T.C.

ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ

Niceliksel Kontrol Grafikleri
Bölüm 2

s Kontrol Grafiğinde Yanlı Tahminci (s') Kullanımı

Değişken örnek büyüklüğü için $\bar{X}, R, s$ Kontrol Grafikleri

$\bar{X}$ Kontrol Grafiği için İşletim Karakteristiği Eğrisi

Prof. Dr. Ezgi AKTAR DEMİRTAŞ

s-KG'nin bir alternatifi (s' –KG)

- Nicel KG/Bölüm 1'deki slaytlarda s-KG için aşağıdaki formülleri kullandığımızı hatırlayınız:

$X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \ldots, X_{in}$: i-inci örnek ölçüm değerleri

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2}{n-1}$$

Yansız tahminleyici
Paydada n-1 var!!!

$$s_i = \sqrt{s_i^2}$$

: i-inci örneğin standart sapması

Eğer s^2 aşağıdaki gibi hesaplanırsa;

$X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \ldots, X_{in}$: i-inci örnek ölçüm değerleri

$$s_i'^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n}$$

Yanlı tahminleyici
Paydada n var!!!

$$s_i' = \sqrt{s_i'^2}$$

: i-inci örneğin standart sapması

s' -KG için sınırlar s-KG'den farklı hesaplanır. Süreç parametreleri biliniyor ise size göre soldaki aksi durumda sağdaki formüller kullanılır.

Süreç Parametreleri

Biliniyor

$ÜKS_s = B_2\sigma$

$OÇ_s = c_2\sigma$

$AKS_s = B_1\sigma$

Bilinmiyor

$ÜKS_{s'} = B_4 \overline{s}'$

$OÇ_{s'} = \overline{s}'$

$AKS_{s'} = B_3 \overline{s}'$

Süreç parametresi σ bilinmediği durumda aşağıdaki gibi tahminlenir:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{s}'}{c_2}$$

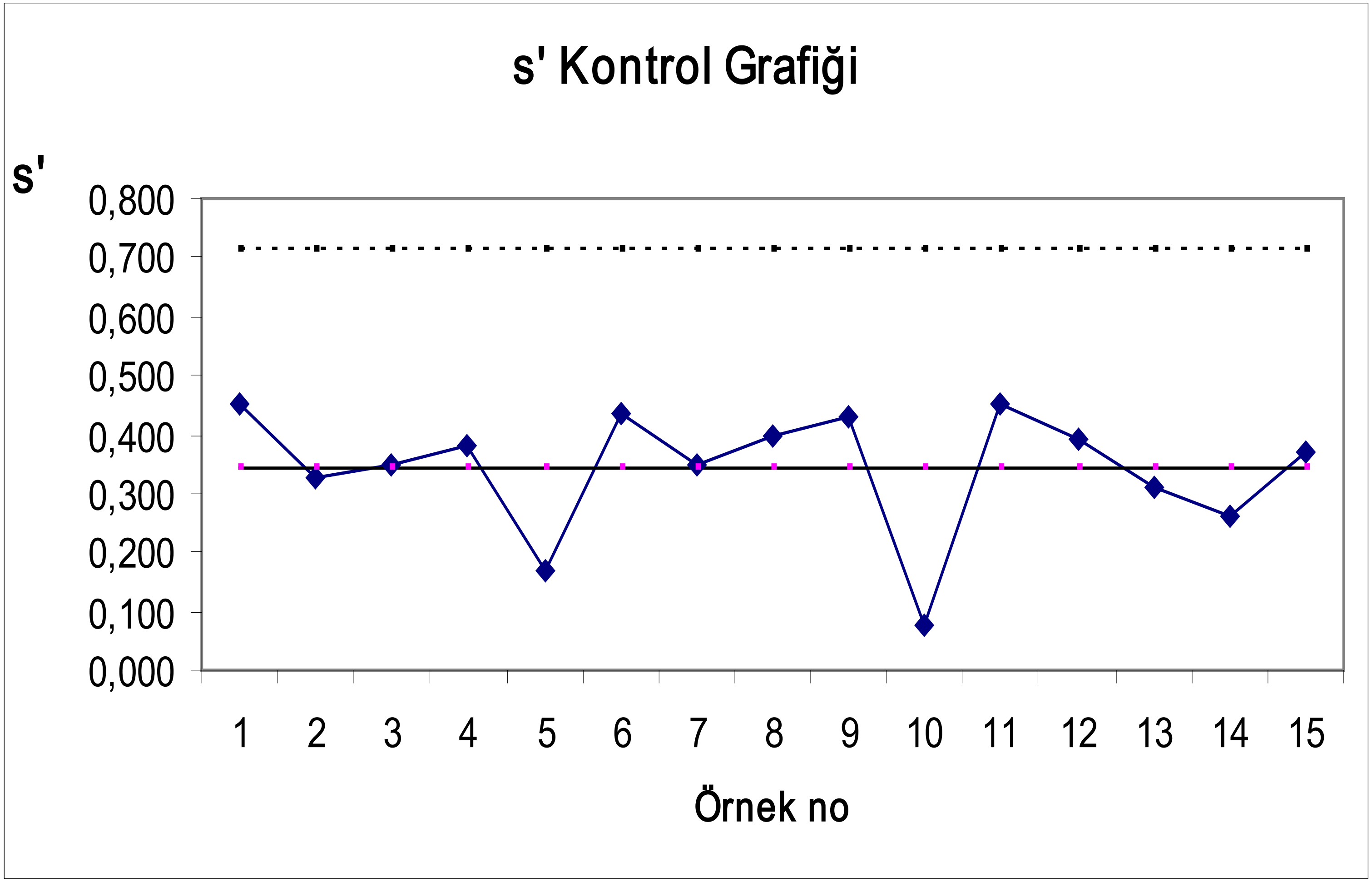
Bölüm I'deki örnek için s yerine s' hesaplandığında;

