Curs 5 : 31 oct.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

$Q(B) = \mathbb{P}(B \mid A)$; $\forall B \in \underline{\mathcal{F} \cap A} = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$

$\hookrightarrow$ este tot o probab.

pr. ev. sigur = 1

~~suma pr~~ pr. reun. de n = suma prob. resp.

dc. sunt disj. 2 câte 2

Formula lui Bayes: $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$

$$Q(A \mid B) = \frac{Q(B \mid A) \cdot Q(A)}{Q(B)}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \cdot \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$

B și C au avut loc

$Q(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B, C)$

Exp.: Pp. că avem 2 monede
- una echilibrată (prob H = 1/2)
- una trucată (prob H = 3/4)

Șansa să alegem oricare dintre cele 2 monede este 1/2.

Obține în urma celor 3 aruncări ~~[illegible]~~ H H H

a) având această informație care e prob. să fi ales moneda echilib.

b) pp. că aruncă pt. a 4-a oară moneda.
Care e acum prob. să fi obținut din nou H?

---

a) A = ev. prin care în primele 3 aruncări am obținut H H H.

B = ev. prin care am ales moneda echilib.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \cancel{\mathbb{P}(A\cap B)} \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} =$$

<u>form. prob. totale</u>

$$\frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)}$$

$\mathbb{P}(B^c)$: prob. să fi ales m. trucată

$$= \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{35}$$

$\frac{1}{16} + \frac{27}{64}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{16}$ $\quad 8+27$ $\quad 35$ $\quad 8$ $\quad \frac{8}{35}$

b) C = ev. prin care la a 4 ar. am obținut H.

$\mathbb{P}(C|A) = ?$

Notăm $Q(C) = \mathbb{P}(C|A)$

$Q(C) = \mathbb{P}(C|A)$
$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$

$\mathbb{P}_{(A|C)}$

Formula prob. totale: $Q(C) = Q(C|B)\cdot Q(B) + Q(C|B^c)\cdot Q(B^c)$

$$\left.\begin{aligned} Q(B) &= \mathbb{P}(B|A) \\ Q(B^c) &= 1 - Q(B) \\ Q(C|B) &= \frac{1}{2} \\ Q(C|B^c) &= \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q(C) = \ldots$$

Independență

❗ 2 ev. sunt independente dc. realizarea unuia nu aduce niciun fel de inf. suplimentară despre realizarea celuilalt.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Def Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un cp. și $A, B \in \mathcal{F}$. Spunem că A și B sunt independente și

$$\boxed{\text{Not. } A \perp\!\!\!\perp B \quad \text{dc.} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

Ex.: Dc. $A \perp\!\!\!\perp B$ at. $A^c \perp\!\!\!\perp B$

$A \perp\!\!\!\perp B^c$

$A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Exp.: Aruncăm cu banul de 2 ori:

A_1: ev. prin care la prima aruncare am obținut H

A_2: — // — a II-a — // — H

$\Omega = \{H, T\}^2$

$A_1 = \{(H, H), (H, T)\}$

$A_2 = \{(T, H), (H, H)\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(H, H)\}$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$

$P(A_1) = \frac{1}{2}$

$P(A_2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(\cap) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

$\Downarrow$

QED : $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

<u>Exp</u> : Zar cu 4 fețe. Aruncăm de 2 ori

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$

A = {primul zar cu fața 1} = $\{(1, x) \mid x \in \{1, \dots 4\}\}$ $\quad \frac{1}{4}$

B = {suma punctelor este 5} = $\{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$

