Consultație PS 21.01.2023

Ex 1 - Modelare probabilistică

60% nu fol. nici F nici T

20% F

30% T

a) $\mathbb{P}$ să aibă F sau T?

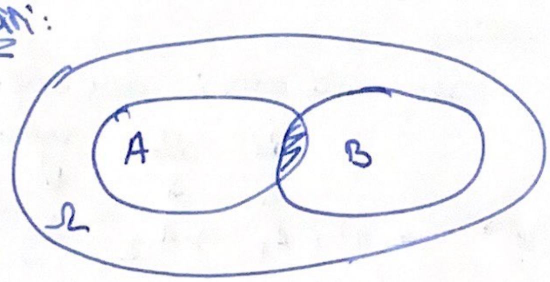
b) F și T?

c) $\mathbb{P}$ - doar o sg. platf.

Rezolvări:

a)

b)



A → să fol. Fb.

B → să fol. T

Ω → nici F, nici T

$\mathbb{P}(A\cup B) = ?$

$\mathbb{P}(A\cap B) = ?$

$\mathbb{P}(A) = 0.2$

$\mathbb{P}(A) = 0.3$

$\mathbb{P}((A\cup B)^c) = 0.6$

$\mathbb{P}(A\cup B) = 1 - \mathbb{P}((A\cup B)^c) = 1 - 0.6 = 0.4$

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cup B) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1$

c) "o singură platformă" →

$A \triangle B$ (dif. simetrică) $= (A\cup B)\setminus(A\cap B) =$

$= \underbrace{(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)}_{\text{doar F sau doar T}}$

!

$$\boxed{\begin{gathered} C \subseteq D \\ \mathbb{P}(D\setminus C) = \\ = \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C) \end{gathered}}$$

R. → $\mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(A\cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$. (+încă o metodă)

Ex2 (Alb, negru)

O urnă cu a bile albe și b bile negre

Extragem FĂRĂ ÎNTOARCERE 3 bile și ne interesează la urm. probabilit.:

a) care e prob. ca bilele extrase să fie în ordinea
ALB ALB NEGRU ?
ALB NEGRU ALB

b) ——"—— 2 din cele 3 bile extrase să fie ALBE.

Rezolvare.

a) Fie A_i evenim. prin care la extr. i am obț. bila albă.

alb alb negru

Cum scr. ev. din a? $\to \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$

vedem dacă sunt independente

FĂRĂ ÎNTOARCERE $\to$ neindependente
cu ÎNTOARCERE $\to$ independente $\to \mathbb{P}(\cap) = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \ldots$

• la noi, fără întoarcere $\to$ FORMULA LUI POINCARÉ

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

nu merge

IDEE 2: formula produs

prob lui A_2 știind că A_1 s-a realizat

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3^C | A_1 \cap A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{a-1}{(a-1)+b}$$ (am scăzut o bilă)

$$\mathbb{P}(A_3^C | A_1 \cap A_2) = \frac{b}{(a-2)+b}$$

am extras deja 2 bile albe

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{(a-1)+b} \cdot \frac{b}{(a-2)+b}$$

la fel și ~~pt. B~~. pentru Alb Negru alb.

---

b) 2/3 să fie albe (exact două)

dacă ar fi "cel puțin" → ev. ar fi ~~fost~~ disj.

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C) \cup (A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3)$$

la ↑ ar trb. adăugat când sunt toate C+ $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

ev. disj ⇒ facem suma prob.

