Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

3. Calculaţi $a^{a^{b^b}} \pmod{31}$.

4. Considerăm polinomul cu coeficienţi întregi $P(X) = X^3 - aX + b$. Determinaţi dacă polinomul $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{2^b}, +)$.

6. Fie p cel mai mic număr prim din descompunerea în factori primi a lui a şi q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu $a+b$, diferit de p. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $\exp_p(n)$ exponentul la care apare p în descompunerea în factori primi a lui n. Considerăm pe $\mathbb{N}$ relaţia binară ρ dată astfel: $m\rho n$ dacă $\exp_p(n) = \exp_p(m)$ şi $\exp_q(n) = \exp_q(m)$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi b şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă } \; x < -b, \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă } \; x \geq -b. \end{cases}$$

Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-1, b+1])$.

8. Demonstraţi că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a^2+a} | \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

9. Determinaţi constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinoamele $X^b - aX + 1$ şi $cX + d$ să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$.

Nume: [redacted]
Prenume: [redacted]
Grupa: 141
$a=5$
$b=7$

1. Există permutări de ordin $a\cdot b-1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

$a\cdot b-1=\cancel{3\cdot5-1=15-1=}\ 5\cdot7-1=35-1=34$

$a+b=5+7=12$

$34=[17,2]$. Pentru ca ordinul permutării să fie egal cu 34, ar trebui ca c.m.m.m.c.-ul lungimii ciclilor din descompunerea în produs de cicli disjuncți a permutării să fie 34.

Fie σ o permutare cu această proprietate.

Cum $\sigma \in S_{12}$ și cel mai mic n a.î. $\sigma \in S_n$ și $ord(\sigma)=34$ este $n=17+2=19$ (caz în care σ este produsul dintre un ciclu de lungime 17 și unul de lungime 2), iar $n \nleq 12 \Rightarrow$ Nu există permutări de ordin 34 în S_{12}.

2. $\sigma=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) \in S_{12}$

Presupunem că există $\tau \in S_{12}$ a.î. $\tau^3=\sigma$

Fie $\tau=c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}$, unde $i_1+\ldots+i_k=9$, $1\le i_1,\ldots i_k\le 9$
$1\le k<9$)

$\tau^3=c_{i_1}^3\cdot c_{i_2}^3\cdot\ldots\cdot c_{i_k}^3$

Deoarece $\tau^3=\sigma=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) \Rightarrow$

unicitatea $\Rightarrow$ descompunerii în cicli disjuncți

$3 \nmid i_j \ (\forall) j$ și în plus $k=2$ și pot presupune că $i_1 = 5$ și $i_2 = 7$

Deci $\tau = c_5 \cdot c_7$, c_5, c_7 cicli disjuncți

$\tau^3 = c_5^3 \cdot c_7^3$ și $c_5^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$

$c_7^3 = (6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$

$c_5 = c_5^6 = (c_5^3)^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$

$c_7 = c_7^{15} = (c_7^3)^5 = (6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)^5 = (6\ 11\ 9\ 7\ 12\ 10\ 8)$

Deci $\tau = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)(6\ 11\ 9\ 7\ 12\ 10\ 8)$

~~3. Calculați $5^{5^{7^7}}$ (mod 31)~~.

~~$5^{5^{7^7}} = 5^5$~~

4. Considerăm polinomul cu coeficienți întregi $P(X) = X^3 - 5X + 7$. Determinați dacă polinomul este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

$P(X) = X^3 - 5X + 7$. Presupunem că $\exists \frac{m}{n}$, $(m,n)=1$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $P\left(\frac{m}{n}\right) = 0$, $\frac{m}{n}$ rădăcină a lui $P(X)$.

