Örnekleme Dağılımları 1

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN
2021

Anakütle (Popülasyon)

(population, universe)

- Üzerinde çalışılan,araştırmaya konu olan ***bütün birimlere*** denir.
- İstatistiksel sonuçların genelleştirileceği gruptur.
- Anakütle,
  - İlgilenilen belirlenmiş özelliğin ***olabilir tüm gözlemleri*** topluluğudur.
- Birim,
  - Anakütleyi oluşturan ve sayısal olarak incelenebilen olaylardan her biridir.

Özellik : → Sayısal / Sayısal olmayan

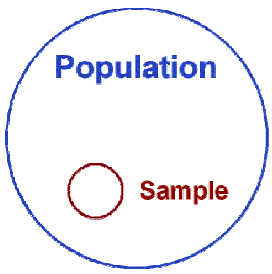
Anakütle : → Niceliksel / Niteliksel

- **Örnek :** Anakütleyi içeren birimlerin bir kısmının oluşturduğu topluluğa örnek denir.
- **Parametre :** Anakütle olarak nitelendirilen yığının tümü için belirlenen özel değere parametre denir.

Örnek istatistikleri : ⟶ Anakütle parametreleri

Örnek

- Anakütleden seçilen ve anakütlenin özelliklerini yansıtma özelliğine sahip bir alt kümedir.
- Örneğin en önemli iki özelliği;
  - *zaman ve maliyet kaybını minimuma düşürmek,*
  - *anakütleyi iyi bir şekilde yansıtmak*



Parametre

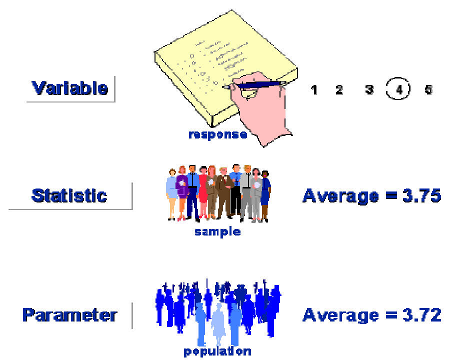
- Anakütlenin tanımlayıcı sayısal ölçüsüdür.
- Kütledeki gözlemlere dayandığından değeri genelde bilinmemektedir.
- Anakütlenin (popülasyonun) parametresi olarak tanımlanabilir.

- ***Parametreyi belirlemek için anakütledeki tüm elemanların incelenmesi gerekir.***

PARAMETREYE İLİŞKİN ÖRNEKLER:

- Bir tekstil fabrikasında bir yılda kullanılan ortalama boya miktarı

- Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'nde okuyan öğrencilerin sigara içme oranı



Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

Örnek İstatistiği

- **Alınan örnek yardımıyla bulunan parametre tahminine örnek istatistiği (istatistik) adı verilir.**

Örnek:

- Ankara'da üniversitede okuyan öğrencilerin aylık harcamalarının ortalamasını tahmin etmek amacıyla 200 öğrencilik bir örnek alınarak aylık harcama miktarlarının ortalamasının bulunması.

Değişken

- Her gözleme göre farklı değerler alabilen objelere, özelliklere ya da durumlara denir.

- **Örnekler:**
- Bankaların aylık mevduat faiz oranı
- Bir markete bir günde gelen müşteri sayısı
- Tütün işleyen bir fabrikada günlük işlenen tütün miktarı

Anakütle-Örnek İlişkisi

- Anakütle parametrelerinin hesaplanması zor
- anakütleyi en iyi bir şekilde temsil edecek örnek alınarak,
- parametre tahminleyicisi olan örnek istatistiği elde edilir.

Örnek:

- Ankara'daki üniversitelerde öğrencilerin sigara içme oranını tahminlemek amacıyla
- tüm üniversite öğrencilerine tek tek sor

?