Putem modif. proc. de extr. în felul următor

I când extr. o bilă, îi notăm culoarea, o punem înapoi supl. cu d bile de ac. culoare

II cu d_1 pt. alb (adică $a = a + d_1$)

d_2 pt. negru $b = b + d_2$ dc. extr. b

a) care e prob. ca a 2a bilă extr.-să fie neagră

Formula probabilit. totale:

$\rightarrow P(A_2^C) = P(A_2^C / A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2^C / A_1^C) \cdot P(A_1^C)$

$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d_1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d_2}{a+b+d_2}$$

prima extragere

b) care e prob. ca prima să fie neagră şt. că a II-a e neagră?

$$P(A_1^C / A_2^C) = \frac{P(A_2^C / A_1^C) \cdot P(A_1^C)}{P(A_2^C)}$$

(din pct. a)

$P(A_1^C) = \frac{b}{a+b}$

$P(A_2^C / A_1^C) = \frac{b+d_2}{a+b+d_2}$

$$P(A_1^C / A_2^C) = \frac{\frac{b+d_2}{a+b+d_2} \times \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d_1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d_2}{a+b+d_2}}$$

Pp. că $d_1 = d_2 = d$ (în scenariul 1)

? $\boxed{P(A_{2023}^C) = ?}$

3)

$P(A_n^C) = P(A_n^C / A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}) + P(A_n^C / A_{n-1}^C) \cdot P(A_{n-1}^C)$

FOLOSIM INDUCTIE :)

$$n=2 \quad \mathbb{P}(A_2^C) = \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d}{a+b+d} =$$

$$= \frac{ab + b(b+d)}{(a+b)(a+b+d)} =$$

$$= \frac{b(a+b+d)}{(a+b)(a+b+d)} = \frac{b}{a+b}$$

$$= \mathbb{P}(A_1^C)$$

<u>prob ca A_2^C e aceeași ca prob A_1^C</u>

ptc de ex dc. $\underbrace{d=0}$ → extr. cu întoarcere

verif. → $n=2$ $\mathbb{P}(A_2^C) = \mathbb{P}(A_1^C)$

→ ar. prin ind că:

$$\mathbb{P}(A_k^C) = \mathbb{P}(A_1^C), \ \forall k = \overline{1, n-1}$$

Fie N_k - nr de bile negre la pasul k ⇒

$$\mathbb{P}(A_n^C) = \mathbb{P}(A_n^C \mid A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n^C \mid A_{n-1}^C) \cdot \mathbb{P}(A_n^C)$$

$$= \frac{N_{n-2} \cancel{+ d}}{a+b+(n-1)d} \times \frac{a}{a+b} + \frac{N_{n-2}+d}{a+b+(n-1)d} \times \frac{b}{a+b}$$

din $\mathbb{P}(A_{n+1}^C) = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \mathbb{P}(A_{n-1}) = \frac{a}{a+b}$

$N_{n-2} = ?$ $\quad \mathbb{P}(A_{n-2}^C) = \frac{b}{a+b} = \frac{N_{n-2}}{a+b+(n-2)d}$

$$N_{n-2} = \frac{b(a+b+(n-2)d)}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(A_n^C) = \frac{aN_{n-2} + b(N_{n-2}+d)}{(a+b)[a+b+(n-1)d]}$$

Calc. care e prob. ca prima bilă extrasă să fie de culoare neagră, știind că urm. 2023 sunt de culoare neagră?

$$\mathbb{P}(A_1^C \mid A_2^C \cap A_3^C \ldots \cap A_{2023}^C)$$

sau P ca pr. 2023 bile extr. să fie de cul. neagră?

$$\mathbb{P}(A_1^C \cap \ldots A_{2023}^C) \overset{\text{formula produs}}{=}$$

$$\mathbb{P}(A_1^C) \cdot \mathbb{P}(A_2^C \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3^C \mid A_1^C \cap A_2^C) \cdot \ldots \mathbb{P}(A_{2023}^C \mid A_1^C \cap \ldots A_{2022}^C)$$

$$= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+d}{a+b+d} \cdot \frac{b+2d}{a+b+2d} \cdot \ldots \cdot \frac{b+2022d}{a+b+2022d}$$

din def. prob. cond.:

$$\frac{\mathbb{P}(A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots A_{2023}^C)}{\mathbb{P}(A_2^C \cap \ldots \cap A_{2023}^C)} \quad \text{formula produs}$$

$\cap \Omega$

$\Omega = A_1 \cup A_1^C$

~~f. prob. totale~~ $\mathbb{P}(ev \cap \Omega)$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^C \ldots \cap A_{2023}^C) +$

$\mathbb{P}(A_1^C \cap A_2^C \ldots \cap A_{2023}^C)$

$B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_1^C) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_1^C)$

disj.

