10.01.2023

Seminar AF

săpt. 13

= Ultimul seminar =

Grafuri planare

$G = (V, E)$ - graf neorientat, (conex)

G se numește planar dacă se poate reprezenta în plan "frumos" adică segm. care repr. muchiile nu se intersect. în interior.

→ hartă $M = (V, E, F)$

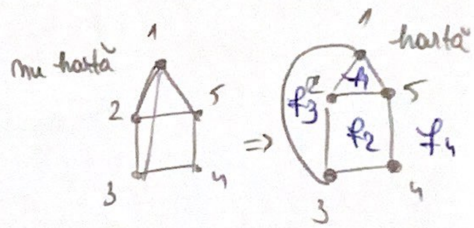
↓ mulț. "fețelor" (fâșii)

f_1

f_2

f_3

f_4 → față infinită



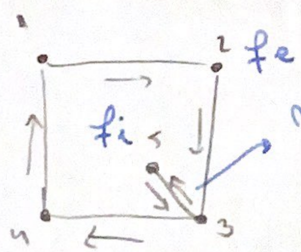
$d_M(f)$ = gradul unei fețe = nr. de muchii din lanțul închis care o delimitează.

↓ poate fi un lanț de n.n. ori

$d_M(f_1) = 3$; $d_M(f_2) = 4$; $d_M(f_3) = 3$; $d_M(f_4) = 4$

suma gr. fețelor = 2 × nr. de muchii

$\sum d_M(f) = 2|E|$



muchie critică → are gr. 2

$d_M(f_i) = 6$

$d_M(f_e) = 4$.

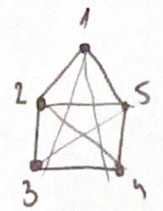
Relații:

- Suma gradelor fețelor $\sum d_M(f) = 2\cdot|E|$
- ! Th. poliedrala Euler (pentru graf conex)

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$n - (n-1) + 1$

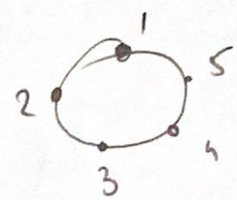
2) Ex: K_5 și $K_{3,3}$ - nu sunt planare



K_5 nu este planar

Justificare: Alg de test a planarit. pt G. Hamilt.:

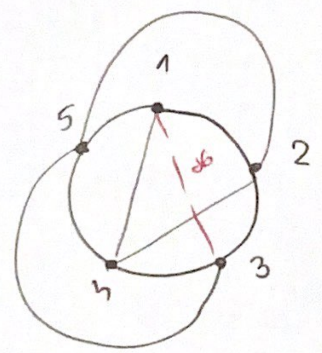
1. desenăm c. Hamiltonian



Restul muchiilor (diag sau corzi) trb. să le putem împărți în 2 categ.

I → în int, fără să se intersecteze

E → în ext, ——

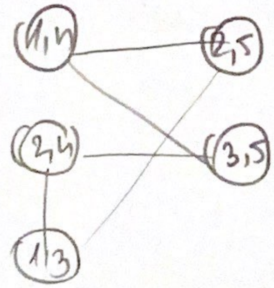


1,4 in I → (2,5) (3,5) E →

(2,4), (1,3) I

NU mai poate fi dus

Graf intersecții diag - trb. să fie bipartit



NU ESTE BIPARTIT → graful inițial nu e planar

Observații

- Un gr. bip. nu are Δ (cicluri cu 3 muchii)
- (E) min 1 vf de gr max 5 în orice graf planar

4) Exc: Fie $M = (V, E, F)$ o hartă, conexă, cu fețe doar de gr. 5 sau 6 și toate ~~fețele~~ vf. de gr. 3.

