RASSAL MODELLER

9 Kasım 2020

Çözümlü Problemler
(by Aykut Arapoğlu)

Ex 1: Aşağıdaki dağılımlar için örnek deneyler bulunuz.

a) Bernoulli :

- Bir testten başarılı veya başarısız olma durumu

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Test başarılı ise} \\ 0 & \text{" başarısız ise} \end{cases}$$ başarı olasılığı $= p$ olsun

$X \sim Ber(p)$

- Araç hızı 120 km/saat üzerinde ise ceza yazılıyor

Ceza alma durumu

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Araç hızı} > 120 \text{ km/h.} \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}$$ $p = P(\text{Araç hızı} > 120)$

Dikkat, Araç hızı da bir başka r.d. olabilir.

$Y \sim Ber(p)$

b) Binom :

- Tura gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ olan bir para 3 kez atılıyor. Toplam Tura sayısı nasıl dağılır?

$X = \text{Toplam Tura sayısı} \sim Bin(n=3, p=\frac{1}{3})$

$P(\text{En az 1 Tura}) = P(X \geq 1) = ?$ $(= p(1)+p(2)+p(3))$

kısa yol tümleyen olayı bul

$P(X=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ $P(X \geq 1) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

Kaç Tura gelmesini beklersiniz?

$B(x) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$ veya 2. yol.

$$x_i = \begin{cases} 1 & i \text{ atış Tura ise} \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}$$ $i = 1,2,3.$ (Hangi dağılım?) $B(X_i) = \frac{1}{3}$.

X'i X_i'ler cinsinden yazınız.

Örnek

X_1	X_2	X_3	X
0	0	0	0
0	1	1	2
1	1	1	3
1	0	0	1

* $B(X)$ şimdi hesaplayalım : $B(X) =$
* Binom dağılımının b.d.f. yazınız.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P_X(k) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Yukarıdaki formüldeki hatayı bulunuz. (ipucu:)

c) Geometrik Dağılım (Std) ($X = 1, 2, \ldots$)

* Bir kişi üniversiteyi kazanana kadar sınava giriyor.
3. denemede kazanma olasılığı nedir?

X = Girilen sınav sayısı $\sim$ Geo (p = bir sınavda kazanma olasılığı)

$P(X=3) = P(--+) = (1-p)^2 p$.

Gerçekte kazanma olasılıkları sabit değildir öğrenme olacağı için $p_1 < p_2 < p_3$ kabul edebiliriz.

Şimdi 3. denemede kazanma olasılığını bulunuz;

$P(\text{3. denemede kazanma}) = P(--+) = (1-p_1)(1-p_2)p_3$

SORU: 2. başarı için girilen sınav sayısının dağılımını bulunuz.

- Ort. kaçıncı seferde sınavı kazanır?

$B(X) = \frac{1}{p} =$

SORU: Geo(p) dağılımının b.d.f. yazınız.

İpucu: önce tümleyen olayı bulunuz.

$$F(x) = P(X \leq x) = ?$$

$$P(X > x) = (1-p)^{x} p + (1-p)^{x+1} p + \cdots$$

EX 2: $X \sim Geo(p)$ ise $B(X) = \frac{1}{p}$ olduğunu ispatlayınız.

$$B(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p$$

$1-p = x$ dersek

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1} = (1-x) \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{p}.$$

(Bkz. ders notları sayfa 3)

SORU: $B(X^2)$ beklenen değerini bulunuz.

İpucu: $B(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p$

$1-p = x$ olsun

$$= (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k + k)\, x^{k-1}$$

$$= (1-x)\, x \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-2} \right]$$

EX 3: $X \sim Bin(n=3, p=\frac{1}{4})$ ve
$Y \sim Geo(p=\frac{1}{2})$ ise

a) $B(2X-3Y) = ?$

$= 2B(X) - 3B(Y) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{1/2} = \frac{3}{2} - 6 = \frac{-9}{2}$

b) $Var(2X-3Y) = ?$ $\quad Var(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ $\quad Var(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$

$= 2^2 Var(X) + (-3)^2 Var(Y) = 4 \cdot 3 \frac{1}{4} \frac{3}{4} + 9 \times 2$

$= \frac{81}{4}$.

