Chương 1. Các khái niệm cơ bản

1.1. Đồ thị

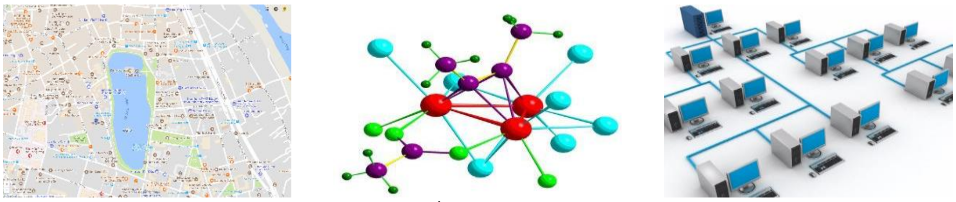
Đồ thị là mô hình biểu diễn một tập các đối tượng và mối quan hệ hai ngôi giữa các đối tượng:

$$Graph = Objects + Connections$$
$$G = (V, E)$$

Có thể định nghĩa đồ thị G là một cặp (V, E): $G = (V, E)$. Trong đó V là tập các đỉnh (vertices) biểu diễn các đối tượng và E gọi là tập các cạnh (edges) biểu diễn mối quan hệ giữa các đối tượng. Chúng ta quan tâm tới mối quan hệ hai ngôi (pairwise relations) giữa các đối tượng nên có thể coi E là tập các cặp (u, v) với u và v là hai đỉnh của V biểu diễn hai đối tượng có quan hệ với nhau.

Ta cho phép đồ thị có cả cạnh nối từ một đỉnh tới chính nó. Những cạnh như vậy gọi là *khuyên* (*self-loop*)

Một số hình ảnh của đồ thị:



Sơ đồ giao thông　　Cấu trúc phân tử　　Mạng máy tính

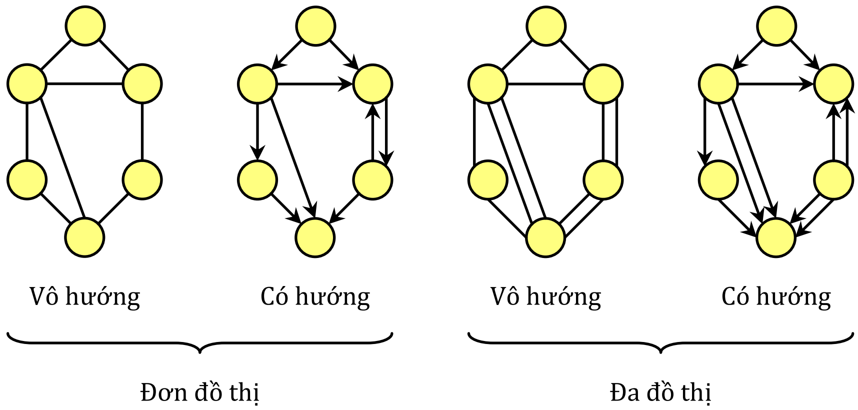
Hình 1-1. Một số hình ảnh của đồ thị

Có thể phân loại đồ thị $G = (V, E)$ theo đặc tính và số lượng của tập các cạnh E:

- G được gọi là *đồ thị vô hướng* (*undirected graph*) nếu các cạnh trong E là không định hướng, tức là cạnh nối hai đỉnh $u, v \in V$ bất kỳ cũng là cạnh nối hai đỉnh v, u. Hay nói cách khác, tập E gồm các cặp (u, v) không tính thứ tự: $(u, v) = (v, u)$.
- G được gọi là *đồ thị có hướng* (*directed graph*) nếu các cạnh trong E là có định hướng, tức là có thể có cạnh nối từ đỉnh u tới đỉnh v nhưng chưa chắc đã có cạnh nối từ đỉnh v tới đỉnh u. Hay nói cách khác, tập E gồm các cặp (u, v) có tính thứ tự: $(u, v) \neq (v, u)$. Trong đồ thị có hướng, các cạnh còn được gọi là các *cung* (*arcs*). Đối với một số bài toán, đồ thị vô hướng cũng có thể coi là đồ thị có hướng nếu như ta coi cạnh nối hai đỉnh u, v bất kỳ tương đương với hai cung (u, v) và (v, u).
- G được gọi là *đơn đồ thị* nếu giữa hai đỉnh $u, v \in V$ có nhiều nhất là 1 cạnh trong E nối từ u tới v.

