21.02.2023

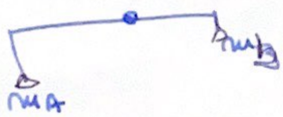
AA
curs 1

AA

cerințe

x 10 p.

- Context 2d

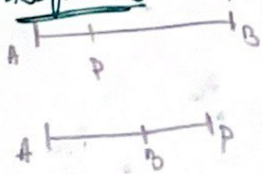


$\lambda_A = \frac{m_a}{m_a + m_b}$ $\lambda_B = \frac{m_b}{m_a + m_b}$

$$\boxed{\begin{matrix} r(a,b,c) = ? \\ \vec{AB} = r \cdot \vec{BC} \end{matrix}}$$

centrul de greutate $= \lambda_A \cdot A + \lambda_B \cdot B$

- **Raportul** (r)



$\vec{AP} = r\vec{PB}$, $r > 0$

$AP = r \cdot \vec{PB}$, $r < 0$

ex.: la zoom dist. se schimbă, dar raportul se păstrează

exerciții: $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (7,7)$, $r(ABC)$

r? a.î. $\vec{AB} = r \cdot \vec{BC}$

$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1,1)$

$\vec{BC} = (5,5)$

$\vec{AB} = \frac{1}{5}\vec{BC} \Rightarrow r = \frac{1}{5}$

$\sim$

$r(A,B,C)$

A = (0,0)
B = (1,0)
C = (0,1)

$\Delta(A,B,C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\Rightarrow$ cf. crit, C e în stg $\vec{AB}$

convex   concav

} putem stab. asta cu testul de orientare

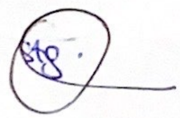
Mulțimi:

convexă   ne-convexă

$\forall p,q \in M$, $[pq] \subseteq M$

2 elem $\Rightarrow$ nu e convexă

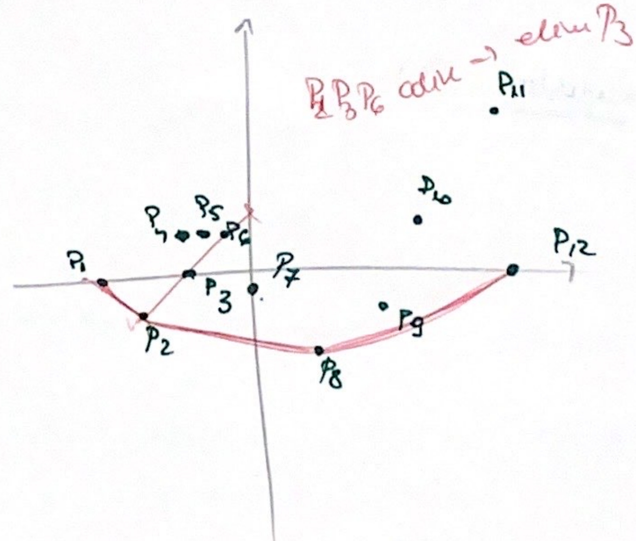
frontieră $\rightarrow$ doar vir. la stg.



Graham's Scan $\rightarrow$ var. Andrew

- sortate lexicogr.
-

$P_1 = (-8,0)$
$P_2 = (-6,-2)$
$P_3 = (-4,0)$
$P_4 = (-4,2)$
$P_5 = (-3,2)$
$P_6 = (-2,2)$
$P_7 = (0,-1)$
$P_8 = (2,-4)$
$P_9 = (4,-2)$
$P_{10} = (6,2)$
$P_{11} = (8,8)$
$P_{12} = (10,0)$



$\mathcal{L}$

$P_1P_2 \rightarrow P_1P_2P_3 \rightarrow P_1P_2P_3P_4 \rightarrow P_1P_2P_3\cancel{P_4}P_5 \rightarrow P_1P_2P_3\cancel{P_5}P_6$ (viraj dr. în P_4 $\Rightarrow$ elim.; viraj dr.)

$\rightarrow P_1P_2\cancel{P_3}P_6$ ($P_2P_3P_6$ colin) $\rightarrow P_1P_2\cancel{P_6}P_7$ (dr.) $\rightarrow P_1P_2\cancel{P_7}P_8$ (dr.) $\rightarrow P_1P_2P_8$

cont.

