Constantin Ioana Teodora - gr. 141

Examen scris

Structuri Algebrice în Informatică

1) Determinați a și b

$a = 10$ (Constantin)

$b = 7$ (Teodora)

2) Determinați numărul de permutări de ordin 10 din grupul de permutări S_{17}:

În grupul de permutări S_{17} se regăsesc 17! permutări.

Fie $\sigma \in S_{17}$ o permutare oarecare a.î. $o(\sigma) = 10$

$\Rightarrow$ Aceasta poate fi de forma: $\sigma = c_2 \cdot c_5$ sau $\sigma = c_{10}$

unde $c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$, $i_1 + i_2 + \ldots + i_k \leq 17$, i_j cu $j = \overline{1,17}$

este descompunerea în produs de cicli disjuncți.

(I) $\sigma = c_2 \cdot c_5 \Rightarrow o(\sigma) = [o(c_2), o(c_5)] = 10$

$\Rightarrow A_{17}^{2} \cdot A_{15}^{5} = \frac{17!}{15!} \cdot \frac{15!}{10!} = 16 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$

(II) $\sigma = c_{10} \Rightarrow o(\sigma) = 10$

$\Rightarrow A_{17}^{10} = \frac{17!}{7!}$

$\Rightarrow A_{17}^{2} \cdot A_{15}^{5} + A_{17}^{10}$ permutări de ordin 10

Constantin Ioana Teodora – gr. 141

3) Se consideră permutarea $\sigma = (1, \dots, 10)(11, \dots, 17)(18, \dots 34)$ un produs de 3 cicli disjuncți de lungime 10, 7, 17 din S_{34}. Det. toate perm. $\tau \in S_{34}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$.

Fie $\tau \in S_{34}$ a.î. $\tau = C_{i_1} \cdot C_{i_2} \cdot \ldots \cdot C_{i_k}$ unde $i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq 34$; i_j = lungimea c. – descompunerea în produs de cicli disjuncți ; $1 \leq k \leq 34$ (pt. $k = 34 \Rightarrow \tau = e$)

$\Rightarrow \tau = C_{i_1} \cdot C_{i_2} \cdot \ldots \cdot C_{i_k} \Rightarrow \tau^3 = C_{i_1}^3 \cdot C_{i_2}^3 \cdot \ldots \cdot C_{i_k}^3$

(descompunerea în produs de cicli disjuncți este unică)

$\Rightarrow \tau^3 = \sigma \Leftrightarrow C_{i_1}^3 \cdot C_{i_2}^3 \cdot \ldots \cdot C_{i_k}^3 = (1, \dots, 10)(11, \dots, 17)(18, \dots, 34)$

Avem 2 cazuri:

$\rightarrow 3 | \ell \Rightarrow \tau^3$ = produs de 3 cicli disjuncți de lungime $\ell/3$

$\rightarrow 3 \nmid \ell \Rightarrow \tau^3$ = un ciclu de lungime ℓ

Cum σ este format din 3 cicli disj. de lungime diferită

$\Rightarrow 3 \nmid \ell \Rightarrow \tau^3 = C_{10}^3 \cdot C_7^3 \cdot C_{17}^3$

$\Rightarrow C_{10}^3 = (1, \dots, 10) \Leftrightarrow (C_{10}^3)^7 = (1, \dots, 10)^7 \Leftrightarrow \underbrace{C_{10}^{20}}_{e} \cdot C_{10} = (1, \dots, 10)^7$

$\Leftrightarrow C_{10} = (1\ 8\ 5\ 2\ 9\ 6\ 3\ 10\ 7\ 4)$

$\Rightarrow C_7^3 = (11, \dots, 17) \Leftrightarrow (C_7^3)^5 = (11, \dots, 17)^5 \Leftrightarrow \underbrace{C_7^{14}}_{e} \cdot C_7 = (11, \dots, 17)^5$

$\Leftrightarrow C_7 = (11, \dots, 17)^5$

$\Rightarrow C_{17}^3 = (18, \dots, 34) \Leftrightarrow (C_{17}^3)^6 = (18, \dots, 34)^6 \Leftrightarrow \underbrace{C_{17}^{17}}_{e} \cdot C_{17} = (18, \dots, 34)^6$

$\Rightarrow C_{17} = (18, \dots, 34)^6$

$\Rightarrow \tau = (1, \dots 10)^7 (11, \dots, 17)^5 (18, \dots, 34)^6$.

3.

