ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

2022-2023 Bahar Yarıyılı

BULANIK MANTIK

YARIYIL	DERS						
	Teorik	Uygulama	Lab.	Kredisi	AKTS	TÜRÜ	DİLİ
4	2	0	0	2	3	Seçmeli	Türkçe

Dr. H. Serhan Yavuz

Hafta-4: Klasik İlişkiler, Bulanık İlişkiler

Mantık İlişkileri

Klasik İlişkiler vs. Bulanık İlişkiler

İlişki (Relation)

İlişki (Relation): Matematikte, bir küme üzerindeki bir ilişki, verilen iki küme üyesi arasında olabilir veya olmayabilir.
Bir eleman ile diğer elemanlar arasında bağlantı olup olmadığı «ilişki» kavramı üzerinden tarif edilir.

Klasik mantıkta ilişki: Küme üyeleri ya "tamamen ilişkilidir" veya "tamamen ilişkisizdir".

Bulanık mantıkta ilişki: İki veya daha fazla kümenin öğeleri arasındaki ilişkiler oransal değerlerle tarif edilebilir.

Kartezyen Çarpımı (Cartesian Product)

Kartezyen çarpımı:

A ve B kümeleri verildiğinde, birinci bileşeni A kümesinden ve ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulmuş tüm sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye **A kartezyen B** kümesi denir, yapılan bu işleme de A ile B'nin kartezyen çarpımı denir ve **AxB** ile gösterilir.

Sıralı r'li (ordered r-tuple) **gösterimi:**

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

(bileşenlerin sıralaması önemlidir)

Kartezyen Çarpımı

Klasik kümeler için Kartezyen çarpım:

$A_1, A_2, \ldots A_r$, kümeleri $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ sıralı r'lileri ile $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_r \in A_r$ olacak biçimde gösterilmiş olsun.

$A_1, A_2, \ldots, A_r$ kümelerinin Kartezyen çarpımı $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ biçiminde gösterilir. Burada birinci bileşen A_1 kümesinden, ikinci bileşen A_2 kümesinden, …, r'inci bileşen A_r kümesinden gelmelidir.

Kartezyen Çarpımı

Örnek: İki klasik küme ; $A=\{0,1\}$ ve $B=\{a,b,c\}$ olsun.

$AxB = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$

$BxA = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$

$AxA = A^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$BxB = B^2$

$= (a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

Klasik İlişki

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_r$ Kartezyen çarpımı, $A_1, A_2, ... A_r$ üzerinden r'li ilişki olarak adlandırılır.

Eğer r = 2 ise, $A_1 x A_2$ işlemi, A_1'den A_2'ye ikili ilişki (binary relation) olarak adlandırılır.

$$X \times Y(x,y) = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Klasik İlişki

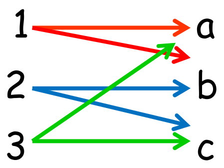
Her evrendeki sıralı element çiftleri arasındaki klasik ilişkinin gücü, $\mathcal{X}$ simgesiyle gösterilen karakteristik fonksiyonla ölçülür.

$$\mathcal{X}_{XxY}(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in XxY \\ 0, (x,y) \notin XxY \end{cases}$$

Sonlu ayrık kümeler bir ilişki matrisi ile ilişkilendirilir.

Klasik İlişki

Örnek :



$$R_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{veya} \quad R_2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Klasik İlişki

Tanımlar:

Birim İlişki (identity relation): $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = **I**

Boş ilişki (Null Relation): $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = **zeros**

Klasik İlişki

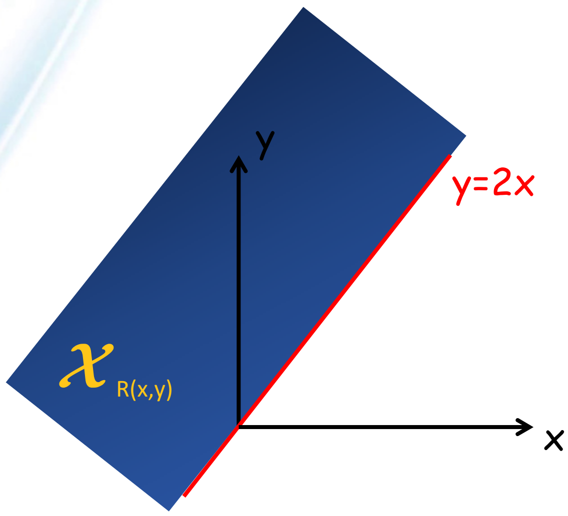
Tam İlişki (Complete Relation): $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = ones