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

Anakütle-Örnek İlişkisi

- Örnek:
- Ankara'daki üniversitelerde öğrencilerin sigara içme oranını tahminlemek amacıyla tüm üniversite öğrencilerine ***tek tek sorup cevap almaktansa belirli örnekleme yöntemlerini kullanarak yeterli sayıda öğrencinin seçilerek sigara içme oranının tahminlenmesi.***

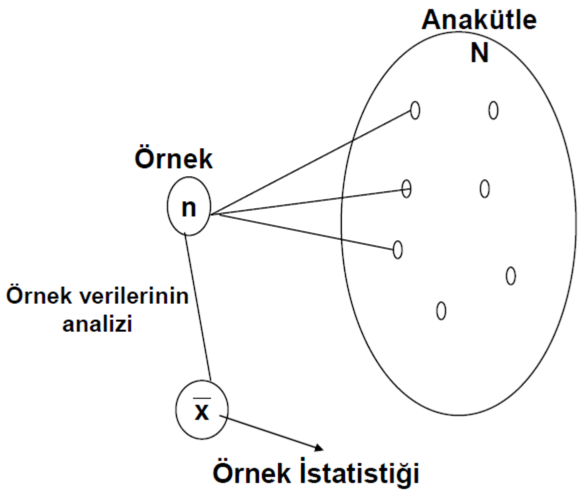
Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

Anakütle-Örnek İlişkisi

- Anakütle Parametreleri ve Örnek İstatistikleri

Anakütle Parametresi	Örnek İstatistiği
μ (Anakütle Ortalaması)	$\overline{X}$ (Örnek Ortalaması)
σ^2 (Anakütle Varyansı)	S^2 (Örnek Varyansı)
$p'veya\ (\pi)$ (Anakütle Oranı)	p (Örnek Oranı)

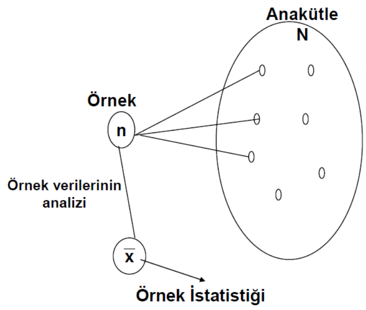
Anakütle-Örnek İlişkisi



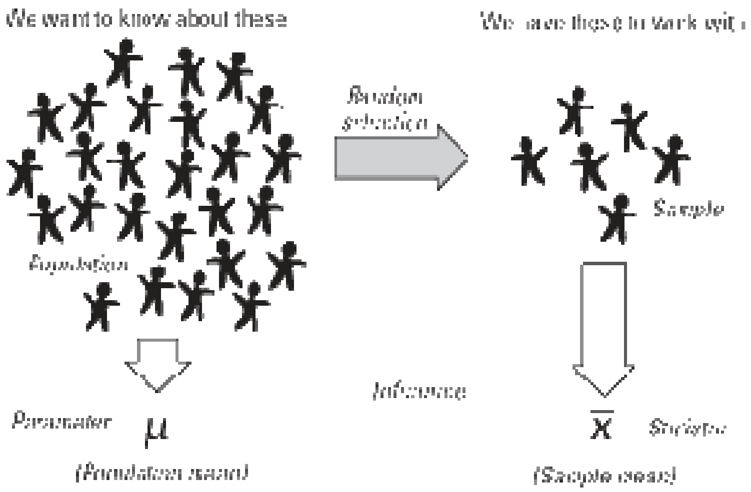
Anakütle-Örnek İlişkisi

- Anakütle parametresi μ
- Örnekten elde edilen örnek istatistiği ……

  anakütle parametresi ….' ye ne kadar yakın ise yapılan çalışma o kadar …… (kötüdür?? iyidir??)



Anakütle-Örnek İlişkisi



ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

- **1) <u>Rassal Değişken:</u>** Deneyin bir tekrarından diğerine ölçüm değeri değişebilen sayısal değişkendir.
- **2) <u>Rassal Örneklem:</u>** Aynı dağılıma sahip X1, X2,…,Xn bağımsız rassal değişkenlerine rassal örneklem denir.
- **3) <u>İstatistik:</u>** Bir rassal örneklemdeki rassal değişkenlerin bir fonksiyonudur.
- **4) <u>Örneklem Dağılımı:</u>** Bir istatistiğe ait olasılık dağılımına denir.

ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

- Birçok durumda anakütlenin tamamı gözlemlenemediğinden ilgilenilen anakütleden örnekler almak kaçınılmazdır.
- Örneklerden hesaplanan istatistikler, örnek büyüklüğü sabit olsa da, bir öncekinden farklı olarak bulunurlar.
- Aynı örnekleme bir süre sonra aynı koşullarda yapılırsa farklı sonuçlara ulaşılabilir.
- Bir başka ifadeyle, hesaplanan istatistik değişebilir ve yapılan örneklemeye bağlıdır.
- <u>Böylece, **rassal** bir nitelik taşıyan istatistiğin bir olasılık dağılımına sahip olması gerekir.</u>
- Örneklerden türetilen istatistikler, karşı gelen anakütle parametrelerine ilişkin yorumlar yapılmasını sağlar.

