Seminar 3

1. Dați ex. de o mulț. $M = \{A_1, ..., A_8\}$ din $\mathbb{R}^2$ a.î. diagr. Voronoi aroc lui M să conț. exact 4 semidrepte iar diagr. aroc lui $M \setminus \{A_1\}$ să conț. 5 semidrepte.

Sol:

$$M = \{\overbrace{(-3,3)}^{A_1}, (3,3)$$
$$(3,-3), (-3,-3)$$
$$(-1,0), (0,1)\}$$
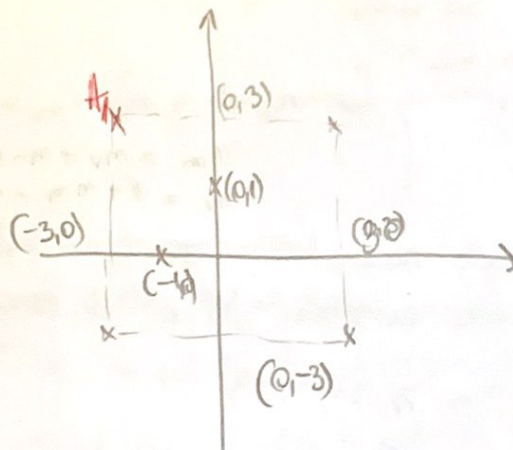
M = 4 pct pe înfăș. conv.

$M \setminus \{A_1\}$ are toate pct pe înf.

$\Rightarrow M \Rightarrow 4$ semidr
$M \setminus \{A_1\} = 5$ semidr.

nr. semidr. = nr. de pct de pe înfăș. convexă

2. a) Fie o mulț. cu m pct necol. Să se arate că pt. diagrama Voronoi au loc inegalitățile:
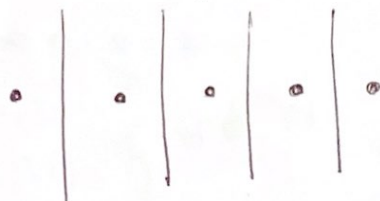
(i) $m_v \leq 2m - 5$ vârfuri } pe diagr. Voronoi
(ii) $m_m \leq 3m - 6$ muchii }

b) Câte vf. poate avea diagr. Vor. aroc. unei mulț. cu 5 pct $\in \mathbb{R}^2$, știind că Δ are exact 5 semidr. Analizați toate cazurile.

Sol: (Obs) Dacă avem n pct. colinare, diagr. va fi formată din drepte.

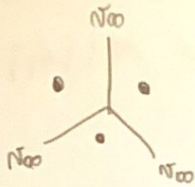a) Considerăm un vf. suplimentar, v_∞. Prin convenție, orice muchie de tip semidreaptă va trece prin v_∞.

Considerăm graful G care are vârfurile = vf. diagramei + v_∞

$\Rightarrow$ are $m_v + 1$ vf.
$\rightarrow$ muchiile = muchiile duble $\Rightarrow$
$\Rightarrow m_m$ muchii

G este planar convex

$\Rightarrow$ inegalit. lui Euler

$$m + f - m = 2$$
$$m = m_v + 1$$
$$m = m_m$$
$$f = m$$

$\Rightarrow m_v + 1 + m - m_m = 2$

$m_m = m_v + m - 1$
$m_v = 1 + m_m - m$

Fiecare muchie este incidentă cu exact 2 vârfuri
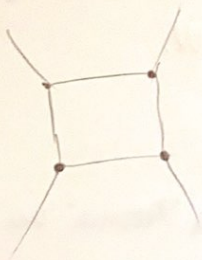Fiecare vârf este incident cu cel puțin 3 muchii.

$$2 m_m \geq 3(m_v + 1)$$
$$2 m_v + 2m - 2 \geq 3m_v + 3$$
$$m_v + 5 \leq 2m \Rightarrow m_v \leq 2m - 5$$

$$2 m_m \geq 3(2 + m_m - m)$$
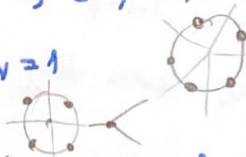$$2 m_m \geq 6 + 3m_m - 3m$$
$$m_m \leq 3m - 6$$

b) $m = 5$; $\varnothing$ are 5 semidrepte $\Rightarrow$ 5 pct. pe frontieră.