$\frac{4}{16} = \frac{1}{8}$

C = {minimul e 2}

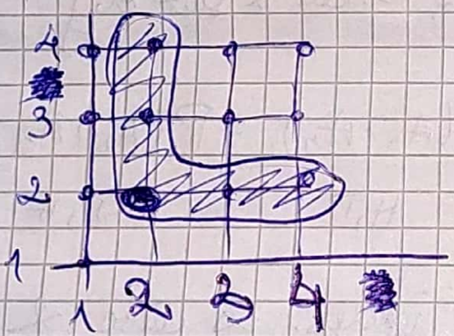
D = {maximul e 2}

$P(A) = \frac{1}{4}$

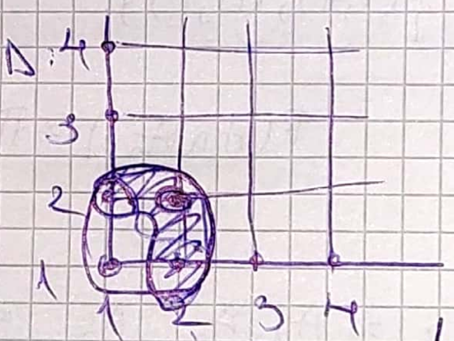
$P(B) = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{(1,4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16}$

C :



D :



maximul e 2!

<u>Def</u> : Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cp și $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$.
Spunem că ev. $A_1 \dots A_n$ sunt indep. (mutuale).
dc. $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$; $\forall I = \{1, \dots n\}$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

$2^n - 1 - n$

= condiții de verif. pt. afirm. A_1, A_2, A_3 indep.

$$\left.\begin{array}{l} C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots C_n^{n-1} = 2^n \\ \downarrow \\ \text{fără } C_n^0 \text{ și } C_n^1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pt. n mulțimi $\Rightarrow 2^n - n - 1$ verif.

Exp.: (cont.) Aruncăm 2 monede

$\mathbb{P} - \frac{1}{2}$ $\{(H,H)(H,T)\}$ A_1 = prima H $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

$\mathbb{P} - \frac{1}{2}$ $\{(T,H)\ (H,H)\}$ A_2 = a doua H

$\mathbb{P} - \frac{1}{2}$ $\{(T,H), (H,T)\}$ A_3 = cele 2 sunt dif.

$$\underset{H,H}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \underset{H,T}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_3)} = \underset{T,H}{\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ = indep. 2 câte 2

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

DAR

$\Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 nu sunt independente toate 3

Def. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$

Spunem că A și B sunt indep. condiționat la C dc.

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \times \mathbb{P}(B \mid C)$$

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C) \Rightarrow Q(A \cap B) = Q(A) \cdot Q(B)$$

Exp.: D - {o persoană are afecțiunea} $\mathbb{P}(D) = 1\%$

T - {testul inițial a ieșit pozitiv}

acuratețea (senzitivitatea & specificitatea) - 95%

$$\mathbb{P}(T \mid D) = \mathbb{P}(T^c \mid D^c) = 95\%$$

$$\mathbb{P}(D \mid T) \cong 15\%$$

— Să presup. că pers. mai efect. un test. (pp. că rezultatele celor 2 teste sunt indep. în rap. cu statusul bolii) și testul este tot poz.

Care este prob. să avem COVID?

$T_1 \to$ I test +

$T_2 \to$ II test +

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D) = \overset{0,95}{\mathbb{P}(T_1 \mid D)} \times \overset{0,95}{\mathbb{P}(T_2 \mid D)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D^c) = \underset{0,05}{\mathbb{P}(T_1 \mid D^c)} \times \underset{0,05}{\mathbb{P}(T_2 \mid D^c)}$$

$$\mathbb{P}(D \mid T_1 \cap T_2) = ?$$

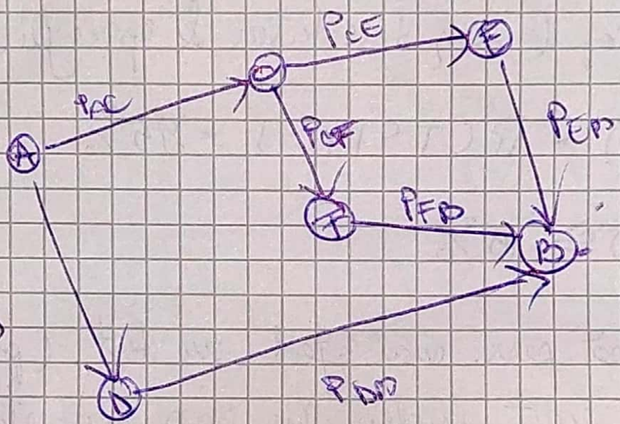
$$P(D \mid T_1 \cap T_2) = \frac{P(T_1 \cap T_2 \mid D) \cdot \overbrace{P(D)}^{0.01}}{P(T_1 \cap T_2)}$$