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1^C)$

Ex 4) 1 jucător care are 2 monede — 1 echilibrată; 1 cu fețe identice (H)

a) aruncă moneda și ea a picat H. Care e prob. ca moneda să fi fost cea echilibr?

b) Aruncă a doua oară și obț. tot H. Care e acum prob. ca moneda să fi fost normală?

$A_1 \to$ moneda 1 ; $A_2 \to$ mon 2

$$\mathbb{P}(A_1 | H) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(H|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(H)} = \text{s.t.}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H|A_1) \quad \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(H|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(H|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

b) $\mathbb{P}(A_1 | (H, H)) =$

$\mathbb{P}(A_1 | B_1 \cap B_2)$ Bayes

B_1 - am obț. H la prima aruncare

B_2 — —

?

Ex 5. 2 zaruri, ef. aruncări succ. a 2 zaruri echilibr. Vrem să def. prob. ev. ca suma 5 să ap. înaintea sumei 7.

5

(1,3) (6,2), (3,5), (4,3), (1,6)

Ex 3

O casă costă N u.m.

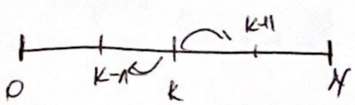
Avem la dispoz. k u.m. $k < N$

Aruncăm o monedă echilibrată $(P(H, \sim) = 1/2)$ în mod repetat. Dacă moneda e H, atunci managerul băncii ne dă 1 u.m, altfel îi dăm noi 1 u.m

Jocul se termină fie la $k = N$, fie la $k = 0$.

$P(\text{faliment}) = ?$

?: cum scriem prob?



prob ruină: $P(R)$

$$P_k(R) = P(R \mid \text{ați plecat cu } k \text{ u.m})$$

$$P_k(R) = P(R|H) \cdot \underbrace{P(H)}_{1/2\; p} + P(R \mid T) \cdot \underbrace{P(T)}_{1/2\; (1-p)}$$

$$P_{k+1}R \cdot 1/2 + \frac{1}{2} P_{k-1}R$$

$$P(_{k-1} R) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P_{k+1}(R)$$

06.02.2022

Consultație 2 PS

Ex. 1

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Rep $5X-2$, X^3, $X+X^2$, media și varianța

$\mathbb{P}(X < 1/8 \mid X \geq -1/8) = ?$

Sol: $Y = g(X)$ → acele valori ale lui g

$g_1(x) = 5x-2$ $\quad y_1 = 5x-2 \in \{\overset{x=-1}{-7}, -2, 3\}$

$$5X-2 \sim \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(X=-1)$

media: $E[5X-2] = 5E[X] - 2 = 5 \cdot (-1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5) - 2 = 5 \cdot 0.2 - 2$

varianța: $Var(5X-2) = 25\, Var(X) = 25(E[X^2] - \overset{(0.2)^2}{E[X]^2})$

$E[X^2] = 0.8$ $\quad X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

sau $E[h(X)] = \boxed{\sum_x h(x)\, \mathbb{P}(X = x)} =$

$= (-1)^2 \cdot 0.3 + 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 = 0.8$

adunăm toate valorile practic și prob.

$= 0.8 - (0.2)^2 =$

E_x

$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$ este rep. la fel ca și X

$\Rightarrow E[X^3] = E[X]$; $Var(X^3) = Var(X)$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$X+X^2 \in \{0, 0, 2\}$ $\longrightarrow \begin{cases} (-1) + (-1)^2 = 0 \\ 0^2 + 0^2 = 0 \\ 1 + 1^2 = 2 \end{cases}$

