05.10.2022

Probabilități și statistică

→ Laborator 1

andaciucalexandra@yahoo.com

50% examen

30% proiect în perechi

20% laborator → răspl. muncă → quiz

- R
- R studio

· install.packages ("nume pachet") → o dată

library ("nume pachet") → mereu când desch. R studio

. ? ne duce la documentație sau (help)

. %/% cât

%% rest

. apropos ("mean") → fct. care ~~DC~~ conțin mean

încep

vectori → x = c(1,2)

c(7,6)

rep(0,5) → 0 0 0 0 0

rep(c(1,2,3), each = 5)

rep(c(1,2,3), 1:3) → 1 2 2 3 3 3

x = x[-10] → ștergem al 10 lea elem,

12.10.2022

Probabilități și statistică

= Laborator 2 =

Ex. 1 : combinări vs. aranjamente

Avem de dat 3 premii la zece oameni.

Sc. 1 : 100 , 200 , 300

Sc. 2 : toate sunt de 200 de lei

În câte moduri putem oferi cele trei premii în cele 2 scenarii?

Sol: Sc. 1: $A_{10}^{3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ moduri

$\underset{I}{10} \to \underset{II}{9} \to \underset{III}{8}$ variante

Sc. 2: (angajați)

$$\left.\begin{matrix} A\ B\ C \\ A\ C\ B \\ B\ A\ C \\ B\ C\ A \\ C\ A\ B \\ C\ B\ A \end{matrix}\right\} 6 = 3!$$

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{\cancel{10}^{\,5} \cdot \cancel{9}^{\,3} \cdot \cancel{8}^{\,4}}{\cancel{6}} = 120 \text{ moduri}$$

Ex. 2

Arătați că nr. total de moduri în care putem extrage k bile dintr-un total de M bile numerotate 1, 2 .. M este :

(i) M^k, dacă extragerile se fac cu revenire (binomială)

(ii) $M(M-1) \cdot \ldots \cdot (M-(k-1))$, dacă extr. se fac fără revenire (hipergeometrică)

Sol: (i) $\underbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \ldots\ \underline{M}}_{k \text{ extrageri}} \to$ nr. total este M^k

(ii) $\underset{M}{\sqcup}\ \underset{M-1}{\sqcup}\ \underset{M-2}{\sqcup}$ ___ _ $\underset{M-(k-1)}{\sqcup}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k \text{ extrageri}}$

$\Rightarrow$ nr. total este $M(M-1)(M-2)\_\_(M-k+1)$

extra: $f: A \to B$

$|A| = k$

$|B| = M$

$k \leq M$ (ca să poată f inj.)

2 Câte funcții inj. putem defini?

$a_1 \xrightarrow{f} M$ posibilit.

$a_2 \xrightarrow{f} M-1$ posib.

$a_3 \xrightarrow{f} M-2$ posib.

⋮

$a_k \xrightarrow{f} M-k+1$ posib.

nr. func. inj.:

$\Rightarrow M(M-1)(M-2)\_\_(M-k$

Ex. 3

Avem un grup de 26 de persoane. Care e probabilit. ca toți să aibă zile de naștere diferite?

SOL:

$$p = \frac{\text{nr. cazuri fav.}}{\text{nr. cazuri pos.}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \_\_ 340}{365^{26}}$$

(*) pos: $\underbrace{\underset{365}{\sqcup}\ \underset{365}{\sqcup}\ \_\_\ \underset{365}{\sqcup}}_{\text{pentru f. pers.}}$

(**) fav: $\underset{365}{\sqcup}\ \underset{364}{\sqcup}\ \_\_\ \underset{365-26+1}{\sqcup}$

$$= \frac{A_{365}^{26}}{365^{26}} = \frac{365 \cdot \_\_ 340}{365^{26}} =$$

$$= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot \ldots \cdot \frac{340}{365} =$$

$$= 1\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{25}{365}\right) =$$

$$\simeq 1\cdot e^{-1/365}\cdot \ldots \cdot e^{-25/365} \simeq$$

REZULTAT!

$$\simeq e^{-(1+\ldots+25)/365} \simeq \boxed{e^{-25\cdot 26/2\cdot 365}}$$

Aproximare:

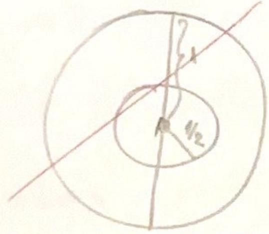
$|x| \ll 1$: $e^{x}\simeq 1+x$

$e^{-x}\simeq 1-x$

PROIECT: Paradoxuri din probabilit.

