

Dănilă Tudor-Mihail

Testul nr. 1

1.

$$\gcd(145, 56) = ?$$

$$145 = 56 \cdot 2 + 33$$

$$56 = 33 \cdot 1 + 23$$

$$33 = 23 \cdot 1 + 10$$

$$23 = 10 \cdot 2 + 3$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

$$\Rightarrow \gcd(145, 56) = 1$$

$$1 = 10 - 3 \cdot 3 = 33 - 23 - 3(23 - 10 \cdot 2) =$$

$$= 145 - 56 \cdot 2 - (56 - 33) - 3 \cdot 23 + 6 \cdot 10 =$$

$$= 145 - 56 \cdot 2 - 56 + 33 - 3(56 - 33) + 6(33 - 23) =$$

$$= 145 - 56 \cdot 3 + 145 - 56 \cdot 2 - 3 \cdot 56 + 3 \cdot 33 + 6 \cdot 33 - 6 \cdot 23 =$$

$$= 145 \cdot 2 - 56 \cdot 8 + 9 \cdot 33 - 6 \cdot 23 = 145 \cdot 2 - 56 \cdot 8 + 9(145 - 56 \cdot 2) - 6(56 - 33) =$$

$$= 145 \cdot 2 - 56 \cdot 8 + 9 \cdot 145 - 18 \cdot 56 - 6 \cdot 56 + 6(145 - 56 \cdot 2) =$$

$$= 145 \cdot 11 - 56 \cdot 32 + 6 \cdot 145 - 12 \cdot 56 =$$

$$= 145 \cdot 17 - 56 \cdot 44 \Rightarrow u_1 = 17 \quad \checkmark$$

$$v_1 = -44 \quad \checkmark$$

$$145: 1 = 145 \Rightarrow v = -44 - 145k$$

$$56: 1 = 56 \Rightarrow u = 17 + 56k$$

$$\Rightarrow \text{perechi } (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ sunt}$$

$$\text{de forma: } (17 + 56k, -44 - 145k) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x > 1 \\ -x + 5, & x \leq 1 \end{cases}$$

a)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = V(2, -1) \checkmark$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

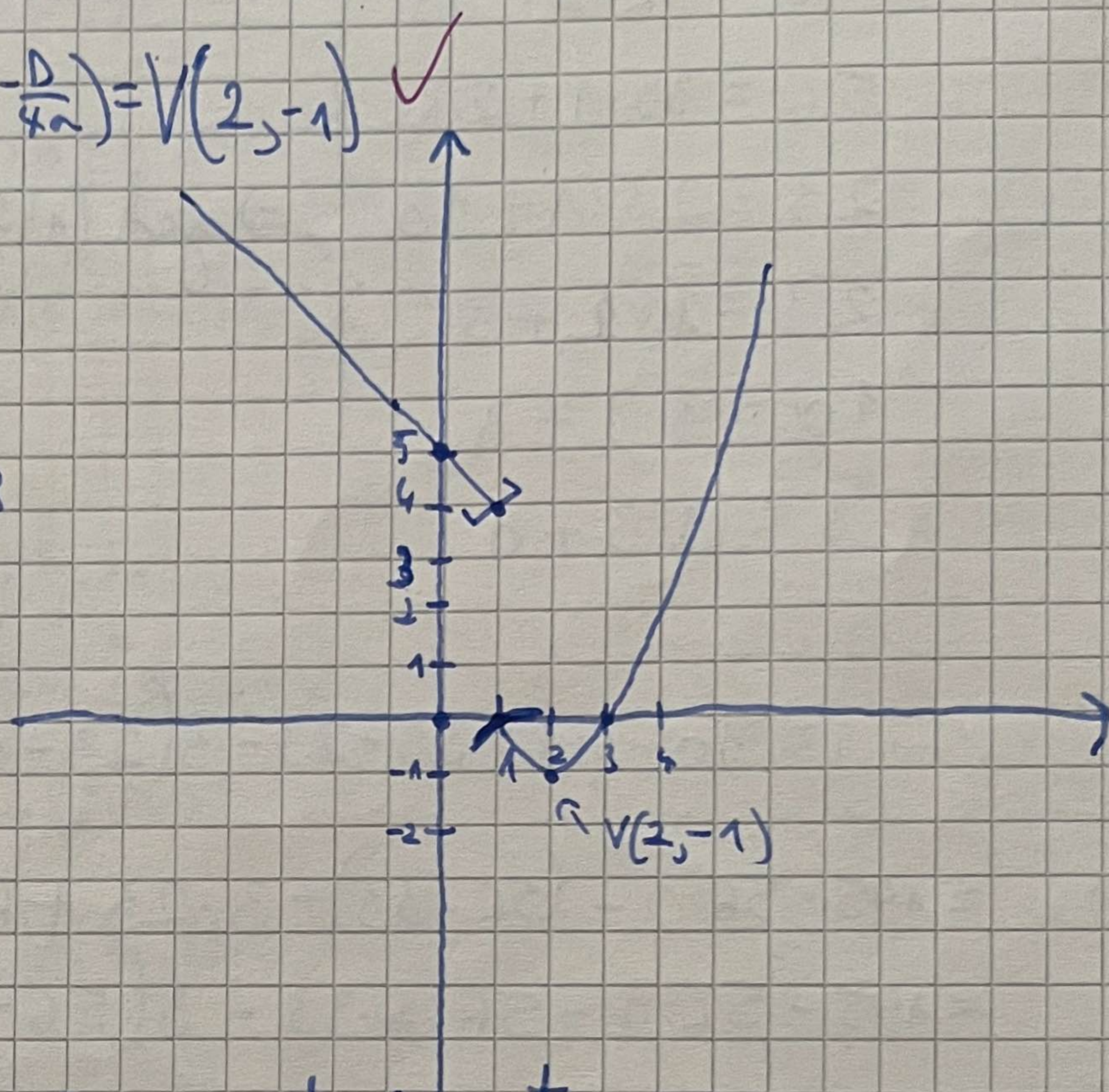
$$(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1, 3$$