Constantin Ioana Teodora - gr. 141

4) Calculati (**) $10^{17^{7^{17}}} \pmod{41}$.

Din Teorema lui Euler $\Rightarrow$ e suficient să calculăm $17^{7^{17}} \pmod{\varphi(41)}$; $(10,41)=1$.

(*) $\Rightarrow 17^{7^{17}} \pmod{40}$; $\varphi(41)=40$, 41 = nr. prim.

$\xrightarrow{T.E} 7^{17} \pmod{16}$; $\varphi(40)=40(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=16$

Observăm că ; $7^2=49 \overset{16}{\equiv} 1$

$7^4 \equiv (1)^2 \equiv 1$

$7^8 \equiv (1)^2 \equiv 1$

$7^{16} \equiv (1)^2 = 1$

$\Rightarrow 7^{16} \cdot 7 \overset{16}{\equiv} 7$

$\Rightarrow$ Revenim la (*): $17^7 \pmod{40}$

Observăm: $17^2 \overset{40}{\equiv} 9$

$17^4 \equiv 81 \equiv 1$

$\Rightarrow 17^4 \cdot 17^2 \cdot 17 \equiv 1 \cdot 9 \cdot 17 = 153 \equiv 33$

$\Rightarrow$ Revenim la (**): $10^{33} \pmod{41}$

Obs.: $10^2 \overset{41}{\equiv} 18$

$10^4 \equiv 18^2 \equiv 37$

$10^8 \equiv (37)^2 \equiv 16$

$10^{16} \equiv 10$

$10^{32} \equiv 18$

$\Rightarrow 10^{32} \cdot 10 \equiv 180 \equiv 16$

$\Rightarrow 10^{17^{7^{17}}} \pmod{41} = 16$.

Constantin Ioana Teodora – gr. 141

6) Determinați numărul elementelor de ordin 9 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^{10}}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^7}, +)$

Fie $(\hat{x}, \bar{y}) \in (\mathbb{Z}_{3^{10}}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^7}, +)$ cu $\begin{cases} \hat{x} \in \mathbb{Z}_{3^{10}} \\ \bar{y} \in \mathbb{Z}_{3^7} \end{cases}$

$\Rightarrow o((\hat{x}, \bar{y})) = [o(\hat{x}), o(\bar{y})] = 9 \Rightarrow$ cum $9 = 1 \cdot 9$ sau $9 = 9 \cdot 1$, avem următoarele cazuri:

(I) $\bar{y} = \bar{0}$ (el. neutru)

$o(\hat{x}) = \dfrac{3^{10}}{(3^{10}, \hat{x})} = 9 \Leftrightarrow (3^{10}, \hat{x}) = \dfrac{3^{10}}{3^2} = 3^8$

$\Rightarrow \hat{x} \in \{ \widehat{3^8}, \widehat{2 \cdot 3^8}, \widehat{4 \cdot 3^8}, \widehat{5 \cdot 3^8}, \widehat{7 \cdot 3^8}, \widehat{8 \cdot 3^8} \}$

$\Rightarrow$ 6 elemente

(II) $\hat{x} = \hat{0}$ (el. neutru)

$o(\bar{y}) = \dfrac{3^7}{(3^7, \bar{y})} = 3^2 \Rightarrow (3^7, \bar{y}) = 3^5$

$\Rightarrow \bar{y} \in \{ \widehat{3^5}, \widehat{2 \cdot 3^5}, 4 \cdot 3^5, \widehat{5 \cdot 3^5}, \widehat{7 \cdot 3^5}, 8 \cdot 3^5 \}$

$\Rightarrow$ 6 elemente

În total 12 elemente.

8) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 10x + 77, & x < -7 \\ 10x^2 + 180x + 817, & x \geq -7 \end{cases}$$

Fie $f_1 : (-\infty, -7) \to \mathbb{R}$; $f_1(x) = 10x + 77$

pt. $x = -8 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A(-8, -3)$

pt. $x = -9 \Rightarrow y = -13 \Rightarrow B(-9, -13)$

Constantin Ioana Teodora – gr. 141

$f_1 : (-\infty, -7) \to \mathbb{R};\ f_1(x) = 10x + 77$

Fie $x_1, x_2 \in (-\infty, -7)$ a.î. $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x_1 + 77 = 10x_2 + 77 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f_1$ - inj. (1)

$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow 10x + 77 = y \Rightarrow x = \frac{y-77}{10}$

pt. $x \in (-\infty, -7) \Rightarrow \frac{y-77}{10} < -7 \Leftrightarrow y - 77 < -70$