Ex. 4: Paradoxul lui Bertrand

Care e probabilit. ca o coardă oarecare în cercul mare să intersect. cercul mic?

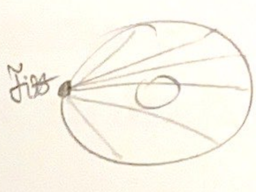


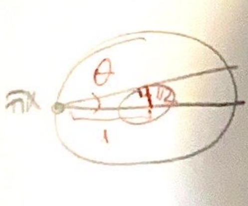
SOL: Ideea 1 $\Omega_1 \xrightarrow{b(0,1)}$ o coardă e unic det. de centrul ei, deci e imp. ca centrul să fie în cercul mic.

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\text{c. fav}}{\text{c. pos}} = \frac{A(B(0,1/2))}{A(B(0,1))} = \frac{\pi\cdot(1/2)^2}{\pi\cdot 1^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$:)

DAR Ideea 2, $\Omega_2 \xrightarrow{[0,\frac{\pi}{2}]}$ fixez un capăt al coardei:

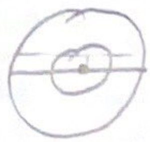
$$\sin\theta = \frac{1/2}{1} = 1/2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$





$$p_2 = \frac{c.\,fav}{\underset{\downarrow \frac{\pi}{2}}{c.\,pos}} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ideea 3) $\Omega_3^{[0,1]}$ coarda e unic det. de d. dist de la centru



$$p_3 = \frac{nr.\ c\ fav}{nr\ c\ pos} = \frac{r\ c\ mic}{r\ c\ mare} = \frac{1}{2}$$

Nt. c mic $\Leftrightarrow$ d de la ea la centru $\leq 1/2$

19.10.2022

Probabilități și Statistică

= SEMINAR 3 =
(Laborator 3)

media vs mediana

$x_1\ x_2 \dots x_n$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}$$

venitul mediu

$x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \dots < x_{\sigma(n)}$

$x_1\ x_2\ \boxed{x_3}\ x_4\ x_5$

mici mare

Exercițiul de la test:

- 3 repr → câștig; 2 - 1 STOP → Jup. miza
- X ARE 2 PCT; Y → 1

(X X) (X Y) (Y X) (Y Y)

dacă s-ar cont. jocul, X ar câșt. în 3 din 4 cazuri

=> X are de 3 ori șanse de câștig

=> SUGESTIA: $\frac{\text{miza} : 4}{X\ 3}$ iar $Y = 1$

Zarul lui Efron:

A: | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 |

V: | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

R: | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 6 |

G: | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |

? P(A > V)
P(V > R)
P(R > G)
P(G > A)

piatră > foarfece > hârtie > piatră

$\Downarrow$ netranzitiv.

$$\frac{\begin{array}{c} a>b \\ b>c \end{array}}{a>c}$$

$\mathbb{P}(A>V) = \dfrac{4\times 6}{6\times 6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ → Câte per. fețe fac?

(2 f. cu 7)

$\mathbb{P}(V>R) = \dfrac{6\times 4}{6\times 6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\mathbb{P}(R>G) = 1 - \dfrac{4\times 3}{6\times 6} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

(2 cu 5)

1 - 1   - ?   - ?

$\dfrac{4\times 3 + 2\times 3 + 2\times 3}{6\times 6}$

$\mathbb{P}(G>A) = 1 - \dfrac{3\times 4}{6\times 6} = \dfrac{2}{3}$.

1 cu 4

$A > V > \underline{R} > \boxed{G} > A \rightsquigarrow \dfrac{2}{3}$

26.10.2022

Probabilități și Statistică

= LABORATOR 4 =

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. de probabilitate | $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

Def: Fie $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Atunci (are sens să definim),

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

→ remarca 1: $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} \to [0,1]$ este și ea o probabilit.