$\rightarrow P_1P_2P_8P_9P_{10}P_{11}P_{12}$ viraj dr. $P_{11}P_{10}P_9$ $\Longrightarrow P_1P_2P_8P_{12}$ front. inferioară

28.02.2023

AA

curs 2

- Graham's scan: $n \log n$
- Jarvis's march (1973):

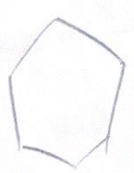
  $n \cdot h$

  ↑ nr. pct. de pe frontiera acop. conv.

  Acest alg. este output-sensitive.

- Alg. lui Chan: le combină → $O(n \log h)$

Problema muzeului:

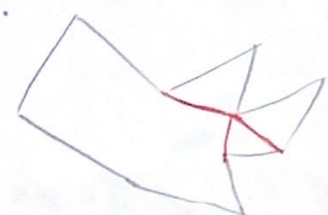


poligon convex → e suf. 1 cameră

⇒ Împărțim polig. în Δ. → TRIANGULĂRI

→ folosim doar diagonale care nu se intersect.

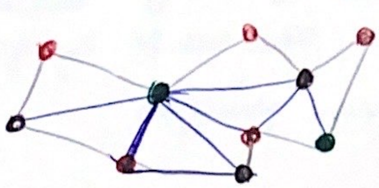
ex.:

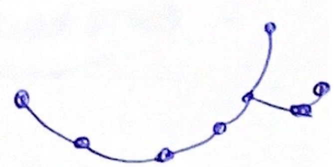


Lemă: orice poligon admite o diagonală → poate fi triangulat.

Orice tr. a unui pol. cu n vf ⇒ n−2 triunghiuri

! Amplasarea se face în vf. polig.

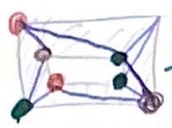




Graf → fiecare Δ un nod

unim 2 pct când Δ sunt adiac

ex:

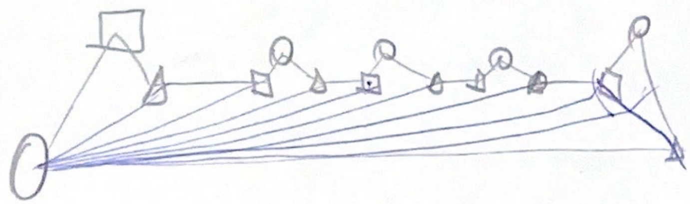


→ NU SE POATE, LÂNGĂ AR FI VERDE VERDE.

⇒ nu există 3-colorare

Teorema galeriei de artă

Pt. un poligon cu n vf uneori necesare și întotdeauna suficiente $[\frac{n}{3}]$ camere.



○ : 5
△ : 5
□ : 5

Deci: Colorăm → cul. care apare cel mai rar → acolo punem camerele.

n_1, n_2, n_3 vf culori → $n_1+n_2+n_3 = n$

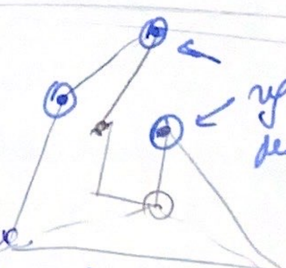
Pp. abs. $n_1 > [\frac{n}{3}]$, $n_2 > [\frac{n}{3}]$, $n_3 > [\frac{n}{3}]$

⇓

$n_1 > \frac{n}{3}$ $\quad n_2 > \frac{n}{3}$ $\quad n_3 > \frac{n}{3}$

⇒ $n_1+n_2+n_3 > n$ ⇒ fals

Algoritmul „Ear clipping": $O(n^2)$



vf. noi care pot fi scoase

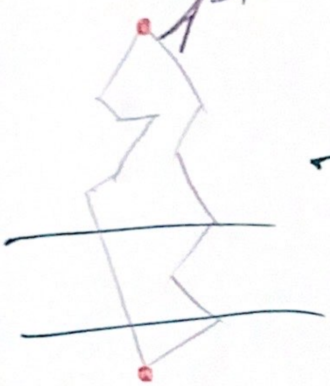
- vf convexe / vf. concave
- Diag dintre predec + succ să nu ∩ nimic
  vf. conc. convexe
  ■ ● — conc
  ■ ● — sec

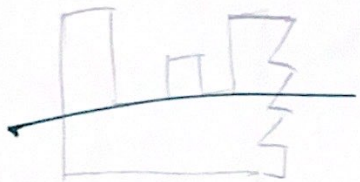
Orice polig cu min 4 vf admite 2 urm. de tip e care nu se suprapun.