Örn.No	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X-ort.	s'
1	9,48	10,73	10,65	10,40	10,48	10,35	0,450
2	10,00	10,38	10,15	9,40	10,05	10,00	0,325
3	10,55	9,90	10,43	9,65	9,88	10,08	0,347
4	10,53	9,78	10,38	9,55	9,78	10,00	0,381
5	9,83	10,00	10,10	10,35	10,03	10,06	0,169
6	10,00	9,98	10,68	10,33	11,13	10,42	0,436
7	9,68	10,70	10,45	10,13	10,43	10,28	0,349
8	10,20	10,43	9,45	10,53	10,45	10,21	0,397
9	9,90	10,60	10,10	10,35	11,13	10,42	0,478
10	10,28	10,40	10,50	10,48	10,43	10,42	0,078
11	9,48	10,65	9,68	10,45	9,88	10,03	0,449
12	10,20	10,73	10,25	9,60	10,58	10,27	0,390
13	10,43	10,48	10,58	10,33	11,20	10,60	0,309
14	10,55	10,55	10,63	10,35	11,13	10,64	0,361
15	10,48	9,73	10,38	9,55	9,83	9,99	0,368

yeni durumda KG sınırları;

- n = 5 için, katsayılar tablosundan,
- B_4 = 2,089 B_3 = 0
- $ÜKS_S = B_4 \; \overline{s}' = 2{,}089 \cdot 0{,}3424 = 0{,}7152$
- $OÇ_S = \overline{s}' = 0{,}3424$
- $AKS_S = B_3 \; \overline{s}' = 0$

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{s}'}{c_2} = \frac{0{,}3424}{0{,}841} = 0{,}407$$



Yorumlar Bölüm 1’deki s-KG ile aynı olacaktır.

Önemli Not:

Değişkenlik ölçüsü olarak s yerine s’ kullanıldığında $\bar{X}$ KG’nin sınırları da aşağıdaki gibi hesaplanacaktır:

$$ÜKS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_1 \bar{s}'$$

$$OÇ_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}$$

$$AKS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_1 \bar{s}'$$

Niceliksel Kontrol Grafiklerinde Değişken Örnek Büyüklüğü

- Örnek büyüklüğü bazen sabit olmayabilir ve değişkenlik gösterebilir.
- n_i : i-inci örneğin örnek büyüklüğü,

  $i=1, 2, 3, . . ., m$

- Bu durumda grafiklerin orta çizgileri ağırlıklı aritmetik ortalama olarak hesaplanır. Yani ortalamalar örnek büyüklüğü ile ağırlıklandırılır.