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

- **Örnekleme dağılımı** (sampling distribution) ; Bir istatistiğin sahip olduğu olasılık dağılımına denir.
- Örnekleme dağılımının standart sapması söz konusu **istatistiğin standart hatası** (standart error of the statistic) olarak adlandırılır.
  - Örneğin, otomobil jantındaki bijon çaplarının ortalamasının dağılımı **ortalamanın örnekleme dağılımı** (sampling distribution of mean) olarak tanımlanır.
- Bir anakütleden alınan n birimlik rassal örnek $X_1, X_2, \cdots, X_n$ olsun.
- Örnekten türetilebilir istatistiklerden bazıları
  - örnek ortalaması $\overline{X}$,
  - örnek varyansı S^2,
  - değişim aralığı R'dir.

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

"Anakütlenin dağılımı",
"parametrelerinin bilinmesi" ve
"alınan örnek büyüklüğü"

örnek ortalamasının dağılımını etkilemektedir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$: *n birimlik örnek*

Dağılımın ortalaması μ *ve varyansı* σ^2 *ise,*

$\overline{X}$: *Örnek ortalaması,*

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

- Örnek ortalamasının örnekleme dağılımı için öncelikle
- dağılımın ortalaması ve varyansı bulunmalıdır.

$$\bar{X} \sim Dağılım\ (ortalama?\,, varyans?)$$

$$\bar{X} \sim Dağılım\ (\mu_X, \sigma_{\bar{X}}^2)$$

$$\mu_{\bar{X}} = ?? \qquad \sigma_{\bar{X}}^2 = ??$$

- Dağılımın ortalaması beklenen değer yaklaşımı ile bulunur.

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

$$B[X_i] = \mu_i\ ve\ V(X_i) = \sigma^2$$

olduğundan örnek ortalamasının beklenen değeri,

diğer bir ifadeyle olasılık dağılımının ortalaması,

$$\mu_{\bar{X}} = B\ [\bar{X}]$$

$$B\ [\bar{X}] = B\ [?\,]$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

$örnek\ ortalamasının\ beklenen\ değeri\ \ \mu_{\bar{X}} = B\,[\bar{X}]$

$$B\,[\bar{X}] = B\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right]$$
$$= \frac{1}{n} B\left[\sum_i X_i\right]$$
$$= \frac{1}{n} B\,[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n}(B\,[X_1] + B\,[X_2] + \cdots + B\,[X_n])$$
$$= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu)$$

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

$\mu_{\bar{X}} = ??$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

$örnek\ ortalamasının\ beklenen\ değeri\ \ \mu_{\bar{X}} = B\,[\bar{X}]$

$$B\,[\bar{X}] = B\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right]$$
$$= \frac{1}{n} B\left[\sum_i X_i\right]$$
$$= \frac{1}{n} B\,[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n}(B\,[X_1] + B\,[X_2] + \cdots + B\,[X_n])$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \frac{n * \mu}{n}$$

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

$$\text{örnek ortalamasının beklenen değeri } \mu_{\bar{X}} = B\,[\bar{X}]$$

$$\mu_{\bar{X}} = ??\ = \mu$$

$$\begin{aligned} B\,[\bar{X}] &= B\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n} B\left[\sum_i X_i\right] \\ &= \frac{1}{n} B\,[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= \frac{1}{n}(B\,[X_1] + B\,[X_2] + \cdots + B\,[X_n]) \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) \quad = \frac{n * \mu}{n} \quad = \mu \end{aligned}$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

$$\bar{X} \sim Dağılım\,(\mu_{\bar{X}} = \mu, \sigma^2_{\bar{X}} = ?)$$

$$\bar{X} \sim Dağılım\,(\mu,\ \sigma^2_{\bar{X}} = ?)$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Benzer yaklaşımla, örnek ortalamasının varyansı, diğer bir ifadeyle olasılık dağılımının varyansı da,

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

örnek ortalamasının varyansı

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2} (\underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}) \\ &= \frac{1}{n^2}\, n\, \sigma^2 \end{aligned}$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