- G được gọi là *đa đồ thị* (*multigraph*) nếu giữa hai đỉnh $u, v \in V$ có thể có nhiều hơn 1 cạnh trong E nối từ u tới v (Hiển nhiên đơn đồ thị cũng là đa đồ thị). Nếu có nhiều cạnh nối giữa hai đỉnh $u, v \in V$ thì những cạnh đó được gọi là *cạnh song song* (*parallel edges*)

Hình 1-2 là ví dụ về đơn đồ thị/đa đồ thị có hướng/vô hướng.



Hình 1-2. Phân loại đồ thị

1.2. Các khái niệm

1.2.1. Cạnh liên thuộc, đỉnh kề, bậc

Đối với đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Xét một cạnh $e \in E$, nếu $e = (u, v)$ thì ta nói hai đỉnh u và v là *kề nhau* (*adjacent*) và cạnh e này *liên thuộc* (*incident*) với đỉnh u và đỉnh v.

Với một đỉnh u trong đồ thị vô hướng, ta định nghĩa *bậc* (*degree*) của u, ký hiệu $\deg(u)$, là số cạnh liên thuộc với u.

Định lý 1-1

Trên đồ thị vô hướng không có khuyên, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh:

$$G = (V, E) \Rightarrow \sum_{\forall u \in V} \deg(u) = 2|E| \tag{1.1}$$

Chứng minh

Vì đồ thị không có khuyên, khi lấy tổng tất cả các bậc đỉnh thì mỗi cạnh $e = (u, v)$ sẽ được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$. Từ đó suy ra kết quả.

Định lý cũng có thể mở rộng ra trong trường hợp đồ thị có khuyên, đơn giản là mỗi khuyên (u, u) coi như được tính hai lần trong $\deg(u)$.

Hệ quả

Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ là số chẵn.

Đối với đồ thị có hướng $G = (V, E)$. Xét một cung $e \in E$, nếu $e = (u, v)$ thì ta nói u nối tới v và v nối từ u, cung e là đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v. Đỉnh u khi đó được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của cung e.

Với mỗi đỉnh v trong đồ thị có hướng, ta định nghĩa: *Bậc ra* (*out-degree*) của v ký hiệu $\deg^+(v)$ là số cung đi ra khỏi nó; *Bậc vào* (*in-degree*) ký hiệu $\deg^-(v)$ là số cung đi vào đỉnh đó.

Định lý 1-2

Trên đồ thị có hướng, tổng bậc ra của tất cả các đỉnh bằng tổng bậc vào của tất cả các đỉnh và bằng số cung:

$$G = (V, E) \Rightarrow \sum_{\forall u \in V} \deg^+(u) = \sum_{\forall u \in V} \deg^-(u) = |E| \tag{1.2}$$

Chứng minh

Khi lấy tổng tất cả các bán bậc ra hay bán bậc vào, mỗi cung (u, v) sẽ được tính đúng một lần trong $\deg^+(u)$ và cũng được tính đúng một lần trong $\deg^-(v)$. Từ đó suy ra kết quả.

Chú ý rằng định lý đúng ngay cả khi đồ thị có khuyên, tức là có cung nối từ một đỉnh đến chính nó. Khuyên (u, u) khi đó được tính một lần trong $\deg^-(u)$ và cũng được tính một lần trong $\deg^+(u)$.