Klasik İlişki

İlişkiler sürekli uzaylarda da tanımlanabilir.

Örnek: R = {(x,y) | y≥2x, x∈X, y∈Y}.

$$\mathcal{X}_{R(x,y)} = \begin{cases} 1, (x,y) \in X \times Y \\ 0, (x,y) \notin X \times Y \end{cases}$$



Klasik İlişki

Kardinalite (Cardinality) – Nicel Sayı:

Kardinalite, kümenin büyüklüğünü göstermek için kullanılır. Bir klasik kümenin kardinalitesi, eleman sayısına eşittir.

X kümesinin kardinalitesi n_X ve Y kümesinin kardinalitesi n_Y, ise, X $\times$ Y kümesinin kardinalitesi

$$n_{X \times Y} = n_X \times n_Y \text{ olur.}$$

Klasik İlişki

Klasik İlişkilerde İşlemler:

Birleşim

$R \cup S \rightarrow \mathcal{X}_{R \cup S}(x,y) = \max[\mathcal{X}_R(x,y), \mathcal{X}_S(x,y)]$

Kesişim

$R \cap S \rightarrow \mathcal{X}_{R \cap S}(x,y) = \min[\mathcal{X}_R(x,y), \mathcal{X}_S(x,y)]$

Tümleyen

$\bar{R} \rightarrow \mathcal{X}_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mathcal{X}_R(x,y)$

Klasik kümelerde verilen değişme, birleşme, involüsyon (içe kıvrılma), ve eşkuvvetlilik (idempotency) özellikleri klasik ilişkilerde de geçerlidir.

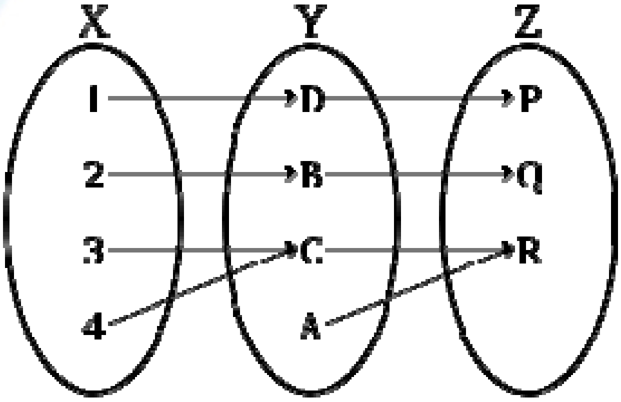
Klasik İlişki

Bileşke:

R: X→Y ve S: Y→Z ise,

T: X→Z olacak biçimde tarif edilen T=R∘S ilişkisi bileşke (composition) olarak adlandırılır.

Bileşke



Bileşke Operatörleri

1. Max-Min:

$$T=R\circ S \Rightarrow \mathcal{X}_{T(x,z)} = \bigvee_{y\in Y} (\mathcal{X}_R(x,y) \wedge \mathcal{X}_S(y,z))$$

2. Max-Product:

$$T=R\circ S \Rightarrow \mathcal{X}_{T(x,z)} = \bigvee_{y\in Y} (\mathcal{X}_R(x,y) \cdot \mathcal{X}_S(y,z))$$

Klasik İlişki

Örnek: Max-min prensibini kullanarak

$T=R\circ S$ bileşkesini hesaplayınız.

