



# ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

2022-2023 Bahar Yarıyılı

## BULANIK MANTIK

YARIYIL	DERS						
	Teorik	Uygulama	Lab.	Kredisi	AKTS	TÜRÜ	DİLİ
4	2	0	0	2	3	Seçmeli	Türkçe

Dr. H. Serhan Yavuz

**Hafta-3: Bulanık Küme İşlemleri, Kartezyen Çarpım**

## Bulanık Kümeler

**Bulanık küme:**

$X$  : Evrensel küme  $X = \{ x \}$

$\tilde{A}$  : Bulanık  $A$  kümesi.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$  :  $x$  elemanının  $\tilde{A}$  kümesine olan üyelik değeri

$\tilde{A} = \{ ( x, \mu_{\tilde{A}}(x) ) \mid x \in X \}$

$\mu_{\tilde{A}}(x) \in [ 0, 1 ]$

# Bulanık Kümeler

## Bulanık küme:

Ayrık küme gösterimi:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu(x_1)}{x_1} + \frac{\mu(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu(x_n)}{x_n} \right\}$$

(bölme işlemi değildir (çizgi işaretidir))

Sürekli küme gösterimi:

$$\tilde{A} = \left\{ \int \frac{\mu(x)}{x} \right\}$$

Toplama işlemi değildir (kesikli uzayda elemanların bir araya gelmesini simgeler)

İntegral alma işlemi değildir, sürekli uzayda elemanların bir araya gelmesini simgeler

# Bulanık Kümeler

**Örnek :** 6 kişilik bir aile düşünelim. Aile bireylerinin yaşları aşağıda gösterilsin.

Ahmet : 52	Fatma : 45	Mithat : 27
Dilara : 25	Nuray : 19	Murat : 3

Kendi üyelik tanımlamalarınızla Yaşlı ( $\tilde{Q}$ ) bulanık kümesini oluşturun.

# Bulanık Kümeler

## Çözüm:

$X$  : Evrensel küme (Kişiler)

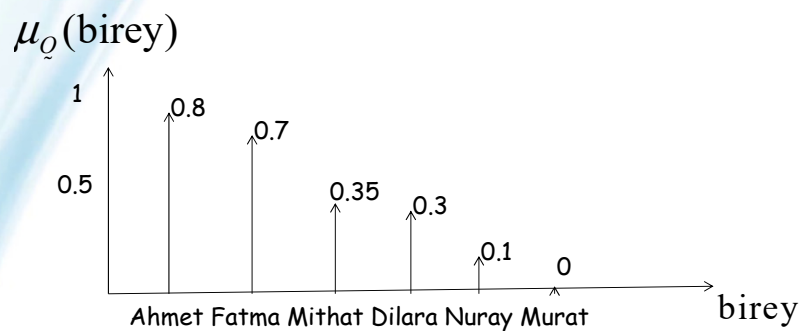
$X = \{ \text{Ahmet, Fatma, Mithat, Dilara, Nuray, Murat} \}$

$\tilde{Q}$  : Bulanık küme "Yaşlı" ("Old")

$\tilde{Q} = \{ \frac{0.8}{\text{Ahmet}}, \frac{0.7}{\text{Fatma}}, \frac{0.35}{\text{Mithat}}, \frac{0.3}{\text{Dilara}}, \frac{0.1}{\text{Nuray}} \}$