→ remarca 2: $\Omega = \bigcup_{i \in J} B_i$

reun. ~~numă~~ disjunctă, i.e. $B_i \cap B_j \neq 0 \ \forall i \neq j$

$A \in \mathcal{F}$ $\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$ formula probabilit. totale

$$\Rightarrow \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \cap B_i)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}_{\text{dacă sunt disj}} - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Idee: A indep de $B \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Teorema lui Bayes:

$A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) \neq 0$ și $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Atunci: $\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$ $A \cup A^c = \Omega$

⤳ "întoarcem perspectivele"

Strategia: $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)}$$

Exercițiu:

- N capitole pentru examen
- studentul învață doar 1

- cade o întrebare aleasă din cele N capitole, cu m variante

DACĂ știe ⇒ răsp. corect

ALTFEL ⇒ alege un răspuns la întâmplare din cele m

?: CARE E PROB. să fi bifat la întâmpl., știind că a răspuns corect?

$\underbrace{\text{a răspuns corect}}_{\text{evenimentul de după condiționare}}$

Sol: notez cu S = stud. știe răsp.

C = stud. bifează răsp. corect

$$P(S) = \frac{1}{N} \Rightarrow P(S^c) = \frac{N-1}{N} = 1 - P(S)$$

$P(C|S) = 1$

$P(C|S^c) = \frac{1}{m}$ (dacă nu știe)

vreau: $P(S^c|C) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(C|S^c) \cdot P(S^c)}{P(C)} =$

$$= \frac{P(C|S^c) \cdot P(S^c)}{P(C|S) \cdot P(S) + P(C|S^c) \cdot P(S^c)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{n-1}{n}}{1 \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{n-1}{n}} = \boxed{\frac{n-1}{m+n-1}}$$

exemplu: $n = 14$

$m = 4 \Rightarrow P(S^c|C) = \frac{13}{17}$ ⇝ va scădea

Exercițiul 2:

Aruncăm un ban de 2 ori. (min)

P_1: care e prob. să fie ambele pajură, știind că o dată a apărut pajură?

$\Omega = \underbrace{\{H, T\}}_{I} \times \underbrace{\{H, T\}}_{II} \Rightarrow \{HH, HT, TH, TT\}$; $P(HH) = P(HT) = \frac{1}{4} = \ldots$

$\rightarrow P(TT \mid \{\text{min } 1T\}) = P(TT \mid \{HT, TH, TT\}) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(TT)}{P(HT, TH, TT)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

P_2: Care e prob. să apară pajură, dacă prima arunc. e pajură?

$P(TT \mid \{\text{prima e } T\}) = P(TT \mid \{TH, TT\}) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(TT)}{P(TH, TT)} =$

$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$

$P(\cdot \mid B)$, $P(B \mid B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Bayes

Exercițiul 3: Paradoxul lui Simpson

situația de la ATI a bolnavilor de covid

Tineri	Vaccinat	Nevaccinat
STABIL	200	10
GRAV	1800	190

Vârstnici	Vaccinat	Nevaccinat
STABIL	19	1000
GRAV	1	1000

? Cum e mai bine? — Să ne vaccinăm, sau nu?

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vaccinat}) \underset{\substack{\text{Bayes} \\ \text{def. cond.}}}{=} \frac{\mathbb{P}(\text{stabil și vaccinat})}{\mathbb{P}(\text{vaccinat})} = \frac{\frac{219}{4220}}{\frac{2020}{4220}} = \frac{219}{2020}$$

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevaccinat}) = \frac{\mathbb{P}(\text{st și nevac.})}{\mathbb{P}(\text{vac.})} = \frac{\frac{1010}{4220}}{\frac{2200}{4220}} = \frac{1010}{2200}$$

Împ. pe categorii:

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vaccinat și tânăr}) = \frac{\mathbb{P}(\text{st și vac și tânăr})}{\mathbb{P}(\text{vac și tânăr})} = \frac{\frac{200}{4220}}{\frac{2000}{4220}} = \frac{1}{10}.$$

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vac și vârstnic}) = \frac{\mathbb{P}(\text{st și vac și vârstnic})}{\mathbb{P}(\text{vac și vârstnic})} = \frac{\frac{19}{4220}}{\frac{20}{4220}} = \frac{19}{20}.$$

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevac și tânăr}) = \ldots = \frac{1}{20}.$$

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevac și vârstnic}) = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}.$$

09.11.2022

Probabilități și statistică

= SEMINAR 6 =

Teoretic: $\Omega = \{H, T\}$ → Practic

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $v = c("H", "T")$

$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(T) = 1$ sample(v, 1)

la 6/49 : replace = False #by default

dc. facem replace = True => nu se modif. cond. exp.

