Examen Structuri algebrice în informatică, seria 13
27.01.2025

(1) **(1.5 pct.)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, & -1 < x \leq 5 \\ x^2 - 2x - 20, & x > 5. \end{cases}$$

(a) Este f injectivă? Dar surjectivă?
(b) Aflaţi $f([-3,6])$ şi $f^{-1}((0,1])$.

(2) **(1 pct.)** Determinaţi cel mai mare număr natural k pentru care 10^k divide numărul $N = 12!$. Care sunt ultimele trei cifre nenule ale lui N?

(3) **(1.5 pct.)** Notăm $a = 29$ şi $b = 50$ şi $d = \gcd(a,b)$.
(a) Aflaţi cel mai mic $u \in \mathbb{N}$ pentru care există $v \in \mathbb{Z}$ cu $ua + vb = d$.
(b) Aflaţi cel mai mic $v \in \mathbb{N}$ pentru care există $u \in \mathbb{Z}$ cu $ua + vb = d$.
(c) Aflaţi ordinul elementului $\widehat{29}$ în grupul multiplicativ $(U(\mathbb{Z}_{50}), \cdot)$ al elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{50}$.

(4) **(1.5 pct.)** Considerăm polinoamele $f = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ şi $g = x^2 + x + 1$ din $\mathbb{R}[x]$.
(a) Determinaţi câtul şi restul împărţirii lui f la g.
(b) Determinaţi $\gcd(f,g)$.
(c) În inelul $A = \mathbb{R}[x]/(g)$ aflaţi divizorii lui zero şi inversul lui $\widehat{f}$, dacă există.

(5) **(1 pct.)** Descompuneţi în factori ireductibili în $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomul

$$f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \widehat{1}.$$

(6) **(1 pct.)** Găsiţi elementele de ordin 12 din grupul aditiv $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(7) **(1.5 pct.)** Considerăm permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 3 & 2 & 7 & 4 & 10 & 1 & 8 & 12 & 11 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

(a) Aflaţi ordinul şi semnul permutării σ.
(b) Scrieţi σ ca produs de cicluri de lungime 2.
(c) Se poate scrie σ ca produs de cicluri de lungime 3? Daca da, daţi exemplu de astfel de scriere folosind un număr minim de cicluri.

Se acordă **1 pct din oficiu.**
Justificaţi toate răspunsurile date, arătând calculele efectuate.
Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute