Curs 9 : 28 noiembrie

reamintire:

$X \to$ cont. dacă $\to f \geq 0$ a.î. $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ interval

Funcția de repartiție $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in \underbrace{(-\infty, x]}_{A}) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

* Cazul discret:

$F(x) = \sum_{y \leq x} P(X=y) = \sum_{y \leq x} f(y)$

Prop fct. repartiție:
1) F cresc. $\uparrow$
2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3) F este continuă la dreapta.

Obs.: Din Th. fundamentală a analizei:

$\to$ dacă f este continuă în x_0 atunci $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$

Dacă f densitatea de repartiție este continuă atunci F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, $\forall x$.

Obs: Dacă știm pe F atunci $f(x) = F'(x)$.

Dacă știm pe f atunci $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Exp.: Fie X o v.a. cu densitatea

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

X este o v.a. repartizată Logistic $\sim$ Logistica

a) $F(x) = ?$

b) $\mathbb{P}(a < X < b) = ?$; $(a = -3, b = 2)$

R:

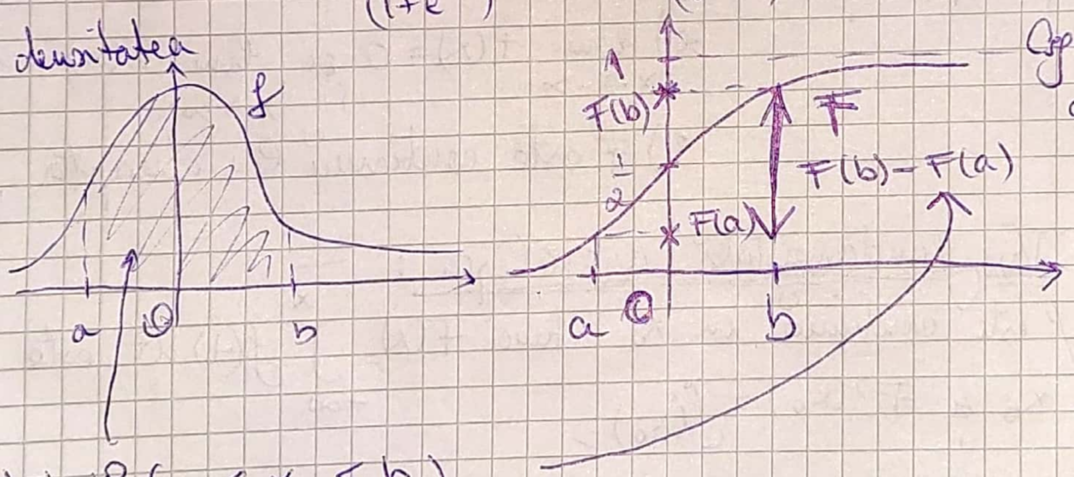
a) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt \underset{\substack{u = e^t \\ du = e^t dt}}{=\!=\!=} \int_0^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\,du = -\frac{1}{1+u}\Big|_0^{e^x} = -\frac{1}{1+e^x} + 1 = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x) \Rightarrow f \text{ pară}$$

$\Downarrow$

Gf simetric față de 0



b) $\mathbb{P}(a < X < b)$

$= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \le a)$

$= \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X \le a) \qquad (\mathbb{P}(X = b) = 0)$

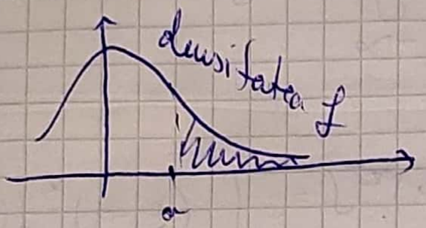
$= F(b) - F(a)$

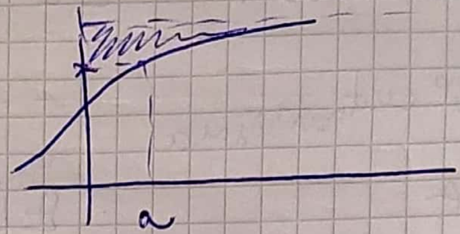
$= \dfrac{e^b}{1+e^b} - \dfrac{e^a}{1+e^a}$

Scanned with CamScanner

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$ — 11 —

$$\mathbb{P}(x > a) = 1 - \mathbb{P}(x \le a) = 1 - F(a)$$





Media şi momentele v.a. cont

Cazul discret : X v.a. discretă

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = \sum_x x f(x)$$

$$\left(\sum |x| f(x) < \infty \right)$$

momentul de ordin k : $\mathbb{E}[X^k] = \sum_x x^k\,\mathbb{P}(X = x)$

$$= \sum_x x^k f(x)$$

momentul centrat în a de ordin k : $\mathbb{E}[(X-a)^k] = \sum_x (x-a)^k f(x)$

Dacă $a = \mathbb{E}[X]$ at. momentul centrat de ord k

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_x (x - \mathbb{E}[X])^k f(x)$$

Pt. $k = 2$ varianta $Vr(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

Def.: Fie X o v.a. cont. cu densitatea rep. f atunci

$$\mathbb{E}[X] \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

Dacă $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ ($\int |x| f(x) dx < \infty$)

În caz contrar media nu există.