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1 \cap T_2 \mid D) \cdot P(D) + P(T_1 \cap T_2 \mid D^c) \cdot \underbrace{P(D^c)}_{0.99}$$

$$\Rightarrow P(D \mid T_1 \cap T_2) = \frac{0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.99}$$

$\cong 0.78$

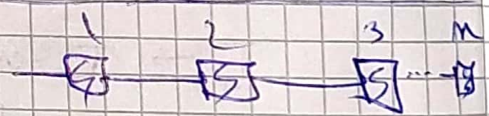
Exp.:



$A \xrightarrow{P_{AD}} D$

Care este probab. să transmit un mesaj de la A la B?

Subsistem de tip serie:



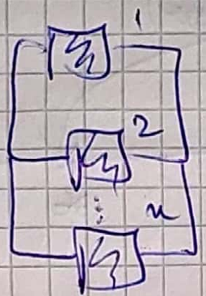
$$A \xrightarrow{P_{AB}} B \xrightarrow{P_{BC}} C$$

$$P_{AC} = P_{AB} \cdot P_{BC}$$

$$\boxed{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n}$$

serie

Subsistem de tip paralel:



$\rightarrow$

$P(\text{transm. mes. în sist. par.}) = 1 - P(\text{să nu transm. mes. în sist. par.})$

$= 1 - p(\text{eșec } 1, \text{ eșec } 2, \ldots \text{ eșec } n)$

și   și

$= 1 - p(\text{eșec } 1)\cdot p(\text{eșec } 2)\cdot\ldots\cdot p(\text{eșec } n)$

$= \boxed{1-(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)}$ paralel

$P(A \to B) - ?$

$P(C \to B) = 1 - (1 - P(C\to F, F \to B))\cdot$
$\cdot(1 - P(C \to E, E \to B))$

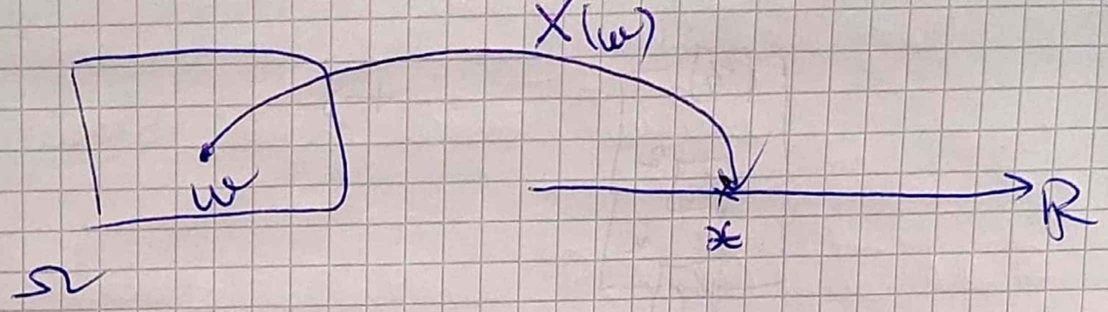
$= 1 - (1 - P_{CF} \times P_{FB})(1 - P_{CE} \times P_{EB}) = \underline{P_{CB}}$ ★

$P(A \to B) = 1 - (1 - P(A\to C, C \to B))(1 - P(A \to D, D \to B))$

$= 1 - (1 - P_{AC} \times \underline{P_{CB}})(1 - P_{AD} \times P_{DB})$
★

Variabile aleatoare

Def.: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție, spunem că X este o var. aleatoare și not. X v.a., dc. mulțimea $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Exp. Aruncăm 2 zaruri.

