Oprea Tudor

141

Exercițiul 1

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+2}{4n+3}\right)^n \cdot x^n \quad , x\in \mathbb{R}$$

Studiem absolut convergența seriei

$$\sum_{n\geq 1} \left| \left(\frac{2n+2}{4n+3}\right)^n x^n \right|$$

Aplicăm criteriul radicalului

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+2}{4n+3}\right)^n |x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{4n+3} \cdot |x| = \frac{2}{4} \cdot |x| = \frac{|x|}{2}$$

$\frac{|x|}{2} > 1 \iff |x| > 2 \Rightarrow x_n \not\to 0$ și seria este divergentă

$\frac{|x|}{2} < 1 \iff |x| < 2 \Rightarrow$ seria este absolut convergentă

$\frac{|x|}{2} = 1 \Rightarrow |x| = 2$ și avem 2 cazuri:

I $x = 2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+2}{4n+3}\right)^n \cdot 2^n =$

$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{4n+4}{4n+3}\right)^n \longrightarrow \infty$ diverg.

II $x = -2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+2}{4n+3}\right)^n \cdot (-2)^n =$

avem cazuri: $n = 2k \longrightarrow$ seria $\to \infty \Rightarrow$ diverg

$n = 2k+1 \longrightarrow \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2(2k+1)+2}{4(2k+1)+3} \right)^{\cancel{2k+1}} \cdot (-2)^{2k+1} =$

$\Rightarrow$ seria $\to 0$ conv.