Ayrık bulanık kümeler için + işareti yerine , (virgül) de kullanılabilir

# Bulanık Kümeler



Üyeliklerin Şekil Olarak Gösterilmesi

## Bulanık Kümeler

**Örnek:** Sürekli evrende "Genç" bulanık kümesi oluşturalım.

### Çözüm

Basamak-1 : Evrensel küme

$$X = [ 0, 120 ] \text{ (insanların yaşı)}$$

## Bulanık Kümeler

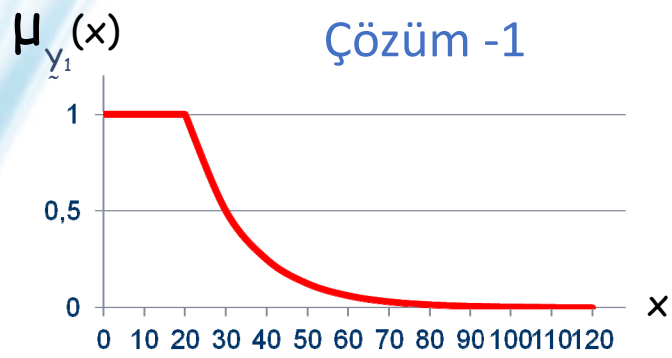
Basamak-2 : Genç bulanık kümesi ismi

$$\underline{Y} \rightarrow \text{olsun ("young")}$$

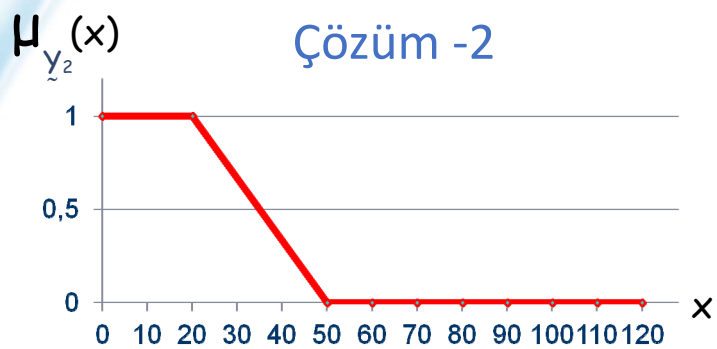
Basamak-3:

Üyelik değerleri belirleme

## Bulanık Kümeler



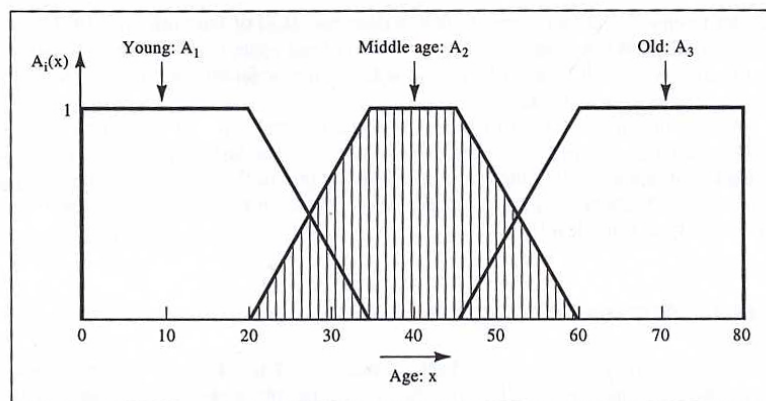
## Bulanık Kümeler



## Bulanık Kümeler

$$\mu_{\tilde{y}_2}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 20 \\ -x/30 + 5/3 & , \quad 20 \leq x \leq 50 \\ 0 & , \quad 50 \leq x \leq 120 \end{cases}$$

**Örnek:** 3 fuzzy sets: young, middle aged, old

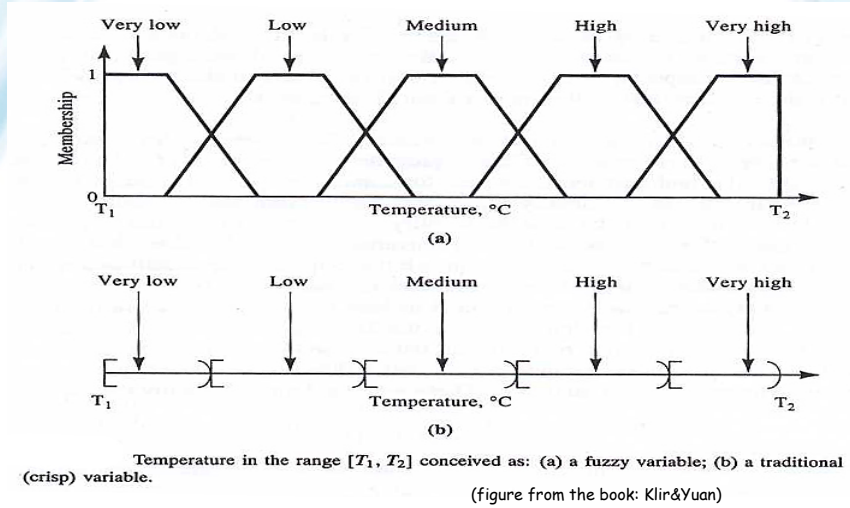


Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person.

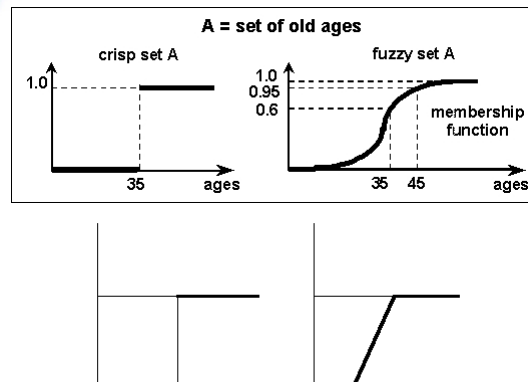
(figure from the book: Klir&Yuan)



## Örnek: Fuzzy sets vs. classical sets about the temperature



## Örnek: Fuzzy sets vs. classical sets



Kesin bir küme, ikili uçlu bir temsildir, ancak bulanık bir küme, iki uç arasında daha yumuşak geçişleri olan temsildir.