1.2.2. Đường đi và chu trình

Đường đi (*walk*) trên đồ thị là một cách di chuyển giữa hai đỉnh qua một số hữu hạn các cạnh. Cụ thể là một dãy các đỉnh:

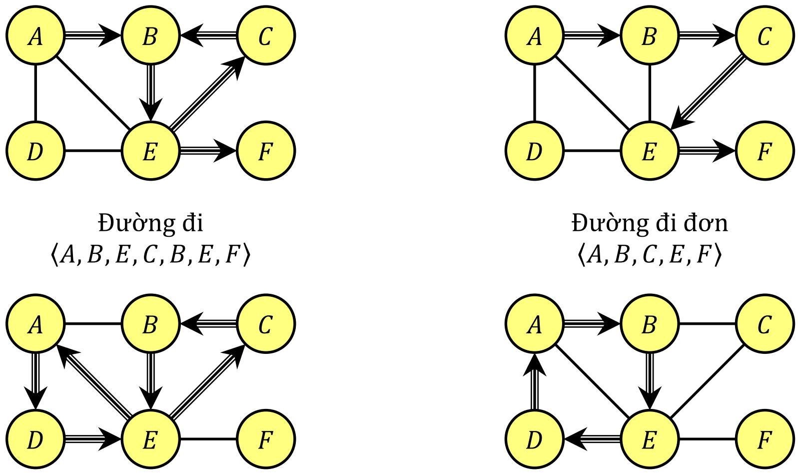
$$P = \langle p_0, p_1, \dots, p_k \rangle$$

sao cho $(p_{i-1}, p_i) \in E, \forall i: 1 \leq i \leq k$.

Mặc dù người ta thường ký hiệu đường đi bởi dãy các đỉnh (theo đúng thứ tự trên đường đi), ta cần hiểu rằng đường đi được xác định bằng cả dãy các đỉnh và dãy các cạnh trên đường đi đó. Điều này đảm bảo tính chính xác của định nghĩa đường đi trên đa đồ thị.

Xét một đường đi $P = \langle p_0, p_1, \dots, p_k \rangle$, đường đi này xuất phát từ đỉnh p_0, qua cạnh (p_0, p_1) sang đỉnh p_1, qua tiếp cạnh (p_1, p_2) sang đỉnh p_2,..., cuối cùng qua cạnh (p_{k-1}, p_k) sang đỉnh p_k. Ta nói p_k *đến được* (*reachable*) từ p_0 hay p_0 đến được p_k, ký hiệu $p_0 \rightsquigarrow p_k$. Đỉnh p_0 được gọi là đỉnh đầu, đỉnh p_k gọi là đỉnh cuối, còn các đỉnh $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ được gọi là những *đỉnh trong* (*internal vertices*) của đường đi P. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối được gọi là một *chu trình* (*closed walk*).

Một đường đi gọi là *đơn giản* hay *đường đi đơn* (*simple walk/path*) nếu tất cả các đỉnh trên đường đi là hoàn toàn phân biệt (dĩ nhiên khi đó các cạnh trên đường đi cũng hoàn toàn phân biệt). Một chu trình được gọi là chu trình đơn (*cycle*) nếu tập đỉnh đầu (cũng là đỉnh cuối) và các đỉnh trong hoàn toàn phân biệt*.