DAR $x > 1$

$$f(1) = -1 + 5 = 4$$

$$f(2) = -2 + 5 = 3$$

$$f(0) = 0 + 5 = 5$$



Din metoda grafică: f nu este injectivă și nu este nici surjectivă. \checkmark

b) $f((-1, 4)) = ?$

$$f(-1) = -(-1) + 5 = 6 \quad f(1) = -1 + 5 = 4 \quad f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$$

$$\Rightarrow f((-1, 4)) = [4, 6) \cup [-1, 3) = [-1, 3) \cup [4, 6) \checkmark$$

$$f^{-1}((-1, 5)) = ?$$

$$x^2 - 4x + 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 + 8 = 24 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

DAR $x > 1$

$$\Rightarrow f^{-1}((-1, 5)) = (0, 2) \cup (2, 2 + \sqrt{6}) = (0, 2 + \sqrt{6}) \setminus \{2\} \checkmark$$

Dănilă Tudor-Mihail

3.

$$a) R: \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \stackrel{!}{\Rightarrow} (x, y) \sim (x, y)$$

$$(x, y) \sim (x, y) \Leftrightarrow x \cdot x > 0, \text{ și } y \cdot y > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0, \text{ și } y^2 > 0 \quad (A) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad (1) \quad \checkmark$$

$$S: \forall (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \text{ cu } (x, y) \sim (a, b) \stackrel{!}{\Rightarrow} (a, b) \sim (x, y)$$

$$(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow xa > 0, \text{ și } yb > 0 \Leftrightarrow ax > 0, \text{ și } by > 0 \Rightarrow (a, b) \sim (x, y) \quad (A) \quad (2) \quad \checkmark$$

$$T: \forall (x, y), (a, b), (m, n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \text{ cu } (x, y) \sim (a, b) \text{ și } (a, b) \sim (m, n) \stackrel{!}{\Rightarrow} (x, y) \sim (m, n)$$

$$(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow xa > 0, \text{ și } yb > 0$$

$$(a, b) \sim (m, n) \Rightarrow \underline{am > 0, \text{ și } bn > 0} \quad (3)$$

$$xa^2m > 0, \text{ și } yb^2n > 0$$

$$a^2 > 0, \text{ și } b^2 > 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xm > 0, \text{ și } yn > 0 \Leftrightarrow (x, y) \sim (m, n) \quad (3) \quad \checkmark$$

Dim (1), (2) și (3) $\Rightarrow \sim$ este o relație de echivalență. \checkmark

$$b) \text{ Fie } (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

$$(-1, 5) \sim (a, b) \Leftrightarrow -1 \cdot a > 0, \text{ și } 5 \cdot b > 0 \Rightarrow a < 0, \text{ și } b > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(-1, 5)] = \{(a, b) \mid a \in (-\infty, 0), b \in (0, +\infty)\} \quad \checkmark$$

c) Un ~~posibil~~ sistem de reprezentanți ar fi:

$$\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\} \quad \checkmark$$

de ce?