$\exists$ sunt exact 12 fețe de gr 5.

$$\begin{cases} n - m + |F| = 2 \\ \sum_{f \in F} d_M(f) = 2m \\ \sum_{v \in V} \underbrace{d_M(v)}_{3} = 2m \end{cases}$$

$\Rightarrow 5 \cdot f_5 + 6 \cdot f_6 = 2m$ (grad)

toate vf au gr. 3

$\Rightarrow 2m = 3n$

$|F| = f_5 + f_6$ (f_5 nr de fețe de gr. 5)

$$\Rightarrow \begin{cases} n - m + |F| = 2 \\ 5f_5 + 6f_6 = 2m \\ 3n = 2m \\ f_5 + f_6 = |F| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - m + f_5 + f_6 = 2 \\ 5f_5 + 6f_6 = 2m \\ 3n = 2m \Rightarrow m = \frac{3n}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - \frac{3n}{2} + f_5 + f_6 = 2 \quad / \cdot 6 \\ 5f_5 + 6f_6 = 3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n - 9n + 6f_5 + 6f_6 = 12 \\ 5f_5 + 6f_6 = 3n \end{cases} \quad (-)$$

$\Rightarrow -\cancel{3n} + f_5 = 12 - \cancel{3n} \Rightarrow \underline{f_5 = 12}$ (A)

3) a) Vrem dem. că dacă avem $G = (V,E)$ gr. planar conex

$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$

un graf planar nu poate avea prea multe mu

ex: K_5 are 5 vf, nr de much. este 10 $> 3|V| - 6$

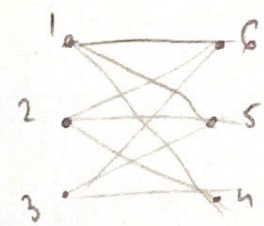
$|V| = 5$

$|E| = 10 > 3|V| - 6$

cu $|V| \geq 5$

b) Fie $G = (V,E)$ un graf ~~complet~~ conex, planar, bipartit

$\Rightarrow E \leq 2|V| - 4$



$K_{3,3}$ $|V|$

$|V| = 6$

$|E| = 9$

$2|V| - 4 = 12 - 4 = 8$

→ Dem: Fie $M = (V,E,F)$ harta a lui G:

$|V| - |E| + |F| = 2$

$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$

Avem $|d_M(f) \geq 3|$

grad 3 = Δ

→ un graf bip. nu are Δ. (nu are c. cu 3 vf)

$\forall v \geq f_0$

la gr. bip, $d_M(f) \geq 4$!

$\forall$ dacă un ciclu minim are 5, 6 ... muchii $\Rightarrow$

$d_M(f) \geq 5 \ / \ 6 \ ...$

$M(V,E,F)$ $|V| - |E| + |F|$

$\sum \underbrace{d_M(f)}_{\geq 4} = 2|E| \geq 4|F|$

$2|E| \geq 4(2 - |V| + |E|) = 8 - 4|V| + 4|E| \Rightarrow$

$2|E| \leq 4|V| - 8 \ /:2$

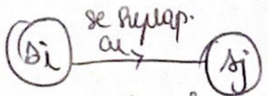
$\boxed{|E| \leq 2|V| - 4}$

Shortest superstring

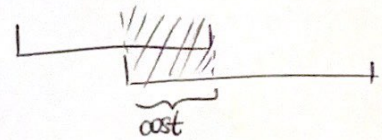
5) Reduceți urm. pb la det. unui ciclu / lanț / drum hamilt.

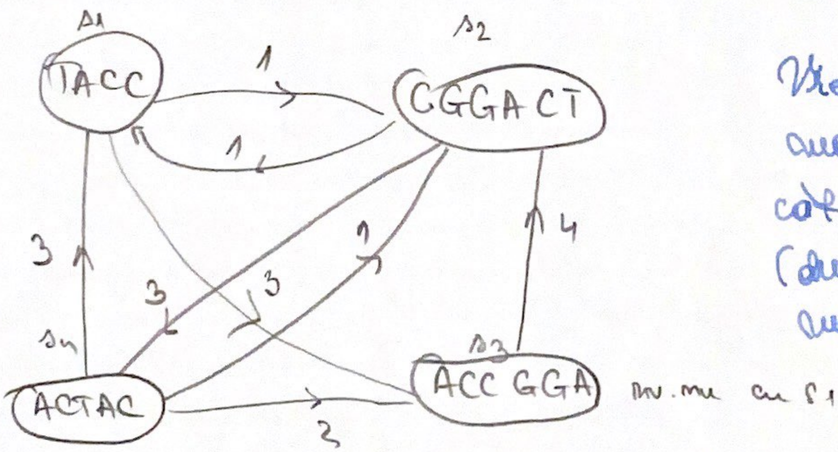
→ det. cel mai scurt ~~sir~~ sir care are ca subsecv. sirurile din mulț. $\{ \underset{s_1}{TACC}, \underset{s_2}{CGGACT}, \underset{s_3}{ACCGGA}, \underset{s_4}{ACTAC} \}$

