10.04.2023

FLP

cursul 7

- type interference

găsiți contexte și tip pentru a avea o judecată legală

$$\boxed{? \vdash M : ?}$$

ex: $(\lambda z . \lambda u . z)(y\, x)$

$\{x : \alpha,\ y : \alpha \to \beta\} \longrightarrow (\lambda z : \beta . \lambda u . \gamma . z)\ (y\, x) : \gamma \to \beta$

pt $x\, x$ nu merge

- sistemul $\lambda\to$ cu constrângeri = dependințele dintre tipuri

$\Gamma \vdash M : \tau \triangleright C$

context ↗ ↳ constrângeri

| $\lambda\to$ | $\lambda\to$ cu constr. |
|---|---|
| $\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \sigma}$ (var) | $\dfrac{}{\Gamma \cup \{x : \tau\} \vdash x : \sigma \triangleright \{\sigma \doteq \tau\}}$ (var*) |
| $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma . M) : \sigma \to \tau}$ $(\to_i)$ | $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau' \triangleright C' \quad C = C' \cup \{\tau = \sigma \to \tau'\}}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma . M) : \tau \triangleright C}$ $(\to_i^*)$ |
| $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$ $(\to_e)$ | $\dfrac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \triangleright C_1 \quad \Gamma \vdash N : \tau_2 \triangleright C_2 \quad C = C_1 \cup C_2 \cup \{\tau_1 = \tau_2 \to \tau\}}{\Gamma \vdash MN : \tau \triangleright C}$ $(\to_e^*)$ |

$\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau' \triangleright C$

$C = C'$, $\tau = \sigma \to \tau'$

→ "aglutinată"

$\sigma, \tau$ var. de tip

$\sigma, \tau, \tau', \tau_1, \tau_2$ var. de tip context : $\Gamma = \{x, \sigma \mid x \in Var, \sigma \in \mathbb{T}\}$ } mult. ~~$\mathbb{T}$~~ = mulț. tipurilor

constrângeri : $C = \{\sigma = \tau \mid \sigma, \tau \in \mathbb{T}\}$ } mult. tipurilor $\mathbb{V}$

Definiție: O judecată $\Gamma \vdash M : \sigma \triangleright C$ este legală dacă constrângerile din C are soluții.

$M_1 = (\lambda z . \lambda u . z)(y\, x)$

$\boxed{\Gamma_M = \{x : X \mid x \in FV(M)\}}$

$X$ – tip

$\Gamma_{M_1} = \{x : X, y : Y\}$

$\bar{M}_1 = (\lambda z : Z, \lambda u : U . z)(y\, x)$

- dacă $M = x$, $\bar{M} = M$
- dacă $M = M_1 N_1$, $M = \bar{M}_1 \bar{N}_1$
- dacă $M = \lambda x . N$, $M = \lambda x : X . \bar{N}$

cu $x$ var. de tip nouă

Definiție: dacă $\exists$ o constr. $C_M$ și o var. de tip nouă $V$ a.î. judecata $\Gamma \vdash \bar{M} : V \triangleright C_M$ este legală, termenul este ~~legat~~ typeable.

NE OPRIM, (2) AXIOMA

frunze (variable) (a) (*)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_{M_1}, z : Z, u : U \vdash z : d \triangleright D}}{\Gamma_{M_1}, z : Z \vdash \lambda u : U . z : \tau_1' \triangleright C_1'} \quad C_1' = D \cup \{\tau_1' = U \to d\}}{\Gamma_{M_1} \vdash (\lambda z : Z . \lambda u : U . z) : \tau_1 \triangleright C_1} \quad C_1 = C_1' \cup \{\tau_1 = Z \to \tau_1'\}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_{M_1} \vdash y : \sigma_1 \triangleright C_2'} \quad \dfrac{}{\Gamma_{M_1} \vdash x : \sigma_2 \triangleright C_2''}}{\Gamma_{M_1} \vdash (y\, x) : \tau_2 \triangleright C_2} \quad C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{\sigma_1 = \sigma_2 \to \tau_2\}$$

$$\dfrac{C_{M_1} = C_1 \cup C_2 \cup \{\tau_1 \doteq \tau_2 \to V\}}{\{x : X, y : Y\} \vdash \underbrace{(\lambda z : Z . \lambda u . U . z)}_{M} \underbrace{(y\, x)}_{N} : V \triangleright C_{M_1}}$$

(1) ne oprim, tragem concluzii;

$C_2' = \{\tau_1 = y\}$ $\Rightarrow C_2 = \{\tau_1 = y, \tau_2 = x, \tau_1 = \tau_2 \to \tau_2\}$

$C_2'' = \{\tau_2 = x\}$

$\Rightarrow$ probl. de unificare (mai târziu)

(2) $\delta = \{\delta = z\}$

$C_1' = \{\delta = z_1 \ldots\}$

Slide 8 → De ce ~~xx~~ nu e typable?