Đường đi
$\langle A, B, E, C, B, E, F \rangle$

Đường đi đơn
$\langle A, B, C, E, F \rangle$

Chu trình
$\langle A, D, E, C, B, E, A \rangle$

Chu trình đơn
$\langle A, B, E, D, A \rangle$

Hình 1-3. Đường đi và chu trình

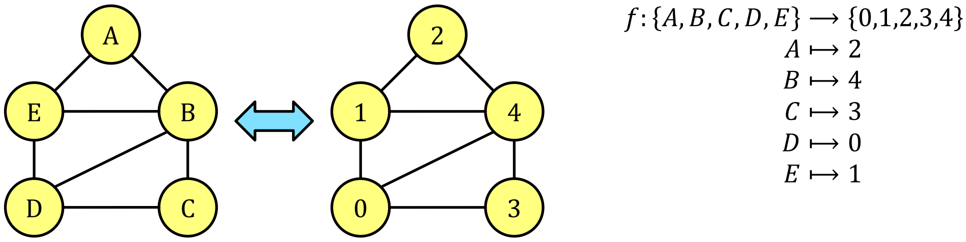
Hình 1-3 là ví dụ về một số đường đi và chu trình trên một đồ thị vô hướng (mũi tên trong hình là chỉ hướng đi, còn cạnh của đồ thị là vô hướng). Trong ví dụ này, $\langle A, B, E, C, B, E, F \rangle$ là một đường đi từ A tới F, nhưng đây không phải là đường đi đơn do nó đi qua đỉnh B và E hai lần, $\langle A, B, C, E, F \rangle$ là một đường đi đơn từ A tới F. $\langle A, D, E, C, B, E, A \rangle$ là một chu trình bắt đầu và kết thúc ở A, nó không phải chu trình đơn vì có đỉnh trong E đi qua hai lần. Chú ý rằng $\langle A, B, A \rangle$ cũng không phải chu trình đơn, dù đỉnh đầu A và đỉnh trong B là phân biệt, nhưng có cạnh (A, B) bị lặp lại. $\langle E, A, D, E, C, B, E \rangle$ cũng không phải chu trình đơn, dù các cạnh và các đỉnh trong $\{A, D, E, C, B\}$ hoàn toàn phân biệt, bởi nó có đỉnh trong E trùng với đỉnh đầu (cũng là đỉnh cuối) chu trình. Ví dụ về chu trình đơn trong đồ thị này có thể là $\langle A, B, E, D, A \rangle$ hoặc $\langle B, C, E, B \rangle$.

1.2.3. Một số khái niệm khác

❋ Đẳng cấu

Hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ được gọi là *đẳng cấu* (*isomorphic*) nếu tồn tại một song ánh $f: V \to V'$ sao cho số cung nối u với v trên E bằng số cung nối $f(u)$ với $f(v)$ trên E'. Nói cách khác, ta có thể "đặt tên" lại các đỉnh trong G để thu được đồ thị G' (Hình 1-4).

* Những định nghĩa về thuật ngữ này không thống nhất trong các tài liệu về thuật toán, mỗi tác giả thường đưa ra định nghĩa của mình và dùng xuyên suốt trong tài liệu của họ mà thôi.



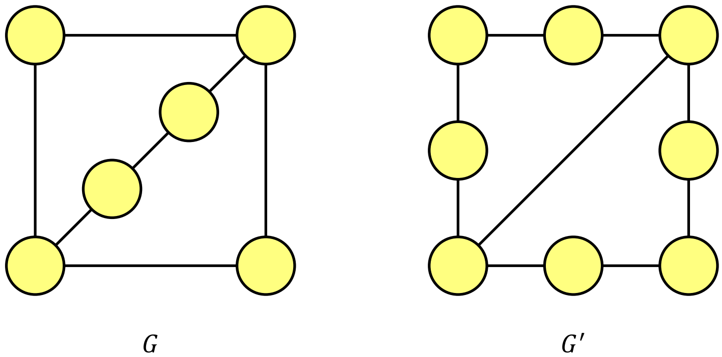
Hình 1-4. Đẳng cấu

❋ Đồng phôi

Với đồ thị $G = (V, E)$, và (u, v) là một cạnh $\in E$, phép chia cạnh (u, v) là thao tác bổ sung thêm một đỉnh w nằm trên cạnh (u, v) để tách nó ra thành hai cạnh (u, w) và (w, v). Sau phép chia cạnh, ta thu được đồ thị mới $G_s = (V_s, E_s)$ trong đó:

$$V_s = V \cup \{w\}$$
$$E_s = E - \{(u, v)\} \cup \{(u, w), (w, v)\}$$

Hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ được gọi là đồng phôi (*Homeomorphism*) nếu như tồn tại một dãy các phép chia cạnh trên G và G' để biến chúng thành hai đồ thị đẳng cấu (Hình 1-5).