1. Construim graful suprapunerilor



cost = lung. max a unui sufix din si care e prefix pt. sj.





nu.mu cu s1

Vrem cost cât mai mare, adică suprap. cât mai mari. (drum hamilt de cost max)

$D = [i_1, i_2, \dots i_n]$

lung superstr $= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \dots + |s_{i_n}|$ - suma suprapunerilor

Adică lung. ~~tot.~~ subsecv. - suprap.

R: $[s_3, s_2, s_4, s_1] \rightarrow$ ACCGGACTACC

~~Alg P.D. pentru prob. de hamiltonicitate~~

• Alg. PD. pentru pb. de hamiltonicitate: (dr ham, lung ham)

BF pas i
dr nur din i arce

Subpb.: $d[i][S]$

→ lung. max a unui drum care se termină cu vf. i și are mulț. de vârfuri S

S
$01..1001$
mask $1 \ll i$
pt. a vedea dc un el e in mulț sau nu
$1 \ll i$

S_v ~ i

Rec.: $d[i][S] = \min\{ d[v][S - \{i\}] + cost[v][i], v \in S - \{i\} \}$ pt. $S \subseteq \{1..n\}$

merg prin v fără să fol i

Sol: $\min \{ d[i][\{1,2..n\}] \mid i = \overline{1,n} \}$

Init:
$d[i][\{i\}] = 0$ (drum de 1 vf. [i]
Restul ∞.

$d[1][\{1\}]$

b) Graf de Brejn, se cunosc toate subsecv. de lungime k=3 ale unui șir ⇒ șirul =?

(∃) orice șir care are subsecv. de lung k = mulț. dată

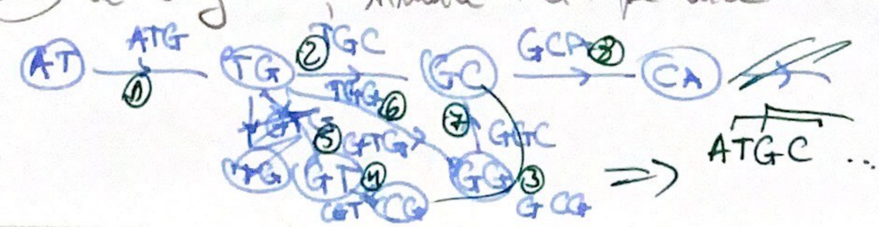
k=3: ~~AGT~~, ATG, TGC, GCA, GTG, GGC, GCG, CGT, TGG

suprap. cu lung. k-1

Nar merge și cu dr Hamilt.

prefix
sufix

vf → secv de lung k-1, sirurile → et. pe arce



⇒ ATGC ...

mereu vf ≤ 5

lungime ciclu minim 4

$d_M(f) \geq 4$

$$\begin{cases} |V| - |E| + |F| = 2 \\ \sum d_M(f) = 2|E| \\ \sum d_M(v) = 2|E| \end{cases}$$

$n - m + |F| = 2$ $\quad |F| = 2 + m - n$

$2m \geq 4|F|$

$2m \geq 4(2 + m - n)$

$2m \geq 8 + 4m - 4n$

$2n - 4 \geq m$

suma gr. fețelor $= 2m$

restul au grad 4 → cel mult un vf de grad ≤ 3

$$4(n-1) + 1 \leq \sum_v d_M(v) = 2m \leq 4n - 8$$ din pct. a)

$4n - 3 \leq 2m \leq 4n - 8$ ⨳

5 8 | 1 2 3 4 6 7 ←

COLORARE: lăsăm la final vf cu gr ≤ 5

cele care au dev. cu gr ≤ 5

Într-un graf planar, ∃ mereu vf cu gr ≤ 5

colorez cu prima cul. disp.