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) \stackrel{def}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

3 uși

21 - Monty Hall → met 2:

Am ales ușa 1 :

		deschide		
$\frac{1}{3}$ HCC	$\frac{1}{2}$	ușa 2	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$	TOTAL $\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{2}$	ușa 3	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$ CHC	1	ușa 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ dc. sch.
$\frac{1}{3}$ CCH	1	ușa 2	$\frac{1}{3}$	

=> în total șansele: $1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ TOT $\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$

B - mod. desch. ușa i

A - maș. se afl. după ușa j

$2/3 > \frac{1}{3}$ => mai bine sch. ușa.

Metoda 3. Am ales uşa 1

H_j = mod. deschide uşa $j \in \{1,2,3\}$

m_i = maşina se află în spatele uşii i, $i \in \{1,2,3\}$

$$P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2 | m_1) = P(H_3 | m_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_3 | m_2) = 1 \qquad CMC$$

$$P(H_2 | m_3) = 1 \qquad CCM$$

Vrem $\underline{P(m_2 | H_3)}$ şi $P(m_3 | H_2)$ (similar)

$$P(m_2 | H_3) \overset{Bayes}{=} \frac{P(H_3 | m_2) \cdot P(m_2)}{P(H_3)} = \frac{P(H_3 | m_2) \cdot P(m_2)}{P(H_3|m_1) \cdot P(m_1) + P(H_3|m_2) \cdot P(m_2) + P(H_3|m_3) \cdot P(m_3)}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Probabilități și Statistică
-Lab. 5-

Rezolvări quiz:

I 2 zaruri : $A =$ produs par   a) sunt indep 2?
$B =$ I impar   b) A, B, C indep?
$C =$ suma 7

$\Omega = \{1..6\} \times \{1..6\}$

$A = \{2,4,6\} \times \{1..6\} \rightsquigarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

$B = \{1..6\} \times \{1,3,5\} \rightsquigarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$C = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$A \cap B = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ A $\Rightarrow A \perp B$

$P(A \cap B \cap C) = \underbrace{P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}_{\frac{1}{24}}$

$\downarrow$

$\{(2,5), (4,3), (6,1)\} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\Big\} \neq \Rightarrow$ nu sunt indep

Extra III : ~~Pers~~ Persoane x, y

2 zaruri → 1, 2, 3, 4 cel mai mare $\Rightarrow$ x câștigă

→ 5, 6 max $\rightarrow$ y câștigă

z_2 \ z_1	1	2	3	4	5	6
1	x	x	x	x	y	y
2	x	x	x	x	y	y
3	x	x	x	x	y	y
4	x	x	x	x	y	y
5	y	y	y	y	y	y
6	y	y	y	y	y	y

$$\mathbb{P}(x) = \frac{16}{36}$$

$$\mathbb{P}(y) = \frac{20}{36}$$

$\Rightarrow$ y are m. m. șanse

16.11.2022

Probabilități și Statistică

= LABORATOR 7 =

Variabile aleatoare (discrete) = iau o mulț. finită (numărabilă de valori)

X var. aleat.

$$X \sim \begin{array}{l} \text{valorile variabilei} \\ \text{probabilit.} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

suma prob. să fie 1

$\sim \{x, y, z\}$

$X(x) = -1$

$X(y) = 0 \quad P(X=0) = \frac{1}{2}$

$X(z) = 1$

$$f(X) \sim \begin{pmatrix} f(-1) & f(0) & f(1) \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

dacă $f(-1) = f(1)$ le punem o sg. dată

d → densit (fct. de masă), $P(X = \underset{(dat)}{k})$

p → fct. de repartiție (prob. totală) $F(x) = P(X \le \overset{dat}{x})$

q → fct. de cuantilă sal pt care $P(X \le ?) \ge 5\%$

r → generări aleatoare din variabilă

100 size=3 ⟶ 0 (NULL)

ex: dbinom (1, size=3, prob=0.4)