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i R_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1)}}$$

Yansız s

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i}}$$

Yanlı s (s')

Kontrol sınırlarının oluşturulması

a) Kontrol sınırları her bir farklı n_i için ayrı ayrı hesaplanır ve değişken kontrol sınırları olan grafik elde edilir. (KG katsayıları herbir n_i için farklı olacaktır.)

b) Örnek büyüklükleri arasındaki farklılaşma önemsiz kabul edilirse, ortalama örnek büyüklüğü ($\bar{n}$) hesaplanır ve en yakın sayıya yuvarlanır. Kontrol sınırları $\bar{n}$ dikkate alınarak oluşturulur. (KG katsayıları $\bar{n}$ değerine göre belirlendiğinden KG sınırları sabit olacaktır.)

Burnak&Demirtaş, 2019 Örnek 5.13

Bir montaj işleminde kullanılan civatanın çapı önemli bir kalite karakteristiğidir. 500 adetlik kolilerde gelen civataların son 20 kolisinden alınan örneklerin sonuçları izleyen Tablo 5.8'dedir. Üretici firma civata çapı spesifikasyonunun 25,0±0,8mm olduğunu ve toleransın ± 5σ için belirlendiğini söylemektedir. Ortalamanın nominal değerde olduğu bilinmektedir. İlgili kontrol grafikleri yardımıyla üreticinin iddiasının doğruluğunu araştırınız.

Örnek No	$\bar{X}$	R	n_i	Örnek No	$\bar{X}$	R	n_i
1	24,92	0,36	5	11	25,15	0,74	7
2	24,85	0,42	5	12	24,90	0,6	6
3	25,00	0,44	6	13	25,12	0,80	5
4	24,94	0,82	7	14	25,20	0,56	6
5	25,05	0,64	4	15	25,06	0,68	5
6	24,90	0,96	6	16	24,90	0,46	6
7	25,10	0,82	6	17	25,08	0,62	7
8	25,00	0,48	5	18	24,92	0,74	6
9	25,30	0,88	7	19	24,85	0,52	5
10	24,80	0,56	6	20	24,84	0,46	5

Çözüm

μ ve σ'nın bilindiği kabul edilebilir.

μ=25 ve σ=0,8/5=0,16'dır.

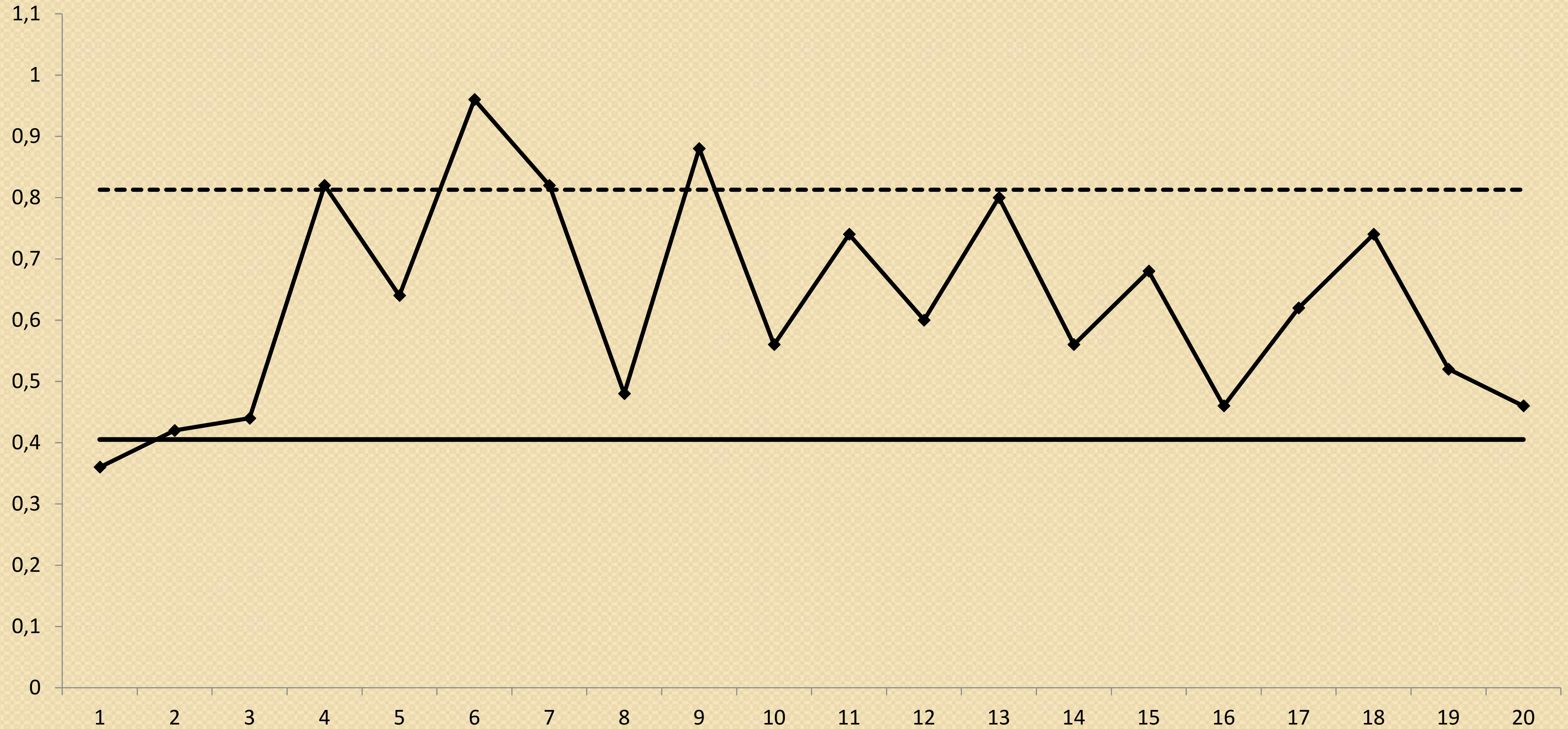
$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m} = \frac{115}{20} = 5{,}75 \cong 6 \text{ olur.}$$