caz 1 : pct. sunt conciclice $\Rightarrow m_v = 1$
caz 2 : 4 conciclice $\Rightarrow m_v = 2$
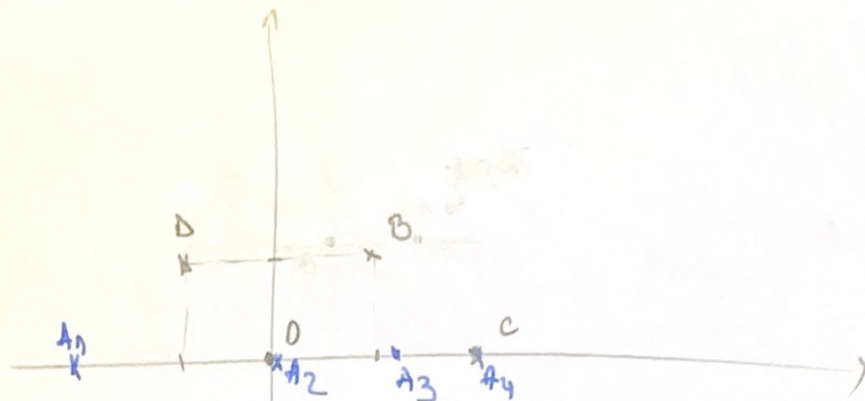caz 3 : oricare 4 nu sunt conciclice $\Rightarrow m_v = 3$

(3 ar fi conciclice mereu)

3. Fie pct. $O=(q,0)$, $A=(\alpha, d)$, $B=(1,1)$, $C=(2,d)$, $\delta=(1,-1)$, unde $\kappa \in \mathbb{R}$.
Discutați în fcț. de α nr. de nuclii de tip Reundr. ale diagr. Voronoi
asoc. mult. $\{O, A, B, C, \delta\}$

Sol:

caz 1: $\alpha < 0 \Rightarrow$ 4 pct. pe fr.
$\Rightarrow$ d·Vor. are exact 4 reuidh.

caz 2: $\alpha = 0 \Rightarrow$ 4 pct pe fr. $\Rightarrow$ 4 reuidh.

caz 3: $0 < \alpha < 2 \Rightarrow$ d· are 4 pct. $\Rightarrow$ 4 reuidh

caz 4: $\alpha = 2 \Rightarrow$ —"—

caz 5: $\kappa > 2 \Rightarrow$ —"—

4. a) Fie $A = (1,2)$. Alegeți 2 dr. dist. d, g care trec prin A. Det.
dualele A^*, d^*, g^* și verificați că A^* e dr. det. de d^* și g^*.

Sol: pct $X(X_1, X_2) \Rightarrow$ dual: X^{*} de ecuație $y = x, x - x_2$

$\rightarrow$ dr. d de ecuație $y = a x + b \Rightarrow$ dual: pct. $d^* = (a, -b)$

$A(1,2) \rightsquigarrow d: y = -x + 3$; $A \in d$
$\rightsquigarrow g: y = x + 1$; $A \in g$
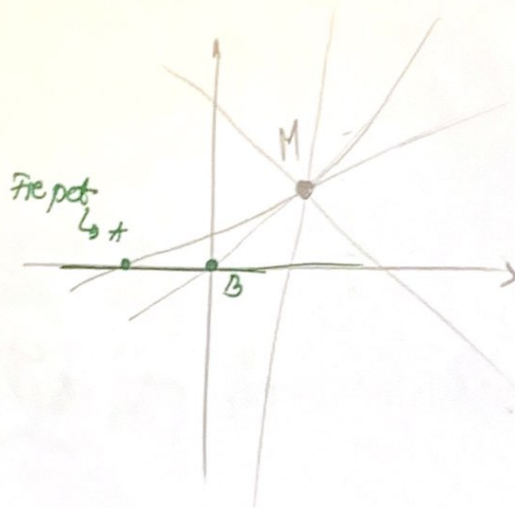
dualele:
A^* dr. de ec $y = x - 2$
$d^* = (-1, -3)$
$g^* = (1, -1)$ $\Big\}$ $\rightarrow$ dr $d_1: \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$ $\rightarrow d_1: \dfrac{x+1}{1+1} = \dfrac{y+3}{-1+3}$

$\Rightarrow d_1: y = x - 2 \rightarrow$ fix ecuația dr. A^*

b) Se dau 4 dr. care trec prin același punct. Fie 2 drep[te]
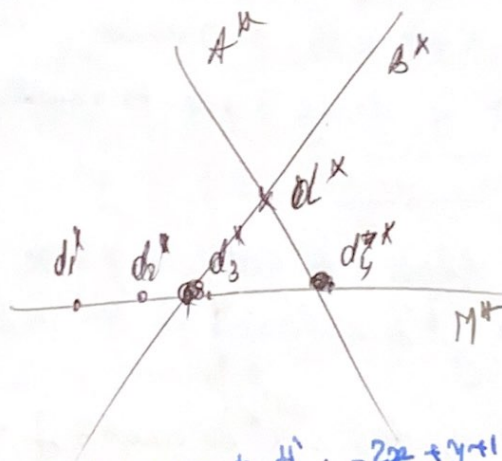dr. se consid 2 pct. distincte și se trage dreapta dusă c[...]