Bu sonucun doğru olması için neyi kabul etmeliyiz?

EX4: Bir kutuda 3 madeni para bulunuyor. (X, Y, Z)
X hilesiz, Y iki tarafı TURA, Z'nin Tura olasılığı $\frac{1}{3}$ olsun.
Rassal olarak bir para seçilip atılıyor.

$X, Y, Z = \begin{cases} 1 & \text{Tura} \\ 0 & \text{dd} \end{cases}$

a) Tura gelme olasılığını bulunuz.

$P(Tura) = P(X=1) \cdot P(Tura \mid X=1)$
$\quad + P(Y=1) \cdot P(Tura \mid Y=1) + P(Z=1)\, P(Tura \mid Z=1)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, 1 + \frac{1}{3}\, \frac{1}{3} = \frac{3+6+2}{18} = \frac{11}{18}$

Bu kuralın adı nedir?

b) Tura gelmişse Hilesiz (X) paradan gelme olasılığı nedir?

$P(X=1 \mid Tura) = \frac{P(X=1, Tura)}{P(Tura)} = \frac{P(X=1)\, P(Tura \mid X=1)}{P(Tura)} = \frac{(1/3)(1/2)}{11/18}$

$= \frac{3}{11}$.

c) Yazı gelmişse, Z parasından gelme olasılığı nedir?

$$P(Z=1 \mid Yazı) = \frac{P(Z=1, Yazı)}{P(Yazı)} = \frac{P(Z=1)\,P(Yazı \mid Z=1)}{P(Yazı)} = \frac{(1/3)(2/3)}{7/18} = \frac{4}{7}.$$

$$P(Yazı) = 1 - P(Tura) = 1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}$$ veya koşullandırarak

EX 5:

Bir motorun çalışma olasılığı P, (0,1) aralığında düzgün bir dağılıma göre değer almaktadır. ($P \sim U(0,1)$)
motorun ort çalışma olasılığını bulunuz.

$$E(P) = \int_0^1 p\, f(p)\, dp = \left.\frac{p^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}. \qquad f(p) = \begin{cases} 1 & 0<p<1 \\ 0 & dd \end{cases}$$

$Var(P) = ?$

$$E(P^2) = \int_0^1 p^2 f(p)\, dp = \left.\frac{p^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$Var(P) = E(P^2) - E^2(P) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}.$$

* Aynı soruyu $f(p) = \begin{cases} 3p^2 & 0<p<1 \\ 0 & dd \end{cases}$ dağılımı için çözünüz.

EX 6: Hilesiz bir para 2 kez atılıyor.

$X = \begin{cases} 1 & \text{ilk atış TURA ise} \\ 0 & \text{dd} \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} 1 & \text{Her iki atış TURA ise} \\ 0 & \text{dd} \end{cases}$

X ve Y nin ortak ~~d~~ olasılık fonk bulunuz.

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (T,T) \text{ ise } (1,1) \\ 1/4 & (T,Y) \text{ ise } (1,0) \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} & \begin{cases} (Y,T) \text{ ise } (0,0) \\ (Y,Y) \text{ ise } (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Y \ X	0	1	$P_Y(y)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

X ve Y bağımsız mıdır? $\quad P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y) \quad \forall x,y$

$Cov(X,Y) = \,?\quad \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} xy\, P(X=x, Y=y)$

$= 1.1.\,P(1,1) = \frac{1}{4}.$

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{1/4}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{1} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \quad ???$$

$Var(X) = B(X^2) - B^2(X) = 1^2\frac{1}{2} + 0^2\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$Var(Y) = B(Y^2) - B^2(Y) = 0^2\frac{3}{4} + 1^2\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$

ÖRNEK 6.4.