- Ear | Mouth = convex principal | concav principal

Polygon y-monoton / x-monoton

→ nu ar mai fi





↳ nu e y-monot.

y-monoton

→ ∃ un "cel mai de sus"
și "cel mai de jos" și
cu un drum care doar să
avansăm nu să o luăm înapoi

y monoton → parc. figura de sus și tot desprindem

Acest alg se bazează pe paradigma dr. de baleiere (alg sweep)

↳ stabilit
evenimente
înainte

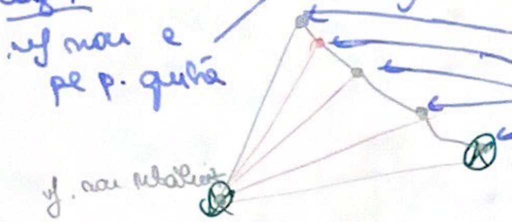
07.03.2023

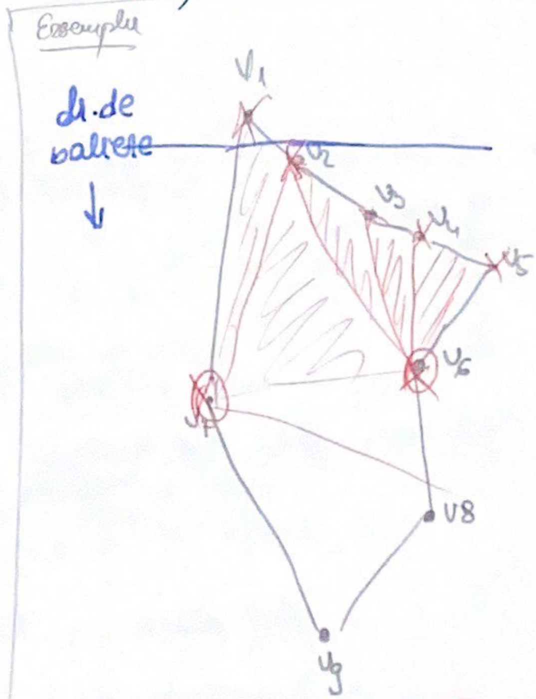
AA

curs 3

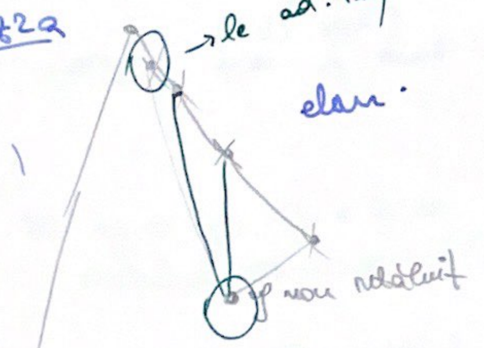
paradigma dr. de baleiere → eveniment: întâlnirea unui pct.
față de ultimul vf din stivă!

caz 1
vf nou e pe p. opusă





caz 2a



caz 2b

=> NU se poate forma niciun Δ

Eveniment	Status
v_1, v_2	v_2 / v_1
v_3 (2b)	v_3 / v_2 / v_1
v_4 (2b)	v_4 / v_3 / v_2 / v_1
v_5 (2b)	v_5 / ...

→

v_6 (2a)	~~v_1~~ → v_6 / v_2 / v_1
v_7 (1)	v_7 / v_6
v_8 (1)	v_7 / v_6 → v_8 / v_7
v_9 (ultimul)	Δ
la f. pas	diagonale, Δ

• Triangulare pentru o mulț. de pct ⇒ triangulare pe acoperirea convexă a mulț. de pct.