— Momentul de ord k: $\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$

— Momentul centrat în a de ord k: $\mathbb{E}[(X-a)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x) dx$

— Momentul centrat de ord k: $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbb{E}[X])^k f(x) dx$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbb{E}[X])^2 f(x) dx$

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx}$$

! Prop. mediei și ale varianței din cazul discret se păstrează și în cazul cont.

a) Dacă $X = c$ (const.) at. $\mathbb{E}[X] = c$ și $\mathrm{Var}(X) = 0$

b) Dacă $X \geq 0$ at $\mathbb{E}[X] \geq 0$

c) Dacă $X \geq Y$ at. $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

d) $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

e) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}[X]$

f) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$

g) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ at $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ și
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Scanned with CamScanner

rep - repartizat :)

① V.a. rep. uniform pe [a, b)

Spunem că X este o v.a. rep. uniform pe [a, b], notăm $X \sim U([a,b])$, dc. densitatea de rep f este

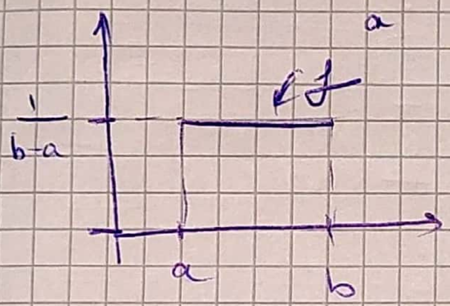
$\downarrow$ este rep. ca

const. pe [a,b].

Deci că f este densitate $\Rightarrow \begin{cases} f \geq 0 \\ \int f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

Cum $f = c \rightarrow c \geq 0$

$\int_a^b c\,dx = 1 \rightarrow c = \frac{1}{b-a}$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1, & x > b \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(t)\,dt$$

$$= \int \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\cap(-\infty,x]}(t)\,dt$$

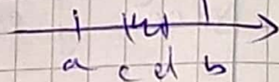
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$\downarrow$

fct. indicator

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; a \le x \le b \\ 1 & ; x > b \end{cases}$

$U \sim \mathcal{U}([a,b])$ $\qquad [c,d] \subseteq [a,b]$



$P(U \in [c,d]) =$

$= P(U \le d) - P(U \le c)$

$= \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx$

$= \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-c}{b-a}$

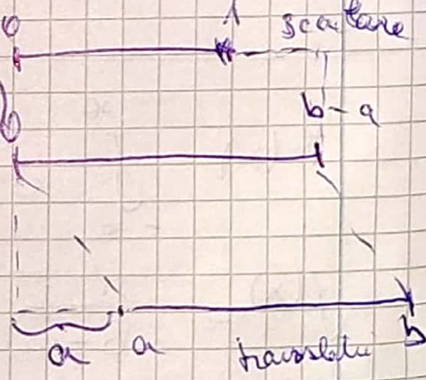
$\longrightarrow U \sim \mathcal{U}[0,1]$ unif standard

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Fie $V = a + (b-a)\,U \sim \mathcal{U}([a,b])$

↓ scalare

↓ translatie



$P(V \le x) = P(a + (b-a)U \le x)$

$= P\left(U \le \frac{x-a}{b-a}\right)$

$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$b = 1$
$a = 0$

$a + (b-a)$ runif(n)

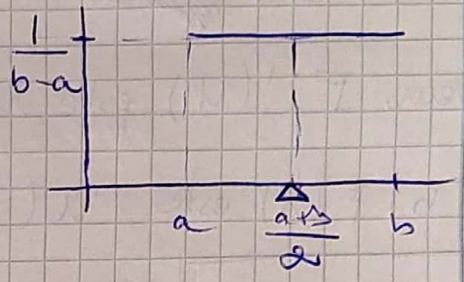
$\Leftrightarrow$ runif(n, a, b)

Fie $U \sim \mathcal{U}([a,b])$ — Metoda 1

$\mathbb{E}[U] = ?$

$$\int x f(x)\,dx = \int x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$



$$\mathrm{Var}(U) = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2$$

momentul de ord. 2 →

$$\to \mathbb{E}[U^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \int x^2 \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$4ab - 6ab$

$4a^2 - 3a^2$ $\quad \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$4b^2 - 3b^2$

$$\mathrm{Var}(U) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Metoda 2:

Fie $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$$\mathbb{E}[U] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[U] = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Var}(U) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$V = a + (b-a)U \sim \mathcal{U}([a,b])$$

$$\mathbb{E}[V] = a + (b-a)\,\mathbb{E}[U] = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(V) = (b-a)^2 \cdot \mathrm{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

T: calc. mom. de or. sup.