örnek ortalamasının varyansı

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \underbrace{(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2)}$$

$$= \frac{1}{n^2} n\,\sigma^2 \qquad = \frac{\sigma^2}{n}$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

örnek ortalamasının beklenen değeri

$$\mu_{\bar{X}} = ?? = \mu$$

örnek ortalamasının varyansı

$$V(\bar{X}) = ?? = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X} \sim Dağılım\ (\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2)$$

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Böylece, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \ldots, n,$ *olduğunda,*

örnek ortalaması $\overline{X}$*'nın örnekleme dağılımı,*

ortalaması μ *ve varyansı* σ^2/n *olan normal dağılım olur.*

Sembolik gösterimle,

μ_X: $\bar{X}$*'nın dağılımının ortalaması,*

$\sigma_{\bar{X}}^2$: $\bar{X}$*'nın dağılımının varyansı* *olmak üzere,*

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \; ve \; \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

olur ve sonuçta anakütle ortalamasının örnekleme dağılımı

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

- Örnek ortalamasının standart sapması $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ aynı zamanda $\overline{X}$'nın **standart hatası** olarak da adlandırılır.
- Örnekten hesaplanan standart sapma S *örnekteki gözlemler arasındaki değişmeyi* ölçer.
- Örnek ortalamasının standart sapması $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ise, *elde edilebilecek n-birimlik örneklerin ortalamaları* $\overline{X}_i$ *değerlerinin değişimini* ölçer.

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

- Eğer örneklemenin yapıldığı sürecin (anakütlenin) dağılımı bilinmiyorsa, örnek büyüklüğü yeterli olduğunda 'nın örnekleme dağılımı yine yaklaşık normal dağılım olur.
- Sözedilen bu özellik izleyen **Merkezi Limit Teoremi**'nin - MLT- (central limit theorem) bir sonucudur.

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı Merkezi Limit Teoremi

Merkezi Limit Teoremi . Ortalaması μ ve sonlu varyansı σ^2 olan bir anakütleden rassal olarak alınan n birimlik örneğin ortalaması $\overline{X}$ ise,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

rassal değişkeninin dağılımı, $n \to \infty$ için (yeterince büyük olduğunda) standart normal dağılım olur. Sembolik gösterimle,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

yazılır.

Eğer, $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ise, $z \in \Re$ için, $\lim_{n\to\infty} P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$ olur.

Sözel anlatımla, standartlaştırılmış örnek ortalamasının birikimli dağılım fonksiyonu, standart normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonuna yakınsar.

MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

Herhangi bir olasılık dağılımına sahip bir anakütleden (X) örnekleme yapıyorsak, örneklem ortalamasının ($\bar{X}$) örnekleme dağılımı, eğer örneklem büyüklüğü (n) yeterince büyükse ($n \geq 30\ ise$), ortalama μ, ve varyans σ^2/n ile yaklaşık normaldir. Bu istatistikte en faydalı teoremlerden biridir.

MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

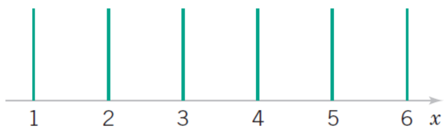
Yani kısaca merkezi limit teoreminden,

anakütledeki birimlerin (X) dağılımı ne olursa olsun,

eğer örneklemdeki birim sayısı yeterince büyük ise ($n \geq 30\ ise$), örneklem ortalaması ($\bar{X}$) normal dağılıma sahip olacaktır.

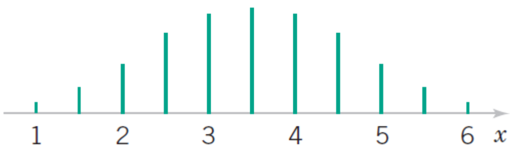
1 zar atılsın
Örneklem Dağılımı

Örnek(lem)	P(X)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



(a) One die

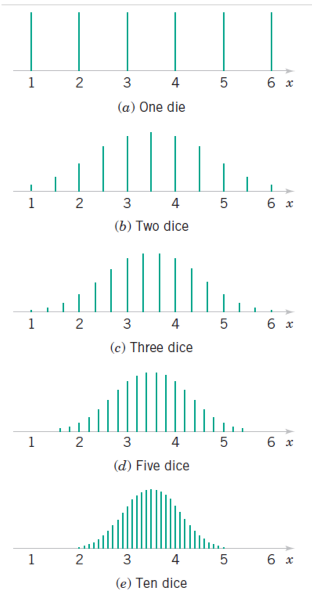
2 zar atılsın
Örneklem Dağılımı



(b) Two dice

1) Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Örnek(lem)	P(X)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı - ÖZET

