SaintPeter.