$\Rightarrow y < 7$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f_1 = (-\infty, 7)$ (3)

$f_2 : [-7, \infty) \to \mathbb{R};\ f_2(x) = 10x^2 + 180x + 817$

$f_2'(x) = 20x + 180 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18\cancel{0}}{2\cancel{0}} = -9 \notin [-7, \infty)$

$\Rightarrow$

x	-9		-7			∞
f'	-0	$+\ +$	$+$	$+\ +$	$+\ +$	
f	$\nearrow$ //////		$[$	$\longrightarrow$		

$f_2'(x) > 0, \forall x \geq -7$

f_2 este crescătoare pe $[-7, \infty) \Rightarrow f_2$ - injectivă. (2)

Iar $f_2(-7) = 490 - 1260 + 817 = 47$

f_2 - continuă $\Rightarrow \operatorname{Im} f_2 = [47, \infty)$ (4)

Din (1), (2) $\Rightarrow f$ este inj.

Dar f nu este ~~inj~~ surj., deoarece $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}$ (3) $\cup$ (4)

$f^{-1}([-17, 17]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-17, 17]\}$

$\Rightarrow$ pt. $f(x) \in [-17, 7) \Rightarrow f(x) = 10x + 77$; f crescătoare

$\Rightarrow$ ~~$f(-17) =$~~ $\left.\begin{array}{l} 10x + 77 = -17 \Rightarrow x = -\frac{94}{10} \\ 10x + 77 = 7 \Rightarrow x = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-\frac{94}{10}, -7)$

Constantin Ioana Teodora - gr. 141

pt. $f(x) \in [7,17] \Rightarrow 10x^2+180x+817 \in \{7,17\}$
f crește.

~~$f(7)=$~~ $10x^2+180x+810=0$

$\Delta = 32400 - 32400 = 0 \Rightarrow x = -\frac{180}{20} = -9 \notin [-7,\infty)$

$10x^2+180x+817=17$

$\Rightarrow 10x^2+180x+800=0$

$\Delta = 32400 - 32000 = 400$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-180 \pm 20}{20} = -9 \pm 1$ $\begin{cases} -8 \notin [-7,\infty) \\ -10 \notin [-7,\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow f^{-1}([-17,17]) = [-\frac{24}{10}, -7]$

9) $R = \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X]$
$S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\phi : R \to S$; $\phi(P(X), Q(X)) = (P(a), Q(b))$

ϕ - morfism de inele cu ~~f~~ 1

$\Leftrightarrow \phi((P(x_1), Q(x_1))(P(x_2), Q(x_2))) = \phi($

Constantin Ioana Teodora - gr. 141.

10) Det. toate nr. întregi x care au propr.

$x \equiv 10 \pmod{15}$

$x \equiv 11 \pmod{16}$

$x \equiv 12 \pmod{17}$

Aplicăm Lema Chineză a Resturilor, unde:
(Folosim)

$N = 15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$; $a_1 = 10, a_2 = 11, a_3 = 12$

$n_1 = 15, n_2 = 16, n_3 = 17$

$N_1 = 16 \cdot 17 = 272$

$N_2 = 15 \cdot 17 = 255$

$N_3 = 15 \cdot 16 = 240$

$N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{n_1} \Leftrightarrow 272 x_1 \equiv 1 \pmod{15}$

$\Leftrightarrow 2x_1 \equiv 1 \pmod{15} \Leftrightarrow x_1 \equiv 8 \pmod{15}$

$N_2 x_2 \equiv 1 \pmod{n_2} \Leftrightarrow 255 x_2 \equiv 1 \pmod{16}$

$\Leftrightarrow 15 x_2 \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow x_2 \equiv 15 \pmod{16}$

$N_3 x_3 \equiv 1 \pmod{n_3} \Leftrightarrow 240 x_3 \equiv 1 \pmod{17}$

$\Leftrightarrow 2x_3 = 1 \pmod{17} \Rightarrow x_3 = 9 \pmod{17}$

$\Rightarrow N_1 x_1 a_1 + N_2 x_2 a_2 + N_3 x_3 \cdot a_3 = 272 \cdot 8 \cdot 10 + 255 \cdot 15 \cdot 11 +$
$+ 240 \cdot 9 \cdot 12 = 21760 + 42075 + 25920 = 89755$

$\Rightarrow 89755 \pmod{4080} = 4075.$

Scanned with CamScanner