• Triangulare pentru figură → altceva.

→ 3 pct. necol.

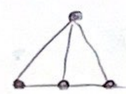
3 vf.
3 muchii
1 față

→ 4 pct. necol.

a

4 vf.
6 muchii
3 fețe (3Δ)

b



4 vf.
5 muchii (cea de jos e dest)
2 fețe (2Δ)

c

4 vf.
5 muchii
2 fețe (2Δ)

→ la b și c, toate pct. sunt pe acop. convexă

∀ n puncte
∀ triang. cu $\begin{cases} 2n-k-2 \ \Delta \\ 3n-k-3 \ \text{muchii} \end{cases}$

→ DEM: graf cu nodurile pct n
muchii nr. n_m
fețe → fețele Δ e f. ext
(n_f+1)
} graf planar

• graf planar: rel. Euler: $n - n_m + (n_f+1) = 2$

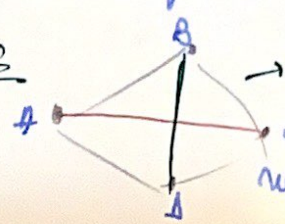
• Incidența dintre muchii și fețe ptr Δ, ptr f. ext

$$\underbrace{2 \cdot n_m}_{\text{"persp. muchiilor"}} = \underbrace{3 \cdot n_f + k}_{\text{"persp. fețelor"}}$$

⇒ ✓

Cum comparăm triangulările? → după ∢ (60° → gabun)

ex:



→ verde e mai bun, ptc are ∢ mai mari (practic se comp. cel mai mic ∢ din ambele)

→ CE POATE FI ÎNSCRIS → patrulater inscriptibil
ÎN CERC

Def: Muchie ilegală → care dă ∢ foarte mici.
Găsim o muchie ileg ⇒ FLIP. $O(n \log n)$

14.03.2023

AA

curs 4

Comparăm triangulările după ∢

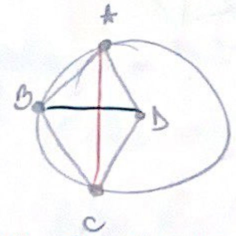
$\vec{AB} \overset{NOT}{=} v = B - A$

$\vec{AC} \overset{NOT}{=} w = C - A$

$\cos\theta = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$

$\theta = \arccos \ldots$

cos mai mare => ∢ mai mic



BD legală ptc. D e în int. cercului circumscris

$v = (1,2,7)$

$w = (-3,0,1)$

$\langle v, w\rangle = -3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 7\cdot 1 = 4$

$$\Theta(A,B,C,D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2+y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2+y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2+y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2+y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

ABC vir. la stg, ne spune cum sunt 4 pct.

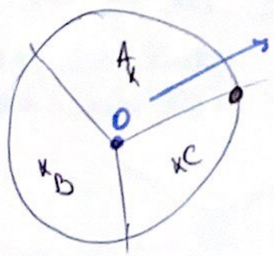
$\boxed{>0 \Rightarrow D \text{ e în int. cercului}}$

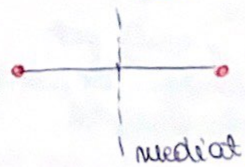
$=0 \Rightarrow$ pe cerc

$<0 \Rightarrow$ în afară

Diagrame Voronoi

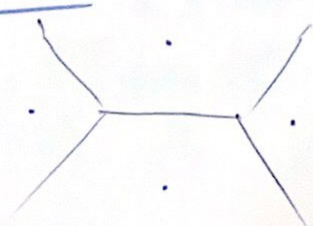
oficii poștale



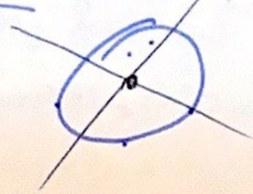


mediat. segmentului = mulț. pct. egal depărtate de A și de B

sit. I - normal



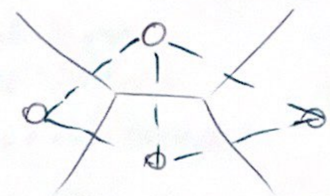
sit. II - patru pct. conciclice -



Diagr. depinde de funcția de distanță folosită (ex. dist Manhattan)

Diag. Voronoi → câte semidr. are ?