Th. de universalitate a rep. uniforme (Th. fund. a simulării)

(T) Fie X o v.a. cu funcția de rep. F. Fie $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

atunci

a) Dacă $F^{-1}(u) = \inf \{x \mid F(x) \geq u\}$ funcție cuantilă

avem $F^{-1}(U)$ este rep ca X

b) $F(X)$ este $\mathcal{U}([0,1])$

cu
$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$
$$F(X) = \frac{X-a}{b-a}$$

Tratăm doar cazul: F cont. și str. crescătoare (bijectivă)

F^{-1} inversa lui F

$$\mathbb{P}(\overbrace{F^{-1}(U) \leq x}) \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(\overbrace{U \leq F(x)})$$
$$= F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

(1) am aplicat F

Exp. 1: X v.a. logistică

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F(x) = u \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = u$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{u}{1-u} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

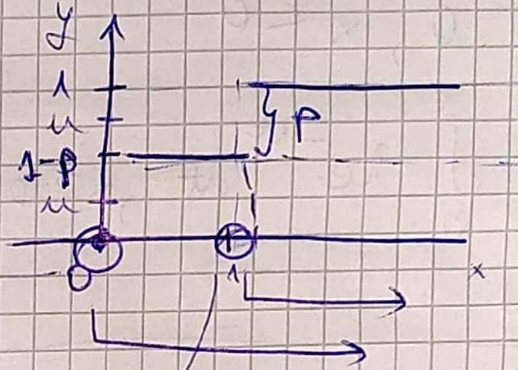
$$\Rightarrow F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

1) $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

2) $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim$ logistică

Exp. 2: $X \sim B(p)$: $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1-p \\ 1, & u > 1-p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0, & p \le 1-u \\ 1, & p > 1-u \end{cases}$$

$U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$1-U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$F^{-1}(U) \sim B(p)$

<u>Alg. de generare</u>:

Gen $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

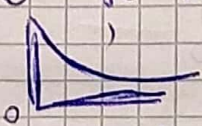
Dacă $U \ge p \Rightarrow X = 0$

altfel $X = 1$

<u>V. a. repartizată exponențial</u>

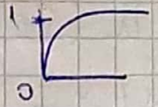
<u>Def</u>. Fie X o v.a. Spunem că X este rep. exponențial de parametru λ, notăm $X \sim Exp(\lambda)$, dacă densitatea de rep. a lui X este

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \ge 0 \text{ și } \lambda > 0$$



Este f densitate?

$$f \ge 0, \ \int f(x)\,dx = \int \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 1$$



Cât este $F(x)$?

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,dt =$$

$$= \int \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \cdot \mathbb{1}_{[-\infty,x]}(t)\,dt$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$$

f. de supraviețuire

$$E[X] = \int x f(x)\,dx = \int x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty x(-e^{-\lambda x})'\,dx = \underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty$$

$$\frac{1}{e^{\lambda x}}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x^2(-e^{-\lambda x})'\,dx$$

$$= \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda} E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

(P) Proprietatea lipsei de memorie

a) Dacă X este o v.a. rep. $Exp(\lambda)$ atunci

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)}$$ doar pt. exp. !

Reciproca

b) Dacă X este o v.a. cont. ≥ 0 care verif. $\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)$, $\forall s,t > 0$ atunci $X \sim Exp(\lambda)$.

$$\frac{\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$

$$= \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X \geq t)$$

(?) $\mathbb{P}(X \geq s+t) = \mathbb{P}(X \geq s) \cdot \mathbb{P}(X \geq t)$, $\forall (s,t)$

$\ln(s+t) = \ln(s) \cdot \ln(t)$

* $f(x+y) = f(x) + f(x)$, $\forall (x,y)$ ec. func. Cauchy

(3) Rep. Normală

Def.: Fie X o v.a. Spunem că X este rep. Normală de param. μ și σ^2, notăm $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dacă admite ca densitate pe f,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Obs: 1) repartiție Gaussiană

2) Dacă $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ atunci $N(0,1)$ s.n. normală standard și în acest caz densitatea s.n. φ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Pt. normala standard, fd. de rep. s.n.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

1). Verificăm că f este densitate.

$f(x) \geq 0$ (exp.)

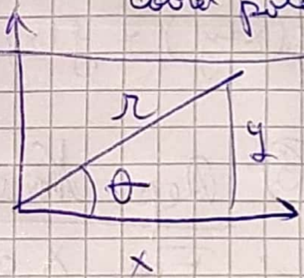
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \text{sau} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Calculăm $I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \iint_{-\infty\ -\infty}^{\infty\ \infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy \overset{!}{=}$$

coord. polare



Analiza an I

$$\int_{g(G)} f(x)\,dx = \int_G f(g(y))\,|\det J_g|\,dy$$

$x = r\cos\theta \quad r \in [0,\infty)$

$y = r\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi)$

$[0,\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \longrightarrow (\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\sin\theta}_{y})$

$$J_g = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, d\theta\, dr = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = 2\pi \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)' dr$$

$$= 2\pi \left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi$$

Var ?