$X \sim Bin(n=3, p=0.4)$, $P(X=k)$

$P(X=1)$

dbinom (c(2, 3, -12), size = 3, prob = 0.4)

0.288 | 0.064 | 0.000

$$\boxed{F(y) = P(X \le y)}$$

dpois (1:5, lambda = 3)

q → cuantila : acel u pt. care se at. prob ≥ x

$\mathbb{P}(X \le u) \ge p$.

rnorm (10, size=10, prob = 0.5) ; → gen. nr. din interv 1-n/a.

r → rpois (10, lambda = 3)

(?) Arăt. afirmația : „Fie n un nr. natural aleator, uniform"

Part 1: $M = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$

Pt defini repartiția uniformă pe M

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Part 2: Pp că ∃ o astf de probabilit., i.e. ar a încât $\mathbb{P}(\{n\}) = p_0 \in (0,1)$ constantă, $\forall n \in \mathbb{N}$

Atunci $1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\})$

$= \sum_{n \in \mathbb{N}} p$

Dar $\sum (p)$ finit doar dacă $p = 0$

Dar $1 = \sum_{n \ge 1} p = 0$ fals

$\Rightarrow \nexists$ un astf de p.

Notație: $\binom{n}{k} \overset{not}{=} C_n^k$

Exemplu:

$X \sim B(20, 0.5)$

$\frac{a}{b} \geq 1 \Leftrightarrow a > b$

Vrem $k \in \{0, 1 .. 20\}$ pentru care $P(X=k)$ este maximă.

Varianta 1: dbinom (0:20, size = 20, prob = 0.5)

$\Rightarrow [P(X=0), P(X=1) ... P(X=20)]$

Varianta 2: $X \sim Bin(n, p) \rightsquigarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $\forall k \in \{0..n\}$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k+1}} =$$

$$= \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} \geq 1$$

$p(n-k+1) \geq k \cdot (1-p)$

$p(n+1) - pk \geq k - kp \Rightarrow \underbrace{k \leq p(n+1)}$

pt. ac. val, $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}$ va fi supraunitar

Concluzia: $k^* = \lfloor p(n+1) \rfloor$

07.12.2022

Probabilități și Statistică

= Laborator 10 =

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Funcția de repartiție / fcț. cumulativă asociată:

CDF (cdf) $F_X \overset{not}{=} F : \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(y) = \mathbb{P}(X \leq y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ general

Funcția de repartiție empirică: ecdf

$$\boxed{\tilde{F}(y) = \frac{\text{nr. de observații} \leq y}{\text{nr. total de observații}}}$$

folosind ceva la care chiar avem acces

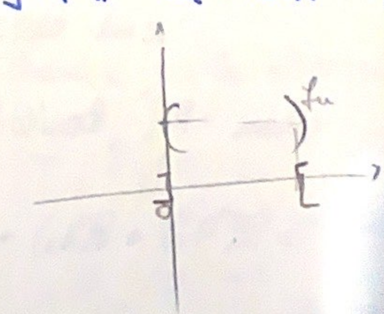
Cumsum: $p = p_1 \dots p_n$

$cumsum(p) \rightsquigarrow (p_1, p_1+p_2, p_1+p_2+p_3, \dots \sum_{i=1}^{n} p_i)$

Exc. cod pag 60 lab (ss)

Consid. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ adică $f_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

găsiți distribuția v.a. (r.v.) random variable $X = [nU] + 1$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ fixat



Sol: E clar că X e v.a. discretă, fiind def. cu $\lfloor\ \rfloor$

$0 < U < 1 \Rightarrow 0 < nU < n \Rightarrow 0 \le \lfloor nU \rfloor \le n-1 \,/_{+1}$

$\Rightarrow 1 \le X \le n$

X ia valori în mulț. $\{1 \dots n\}$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & & & & \end{pmatrix}$$