~~N pct. colin.~~ câte pct sunt pe frontiera acop. convexe

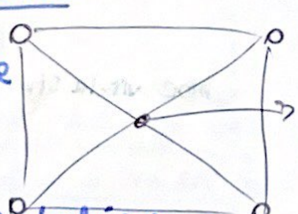


- unui pct ce se despart de exact 1
- obținem cea mai bună triang.

Această triangulare este cea legală → = echilateral optima.

Cazul cu pătrat:

putem lua orice muchie prin centru.



→ Muchie dep. patru pct.

Adaptare - dr. de baleiere :

știu că pct. este ca op. pct nostru

→ parabolă = mulț. pct egale ca dis. de punct și de dreaptă

→ zonă gri → deși dr. de baleiere a trecut, nu știu sigur unde se află pct.

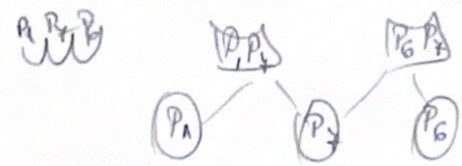
Evenimentele sunt:

1. de tip locație / site, când apar arce de parabolă
2. de tip cerc / circle, când trece prin pct. sup. al unui cerc.

Statut: mulț. de pct. ce form. parabola

Struct. de date: listă dublu înlănț.

O(n log n) → log n - căutare în arb. binar
n pct.



i) n + O(n) = O(n) evenimente

ii) O(n log n)

iii) CONSECUTIVE

- Apar 3 pct ⇒ cerc

AA

curs 5

Ex. de programare liniară

Matriţă

Extragerea din matriţă pe o direcţie:

$\vec{v}(f_1)$ = normala exter la faţa f_1 ; $\vec{v}(f_2)$ = — " — f_2

- faţa f_1 a matriţei blochează extragerea în direcţia $d \iff$

  $m(\sphericalangle \vec{v}(f_1), d) < 90^\circ$

  (unghiul dintre normală şi direcţia de extragere)

- $\geq 90^\circ \Rightarrow$ nu blochează $\Rightarrow$

  $\cos(\sphericalangle \vec{v}(f_1), d)) > 0$

  Ac. condiţie trb. verif. pt. toate unghiurile

$$\cos(\sphericalangle(v, w)) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}, \quad \left(\langle u, v\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\right)$$

Cum vrem să extragem obiectul "în sus", putem pp că

$\vec{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?)

faţa f nu bloch. extr. în dir $\vec{d} \iff$

$\langle \vec{v}(f), \vec{d}\rangle \leq 0 \iff$ → SEMIPLAN

$\boxed{v_x \cdot d_x + v_y \cdot d_y + v_z \leq 0}$ $(*f)$

Fixată faţa $f \to (v_x, v_y, v_z)$ căutăm $\vec{d}(d_x, d_y)$ a.î. să fie verif. ec. $(*f)$.

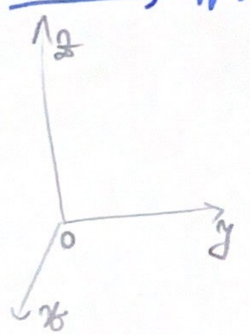
în pct. $(0,1)$.

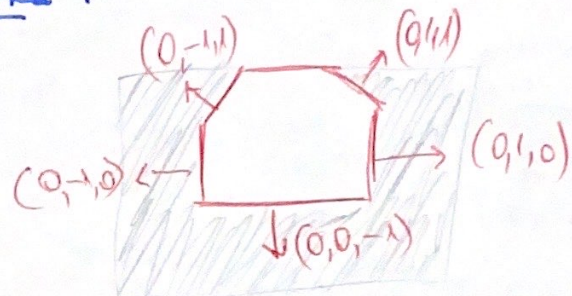
ex: 2 4 7

? dx dy

$2dx + 4dy + 7 \le 0$ COND. DE SEMIPLAN

Normala ; reprez. grafică :