Fie X = suma pct. de pe cele 2 zaruri

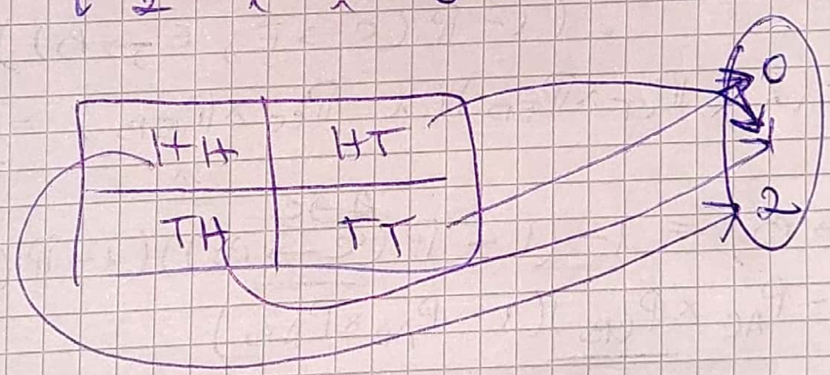
$X(3,5) = 8$

ω

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul.

X = nr. de H din cele 2 aruncări.

$\Omega = \{\underset{2}{HH}, \underset{1}{HT}, \underset{1}{TH}, \underset{0}{TT}\}$



$x \in \mathbb{R}$

Obs: $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$ (notație)

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

$= X^{-1}(A)$

$X^{-1}(\{0\}) = \{TT\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{HT, TH\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{HH\}$

$\{X \le x\} \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

Dc. $x < 0$ $\quad \{X \le x\} = \emptyset$

$x \in [0, 1)$ $\quad \{X \le x\} = \{TT\}$

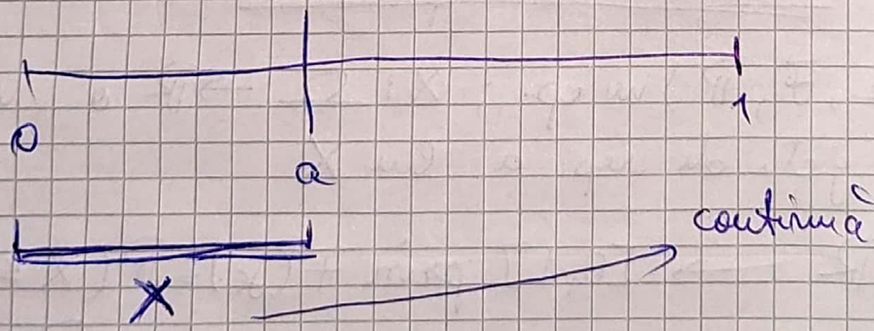
$x \in [1, 2)$ $\quad \{X \le x\} = \{HT, TH, TT\}$

$x \in [2, \infty)$ $\quad \{X \le x\} = \{HT, TH, TT, HH\}$

<u>Not</u>. V.a se not. cu litere mari $X, Y, Z, T, W \dots$

X —
- <u>discretă</u>: când $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă <u>inclusiv</u>
- <u>continuă</u>: când nu e discretă

<u>Exp</u>: Luăm un pct. la întâmplare din $[0,1)$



sgn $(a) \rightarrow$ v. discretă $\quad \begin{cases} -1, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}$

$a^3 \rightarrow$ continuă

disc : nr. de — (cuvinte scrise greșit) de ex.
cont : timp, durată, lungime

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(X \in A)$ unde $A \subseteq \mathbb{R}$

? **Def** : Repartiția unei variabile aleatoare

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un cp și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.