## Bulanık Kümeler

### Bulanık küme işlemleri:

$\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$   $X$  evrensel kümesinde tanımlanan iki bulanık küme olsun.

Tümleyen:  $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$

## Bulanık Kümeler

### Bulanık küme işlemleri:

Birleşim:  $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \Leftarrow S\text{-norm}$   
(T-conorm)

Kesişim:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \Leftarrow T\text{-norm}$$



## Bulanık Kümeler

### Tanım (T-norm):

T-norm operatörü, bulanık kümelerin kesişme sürecini tarif eden operatördür.

$$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$T(.,.)$ : T-norm operatörünü temsil eder.

## Bulanık Kümeler

Aşağıdaki dört koşulu sağlayan herhangi bir operatör, **T-norm** operatörü olarak adlandırılabilir:

- (1)  $T(0,0) = 0$  ;  $T(a,1) = T(1,a) = a$
- (2)  $a \leq c$  and  $b \leq d \Rightarrow T(a,b) \leq T(c,d)$
- (3)  $T(a,b) = T(b,a)$
- (4)  $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b),c)$

# Bulanık Kümeler

## En yaygın T-norm Operatörleri

**Minimum :**  $T_{\min}(a,b) = \min(a,b)$

**Arithmetic Product :**  $T_{ap}(a,b) = ab$

**Bounded Product :**  $T_{bp}(a,b) = 0 \vee (a+b-1)$

# Bulanık Kümeler

**Drastic Product :**

$$T_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & a,b < 1 \end{cases}$$

## Bulanık Kümeler

T-norm operatörü olarak "minimum" operatörünü kullanacağız.

$$\mu_{\hat{A} \cap \hat{B}}(x) = \mu_{\hat{A}}(x) \wedge \mu_{\hat{B}}(x) = \min(\mu_{\hat{A}}, \mu_{\hat{B}})$$

## Bulanık Kümeler

### Tanım (S-norm):

S-norm operatörü, bulanık küme birleşme işlemini tanımlamaktadır.

$$S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$S(.,.)$ : S-norm (veya T-conorm) operatörü

## Bulanık Kümeler

Aşağıdaki dört koşulu sağlayan herhangi bir operatör, **S-norm** operatörü olarak adlandırılabilir:

- (1)  $S(1,1) = 1$  ;  $S(a,0) = S(0,a) = a$
- (2)  $a \leq c$  and  $b \leq d \Rightarrow S(a,b) \leq S(c,d)$
- (3)  $S(a,b) = S(b,a)$
- (4)  $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b),c)$

## Bulanık Kümeler

### En yaygın S-norm Operatörleri

**Maximum** :  $S_{\max}(a,b) = \max(a,b)$

**Arithmetic Product** :  $S_{\text{ap}}(a,b) = a + b - ab$

**Bounded Product** :  $S_{\text{bp}}(a,b) = 1 \wedge (a+b)$

## Bulanık Kümeler

Drastic Product :

$$S_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, & b = 0 \\ b, & a = 0 \\ 1, & a,b > 0 \end{cases}$$

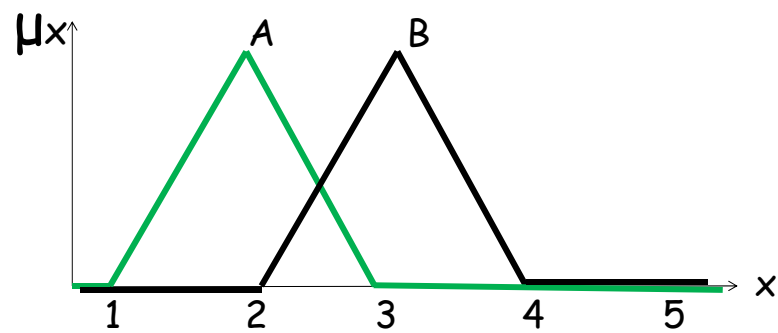
## Bulanık Kümeler

S-norm operatörü olarak "**maximum**" operatörünü kullanacağız.