(*a*) John'un hedefi vurma olasılığı $p = 1/4$'tür. John, hedefe 100 kez ateş etmiştir. Hedefi vurması için yapılacak atışların beklenen sayısı μ ve standart sapma σ'yı bulunuz.

Burada $p = 1/4$ ve böylece $q = 3/4$'tür. Bundan dolayı

$$\mu = np = 100 \cdot \tfrac{1}{4} = 25 \qquad \text{ve} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4}} = 2.5$$

olur.

(*b*) Hilesiz bir zar 180 kez atılıyor. Ön yüzünde 6 çıkması için beklenen atışların sayısı μ ve standart sapmayı σ'yı bulunuz.

Burada $p = 1/6$ ve böylece $q = 5/6$'dır. Bundan dolayı

$$\mu = np = 180 \cdot \tfrac{1}{6} = 30 \qquad \text{ve} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6}} = 5$$

olur.

(*c*) 30 soruluk doğru-yanlış testinde tahmin edilerek elde edilen doğru cevapların beklenen sayısı $E(X)$'i bulunuz.

Burada $p = \frac{1}{2}$'dir. Böylece $E(X) = np = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$'tir.

6.3 NORMAL DAĞILIM

X, sonsuz örnek uzayı S üzerinde bir rasgele değişkeni göstersin. Burada tanım gereği $\{a \leq X \leq b\}$ S'de bir olaydır. Aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ reel eksen üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu varsa X'in sürekli olduğu (Bölüm 5.10) hatırlanmalıdır.

(i) f negatif değildir.

(ii) f'nin altında kalan alan 1'dir.

(iii) $[a, b]$ aralığındaki X'in olasılığı, $x = a$ ve $x = b$ arasındaki f altında kalan alana eşittir.

Bu özellikler aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir. Burada, bir eğri altında kalan alan hesaplamaları kullanılır.

$$\text{(i)}\quad f(x) \geq 0, \qquad \text{(ii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \qquad \text{(iii)}\quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$f(x)$ fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da basitçe X'in dağılımı olarak adlandırılır.

Ayrıca, X'in sürekli rasgele değişkeninin $f(x)$ olasılık yoğunluğu ile beklenen değer $\mu = E(X)$ ve varyansı $\operatorname{var}(X)$, integrallerle

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad \text{ve} \qquad \operatorname{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

tanımlanır. Kesikli rasgele değişken durumunda olduğu gibi, X'in standart sapması σ, var (X)'in negatif olmayan kareköküdür.

Normal Rasgele Değişken

X sürekli rasgele değişkenin en önemli örneği, yoğunluk fonksiyonu bilinen çan şeklindeki eğriye sahip olan normal rasgele değişkendir. Bu dağılım, binom dağılımının sınırlayıcı formu olarak 1733'te De Moive tarafından ortaya çıkarılmıştır. Normal dağılım, 1809'da bu dağılımı ele alan Gauss' tan sonra "Gauss dağılımı" olarak bilinmesine rağmen aslında Laplace tarafından 1774 yılında biliniyordu. Biçimsel olarak, X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ aşağıdaki forma sahipse X'in normal dağıldığı söylenir.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Burada μ herhangi bir reel sayı ve σ herhangi pozitif sayıdır.