i) σ^2 biliniyor (n önemli değil)

$$\bar{X} \sim N\left(\mu\,,\ \sigma^2/n\right) \quad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\,(0\,,1)$$

ii) σ^2 bilinmiyor ve $n \geq 30$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu\,,\ s^2/n\right) \quad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim N\,(0\,,1)$$

Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı - ÖZET

iii) σ^2 bilinmiyor ve $n < 30$

$$\bar{X} \sim t_{\alpha,(n-1)} \quad T = \bar{X} - \mu \Big/ {s/\sqrt{n}} \sim t_{\alpha,(n-1)}$$

iii) Sonlu anakütle (N)
σ^2 biliniyor (n önemli değil) - çekilen örneğin iade edilmediği durumlar

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} * \frac{N-n}{N-1}\right) \qquad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \sim N(0,1)$$

Örnek Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

i) σ^2 biliniyor (n önemli değil)

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad Z = \bar{X} - \mu \Big/ {\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- **ÖRNEK-1:** Bir el fenerinde kullanılan ampulün ömrü ortalaması 400 saat ve standart sapması 20 saat olmak üzere yaklaşık normal dağılmaktadır. Rassal olarak seçilen 16 ampulün ortalama ömrünün 390 saatten az çıkması ile 398-413 saat arasında çıkması olasılıklarını hesaplayınız.

Örnek 1

ÇÖZÜM :

X_i : Ampul ömrü $\rightarrow X_i \sim N(400,\ 20^2) \rightarrow \overline{X} \sim N(400,\ 20^2/16)$

$P(\overline{X}<390) = ?$ $\quad P(398<\overline{X}<413) = ?$

MLT yardımıyla, birinci olasılık

$P(\overline{X}<390) =$

Örnek 1

ÇÖZÜM :

X_i : Ampul ömrü $\rightarrow X_i \sim N(400, 20^2) \rightarrow \overline{X} \sim N(400, 20^2/16)$

$P(\overline{X}<390) = ?$ $P(398<\overline{X}<413) = ?$

MLT yardımıyla, birinci olasılık

$$P(\overline{X}<390) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{390-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

olarak yazılır ve izleyen işlemler yapılarak, standart normal dağılım tablosundan

Örnek 1

ÇÖZÜM :

X_i : Ampul ömrü $\rightarrow X_i \sim N(400, 20^2) \rightarrow \overline{X} \sim N(400, 20^2/16)$

$P(\overline{X}<390) = ?$ $P(398<\overline{X}<413) = ?$

MLT yardımıyla, birinci olasılık

$$P(\overline{X}<390) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{390-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

olarak yazılır ve izleyen işlemler yapılarak, standart normal dağılım tablosundan

$$= P\left(Z < \frac{390-400}{20/\sqrt{16}}\right) =$$

Örnek 1

ÇÖZÜM :

X_i : Ampul ömrü $\rightarrow X_i \sim N(400, 20^2) \rightarrow \bar{X} \sim N(400, 20^2/16)$

$P(\bar{X}<390) = ?$ $P(398<\bar{X}<413) = ?$

MLT yardımıyla, birinci olasılık

$$P(\bar{X}<390) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{390-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

olarak yazılır ve izleyen işlemler yapılarak, standart normal dağılım tablosundan

$$= P\left(Z < \frac{390-400}{20/\sqrt{16}}\right) = P(Z < -2) =$$

Örnek 1

ÇÖZÜM :

X_i : Ampul ömrü $\rightarrow X_i \sim N(400, 20^2) \rightarrow \bar{X} \sim N(400, 20^2/16)$