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad S = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

örneğe devam

- Satır-1, sütun-1 için örnek işlem (max-min bileşke)

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{and} \quad S = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mu_T(x1, z1) = \max[\min(1, 0), \min(0, 0), \min(1, 0), \min(0, 0)] = 0$

$$T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

örneğe devam

- Satır-1, sütun-2 için örnek işlem (max-min bileşke)

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{and} \quad S = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mu_T(x1, z1) = \max[\min(1, 0), \min(0, 0), \min(1, 0), \min(0, 0)] = 0$

$\mu_T(x1, z2) = \max[\min(1, 1), \min(0, 0), \min(1, 1), \min(0, 0)] = 1$

$$T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

örneğe devam

- Benzer işlemler tüm satır/sütunlar için yapıldığında:

R: X→Y, S:Y→Z ⇒ T:X→Z

Çözüm: $\boxed{T = \begin{array}{c|cc} & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{array}}$

Bulanık İlişkiler

Fuzzy Relation:

Bir $\underset{\sim}{R}$ bulanık ilişkisi, X x Y Kartezyen uzayından [0,1] aralığına bir eşlemedir. Bu eşlemenin (veya haritalamanın) gücü, iki evrenden gelen sıralı ikililer için ilişkinin üyelik fonksiyonu ile ifade edilir:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y).$$

Bulanık İlişkiler

Bulanık İlişkinin Kardinalite değeri: ∞

Herhangi bir evrendeki bulanık kümelerin kardinalite değeri sonsuz olduğundan, iki veya daha fazla evren arasındaki bulanık ilişkinin kardinalitesi de sonsuzdur.

Örnek:

$X = Y = U = \{1,2,3,4,5\}$ olsun.

$\underset{\sim}{R} = \{((x,y), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$ ilişkisi $\mu_{\underset{\sim}{R}}(u,v) = \begin{cases} 1 & |u-v| = 0 \\ 0.8 & |u-v| = 1 \\ 0.3 & |u-v| = 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanırsa, ilişki matrisini yazın.

$$M_{\underset{\sim}{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

Bulanık Kartezyen Çarpım

Fuzzy Cartesian Product:

$\underset{\sim}{A}$ kümesi X, $\underset{\sim}{B}$ kümesi de Y evrensel kümesinde tanımlanmış olsun.

$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{R} \subset X x Y,$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}}(x,y) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right)$$

Bulanık Kartezyen Çarpım

Örnek:

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} \qquad \underset{\sim}{B} = \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.4}{y_2}$$

$$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bulanık Kartezyen Çarpım İşlemleri

$\underset{\sim}{R}$ ve $\underset{\sim}{S}$ bulanık ilişkileri XxY kartezyen çarpım uzayında tanımlansın,

Birleşim : $\mu_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}}(x,y) = \max(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y), \mu_{\underset{\sim}{S}}(x,y))$

Kesişim : $\mu_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}}(x,y) = \min(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y), \mu_{\underset{\sim}{S}}(x,y))$

Tümleyen : $\mu_{\overline{\underset{\sim}{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$

Klasik ve Bulanık İlişkiler

Klasik ilişkilerde verilen *değişme*, *birleşme*, *dağılma*, *involüsyon* ve *eşkuvvetlilik* özellikleri bulanık ilişkiler için de geçerlidir ancak **excluded middle kanunları** geçerli değildir.

$\underset{\sim}{R} \cup \overline{\underset{\sim}{R}} \neq E$ E: Tam ilişki (complete relation)

$\underset{\sim}{R} \cap \overline{\underset{\sim}{R}} \neq O$ O: Boş ilişki (null relation)

Bulanık Bileşkeler

Fuzzy Compositions:

Bulanık bileşkeler, tıpkı klasik bileşkelere olduğu gibi tanımlanabilir. Burada, klasik kümeler yerine bulanık kümeler kullanılmaktadır.

$$\underset{\sim}{R} = X \times Y,\ \underset{\sim}{S} = Y \times Z \Rightarrow \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S},\quad \underset{\sim}{T}: X \times Z.$$

Bulanık Bileşkeler

Max-Min bileşke:

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(y,z)\right)$$

Max-Product bileşke:

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(y,z)\right)$$

Bulanık Bileşkeler

Bileşkelerde değişme özelliği yoktur.