$(0,-1,1) \rightsquigarrow 0\cdot x + (-1)\cdot y + 1 \le 0$

$(0,1,1) \rightsquigarrow y + 1 \le 0$

$(0,1,0) \rightsquigarrow y \le 0$

$(0,0,-1) \rightsquigarrow -1 \le 0$

$(0,-1,0) \rightsquigarrow 0\cdot x + (-1)\cdot y + 0 \le 0$

$\left\} \begin{array}{l} y \ge 1 \\ y \le -1 \\ y \le 0 \\ -1 \le 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$ $\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ incompatibilitate între fețele / \ $\Rightarrow$ sistem incompatibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ obiectul nu poate fi extras.

! Din algoritm excludem fața superioară pt. a nu obține $\emptyset$ (acolo nu este fața a matriței, nu ne poate bloca).

Dualitatea

1) păstr. incidența : $p \in d \Leftrightarrow d^* \in p^*$

ex: pl. primal $d : (y = 2x - 1)$

$p = (1, 3)$

pl. dual $d^* = (2, -1)$

$p^* : (y = x - 3)$

2) păstr. ordinea :

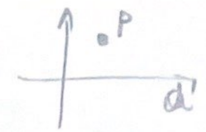
p e nt. deasupra dr. d (neverticală) $\Leftrightarrow$

d^* —— p^*

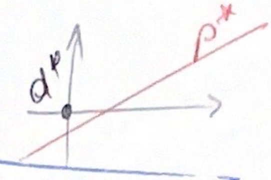
Ex: pl. primal

pl. dual

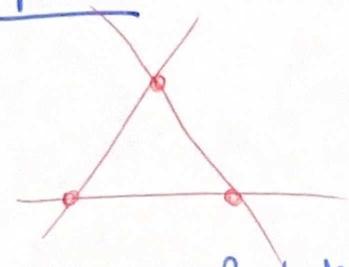
$p(1,1)$
$d: y=0$



$p^*: (y=x-1)$
$d^* = (0,0)$

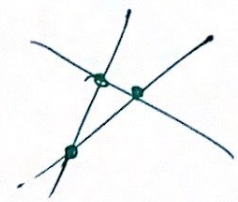


Ex: c. primală :



3 pct. necol și dr. det de ele

c. duală :



3 pct. care nu trec prin ac pct - și punctele lor de inters

AC. LUCRU

Semiplane inf și sup :

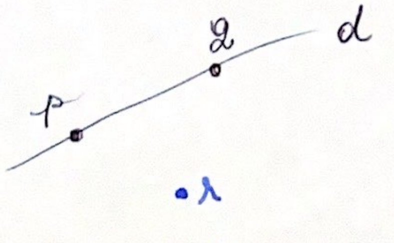
s. inferior | s. superior

$-x+y+3 \leq 0$ | $x-y-3 \leq 0$

• dualit. păstr. ordinea sus-jos
!

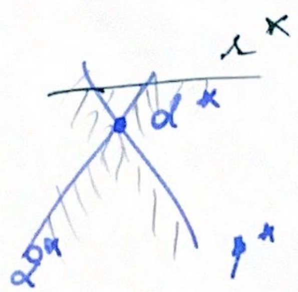
Observație fundamentală:

$p \neq q$, $d = pq$, r ext



primal

r este sub dr pq



dual

d^* este situat sub r^*

28.03.2023

AA
curs 6

O(n)

• exemplu: cazul 1D = Intersecții de intervale

coordonata: x ← fct. obiectiv

maximizează $(C x)$

$$\begin{cases} a_1 x \le b_1 \\ a_2 x \le b_2 \\ \vdots \\ a_n x \le b_n \end{cases}$$

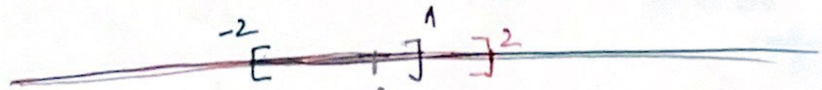
→ interval

→ comparații

condiții: maximizează $(2x)$

$$\begin{cases} 3x \le 6 \\ -2x \le 4 \\ 6x \le 6 \end{cases} \quad \begin{aligned} & x \le 2, && x \in (-\infty; 2] \\ & x \ge -2, && x \in [-2; \infty) \\ & x \le 1, && x \in (-\infty, 1] \end{aligned}$$