$P(\bar{X}<390) = ?$ $P(398<\bar{X}<413) = ?$

MLT yardımıyla, birinci olasılık

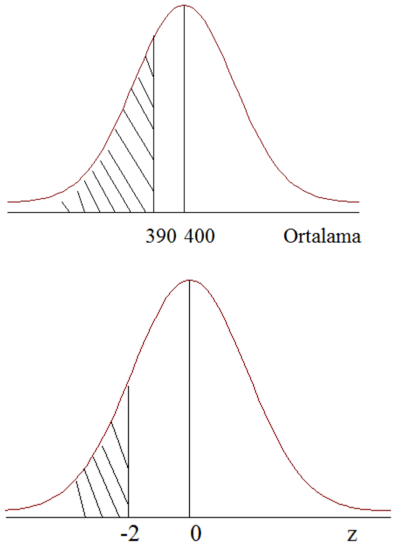
$$P(\bar{X}<390) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{390-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

olarak yazılır ve izleyen işlemler yapılarak, standart normal dağılım tablosundan

$$= P\left(Z < \frac{390-400}{20/\sqrt{16}}\right) = P(Z < -2) = 0{,}0228$$

olarak bulunur.

Örnek 1



16 ampulün ortalama ömrüne ilişkin P($\overline{X}$<390) olasılığı.

Örnek 1

Hesaplanan bu olasılığın anlamı şudur :

Sözedilen el feneri ampullerinden 16 adetlik örnekler alınarak ortalama ömür hesaplanırsa, ortalamaların %2,28'inin 390 saatten küçük çıkması beklenir.

Örnek 1

İkinci olasılık benzer işlemlerle,

$$P(398<\overline{X}<413) = P\left(\frac{398-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{413-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Örnek 1

İkinci olasılık benzer işlemlerle,

$$P(398<\overline{X}<413) = P\left(\frac{398-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{413-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\frac{398-400}{20/\sqrt{16}} < Z < \frac{413-400}{20/\sqrt{16}}\right) =$$

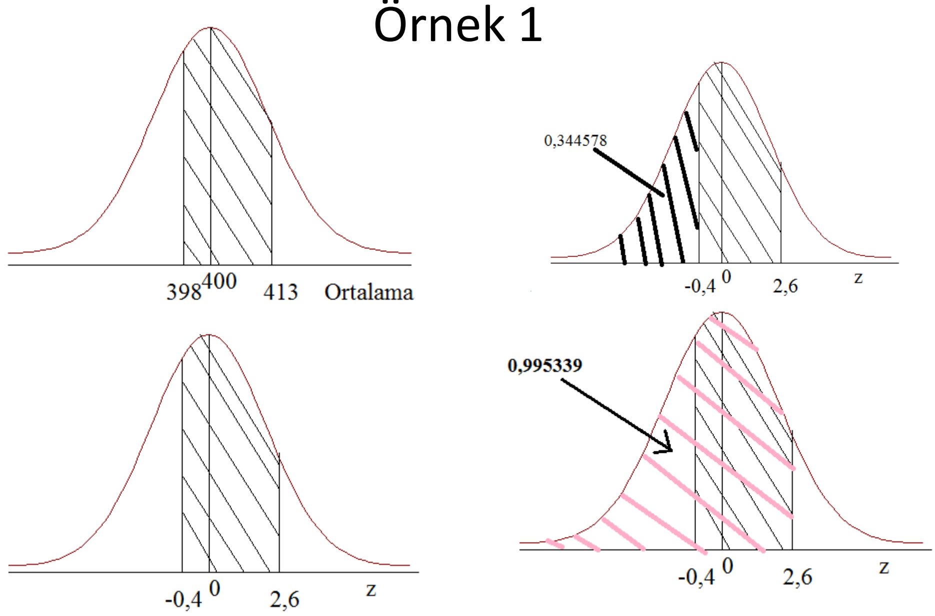
Örnek 1

İkinci olasılık benzer işlemlerle,

$$P(398<\overline{X}<413) = P\left(\frac{398-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{413-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

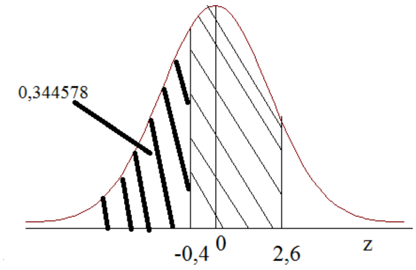
$$= P\left(\frac{398-400}{20/\sqrt{16}} < Z < \frac{413-400}{20/\sqrt{16}}\right) = P(-0{,}4 < Z < 2{,}6) =$$

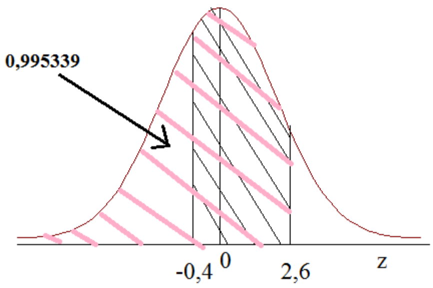
Örnek 1



16 ampulün ortalama ömrüne ilişkin P(398<$\overline{X}$<413) olasılığı.