$X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

$1 - 0.5 = 0.5$

$P(X+X^2 = 2) = P(X=1) = 0.5$

$E[X+X^2] = 0 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1$

sau

$E[X+X^2] = E[X] + E[X^2] = 0.2 + 0.8 = 0.1$

sau

$E[\underbrace{X+X^2}_{h(X)}] = \underbrace{(-1+(-1)^2) \cdot 0.3}_{h(-1)} + \underbrace{(0+0^2) \cdot 0.2}_{h(0)} + \underbrace{(1+1^2) \cdot 0.5}_{h(1)} =$

varianta:

$Var(\underbrace{X+X^2}_{Y}) = E[Y^2] - E[Y]^2$ $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

$E[Y] = 1$

$E[Y^2] = 0^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.5 = 4 \cdot 0.5 = 2$

$\Rightarrow Var = 1$ $(2-1)$

$$\mathbb{P}(\underbrace{x < 1/8 \mid x \geq -1/8}_{\text{prob. condiț.}}) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(x < 1/8 \ \&\& \ x \geq -\frac{1}{8})}{\mathbb{P}(x \geq -1/8)}$$

$x \in \{-1, 0, 1\}$

ev. $A \cap B$: $x < 1/8$ și $x \geq -\frac{1}{8} \rightsquigarrow x = 0$

ev. B : $x \geq -\frac{1}{8} \rightsquigarrow x = 0$ sau $x = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(x=0)}{\mathbb{P}(x=0) + \mathbb{P}(x=1)} = \frac{0.2}{0.2+0.5} = \frac{2}{7}$$

<u>Adunare de var. aleatoare :</u>

$$\cancel{X} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

$$y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$x + y = ?$ $\qquad x + y \in \{x_i + y_j \mid i \in \{1, \dots m\}, j \in \{1, \dots n\}\}$

$$x \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$x + y \sim \{-3 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad 3\}$

$x + y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

$-1 \quad \to \quad P(x+y = -1) = P(x=-1 \text{ și } y=0) +$
$P(x=1, y=-2)$

$$P(x+y=a) = \sum_{x+y=a} P(x=x, y=y)$$

x \ y	−2	0	2
−1			
0			
1			

$x \sim$ (−1 0 1 / _ _ _)
$y \sim$ _ _

$x \perp\!\!\!\perp y$

Sunt indep ⇒
$P(x=-1 \text{ și } y=0)$
e $P(x=-1) \cdot P(y=0)$

Ex2 (x, y)

x \ y	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0
3	0.05	0	0.05

Cerințe:
- repartițiile marginale pt x și y
- ~~med~~ $E[x]$, $E[y]$ $Var(x)$ $Var(y)$
- tabelul de valori reprez. într-adevăr o repartiție comună
- repartiția condit. a lui x=1 || a lui x la y=4
- $E[y|x]$ → med. condiț. a lui y la x și varianța condiț.
- coef. de corelație ?
- verificați dacă are loc egalit. $\left| \begin{array}{l} Var(y) = E[Var(y|x)] \\ + Var(E[y|x]) \end{array} \right.$

Sol

$X \backslash Y$	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0 a
3	0.05	0 3a	0.05

ca să det. a, suma din tot tabelul să fie 1 $\Rightarrow$ a arbitr.

$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ (funcția de masă)

Trebuie să verif:

i) $f(x,y) \geq 0 \;\; \forall x,y$ ✓ DA; toate sunt poz.

ii) $\sum_{x,y} f(x,y) = 1$ ✓

a) Dep. marginală a lui $X \to$ suma pe linii

0.4
0.3
0.2
0.1

$\Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$

b) $Y \to \sum$ pe coloane $\to Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$

c) coef. de corelație:

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}}$$

X, Y nu sunt indep.