Se numește repartiția lui X (distributivă)
~~prob~~ probabilitatea pe $\mathbb{R}$ def. prin $\boxed{\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)}$
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $= (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$

$\forall A$ interval din $\mathbb{R}$

prob. ca X aparține resp.

$$\boxed{\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}}$$

Repartiția e o probabilitate!

Funcția de repartiție

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un cp. ; $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.

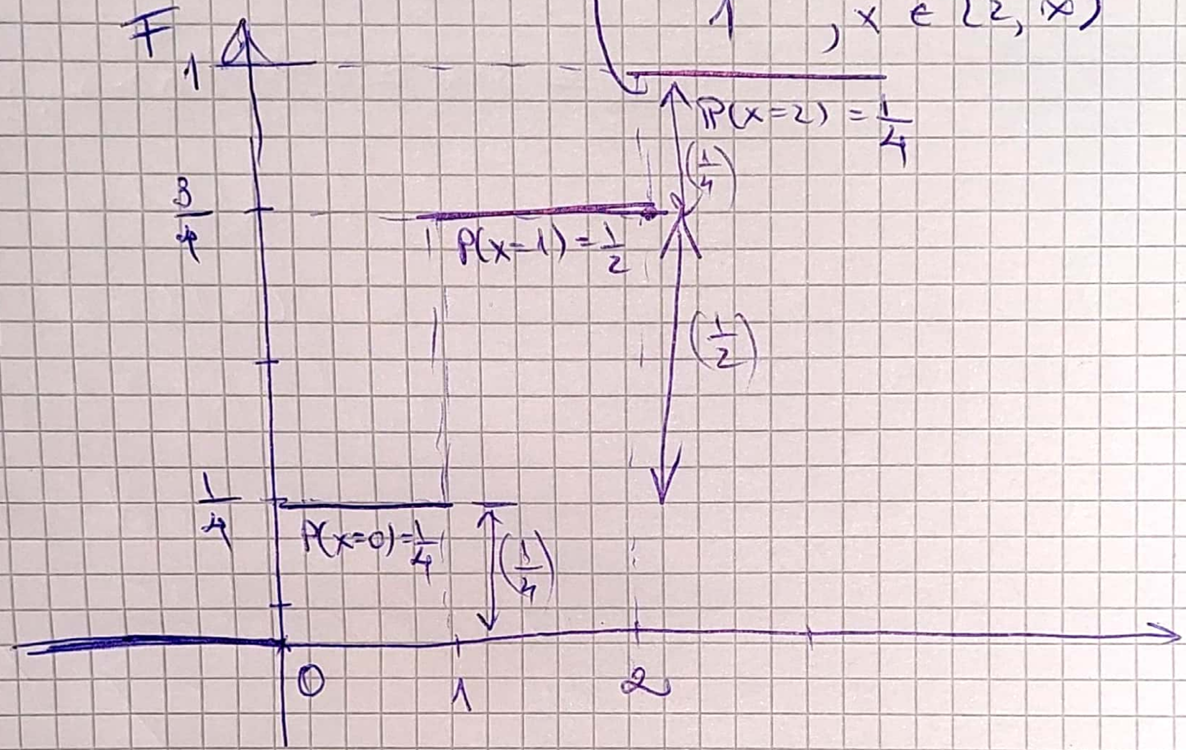
Def : f-ct. de rep. a lui X

$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ prin $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$

? **Obs** : $A = (-\infty, x]$
$\mathbb{P}_X(A) = F(x)$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul.
X = nr. de H în cele 2 aruncări

$$P(X \le x) = F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x \in [0,1) \\ 3/4, & x \in [1,2) \\ 1, & x \in [2,\infty) \end{cases}$$



Prop. fct. de rep.

a) F crescătoare

$x < y$: $F(x) \le F(y)$

b) F este continuă la dreapta

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$$

x_0

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

d) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Scanned with CamScanner

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$$
$$= F(x) - F(x-)$$
$$\hookrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)$$

Scanned with CamScanner