Fie pct.
↳ A
B

M

Obs

DUALA

DUAL ⇓

M^K = dualul lui M,
va trece într-o dr.
similară cu O_2

A^K B^K

d^K

d_1^K d_2^K d_3^K d_4^K

M^K

5) a) Fie semiplanele $H: x+y-3 \leq 0$ și $H': -2x+y+1 \leq 0$ dați ex de H'' a.î.
$H \cap H' \cap H''$ să fie △ dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 de trec
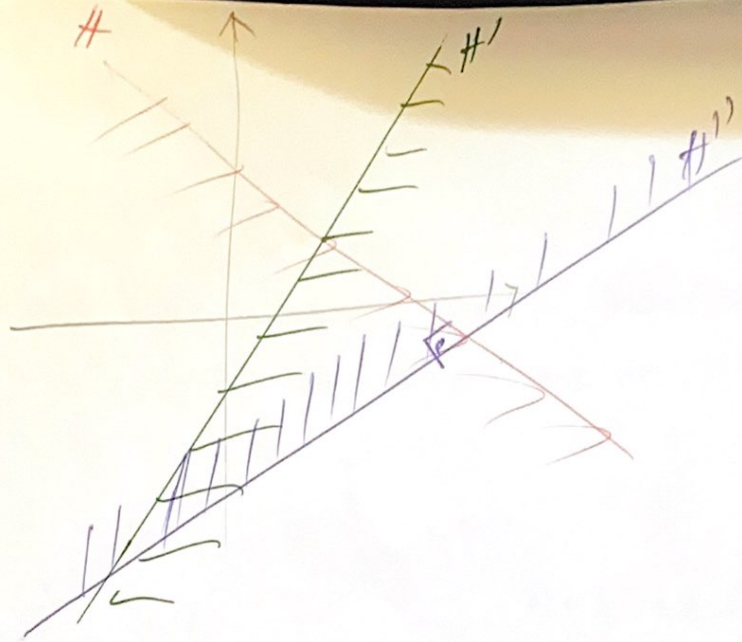
$$H_1: -y+1 \leq 0$$
$$H_2: y-5 \leq 0$$
$$H_3: -x \leq 0$$
$$H_4: x-y+a \leq 0 \quad \text{bisectoare}$$

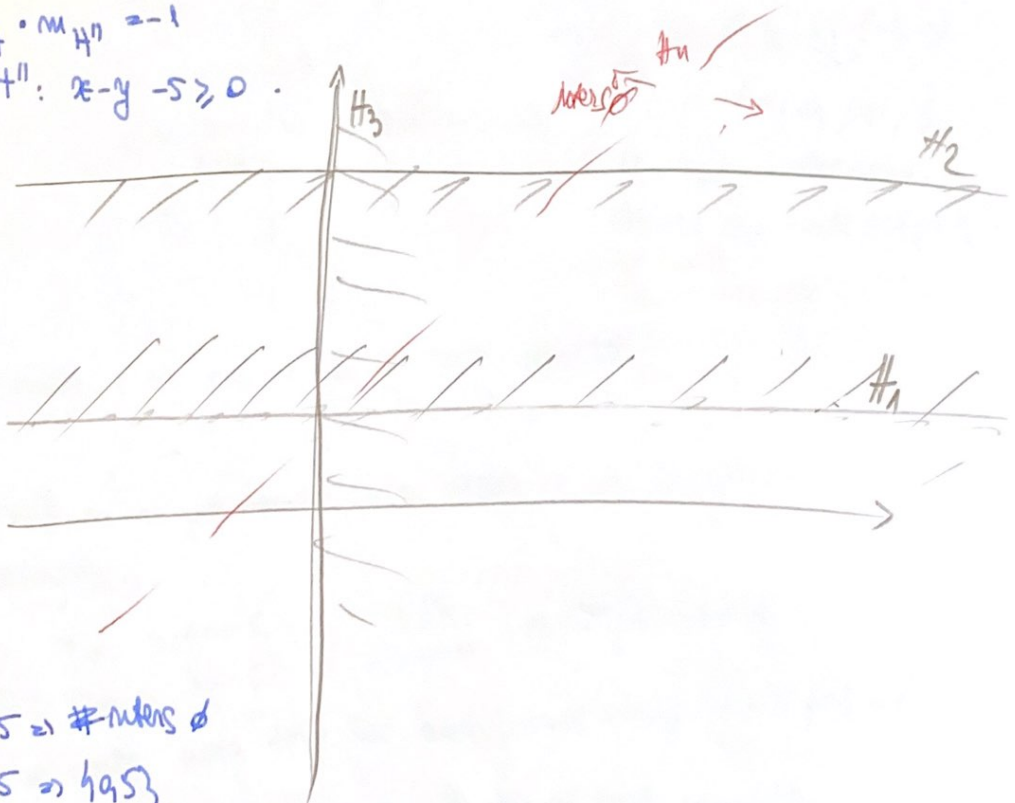Discutați în fcț. de a natura intersecției $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$

$m_H \cdot m_{H''} = -1$

Fie H'': $x - y - 5 \geq 0$.

b)

$a > 5 \Rightarrow H\text{-inters } \emptyset$

$a = 5 \Rightarrow \{a_5\}$

$1 \leq a \leq 5 \Rightarrow \triangle ABC$

$a < 1 \Rightarrow$ trapez

$B(0, \frac{}{} a)$

$C(a, 5)$