$E[X,Y] = \sum_{x,y} xy \, P(X=x, Y=y)$

$E[h(X,Y)] = \sum_{x,y} h(x,y) \, P(X=x, Y=y)$

$\Rightarrow \quad E[XY] = 0 \cdot 2 \cdot 0.1 + 0 \cdot 4 \cdot 0.2 + 0 \cdot 6 \cdot 0.1$

$+ 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 6 \cdot 0.1 +$

$+ 2 \cdot 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 6 \cdot 0 +$

$+ 3 \cdot 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 \cdot 0.05 = \ldots$

d) Rep. cond. Y la $X=1$

Ne uităm unde $X=1$ și înp. la p. $\underline{X=1}$

X\Y	2	4	6
1	$0.1/0.3$	$0.1/0.3$	$0.1/0.3$

$\Rightarrow Y|X=1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \frac{0.1}{3} & \frac{0.1}{3} & \frac{0.1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$X \mid Y=4$

X\Y	2	4	6
0		0.2	
1		0.1	
2		0.1	
3		0	
		0.4	

$X|Y=4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.2/0.4 & 0.1/0.4 & 0.1/0.4 & 0/0.4 \end{pmatrix}$

e) $\underline{\text{med. condiț. a}}$ lui Y la X

o var. aleatoare cu val $E[Y \mid X = x]$

6.

$E[Y \mid X=0] = 2P(Y=2 \mid X=0) + 4P(Y=4 \mid X=0) + 6P(Y=6 \mid X=0) = \ldots \quad \underline{4}$

$E[Y \mid X=1] = 2 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1/3 + 6 \cdot 1/3 = 12/3 = \underline{4}$

$E[Y \mid X=2] = \underline{3}$

$E[Y \mid X=3] = 1 + 3 = \underline{4}$

$E[Y|X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ P(X=2) & P(X\neq 2) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

var. aleat. care ia val

7) Var. condit. = $Var(y \mid x = x)$

$$Var(y \mid x=0) = E[y^2 \mid x=0] - E[y \mid x=0]^2 =$$

$$= 2^2 \cdot P(y=2 \mid x=0) + 4^2 P(y=4 \mid x=0) +$$

$$+ 6^2 \times P(y=6 \mid x=0) - E[y \mid x=0]^2 =$$

$$= 2^2 \cdot \frac{0.1}{0.4} + 4^2 \cdot \frac{0.2}{0.4} + 6^2 \cdot \frac{0.1}{0.4} - 16$$

$$= 1 + 8 + 9 - 16 = 2$$

→ NU POATE DA NEGATIV! VARIANTA SĂ NU FIE < 0

$P \geq 0$, $P \leq 1$ } mereu

$Var(y \mid x=1)$

$Var(y \mid x=2)$

$Var(y \mid x=3)$

$$Var(y/x) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4 \\ P(x=2) & P(x=0) & P(x=1) & P(x=3) \end{pmatrix} =$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

VERIF!

$$\boxed{Var(y) = E[Var(y/x)] + Var(E[y/x])}$$

nu egalitate → Prof.

"ĂSTA A FOST UN EX DAT LA EXAMEN!"

"EXACT AȘA".

DIALOG:

1 – "O SĂ FIE MAI UȘOR DECÂT ANII TRECUȚI"

2 – "... NU O SĂ FIE MAI GREU."

CE? $\boxed{\text{Avem voie cu 2 FOI}}$ → 4 pag A4 semnate și scrise de mai

și UN CALCULATOR ELECTRONIC!

10p/ ex → punctaj dif. pe subp.

Ex. 3

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in [1-c, 1+c] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$c \in (0,1)$

a) Det. c a.î. f să fie densit. de rep.

b) $X \sim f$, $E[X]$ și $Var(X)$

c) calc. fct. de rep. și scrieți un cod R care să traseze fct de repartiție.

Sol: a) f este densit. de rep. ⇔

i) $f \geq 0$

ii) $\int f(x)\,dx = 1$

$f(x) \geq 0$ este (A) pt. $c \in (0,1) \Rightarrow 1-c > 0$.