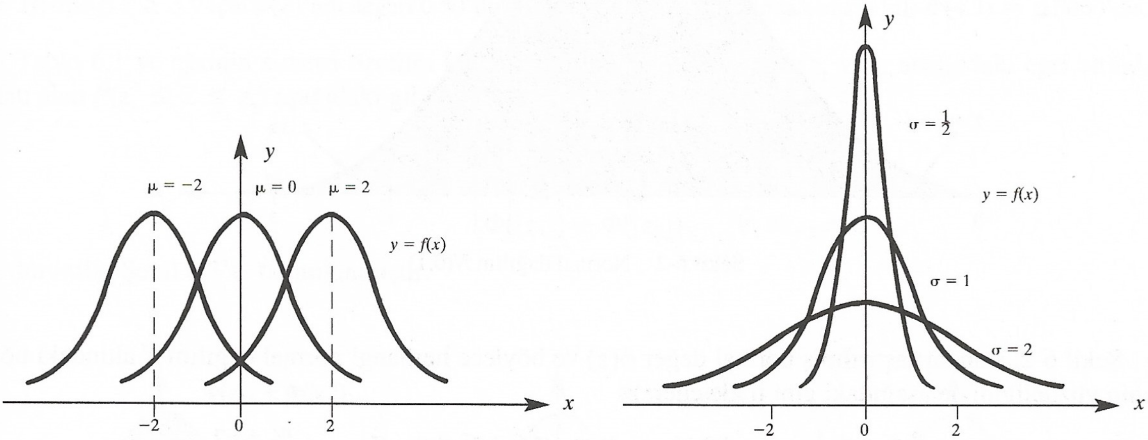
μ ve σ parametrelerine bağlı olan yukarıdaki dağılım

$$N(\mu, \sigma^2)$$

ile gösterilecektir. Böylece, yukarıdaki f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X'in $N(\mu, \sigma^2)$ olduğu söylenir.

Şekil 6-1'deki iki diyagram μ ve σ değiştikçe çan şeklindeki normal eğrilerindeki değişimi gösterir. Özellikle, Şekil 6-1(a) σ'nın sabit değeri ve μ'nün üç değeri için dağılım gösterir. Şekil 6-1(b)'deki μ sabit ve σ'nın üç değeri kullanılmıştır.

Şekil 6-1'de her bir eğrinin $x = \mu$'de en yüksek noktaya ulaştığına ve eğrinin $x = \mu$ civarında simetrik olduğuna dikkat ediniz. Eğrinin bükülme yönünün değiştiği dönüm noktaları $x = \mu + \sigma$ ve $x = \mu - \sigma$ noktalarıdır. Ayrıca, dağılım tüm reel sayılarda tanımlanmasına rağmen μ ortalamadan herhangi büyük sapmanın olasılığı son derece küçüktür ve böylece birçok pratik uygulamalarda ihmal edilebilir.



(a) Sabit σ ile normal dağılım ($\sigma = 1$) (b) Sabit m ile normal dağılım ($m = 0$)

Şekil 6-1

Normal dağılımın özellikleri aşağıdadır:

Teorem 6.3:

Normal dağılım $N(\mu, \sigma^2)$	
Ortalama ve beklenen değer	μ
Varyans	σ^2
Standart sapma	σ

Yani, normal dağılım $N(\mu, \sigma^2)$'nın ortalama, varyans ve standart sapması sırasıyla μ, σ^2 ve σ'dır. μ ve σ sembollerinin yukarıdaki yoğunluk fonksiyonu $f(x)$'in tanımında niçin parametreler olarak kullanıldığı bundan dolayıdır.

