Curs 4: 24 oct.

Probabilități condiționate:

Exp. 1) Aruncăm cu o monedă de 3 ori:

a) Care e probabilitatea să obținem HHH?

$\Omega = \{H, T\}^3$

HHH HHT HTH THH HTT THH TTT THT

$A = \{HHH\}$ ev. de interes

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$ (Laplace ⇒ echirepartiție)

Știm că la prima aruncare am obținut H.

H →

$H\ \underline{\Omega_2} = \{ \{HT\}, \{TH\}, \{HH\}, \{TT\} \}$

$P(A) = \frac{1}{4}$

„știind că"

$\frac{1}{2} = P(A \mid B)$ unde B = ev. prin care la prima aruncare am obținut H.

ev. de interes

ev. care s-a realizat

$P(A|B)$ = probab. realizării lui A <u>știind că</u> B s-a realizat

---

Din perspectivă <u>frecvenționistă</u>

→ Avem un experiment aleator pe care îl repetăm de un N de ori.

Ne adresăm la ev. A și B.

frecv. rel. a realizării lui A, at. când B s-a realizat $\Big\} \to \frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} =$

$N(B)$: nr. experimente în care B s-a realizat

$\approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Def. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probab., $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$. Atunci def. probabilitatea condiționată a lui A la ev. B și not.

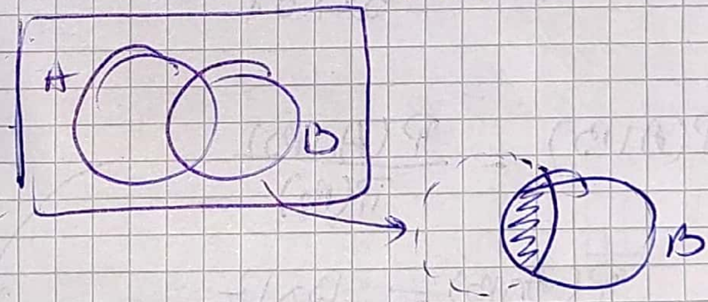
$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

„A|B" nu e eveniment, ci notație = A, știind că B s-a realizat

$\mathbb{P}(A)$ = prior sau probab. apriori

$\mathbb{P}(A|B)$ = posterior sau probab. posteriori

Exp.: (continuare) $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$



Exp.2: Avem un pachet de cărți de joc și extragem în mod aleator 2 cărți succesiv și fără întoarcere.

A – "prima carte este de inimă roșie"

B – "a doua carte este de inimă roșie"

C – "a doua carte este de culoare roșie"

Vrem să calculăm urm. probab.

~~P(A|B)~~ $\mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(C|A)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(A|C)$

$\longrightarrow$ $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{}{\frac{13}{52}=\frac{1}{4}}$

52 cărți
13 inimă roșie
26 culoare roșie

51

$P(A\cap B) = \frac{13\times 12}{52\times 51}$

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$= \frac{\frac{13\times 12}{52\times 51}}{\frac{13}{52}} = \frac{12}{51}$

$\longrightarrow$ $P(C|A) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{13\times 25}{52\times 51}}{\frac{13}{52}} = \boxed{\frac{25}{51}}$

$P(A\cap C) = \frac{13\times 25}{52\times 51}$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Înainte să fie desfășurat ev. B are ~~[illegible]~~ aceeași șansă ca A.

$\longrightarrow$ $P(A\cap B) = \frac{13\times 12}{52\times 51}$

$P(B) = \frac{13}{\cancel{52}\ 52} = \frac{1}{4}$

$= \frac{12}{52} = P(B|A)$

$P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

$\longrightarrow$ $P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{13\times 25}{52\times 51}}{\frac{26}{52}} = \boxed{\frac{25}{102}}$

Exp. 3:

O familie are 2 copii.

a) Care este probabilitatea ca cei 2 copii să fie de sex feminin știind că cel mai în vârstă este F.

b) — // — știind că cel puțin 1 din ei este fată?

Ipoteze: - $\{F, B\}$!