În plus pentru k în mulț. $\{1, 2 \dots n\}$ fixat

avem că $P(X = k) = P(\lfloor nU \rfloor + 1 = k) = P(\lfloor nU \rfloor = k-1) =$

$= P(k-1 \le nU < k) = P\left(\frac{k-1}{n} \le U < \frac{k}{n}\right) =$

$= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f_U(x)\,dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 1 \, dx = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$

subunitare

$k \in \{1, 2 \dots n\} \Rightarrow \frac{k}{n}, \frac{k-1}{n}$ subunit. $\Rightarrow x \in (0,1) \Rightarrow f_U = 1$ mereu.

concluzia: X e v.a. uniformă discretă, pe mulț. $\{1, 2 \dots n\}$

$$\Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \rightarrow$$ și suma e 1, deci e o

---

$n = 100\,000$ locuitori

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

notăm cu A_k = evenim. ca un locuitor să nimerească exact k nr. câștigătoare (cu $k \in \{0, 1, \dots 6\}$)

ev. disjuncte

vrem P(locuitorul pierde) $= P$(nimer. 0, 1 sau 2 nr) $= P(A_0 \cup A_1 \cup A_2)$

$= P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$

11.01.2023

* Evenim. disjuncte $A, B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

* Evenim. independente $A, B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

Problema cu secretara:

pălăria:

al cui do. îl primește:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ n & 7 & \dots & 4 \end{pmatrix}$ recit pus vectorilor $\Omega = S_n$ (numele, discretă)

$|\Omega| = n!$

$\Downarrow$ abordare frecvent.

$P(E_i) = \frac{c \cdot fav}{c\ pos} = \frac{}{|\Omega|} = \frac{}{n!}$

$E_i \in S_n$

$E_i = \{\sigma \in S_n \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & - & i & - & n \\ * & * & - & i & - & * \end{pmatrix}\} = S_{n-1}$

$\Downarrow$ perm. cu $n-1$ el.

$(n-1)!$

$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

Formula prob totale (Poincare):

$P(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \dots E_n)$

Ruina jucatorului:

k = suma inițială

$P_k(A \mid B) = P($ jucatorul pornit cu suma k și la faliment $\mid$ a jucat λ a jucat H$)$

$\downarrow$

$+1$

$= P($juc. cu suma $k+1$ să și la faliment$)$

$= P_{k+1}(A) \overset{not}{=} p_{k+1}$

$P_k(A|B^c) = P$(juc. cu k ajunge la faliment / pică T la aruncare) = P(juc. cu av. $k-1$ să piardă)

la aruncare $\downarrow -1$; $\overset{\text{not}}{=} p_{k-1}$

$$P(A) = \underbrace{P(A|B)}_{\text{not } p_k} \cdot \underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{P(A|B^c)} \cdot \underbrace{P(B^c)}_{=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_k = p_{k+1} \cdot \frac{1}{2} + p_{k-1} \cdot \frac{1}{2}}$$

Și știm $p_0 = 1$

$p_N = 0$

$$p_k = \frac{p_{k-1}}{2} + \frac{p_{k+1}}{2} \quad \cancel{| - p_{k-1}} \Rightarrow$$

$$\cancel{p_k - p_{k-1} = -\frac{p_{k-1}}{2} + \frac{p_{k+1}}{2}}$$

$$\cancel{2 \cdot (p_k - p_{k-1})}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{p_{k-1}}{2} + \frac{p_{k+1}}{2} - \frac{p_k}{2} - \frac{p_k}{2}$$

$$0 = \left(\frac{p_{k-1}}{2} - \frac{p_k}{2}\right) + \left(\frac{p_{k+1}}{2} - \frac{p_k}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{p_k - p_{k-1}}{2} = \frac{p_{k+1} - p_k}{2}$$

$$p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$$

not. r_1

p_k prog. aritm. $\Rightarrow$ $p_k = p_0 + k \cdot r_1$

$$\underline{p_k = 1 + k \cdot r_1}$$

Și $p_N = 0$

$p_N = 1 + N \cdot r_1$

$0 = 1 + N \cdot r_1$

$r_1 = -\frac{1}{N}$.