Standartlaştırılmış Normal Dağılım

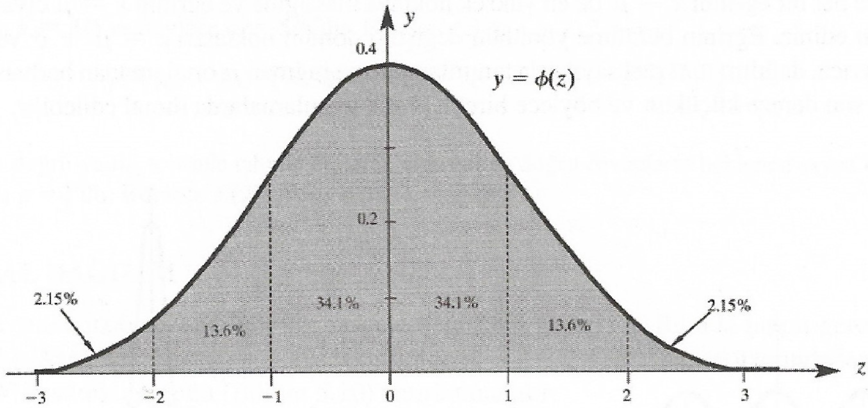
X'in $N(\mu, \sigma^2)$ herhangi bir normal dağılıma sahip olduğu varsayılsın. X'e karşılık gelen standartlaştırılmış rasgele değişkenin $Z = (X - \mu)/\sigma$ ile tanımlandığı hatırlansın.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z aynı zamanda normal dağılım olup $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ olduğu not edilmelidir yani, Z $N(0,1)$'dir. $N(\mu, \sigma^2)$ için yukarıdaki formülde $z = (x - \mu)/\sigma$ olarak elde edilen Z için yoğunluk fonksiyonu aşağıdadır:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Bu dağılımın grafiği Şekil 6-2'de gösterilmiştir.



Şekil 6-2 Normal dağılım $N(0,1)$

Şekil 6-2, standartlaştırılmış normal değer $\phi(z)$ ve böylece herhangi normal dağılım X altındaki bölgenin yüzdeliğini de aşağıdaki gibi ifade eder:

$-1 \leq z \leq 1$	ve	$\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$	% 68.2
$-2 \leq z \leq 2$	ve	$\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma$	% 95.4
$-3 \leq z \leq 3$	ve	$\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma$	% 99.7

Bu,

$$\boxed{\text{68–95–99.7 kuralı}}$$

olarak adlandırılır. Bu kural, normal dağılmış bir kitlede, kitlenin yaklaşık olarak yüzde 68'sinin ortalamada bir standart sapmanın yüzde 95'inin ortalamada iki standart sapmanın ve yüzde 99'unun ortalamada üç standart sapmanın içine düştüğünü ifade eder.

6.4 NORMAL OLASILIKLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan herhangi bir X sürekli rasgele değişken düşünülsün. $P(a \leq X \leq b)$ olasılığının $x = a$ ve $x = b$ arasındaki f eğrisi altında kalan alana eşit olduğu hatırlansın. Hesaplamalarda,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

olur. Bununla birlikte, X normal dağılıma sahipse hesaplamalar yapılmaksızın bu alanların nasıl elde edileceği ilk olarak standart normal dağılım Z ile ve daha sonra herhangi normal dağılım X ile gösterilecektir.

Standart Normal Olasılıkların Değerlendirilmesi

Tablo 6-1, 0 ve z arasındaki standart normal eğri ϕ altında kalan alanı verir. Burada $0 < z < 4$ ve 0.01 düzeyinde verilmiştir. Bu alan tablodaki açıklamada belirtildiği gibi $\Phi(z)$ ile gösterilir.

ÖRNEK 6.5 (*a*) $\Phi(1.72)$, (*b*) $\Phi(0.34)$, (*c*) $\Phi(2.3)$, (*d*) $\Phi(4.3)$ bulunuz.

(*a*) $\Phi(1.72)$ bulmak için sol taraftaki birinci sütunda 1.7' yi buluncaya kadar bakılır ve daha sonra sağa doğru 2. sütuna devam edilir. Satır 1.7 ve sütun 2'ye karşılık gelen tablodaki girdi 0.4573'tür. Böylece $\Phi(1.72) = 0.4573$'tür.

(*b*) $\Phi(0.46)$ bulmak için sol taraftaki birinci sütunda 0.4'ü buluncaya kadar bakılır ve daha sonra sağa doğru 6.sütuna devam edilir. Satır 0.4 ve sütun 6'ya karşılık gelen tablodaki girdi 0.1772'dir. Böylece, $\Phi(0.46) = 0.1772$'dir.