- $P(F) = P(B) = \frac{1}{2}$

- sexul unui copil nu este influențat de sexul celuilalt copil

$\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$ $\qquad$ $A = \{FF\}$

1) ! $B = \{$cel mai în vârstă este F$\} = \{FB, FF\}$

~~P(A)~~

$$P(A|B) = \frac{P(\overbrace{A \cap B}^{=A})}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

! $C = \{$cel puțin 1 este de sex feminin$\}$

$= \{BF, FB, FF\}$

$$P(A|C) = \frac{P(\overbrace{A \cap C}^{=A})}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Fată născută iarna

i, V, P, T $\quad \Omega = \{Fi, FV, FP, FT, Bi, BV, BP, BT\}$ $\quad 2 \to$ 2 copii

8^2 = 64 elemente

Probab. ca cei 2 copii să fie fete, știind că 1 copil e F născ. iarna.

caz fav: Fi → 8 pos.

7 Fi ⇒ 7 pos.

$\frac{15}{64}$

Fi, __ 4

3, Fi

$\frac{7}{15}$

P (cei 2 copii să fie F | Fi) = $\frac{7}{15}$ ⇒ ~~P(total)~~

P (Fi) = $\frac{15}{64}$

Exp. 4:

Dacă o aeronavă apare în zona de interes scanată de un radar, atunci se declanșează o alarmă cu prob. 99%.

Dacă nu avem aeronavă, at. alarma (falsă) se declanșează cu 10% prob.

Șansa să treacă o aeronavă prin zona de interes este 5%.

a) Care e prob. ca în zona de interes să nu avem avion și să avem alarmă?

b) Care este prob. să avem avion, dar să nu fie detectat?

A = {să avem avion în zona de interes}

B = {se declanșează alarma}

a) $P(A^c \cap B)$

b) $P(A \cap B^c)$

Ipoteză: $P(A) = 0.05$

$$P(B|A) = 0.99 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A^c) = 0.1 = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)}$$

a) $P(A^c \cap B) = P(B|A^c) \cdot P(A^c)$

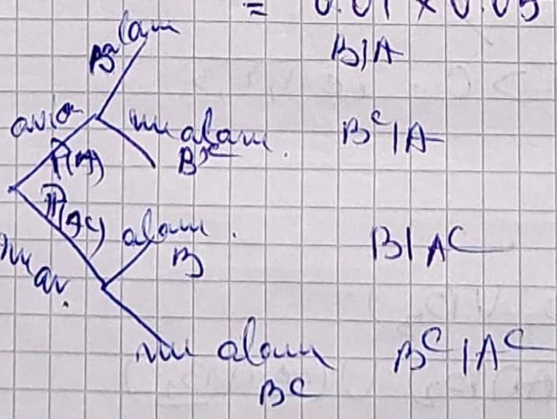
$= P(B|A^c)(1 - P(A))$

$= 0.1 \cdot 0.95$

b) $P(A \cap B^c) = \cancel{P(A \cap B)}\ P(B^c|A) \cdot P(A)$

$= (1 - P(B|A)) \cdot P(A)$

$= 0.01 \times 0.05$



fie

(P) (Formula produsului) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate

$A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$

Atunci

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \overbrace{\mathbb{P}(A_2 | A_1)}^{\text{prob. lui } A_2 \text{ știind că } A_1 \text{ s-a întâmplat}} \times$$
$$\times \underbrace{\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)}_{\text{prob lui } A_3 \text{ știind că } A_1 \text{ și } A_2 \text{ s-au realizat}} \times \dots \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Formula probab. totale

mulț. ev. de interes

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. o partiție a lui Ω, $\{B_1, B_2, B_3\}$ și $A \in \mathcal{F}$.

$$\begin{cases} B_1, B_2, B_3 \subseteq \Omega \\ B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ B_2 \cap B_3 = \emptyset \\ B_1 \cap B_3 = \emptyset \end{cases}$$

În plus $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \overline{1,2,3}$

$A = A \cap \Omega$

$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3)$

$= \mathbb{P}(A|B_1)\cdot\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\cdot\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\cdot\mathbb{P}(B_3)$

(P) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un cp și $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ și partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \{1, \ldots n\}$

Dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)}$$

$n=2$

$A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(B) \in (0,1)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)$

Exp: (cont.)

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)$

$= \frac{12}{51} \times \frac{13}{52} + \frac{13}{51}\cdot\left(1 - \frac{13}{52}\right)$

$= \frac{1}{4}$

Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cp. $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)}$$

b) $A \in \mathcal{F}$; $B_1, B_2, \dots B_n \in \mathcal{F}$ o partiție a lui Ω, ~~$\mathbb{P}$~~ $\mathbb{P}(B_i) > 0$

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}$$

$\mathbb{P}(A$

Exp. Să presupunem că prevalența unei anumite boli în populație este de 1%.