∩



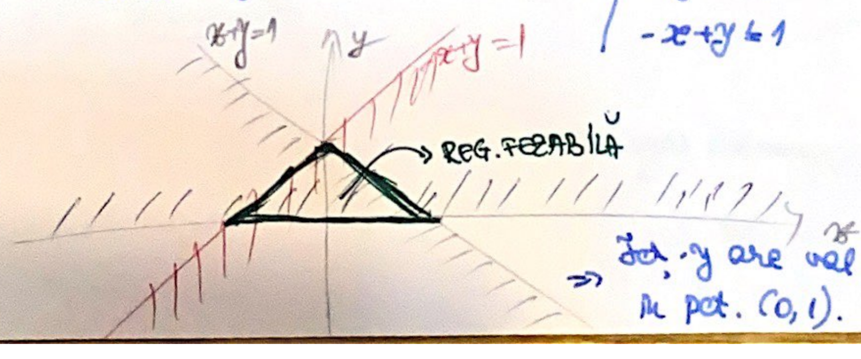
inters. interv: $[-2,1]$ REGIUNE FEZABILĂ

=> val max. a fct. va fi $2 \cdot 1 = 2$ (pe intervalul fezabil)

• exemplu: cazul 2D = Intersecții de semiplane

coord x, y

maximizează (y) $\quad \vec{c} = (0,1)$, date $\begin{cases} x + y \le 1 \\ -y \le 0 \\ -x + y \le 1 \end{cases}$



=> fct. y are val. max 1, atinsă în pct. $(0,1)$.

$v_3 > v_2$ } pt. $v_2 \notin h_3$

$v_4 = v_3$ } pt. $v_3 \notin h_3$

$v_5 \neq v_4$ pt. $v_4 \notin h_5$

Verif. dacă punctul de $\cap$ curent e sau nu în zona inters.

Algoritm:

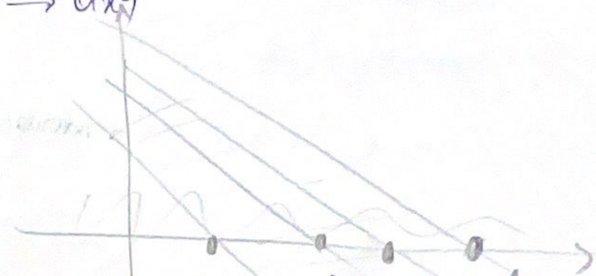
1. colț
2. semiplanele
3. for

if → caz: se sch. pct ⇒ $O(n)$

→ caz: nu se sch ⇒ 1

Complexit.:

$O(n) \rightarrow O(n^2)$

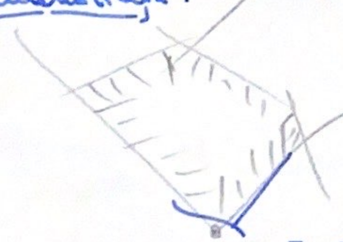


depinde de ordine: a) h_1 h_2 h_3 h_4 ⇒ $O(n^2)$

b) h_4 ... h_2 h_1 ⇒ $O(n)$

În alegere aleatoare → $O(n)$ în medie, pt (10.000) rulări ⇒ în mare parte "avem noroc" (șanse mai mari de a avea noroc decât ghinion).

Demonstrație:



- prob. ca un semiplan eliminat să nu modif. pct.

$= \frac{nr.\ c\ fav}{nr\ pos} = \frac{2}{n}$

- pt aceste 2 semipl. se va modif. pct. minim.

↳ ACEASTĂ P e aceeași cu a adăuga un semipl. a.î. să se modif. punctul.

Semimuchii gemene

o muchie ⇒ 2 neorientate

Regula de abt:
- poligonul e la stg. flachei
2
- virajele la stg. în vârfuri convexe.

Doubly-connected edge list.