~~Fie $m = 7$, $m \mid 7$ și $n = 1$, $n \mid 1$, deci $\frac{m}{n}$~~

$m \mid a_0$, $n \mid a_n \Rightarrow m \mid 7$, $n \mid 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \in \{7, -7\}$

$P(7) = 7^3 - 5 \cdot 7 + 7 = 315 \neq 0$

$P(-7) = (-7)^3 - 5 \cdot (-7) + 7 = -301 \neq 0$

$\Rightarrow$ Presupunerea făcută este falsă, deci $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

3. Calculați $5^{5^{7^7}} \pmod{31}$

$7^7 = 823\,543 = 31 \cdot 26565 + 28 \Rightarrow 7^7 \equiv 28 \pmod{31}$

$\Rightarrow 7^7 = 31x + 28 \Rightarrow 5^{7^7} = 5^{31x+28} = 5^{31x} \cdot 5^{28}$

Mica teoremă a lui Fermat $\Rightarrow 5^{31} \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow (5^{31})^x \equiv 1^x \pmod{31} \Rightarrow 5^{7^7} \equiv 5^{31x} \cdot 5^{28} \equiv 1 \cdot 5^{28} \equiv (5^3)^9 \cdot 5$

$\equiv 1^9 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{31} \Rightarrow 5^{7^7} = 31y + 5$

$5^{5^{7^7}} = 5^{31y+5} = 5^{31y} \cdot 5^5$

Folosind mica teoremă a lui Fermat:

$a^{a^{b^b}} = 5^{5^{7^7}} = 5^{31y+5} = 5^{31y} \cdot 5^5 \equiv 1 \cdot 5^5 \equiv 5^3 \cdot 5^2 \equiv 1 \cdot 25 \equiv$

$\equiv 25 \pmod{31}$.

5. Determinați ~~elementele~~ numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{32}, +) \times (\mathbb{Z}_{128}, +)$

Fie $A = \{(\hat{k}, \bar{l}) \in \mathbb{Z}_{32} \times \mathbb{Z}_{128} \mid ord(\hat{k}, \bar{l}) = 8\}$

$ord(\hat{k}, \bar{l}) = 8 \Rightarrow [ord(\hat{k}), ord(\bar{l})] = 8$

Lagrange: $\begin{cases} ord(\hat{k}) \mid 32 \\ ord(\bar{l}) \mid 128 \end{cases}$

$ord(\hat{k}) = 8$ sau $ord(\bar{l}) = 8$

$ord(\hat{k}), ord(\bar{l}) \in \{1, 2, 4, 8\}$

$\Rightarrow (ord(\hat{k}), ord(\bar{l})) \in$
$\in \{(1,8), (2,8), (4,8), (8,8), (8,1), (8,2), (8,4)\}$

$ord(\hat{k}) = \frac{32}{(32,k)}$

$ord(\bar{l}) = \frac{128}{(128,l)}$

$ord(\hat{k}) = 1 \Leftrightarrow \hat{k} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_{32}$

$ord(\hat{k}) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{32}{(32,k)} \Rightarrow (32,k) = 16 \Rightarrow \hat{k} \in \{16\}$

$ord(\hat{k}) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{32}{(32,k)} \Rightarrow (32,k) = 8 \Rightarrow \hat{k} \in \{8, 24\}$

$ord(\hat{k}) = 8 \Rightarrow 8 = \frac{32}{(32,k)} \Rightarrow (32,k) = 4 \Rightarrow \hat{k} \in \{4, 12, 20, 28\}$

$ord(\bar{l}) = 1 \Leftrightarrow \bar{l} = \bar{0}$ în $\mathbb{Z}_{128}$

$ord(\bar{l}) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{128}{(128,l)} \Rightarrow (128,l) = 64 \Rightarrow \bar{l} \in \{64\}$

$ord(\bar{l}) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{128}{(128,l)} \Rightarrow (128,l) = 32 \Rightarrow \bar{l} \in \{32, 96\}$

$ord(\bar{l}) = 8 \Rightarrow 8 = \frac{128}{(128,l)} \Rightarrow (128,l) = 16 \Rightarrow \bar{l} \in \{16, 48, 80, 112\}$