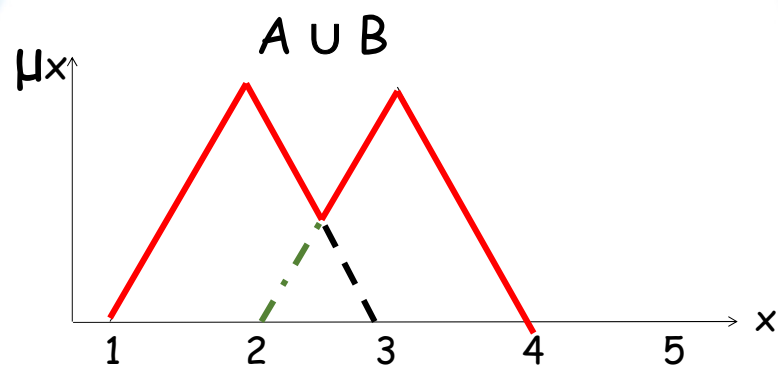
$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}})$$

## Bulanık Kümeler

Örnek:

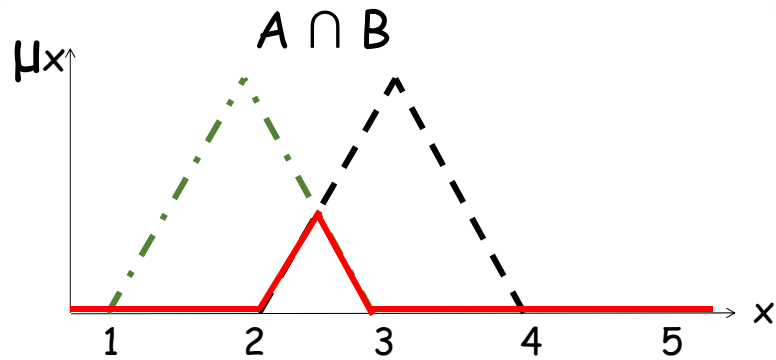


## Bulanık Kümeler





## Bulanık Kümeler



## Bulanık Kümeler

### Bulanık Küme Özellikleri:

İlişkilendirilebilirlik (Associativity):

$$\underline{A} \cup (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cup \underline{C}$$

$$\underline{A} \cap (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cap \underline{C}$$

# Bulanık Kümeler

Dağılma (Distributivity):

$$\underline{A} \cup (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{A} \cup \underline{C})$$

$$\underline{A} \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cup (\underline{A} \cap \underline{C})$$

# Bulanık Kümeler

Eşkuvvetlilik (idempotency):

$$\underline{A} \cup \underline{A} = \underline{A} \quad \underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}$$

Özdeşlik (Identity):

$$\begin{array}{ll} \underline{A} \cup \emptyset = \underline{A} & \underline{A} \cap \emptyset = \emptyset \\ \underline{A} \cap X = \underline{A} & \underline{A} \cup X = X \end{array}$$

# Bulanık Kümeler

Geçişlilik (Transitivity):

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$$

İnvolüsyon (içe kıvrılma) (Involution):

$$\overline{\tilde{A}} = \tilde{A}$$

## Mantık İlişkileri

*Klasik İlişkiler vs. Bulanık İlişkiler*

## İlişki (Relation)

**İlişki (Relation):** Matematikte, bir küme üzerindeki bir ilişki, verilen iki küme üyesi arasında olabilir veya olmayabilir.

Bir eleman ile diğer elemanlar arasında bağlantı olup olmadığı «ilişki» kavramı üzerinden tarif edilir.

**Klasik mantıkta ilişki:** Küme üyeleri ya "tamamen ilişkilidir" veya "tamamen ilişkisizdir".

**Bulanık mantıkta ilişki:** İki veya daha fazla kümenin öğeleri arasındaki ilişkiler oransal değerlerle tarif edilebilir.

## Kartezyen Çarpımı (Cartesian Product)

### Kartezyen çarpımı:

A ve B kümeleri verildiğinde, birinci bileşeni A kümesinden ve ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulmuş tüm sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye **A kartezyen B** kümesi denir, yapılan bu işleme de A ile B'nin kartezyen çarpımı denir ve **AxB** ile gösterilir.

### Sıralı r'li (ordered r-tuple) gösterimi:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

↓   ↓   ↓  
(bileşenlerin sıralaması önemlidir)

## Kartezyen Çarpımı

**Klasik kümeler için Kartezyen çarpım:**

$A_1, A_2, \dots, A_r$ , kümeleri  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  sıralı r'lileri ile  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_r \in A_r$  olacak biçimde gösterilmiş olsun.

$A_1, A_2, \dots, A_r$  kümelerinin Kartezyen çarpımı  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$  biçiminde gösterilir. Burada birinci bileşen  $A_1$  kümesinden, ikinci bileşen  $A_2$  kümesinden, ..., r'inci bileşen  $A_r$  kümesinden gelmelidir.

## Kartezyen Çarpımı

**Örnek:** İki klasik küme ;  $A=\{0,1\}$  ve  $B=\{a,b,c\}$  olsun.

$$A \times B = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$$

$$B \times A = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$B \times B = B^2$$

$$= \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

## **Ders Sonu: Soru - Cevap**

