Recap

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. de probabilități

Date $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) \neq 0$, definim $\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$

Obs: Considerăm o partiție a lui $\Omega = \bigcup_{i\in I} B_i$, atunci

disjuncte

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|B_i)\cdot \mathbb{P}(B_i)}, \quad \forall\, A \in \mathcal{F}$$

$$= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A\cap B_i)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_i (A\cap B_i)\Big)$$

Th. lui Bayes

$A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$

Atunci: $\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$

Schemă (simplistă): $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\cdot \mathbb{P}(A^c)}$

Exc (1)

n capitole, studentul învață 1 capitol

1 întrebare cu m variante de răspuns

- dacă studentul știe capitolul, sigur răspunde corect
- dacă nu știe, alege la întâmplare o variantă

?: Studentul a lifat corect. Care e prob. sa fi știut?

Sol: Notăm S = studentul știe răspunsul

C = răspunsul bifat e corect

Formalizăm datele problemei

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \mathbb{P}(S^c) = 1 - \mathbb{P}(S) = \frac{n-1}{n}$$

$$\mathbb{P}(C|S) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}(C \mid S^c) = \frac{1}{m}$$

Vrem $\mathbb{P}(S|C) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(C|S)\cdot\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(C|S)\cdot\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(C|S^c)\cdot\mathbb{P}(S^c)} = \dfrac{1\cdot\frac{1}{n}}{1\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\cdot\frac{n-1}{n}} = \dfrac{m}{m+n-1}$

Ex: $\left.\begin{array}{l} n = 14 \\ m = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \mathbb{P}(S|C) = \frac{4}{17}$

! Fixat $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\cdot, B)$ este o prob.

Utilitate: $\mathbb{P}(S^c|C) = 1 - \mathbb{P}(S|C) = 1 - \frac{4}{17} = \frac{13}{17}$

Exc 2

$\Omega = \{F, B\} \times \{F, B\} =$

$\{a, b\} \times \{a, b\} = \{aa, \underbrace{ab, ba}_{\neq}, bb\}$

Se aruncă un ban cinstit de două ori

a) Care este prob să avem HH, știind că H a apărut la prima aruncare?

b) Care este prob să avem HH, știind că H a apărut CEL PUȚIN o dată?

Sol: $\Omega = \{H, T\} \times \{H, T\} = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\neq \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(HH) = \mathbb{P}(HT) = \mathbb{P}(TH) = \mathbb{P}(TT) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

prima aruncare   a doua aruncare

Vrem: a) $\mathbb{P}(HH \mid \text{prima aruncare e } H) =$

$= \mathbb{P}(HH \mid \{HT, HH\})$

$$= \frac{\mathbb{P}(HH \cap \{HT, HH\})}{\mathbb{P}(\{HT, HH\})} = \frac{\mathbb{P}(HH)}{\mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(HH)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad ☆$$

definiția probabilității condiționate

b) $\mathbb{P}(HH \mid H \text{ cel puțin o dată}) = \mathbb{P}(HH \mid \{HH, HT, TH\}) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{HH\} \cap \{HH, HT, TH\})}{\mathbb{P}(HH, HT, TH)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(HH)}{\mathbb{P}(HH, HT, TH)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Ex: Paradoxul lui Simpson

Date spital pt bolnavi covid

Tineri	Vacc.	Nevacc.
Stabil	200	10
ATI	1800	190

Vârstnici	Vacc.	Nevacc.
Stabil	19	1000
ATI	1	1000

Î: Cum e mai bine: vaccinat sau nevaccinat?

Sol: Varianta 1: $\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vaccinat}) = \frac{\mathbb{P}(\text{stabil \& vaccinat})}{\mathbb{P}(\text{vaccinat})} =$

$$= \frac{\frac{219}{4220}}{\frac{2020}{4220}} = \boxed{\frac{219}{2020}}$$

$$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevaccinat}) = \frac{\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevaccinat})}{\mathbb{P}(\text{nevacc})} = \frac{\frac{1010}{4220}}{\frac{2200}{4220}} = \boxed{\frac{101}{220}}$$

Sugestie: $\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevaccinat}) > \mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vaccinat})$

Variantа 2: $\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vacc } \& \text{ tânăr}) = \dfrac{\frac{200}{4220}}{\frac{2000}{4220}} = \dfrac{200}{2000} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$

$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevacc } \& \text{ tânăr}) = \dfrac{\frac{10}{4220}}{\frac{200}{4220}} = \dfrac{10}{200} = \boxed{\dfrac{1}{20}}$

Morala: pt tineri e mai „safe" să fie vaccinați

$\mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{vacc } \& \text{ vârstnic}) = \dfrac{19}{20} > \mathbb{P}(\text{stabil} \mid \text{nevacc } \& \text{ vârstnic}) = \dfrac{1}{2}$