Örnek 1





$$P\,(-0{,}4 < Z < 2{,}6) =$$
$$= 0{,}995339 - 0{,}344578$$
$$= 0{,}650761$$

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

Örnek 1

P(398< $\overline{X}$ <413) olasılığı.

$$P\,(-0{,}4 < Z < 2{,}6) =$$
$$= 0{,}650761$$

Hesaplanan olasılığın anlamı,

el feneri ampullerinden 16 adetlik örnekler alınarak ortalama ömür hesaplanırsa, ortalamaların %65,07'sinin 398-413 saat aralığında çıkması beklenir,

şeklindedir.

Doç. Dr. Meryem ULUSKAN - 2021

Örnek 2

ÖRNEK: X~N(μ, 100) olsun. n=100 ve n=120 için P(-1≤$\overline{X}$-μ≤1) olasılıklarını hesaplayınız. (Örnek ortalamasının anakütle ortalamasından en fazla ∓1 uzakta çıkması olasılığı?)

ÇÖZÜM:

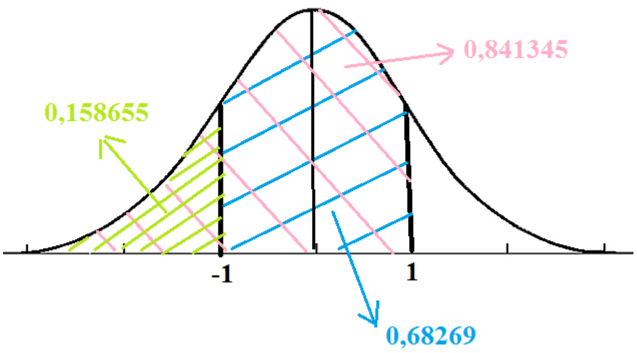
n=100 , σ^2 =100 ve σ =10 $\rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{X}} \rightarrow \bar{X}_1 \sim N\left(\mu, \frac{100}{100}\right)$

$$P(-1\leq \overline{X}-\mu\leq 1) = P\left(-\frac{1}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(-\frac{1}{10/\sqrt{100}} \leq Z \leq \frac{1}{10/\sqrt{100}}\right)$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}841345 - 0{,}158655 = 0{,}6826$$

veya $P(-1\leq Z\leq 1) = 2\cdot P(0\leq Z\leq 1) = 2\cdot 0{,}3423 = 0{,}6826$

Örnek 2



$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}841345 - 0{,}158655 = 0{,}6826$$

ÖRNEK: X~N(μ, 100) olsun. n=100 ve n=120 için P(-1≤$\bar{X}$-μ≤1) olasılıklarını hesaplayınız. (Örnek ortalamasının anakütle ortalamasından en fazla ∓1 uzakta çıkması olasılığı?)

ÇÖZÜM:

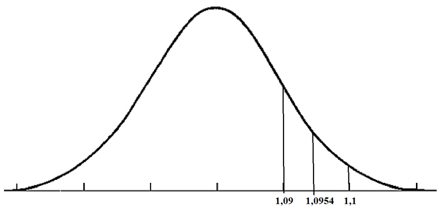
n=120 , σ^2 =100 ve σ =10 $\rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{X}} \rightarrow \bar{X}_2 \sim N\left(\mu, \frac{100}{120}\right)$

$$P(-1 \leq \bar{X} - \mu \leq 1) = P\left(-\frac{1}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(-\frac{1}{10/\sqrt{120}} \leq Z \leq \frac{1}{10/\sqrt{120}}\right)$$

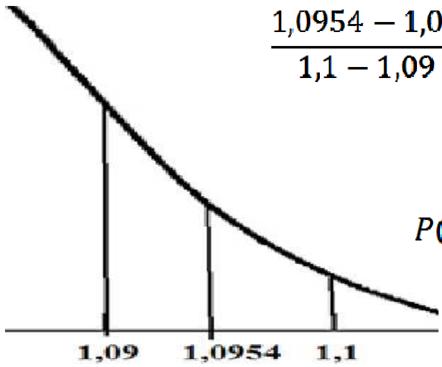
P(-1,0954≤Z≤1,0954) =

1,0954 için olasılığı bulalım (Tabloda yok)