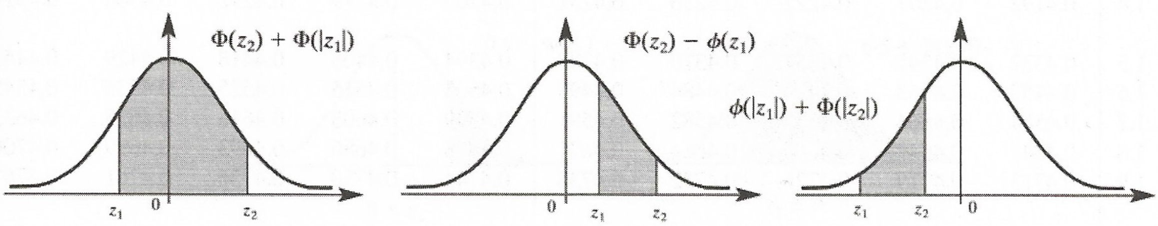
(*c*) $\Phi(2.3)$ bulmak için sol taraftaki birinci sütunda 2.3'e bakılır. $2.3 = 2.30$'a karşılık gelen satırda ilk girdi 0.4893'tür. Böylece $\Phi(2.3) = 0.4893$'tür.

(*d*) Herhangi $z \geq 3.9$ için $\Phi(Z)$'nin değeri 0.50'dir. Böylece, 4.3 değeri tabloda olmasa bile $\Phi(4.3) = 0.5000$'dir.

Tablo 6.1 ve eğrinin simetri özelliği kullanılarak herhangi iki değer z_1 ve z_2 arasındaki eğri altında kalan alan $P(z_1 \leq Z \leq z_2)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \begin{cases} \Phi(z_2) + \Phi(|z_1|) & z_1 \leq 0 \leq z_2 \\ \Phi(z_2) - \Phi(z_1) & 0 \leq z_1 \leq z_2 \\ \Phi(|z_1|) - \Phi(|z_2|) & z_1 \leq z_2 \leq 0 \end{cases}$$

Bu durumlar Şekil 6.3'te tanımlanmıştır.



(*a*) $z_1 \leq 0 \leq z_2$ (*b*) $0 \leq z_1 \leq z_2$ (*c*) $z_1 \leq z_2 \leq 0$

Şekil 6-3

ÖRNEK 6.6 Standart normal dağılım Z için aşağıdaki olasılıkları bulunuz:

(*a*) $P(-0.5 \leq Z \leq 1.1)$ (*c*) $P(0.2 \leq Z \leq 1.4)$

(*b*) $P(-0.38 \leq Z \leq 1.72)$ (*d*) $P(-1.5 \leq Z \leq -0.7)$

(*a*) Şekil 6-3(*a*)'ya göre

$$P(-0.5 \leq Z \leq 1.1) = \Phi(1.1) + \Phi(0.5) = 0.364\,3 + 0.191\,5 = 0.555\,8$$

(*b*) Şekil 6-3(*a*)'ya göre

$$P(-0.38 \leq Z \leq 1.72) = \Phi(1.72) + \Phi(0.38) = 0.457\,3 + 0.148\,0 = 0.605\,3$$

(*c*) Şekil 6-3(*b*)'ye göre

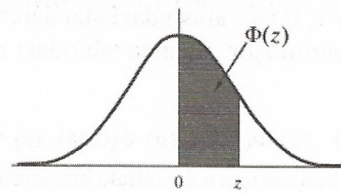
$$P(0.2 \leq Z \leq 1.4) = \Phi(1.4) - \Phi(0.2) = 0.419\,2 - 0.079\,3 = 0.339\,9$$

(*d*) Şekil 6-3(*c*)'ye göre

$$P(-1.5 \leq Z \leq -0.7) = \Phi(1.5) - \Phi(0.7) = 0.433\,2 - 0.258\,0 = 0.175\,2$$

Tablo 6.1 Standart Normal Eğri Alanları

Bu tablo, 0.01 düzeyde 0 ve $z \geq 0$ arasındaki standart normal dağılımın ϕ altındaki $\Phi(z)$ alanı verir.



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000