$x \geq 1-c > 0$

$1/x > 0$

$$\int f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{1+c}{1-c} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+c}{1-c} = e \Rightarrow c = \frac{e-1}{e+1}$$

b) $E[X] = \int x f(x)\,dx = \int_{1-c}^{1+c} x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$

$= 1+c-(1-c) = 2c = 2\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 =$

$E[X^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \int_{1-c}^{1+c} x^2 \frac{1}{x}\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_{1-c}^{1+c} = \frac{(1+c)^2-(1-c)^2}{2} =$

$= 2c = 2\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

$Var(X) = 2c - (2c)^2$.

c) fcț. de rep $F(x)$

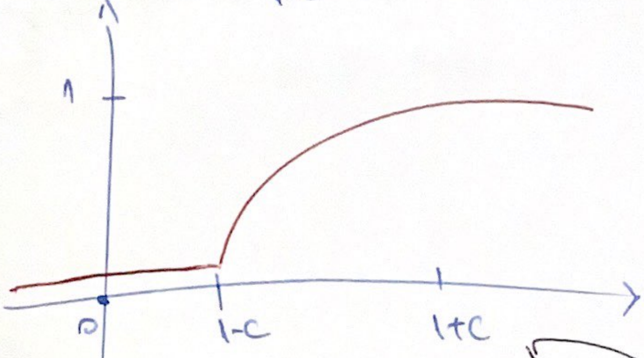
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t} \cdot \mathbb{1}_{[1-c,1+c]}(t)\,dt =$

$=$ $x < 1-c \Rightarrow F(x) = 0$

$x > 1+c \Rightarrow F(x) = 1$

Dacă $x \in [1-c, 1+c]$

$F(x) = \int_{1-c}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \ln(t)\Big|_{1-c}^{x} = \ln\frac{x}{1-c}$



cod R:

```
cdf_f <- function(x, c=0.5)
{ ifelse(x < 1-c, 0,
  ifelse(x > 1-c, 1,
  log(x/(1-c))))
```

?

```
t <- seq(-1, 2, length.out = 200)
plot(t, cdf_f(t), type = "l")
```

Ex 4 (x,y) admite dens. f:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y+1), & x \in [0,1],\ y \in [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Să se det k

b) Să se det. dens. marginale

c) Să se verif. dacă X și Y sunt indep.

d) Să se det. dens. condiționate

$f(x|y)$ și $f(y|x)$

Sol: a) $f(x,y) \geq 0$

$\iint f(x,y)\, dx\, dy = 1$

$f \geq 0 \Rightarrow k \geq 0.$

$\iint f(x,y)\, dx\, dy = 1 \iff \int_0^1 \int_0^2 k(x+y+1)\, dy\, dx =$

$= 1 \iff \int_0^1 k\left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^2 dx = 1$

$\int_0^1 k\left(2x + \frac{4}{2} + 2\right) dx = 1$

$k\left(\frac{2x^2}{2} + 4x\right)\Big|_0^1 = 1 \iff (1+4)k = 1$

$k = \frac{1}{5}$

$$\int_0^2 \int_0^1 k(x+y+1)\, dx\, dy = 1$$

b) $\boxed{\text{Densit marginale}}$

$f_X(x) = \int f(x,y)\, dy$

$f_Y(y) = \int f(x,y)\, dx$

$\int f(x,y)\, dy = \int \frac{1}{5}(x+y+1)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,2]}(y)\, dy =$

$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \int_0^2 \frac{1}{5}(x+y+1)\, dy =$

$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, \frac{1}{5}\left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right)\Big|_0^2 =$

$= \frac{2x+4}{5} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

$\int_0^1 \frac{x+y+1}{5}\, dx\, \mathbb{1}_{[0,2]}(y) = \frac{2y+3}{10}\, \mathbb{1}_{[0,2]}(y)$

c) Sunt x, y indep?

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \end{array}\right\} \rightarrow$ nu sunt independente

DENSIT. COMUNĂ

DENSIT. MARG.

d) Densit. condiționate

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{\frac{x+y+1}{5}\, 1_{[0,1]}(x)\, 1_{[0,2]}(y)}{\frac{2y+3}{10}\, 1_{[0,2]}(y)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2(x+y+1)}{2y+3}, & x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

similar și $f_{y|x}(y|x)$.