Interpolasyon



$$\begin{pmatrix} 1{,}09 & 0{,}862143 \\ 1{,}0954 & X \\ 1{,}1 & 0{,}864334 \end{pmatrix}$$



$$\frac{1{,}0954 - 1{,}09}{1{,}1 - 1{,}09} = \frac{x - 0{,}862143}{0{,}864334 - 0{,}862143}$$

$$x = 0{,}8633$$

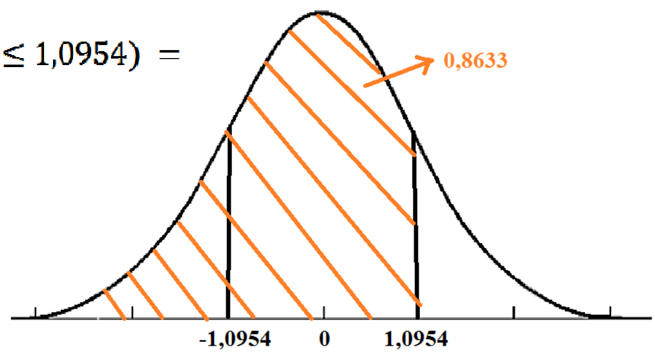
$$P(-1{,}0954 \leq Z \leq 1{,}0954) \ =$$

İnterpolasyon

$$\begin{pmatrix} 1{,}09 & 0{,}862143 \\ 1{,}0954 & X \\ 1{,}1 & 0{,}864334 \end{pmatrix}$$

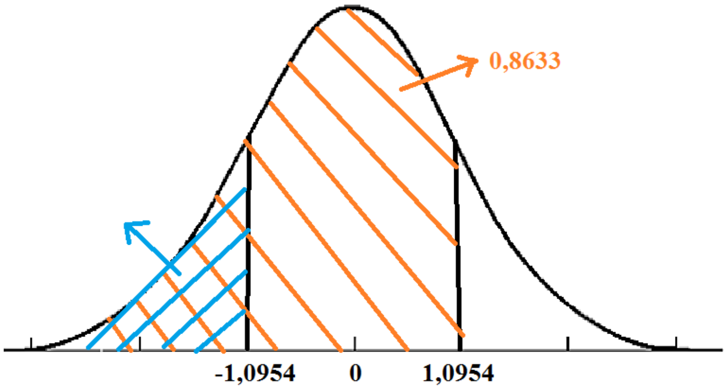
$$x = 0{,}8633$$

$$P(-1{,}0954 \leq Z \leq 1{,}0954) \ =$$



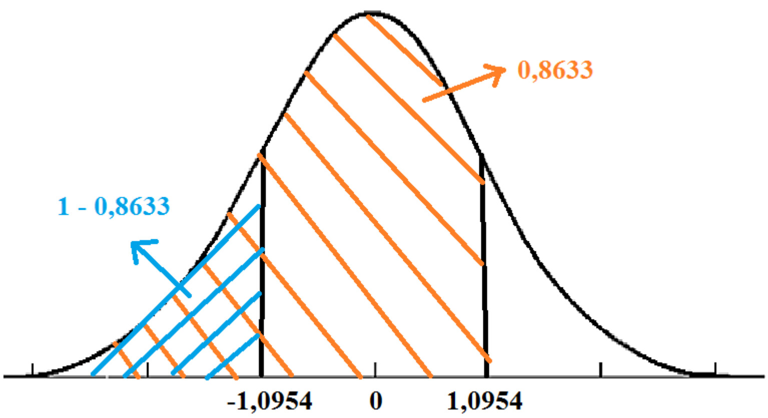
İnterpolasyon

$P(-1{,}0954 \leq Z \leq 1{,}0954)\ =$



İnterpolasyon

$P(-1{,}0954 \leq Z \leq 1{,}0954)\ =$



İnterpolasyon

$$P(-1{,}0954 \leq Z \leq 1{,}0954) = 0{,}7267$$

$$0{,}8633 - 0{,}1366 = 0{,}7267$$