Hình 1-5. Đồng phôi

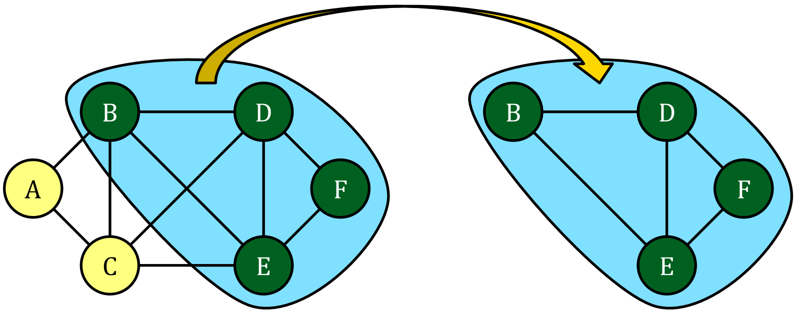
❋ Đồ thị con

Đồ thị $G' = (V', E')$ là *đồ thị con* (*subgraph*) của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$.

Đồ thị con $G_U = (U, E_U)$ được gọi là *đồ thị con cảm ứng* (*induced graph*) từ đồ thị G bởi tập $U \subseteq V$ nếu:

$$E_U = \{(u, v) \in E : u, v \in U\}$$

trong trường hợp này chúng ta còn nói G_U là đồ thị G hạn chế trên U.



Hình 1-6. Đồ thị con cảm ứng

❈ Phiên bản có hướng/vô hướng

Với một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, ta gọi *phiên bản có hướng* (*directed version*) của G là một đồ thị có hướng $G' = (V, E')$ tạo thành từ G bằng cách thay mỗi cạnh (u, v) bằng hai cung có hướng ngược chiều nhau: (u, v) và (v, u).

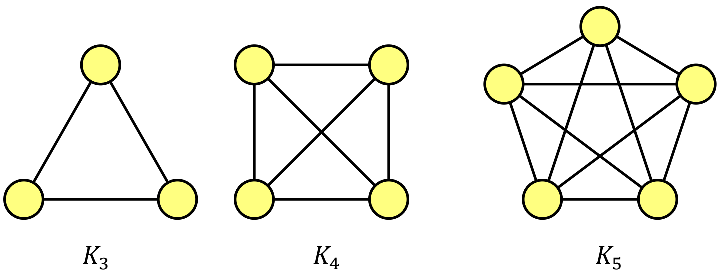
Với một đồ thị có hướng $G = (V, E)$, ta gọi *phiên bản vô hướng* (*undirected version*) của G là một đồ thị vô hướng $G' = (V, E')$ tạo thành bằng cách thay mỗi cung (u, v) bằng cạnh vô hướng (u, v). Nói cách khác, G' tạo thành từ G bằng cách bỏ đi chiều của cung.

❈ Tính liên thông

Một đồ thị vô hướng gọi là *liên thông* (*connected*) nếu giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị có tồn tại đường đi. Đối với đồ thị có hướng, có hai khái niệm liên thông tuỳ theo chúng ta có quan tâm tới hướng của các cung hay không. Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh* (*strongly connected*) nếu giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị có tồn tại đường đi. Đồ thị có hướng gọi là *liên thông yếu* (*weakly connected*) nếu phiên bản vô hướng của nó là đồ thị liên thông.

❈ Đồ thị đầy đủ

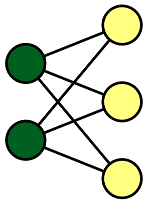
Một đồ thị vô hướng được gọi là *đầy đủ* (*complete*) nếu mọi cặp đỉnh đều là kề nhau, đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh ký hiệu là K_n. Hình 1-7 là ví dụ về các đồ thị K_3, K_4 và K_5.