Deci, $|A| = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2$

$= 4 + 4 + 8 + 16 + 4 + 4 + 8 = 8 + 24 + 16 = 48$

Deci, numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{32}, +) \times (\mathbb{Z}_{128}, +)$ este 48.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases} 5x+7(1+5), \text{ dacă } x<-7 \\ 5x^2+2\cdot 5(5-1)x+5^3-2\cdot 5^2+5+7, \text{ dacă } x\geq -7 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Studiați dacă funcția f este injectivă, surjectivă, bijectivă. Calculați $f^{-1}([-8,8])$.

$$f(x)=\begin{cases} 5x+42, & x<-7 \\ 5x^2+40x+87, & x\geq -7 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 5, & x<-7 \\ 10x+40, & x\geq -7 \end{cases}$$

~~Cum 5>0 și 10~~

Pentru $x=-7 \Rightarrow 10x+40=-30<0$

~~Cum f'(x)~~ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 10x+40=0 \Leftrightarrow x=-4$

Deci $f'(x)\begin{cases} >0, & x\in(-\infty,-7)\cup(-4,+\infty) \\ =0, & x=-4 \\ <0, & x\in[-7,-4) \end{cases}$

Deoarece $f'(x)$ nu își păstrează semnul pe tot domeniul $\Rightarrow f$ nu este strict monotonă $\Rightarrow f$ nu este injectivă

Cum f nu este injectivă $\Rightarrow f$ nu este bijectivă.

$f'(x)>0$, pentru $x\leq -7 \Rightarrow \operatorname{Im} f_{/(-\infty,-7)}=(-\infty, 5\cdot(-7)+42)$

$=(-\infty,7)$

Arătăm Ker $f = (X^2-30)$.

$5x^2+40x+87=0$

$\Delta = \cancel{(-40)^2}\ 40^2 - 4\cdot 5\cdot 87 = 1600-1740 = -140$

$\text{Im} f_{/[-7,+\infty)} = \left[\frac{-\Delta}{4\cdot 5}, +\infty\right) = \left[\frac{140}{20}, +\infty\right) = [7, +\infty)$

Deci, $\text{Im} f = (-\infty, 7) \cup [7, +\infty) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surjectivă

Cerința 2. Se consideră permutarea $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8\,9\,10\,11\,12)$, un produs de 2 cicli disjuncți de lungime 5, respectiv 7 din S_{12}. Determinați toate permutările $\tau \in S_{12}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

8. Demonstrați că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2-30)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{30}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{30}] = \{\alpha + \beta\sqrt{30} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}[X]/(X^2-30) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{30}]$

$f: \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{30}]$

$\forall P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ a.î. $f(P(X)) = P(\sqrt{30})$ morfism de inele

f este surjectivă, deoarece $f(a+bX) = a + b\sqrt{30}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Im} f = \mathbb{Q}[\sqrt{30}]$

Arătăm $\mathrm{Ker}\, f = (x^2-30)$.

"$\supseteq$" Fie $f(x) \in (x^2-30) \Rightarrow f(x) = (x^2-30)\cdot g(x),\ g(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$f(f(x)) = f((x^2-30)\cdot g(x)) \overset{f}{\underset{\text{morf.}}{=}} f(x^2-30)\cdot f(g(x)) = \underbrace{((\sqrt{30})^2-30)\cdot g(\sqrt{30})}_{=0}$

$\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$

"$\subseteq$" Fie $P(x) \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow f(P(x)) = 0 \Rightarrow P(\sqrt{30}) = 0$

$P(x) = (x^2-30)\cdot q(x) + r(x)$ cu $\mathrm{grad}(r(x)) < 2 \Rightarrow r(x) = ax+b$

$q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x] \quad a, b \in \mathbb{Q}$

$P(x) = (x^2-30)\cdot q(x) + ax + b \Rightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{P(\sqrt{30})}} = a\sqrt{30} + b \Rightarrow a\sqrt{30}+b = 0$

Dc $a \neq 0 \Rightarrow \sqrt{30} = -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ ~~f~~ $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

$\Rightarrow P(x) = (x^2-30)\cdot q(x) \Rightarrow P(x) \in (x^2-30)\mathbb{Q}[x] \;(= (x^2-30))$

Deci, $\mathbb{Q}[x]/(x^2-30) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{30}]$.