Bu durum klasik bileşke için de bulanık bileşke için de geçerlidir.

$$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S} \neq \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{R}$$

Örnek:

$X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{ve} \quad \underset{\sim}{S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{ise,}$$

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S} \; ?$$

Cevaplar:

$$\underset{\sim}{T} = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ x_2 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \end{array}$$ (Max-Min Bileşke)

$$\underset{\sim}{T} = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & 0.63 & 0.42 & 0.25 \\ x_2 & 0.72 & 0.48 & 0.2 \end{array}$$ (Max-Product Bileşke)

İlişkiler özellikle graf teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Aşağıda verilen graf, küme gösterimi ile X = {1, 2, 3} olarak etiketlenen üç öğeden oluşan bir evreni tanımlar. Bu grafta reflexivity (yansıma), symmetry (simetri) ve transitivity (geçişlilik) özellikleri özetlenmiştir.

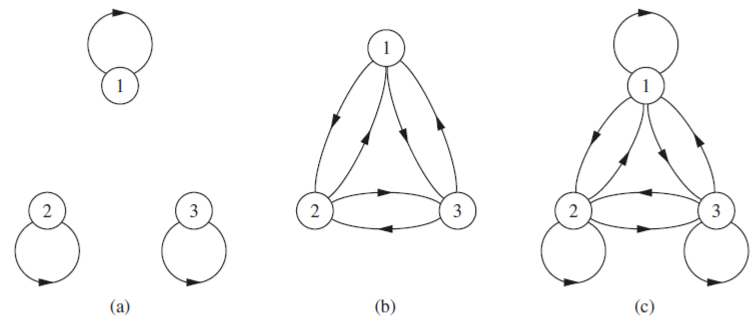


FIGURE 3.8
Three-vertex graphs for properties of (a) reflexivity, (b) symmetry, and (c) transitivity (Gill, 1976).

İlişki Özellikleri

	Klasik	Bulanık
Yansıma:	$(x_i,x_i) \in R$	$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i,x_i) = 1$
Simetri:	$(x_i,x_j) \in R \Rightarrow (x_j,x_i) \in R$	$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i,x_j) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_j,x_i)$
Geçişlilik:	$(x_i,x_j) \in R,\ (x_j,x_k) \in R \Rightarrow (x_i,x_k) \in R$	$\mu\ (x_i,x_j) = \lambda_1,\ \mu\ (x_j,x_k) = \lambda_2, \Rightarrow \mu\ (x_i,x_k) = \lambda$ öyle ki $\lambda \geq \min(\lambda_1, \lambda_2)$

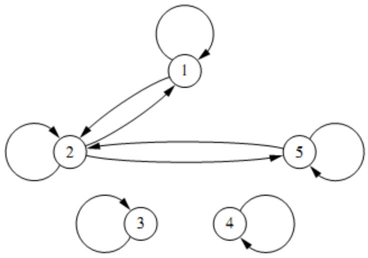
Özel İlişkiler

Denklik İlişkisi: Bir R ilişkisi, *yansıma*, *simetri* ve *geçişlilik* özelliklerinin her üçüne sahipse bir denklik ilişkisidir.

Tolerans İlişkisi: Bir R ilişkisi, *yansıma* ve *simetri* özelliklerini sergilerse, tolerans ilişkisi olarak adlandırılır.

Örnek:

- Aşağıdaki graf bir tolerans ilişkisidir.



- Eğer $(x_1,x_5) \in R_1$ olsaydı, denklik ilişkisi olurdu.

Örnek:

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu ilişki yansıma ve simetri özelliklerini sağlar ancak geçişlilik özelliğini sağlamamaktadır.

$\mu_R(x_1, x_2) = 0.8$, $\mu_R(x_2, x_5) = 0.9 \geq 0.8$
but
$\mu_R(x_1, x_5) = 0.2 \leq \min(0.8, 0.9)$

Çalışma Ödevi

Ders kitabında bölüm sonu sorularını inceleyip çözmeyi deneyiniz.

Ders Sonu: Soru - Cevap