Pp. că efectuăm un test de detecție cu o acuratețe de 95%.

$\Downarrow$ = senzitivitatea și specificitatea testului

$\Downarrow$ rata de true pozitive = probabilitatea ca testul să fie pozitiv, știind că pacientul este infectat $\mathbb{P}(T \mid D)$

$\Downarrow$ rata de true negative = prob. ca testul să fie negativ, știind că pacientul nu este infectat $\mathbb{P}(T^c \mid D^c)$

not. $\begin{cases} D = \text{pacientul este infectat} \\ T = \text{testul este pozitiv} \end{cases}$

false pozitive $\rightarrow \mathbb{P}(T \mid D^c)$

false negative $\rightarrow \mathbb{P}(T^c \mid D)$

Pp. că am efectuat testul și am ieșit pozitiv
Care este prob. să avem virusul știind că testul e pozitiv?

formula lui Bayes

$$\mathbb{P}(D \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T)}$$

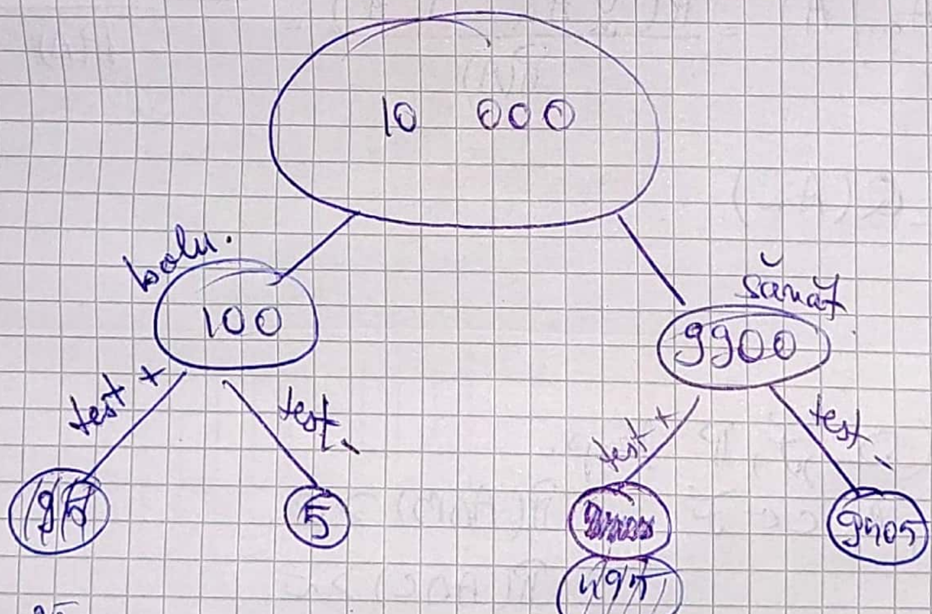
$$= \frac{\mathbb{P}(T \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T \mid D^c) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(D^c)}_{1-\mathbb{P}(D)}}$$

$$\mathbb{P}(T \mid D^c) = 1 - \mathbb{P}(T^c \mid D^c) = 0.05$$

$$= \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} = 0,16$$

16%

$n = 10\ 000$ < 100 (bolnave 1%), 9900 sănătoase



$$\frac{95}{95+495}$$

Ⓟ Probabilitatea condiționată este o probabilitate.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., $A \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$

$\underline{def}$. $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid A)$

$\left(Q(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \right)$

$\mathbb{P}(A \mid A) = 1$

$(A, \mathcal{F} \cap A)$

A $\downarrow$ el cons. sigur

$\mathcal{F} \cap A$ $\downarrow$ ev. pos. asociate lui A

$$\begin{cases} \to Q(A) = 1 \\ \to (A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \cap A \text{ disjuncte 2 câte 2} \\ Q(\bigcup_n A_n) = \sum Q(A_n) \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\bigcup_n A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \sum Q(A_n)$$

$\underline{Exp}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p.

$A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$, $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \cdot \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$

B, C $\downarrow$ $B \cap C$

B și C

s-au realizat

$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid e)$

prob. cond. imbricate