Exerciții

1) O firmă mică are 10 angajați.
Se oferă 3 premii.

SCENARIUL 1: 100 lei, 200 lei, 300 lei

SCENARIUL 2: 200 lei

În câte feluri se pot da premiile?

1) $C_{10}^3 \cdot 3! = \boxed{A_{10}^3}$

$\underbrace{10}_{III}\ \underbrace{9}_{II}\ \underbrace{8}_{I}$

2) x, y, z = angajați

6 premieri, dar același lucru

x	y	z	y	x	z
x	z	y	y	z	x
z	x	y			
z	y	x			

R: $C_{10}^2 = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$

contextul

2) A^B $\qquad \{0,1\}^{\Omega}$ $\qquad f: B \to A$

$|B| \leq |A| < +\infty$

În câte moduri putem defini $f: B \to A$ injectivă, unde $|A| = a$
$|B| = b$
$(b \leq a)$?

Sol: $B = \{x_1, \dots, x_b\}$
$A = \{y_1, \dots, y_a\}$

$x_1 \longrightarrow a$ opț.
$x_2 \longrightarrow a-1$ opț.
$\vdots$
$x_b \longrightarrow a-b+1 = a-(b-1)$ opț.

Concluzia: $a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-b+1)$ moduri context 2 (aceeași strategie)

GREAT JOB!

a bile în total

b bile extrase $(b \leq a)$

În câte moduri putem extrage cele b bile fără revenire?

Sol: extragere 1: a opțiuni

2: $a-1$ opțiuni

$\vdots$

b: $a-(b-1) = a-b+1$ opțiuni

$\Rightarrow a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-b+1)$ moduri

$$\underbrace{\ \ }_{a}\ \underbrace{\ \ }_{a-1}\ \underbrace{\ \ }_{a-2}\ \ldots\ \underbrace{\ \ }_{a-b+1}$$

Întrebare: Dar dacă extragerile se fac cu revenire?

$$\underbrace{\ \ }_{a}\cdot\underbrace{\ \ }_{a}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\ \ }_{a} \Rightarrow a^b$$

Exc Ruletă

1 ... 1000

câștig $\Leftrightarrow$ nr $\vdots\, 2$ sau nr $\vdots\, 3$

$$\mathbb{P}: (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1]$$

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

Sol:

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 1000\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \,\vdots\, 2 \text{ sau } \omega \,\vdots\, 3\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(A) = ?$

$$\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_6)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{333}{1000} - \frac{166}{1000}$$

$$= \frac{667}{1000} = 0{,}667 > \frac{1}{2}$$

$A_2 = \{\omega \in \Omega \mid \omega \,\vdots\, 2\}$

$A_3 = \{\omega \in \Omega \mid \omega \,\vdots\, 3\}$

$A_6 = A_2 \cap A_3 = \{\omega \in \Omega \mid \omega \,\vdots\, 6\}$

Exc:

ora 9 la serviciu cu probabilitatea $p \in [0,1]$

$\forall\, n \in \{9, 10, \dots 15\}$, prob. de a ajunge la ora $n+1$ este jum din prob de a ajunge la ora n

Probabilitatea de a ajunge la ora 13?

Sol: $\Omega = \{9, 10, \dots, 16\} = \{9\} \cup \{10\} \cup \dots \cup \{16\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P} : (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1]$

Deoarece $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, avem că:

$$1 = \mathbb{P}(9) + \mathbb{P}(10) + \dots + \mathbb{P}(16) - \text{nimic}$$

(pt că sunt DISJUNCTE)

$$1 = p + \frac{p}{2} + \frac{p}{2^2} + \dots + \frac{p}{2^7}$$

$$1 = p(\dots) \Rightarrow p = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)}$$

Deci $\mathbb{P}(13) = \frac{p}{2^4} = \frac{1}{2^5\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)}$

valoarea cerută

Exc: 25 persoane

$\mathbb{P}$(născuți în zile diferite)

$$= \frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}} = \frac{A_{365}^{25}}{365^{25}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 341}{365^{25}} << 1 = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \ldots$$

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right) = e^{-1/365}$$