Oprea Tudor

141

exercițiul 2

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^5 y^3}{(x-1)^6 + y^6}, & (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = 1, y = 0 \end{cases}$$

a) continuitatea funcției f

f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ ca funcție obț. prin operații elementare cu funcții elementare

studiem continuitatea în punctul (1,0):

$$l = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^5 \cdot y^3}{(x-1)^6 + y^6} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$\Rightarrow$ aplicăm majorarea

$$\left| \frac{(x-1)^5}{(x-1)^6 + y^6} \right| \leq \underbrace{\left(\frac{(x-1)^6}{(x-1)^6 + y^6} \right)^{\frac{5}{6}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left((x-1)^6 + y^6 \right)^{\frac{5}{6} - 1}}_{\left((x-1)^6 + y^6 \right)^{-\frac{1}{6}}} \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ y \to 0}]{} 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^5}{(x-1)^6 + y^6} \to 0 \quad (1)$$

$$\left|\frac{y^3}{(x-1)^6+y^6}\right| \leq \left|\frac{y^6}{y^6+(x-1)^6}\right|^{\frac{3}{6}} \cdot \left(y^6+(x-1)^6\right)^{\frac{3}{6}-1}$$

$$\left|\frac{y^6}{y^6+(x-1)^6}\right|^{\frac{3}{6}} \leq 1$$

$$\left(y^6+(x-1)^6\right)^{\frac{3}{6}-1} = \left(y^6+(x-1)^6\right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[y\to 0]{x\to 1} 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{(x-1)^6+y^6} \longrightarrow 0 \quad (2)$$

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$ $l=0$ $\Rightarrow$ funcţia este continuă în $(1,0)$

şi cum funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ $\Rightarrow$

funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2$

b) $$\frac{df}{dx} = \frac{d\left(\frac{(x-1)^5\,y^3}{(x-1)^6+y^6}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{5(x-1)^4y^3\cdot\left((x-1)^6+y^6\right)-(x-1)^5\cdot y^3\cdot 6(x-1)^5}{\left((x-1)^6+y^6\right)^2}$$

$$= \frac{5y^3(x-1)^4\left((x-1)^6+y^6\right)-6y^3(x-1)^{10}}{\left((x-1)^6+y^6\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}(1,0) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \underline{5y^3(x-1)^4\left((x-1)^6+y^6\right)} - 6y^3(x-1)^6$$
$$=$$

c) funcția f este derivabilă în punctul $(1,0) \Rightarrow$

$\exists$ o aplicație liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de forma

$T(x,y) = ax + by$, unde $a = \frac{df}{dx}(1,0)$ astfel

$b = \frac{df}{dy}(1,0)$

încât

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{f(x,y) - f(1,0) - T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

de la punctul b) știm că $\frac{df}{dx}(1,0) = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d\left(\frac{(x-1)^5 y^3}{(x-1)^6+y^6}\right)}{dy} = \frac{3y^2 \cdot (x-1)^5 \cdot ((x-1)^6+y^6) -}{((x-1)^6+y^6)^2}$$

$$\frac{- y^3 (x-1)^5 \cdot ((x-1)^6+y^6)'}{} =$$

$$= \frac{(x-1)^5 \cdot 3y^2 \cdot ((x-1)^6+y^6) - y^3 \cdot (x-1)^5 \cdot 6y^5}{((x-1)^6+y^6)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^5 (3y^2 (x-1)^6 - 3y^8)}{((x-1)^6+y^6)^2}$$

$\frac{df}{dy}(1,0) = 0$

$\Rightarrow T(x,y) = 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{f(x,y) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(1,0)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{T(x,y)}}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\frac{(x-1)^5\cdot y^3}{(x-1)^6\cdot y^6}}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 1}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} f(x,y) \overset{\text{punctul a)}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ f este derivabilă în $(1,0)$