$C_1 = \{\tau_1 = x\}$

$C_2 = \{\tau_2 = x\}$

$C\, M_2 = \{\tau_1 = x, \tau_2 = x, \tau_1 = \tau_2 \to Y\}$ → NU se poate.

$\Rightarrow$ nu are sol.

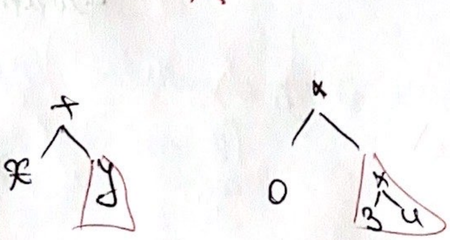
Constrângerile au soluție dacă se pot unifica.

Ne referim la simboluri, nu la operații (nu le evaluăm)

**Unificare**: ne referim

$x + y \quad\quad 0 + (3 * u)$ DA, se poate

$x + y \quad\quad 0 * (3 * u)$ NU



→ îi putem suprapune

- $\tilde{\mathcal{F}}$ = funcții, $\mathcal{V}$ = variabile, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ disjuncte
- $t ::= x \mid f(t_1 \ldots t_n)$

CONSTANTE: fct. de aritate zero

ARITATE: $(a,b,c,d,e) \to 5$ aritate
- $f(a,b,c) \to 3$
- $g(a,b) \to 2$

NOTAȚII:

| | |
|---|---|
| $- x, y, z$ | var |
| $- a, b, c$ | const |
| $- f, g, h$ | funcții |
| $- s, t, u$ | termeni |

- $var(t)$ = mulț. var. care apar în $t$

- ec. $s = t$ pt. o per. de termeni

- $Trm_{\mathcal{F},V}$ $\longrightarrow$ mulț. termenilor peste $\mathcal{F}$ și $V$

$\mathcal{F} = \{\to\}$ ; $V = \mathbb{V}$ (var. de tip) ; $\mathcal{F}$ se poate EXTINDE cu Unit, Void, Bool, care sunt constante

**Exemplu:**

$\theta = \{x \mapsto f(x,y),\ y \mapsto g(a)\}$

$t = \cancel{f(x,y)}\ f(x,\ f(y,z)))$

$\theta(t) = f(f(x,y),\ g(f(f(x,y), f(g(a)), z)))$

SUBSTITUTIE: $\boxed{\theta : V \to Trm_{\mathcal{F},V}}$

$\theta = \{a/x,\ g(w)/y,\ b/z\}$ $\to$ restul var. sunt la fel

sau $\theta = \{x \mapsto a,\ y \mapsto g(w),\ z \mapsto b\}$

... substit. se pot COMPUNE :) $\boxed{\theta_2 ; \theta_1 (t) = \theta_1(\theta_2(t))}$

$(\theta_2 \circ \theta_1)(x) = \theta_2(\theta_1(x))$

$(\theta_1 ; \theta_2)(x)$ //

$\theta_2 \circ \theta_1 = \theta_1 ; \theta_2$ | ATENTIE LA ORDINE

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f;g\ /\ g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Doi termeni se unifică dacă $\exists$ o substit. $\theta$ a.î. $\theta(t_1) = \theta(t_2)$. [unificator]

$\theta$ NU ESTE UNIC.

$\theta$ s.n. cmgu / mgu $\Leftrightarrow$ $\forall\, \theta'$, $\exists$ o substit. $\theta' = \theta ; \Delta$.
(cel mai general unificator)
(most generical unifier)
[$\exists$ ceva mai puțin general, ce să mai aibă nev. de $\Delta$ pentru a fi cmgu.

SCOATE, DESCOMPUNE, REZOLVĂ

- Algoritmul de unificare:
se obț. cmgu

$x$ și $f(x)$ nu se pot unifica.
DACĂ O VAR. APARE ÎN TERM DIN DR. nu se pot unifica.
$\to$ asta se dă la examen