---

determinați $E[X|Y]$ ← v.al. $= g(Y)$ unde
$g(y) = E[X|Y=y]$.

prob. ca X să $\in \{A\}$, și $Y \in \{B\}$

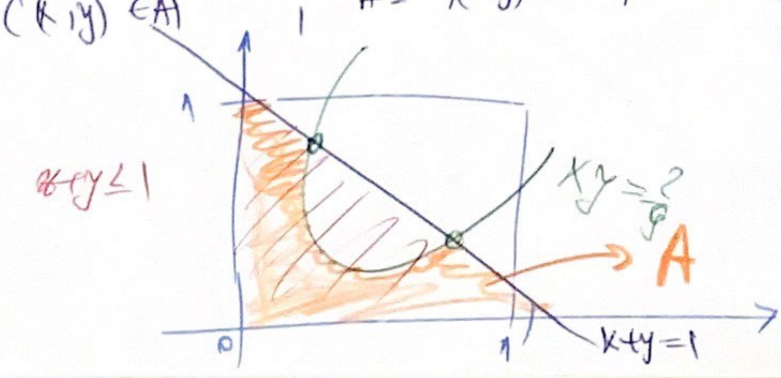
$P((X,Y) \in A \times B)$.

X, Y uniform pe $[0,1]$
$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$

Ex.5 : Să se det P ca suma a 2 nr. alese la întâmplare în $[0,1]$ să nu depășească val. 1 iar produsul lor să nu dep. val. $2/9$.

$P(X+Y \leq 1, X \cdot Y < 2/9)$

$P((X,Y) \in A)$, $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x+y \leq 1, xy < \frac{2}{9}\}$



Vrem aria regiunii A

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

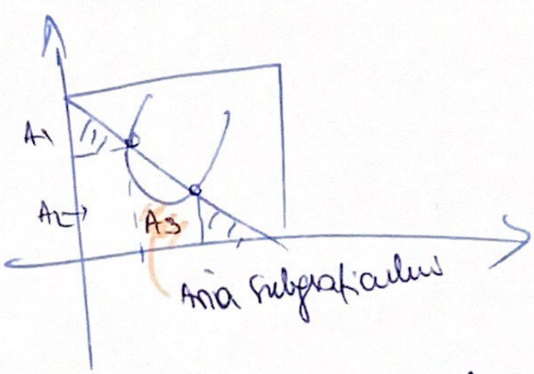
$$f(x,y) \overset{x,y \text{ indep}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) =$$

$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y) = \mathbb{1}_{(0,1)^2}(x,y)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X+Y \le 1,\ XY < 2/9) = \iint_A \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\,dx\,dy$$

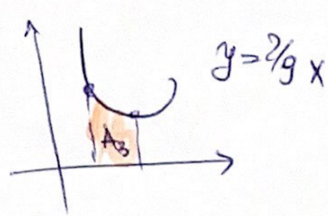
$$= \text{Aria } A.$$

pct de intersecție: $\begin{cases} x+y=1 \\ xy = 2/9 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1-y \\ (1-y)\,y = 2/9 \end{array}$



$y_{1,2} \begin{cases} 1/3 \\ 2/3 \end{cases}$ $\quad x_{1,2} \begin{cases} 2/3 \\ 1/3 \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\,(1/3,\ 2/3) \\ B\,(2/3,\ 1/3) \end{array}\right\}$ punctele



Aria $A = 2A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{18}$$

$$A_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$A_3 = \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9}x\,dx = \frac{2}{9}\ln x \Big|_{1/3}^{2/3} = \frac{2}{9}\ln 2$$

$$\Rightarrow \text{Aria } A = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$$

Ex 6: lab de biologie
un tehnician → 2 măsurători

$X, Y \sim N(0,1)$

Calculați corelația dintre cea mai mică și cea mai mare valoare dintre cele 2 măsurători.

Sol: $\rho(\underbrace{\min(X,Y), \max(X,Y)}_{\text{nu sunt indep.}}) = ?$

$M = \max(X,Y)$
$L = \min(X,Y)$

$$\rho(M,L) = \frac{Cov(M,L)}{\sqrt{Var(M)}\sqrt{Var(L)}}$$

$|M-L| = (x,y)$

$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0$
$E[M-L]$

EXAMEN JOI LA 9