Hình 1-7. Đồ thị đầy đủ

❈ Đồ thị hai phía

Một đồ thị vô hướng gọi là *hai phía* (*bipartite*) nếu tập đỉnh của nó có thể chia làm hai tập rời nhau X, Y sao cho không tồn tại cạnh nối hai đỉnh thuộc X cũng như không tồn tại cạnh nối hai đỉnh thuộc Y. Nếu $|X| = m$ và $|Y| = n$ và giữa mọi cặp đỉnh (x, y) trong đó $x \in X, y \in Y$ đều có cạnh nối thì đồ thị hai phía đó được gọi là đồ thị hai phía đầy đủ, ký hiệu $K_{m,n}$. Hình 1-8 là ví dụ về đồ thị hai phía đầy đủ $K_{2,3}$.



Hình 1-8. Đồ thị hai phía đầy đủ

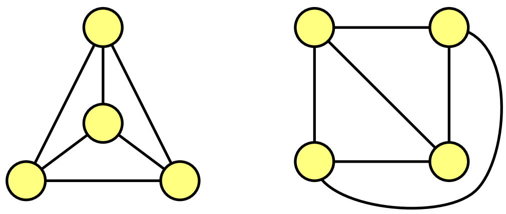
❋ Đồ thị phẳng

Một đồ thị được gọi là *đồ thị phẳng* (*planar graph*) nếu chúng ta có thể vẽ đồ thị ra trên mặt phẳng sao cho:

- Mỗi đỉnh tương ứng với một điểm trên mặt phẳng, không có hai đỉnh cùng tọa độ.
- Mỗi cạnh tương ứng với một đoạn đường liên tục nối hai đỉnh, các điểm nằm trên hai cạnh bất kỳ là không giao nhau ngoại trừ các điểm đầu mút (tương ứng với các đỉnh)

Phép vẽ đồ thị phẳng như vậy gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị

Ví dụ như đồ thị đầy đủ K_4 là đồ thị phẳng bởi nó có thể vẽ ra trên mặt phẳng như Hình 1-9



Hình 1-9. Hai cách biểu diễn phẳng của đồ thị đầy đủ K_4

Định lý 1-3 (Định lý Kuratowski)

Một đồ thị vô hướng là đồ thị phẳng nếu và chỉ nếu nó không chứa đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

Định lý 1-4 (Công thức Euler)

Nếu một đồ thị vô hướng liên thông là đồ thị phẳng và biểu diễn phẳng của đồ thị đó gồm v đỉnh và e cạnh chia mặt phẳng thành f phần thì $v - e + f = 2$.

Định lý 1-5

Nếu đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là đồ thị phẳng có ít nhất 3 đỉnh thì $|E| \leq 3|V| - 6$. Ngoài ra nếu G không có chu trình độ dài 3 thì $|E| \leq 2|V| - 4$.

Định lý 1-5 chỉ ra rằng số cạnh của đơn đồ thị phẳng là một đại lượng $|E| = O(|V|)$ điều này rất hữu ích đối với nhiều thuật toán trên đồ thị thưa (có ít cạnh).

❋ Đồ thị đường

Từ đồ thị vô hướng G, ta xây dựng đồ thị vô hướng G' như sau: Mỗi đỉnh của G' tương ứng với một cạnh của G, giữa hai đỉnh x, y của G' có cạnh nối nếu và chỉ nếu tồn tại đỉnh liên thuộc với cả hai cạnh x, y trên G. Đồ thị G' như vậy được gọi là đồ thị đường của đồ thị G. Đồ thị đường được nghiên cứu trong các bài toán kiểm tra tính liên thông, tập độc lập cực đại, tô màu cạnh đồ thị, chu trình Euler và chu trình Hamilton v.v…