Civata çapındaki değişkenliği kontrol etmek için R-kontrol grafiği oluşturulacaktır. Standart sapma bilindiğinden, EK 1'deki katsayılar tablosundan $\bar{n} = 6$ için $d_2 = 2{,}534$, $D_1 = 0$ ve $D_2 = 5{,}078$ alınırsa, R-kontrol grafiğinde kontrol sınırları,

$$ÜKS_R = D_2\sigma = 5{,}078 \cdot 0{,}16 = 0{,}813$$

$$OÇ_R = d_2\sigma = 2{,}534 \cdot 0{,}16 = 0{,}405$$

$$AKS_R = D_1\sigma = 0$$



R-KG incelendiğinde bazı değerlerin ÜKS'nin üstünde ve
bir değer hariç tümünün orta çizginin üstünde olduğu görülmektedir.
Bu durum bize çap değişkenliğinin beklenenden fazla olduğunu gösterir.

Civata çapının standart sapması tahmin edilmek istenirse, her örneğin R değeri örnek büyüklüğüne uygun d_2 ile bölünür ve aritmetik ortalaması alınır. Buna göre, R_i/d_2 oranları Tablo 5.9'daki gibi elde edilir.

Tablo 5.9 Örnek standart sapma tahminleri

Örnek No	R_i/d_2	Örnek No	R_i/d_2	Örnek No	R_i/d_2	Örnek No	R_i/d_2
1	0,155	**6**	0,379	**11**	0,274	**16**	0,182
2	0,181	**7**	0,324	**12**	0,245	**17**	0,229
3	0,174	**8**	0,206	**13**	0,344	**18**	0,292
4	0,303	**9**	0,325	**14**	0,221	**19**	0,224
5	0,311	**10**	0,221	**15**	0,292	**20**	0,198

Gerekli işlemlerden sonra,

$$\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{m} R_i/d_2}{m}=\frac{5,546}{20}=0,2773$$

olarak tahmin edilir ve üreticinin belirttiği standart sapmadan oldukça büyüktür.

Civata çapı ortalamalarını kontrol etmek için oluşturulacak $\overline{X}$-kontrol grafiğinde orta çizgi nominal değere eşit olacaktır. Standart sapma da bilindiğinden, EK 1'deki katsayılar tablosundan $\overline{n} = 6$ için $A = 1{,}225$ alınırsa,

$$ÜKS_{\bar{x}} = \mu + A\sigma = 25{,}0 + 1{,}225 \cdot 0{,}16 = 25{,}196$$

$$OÇ_{\bar{x}} = \mu = 25{,}0$$

$$AKS_{\bar{x}} = \mu - A\sigma = 25{,}0 - 1{,}225 \cdot 0{,}16 = 24{,}804$$

$\bar{X}$ KG incelendiğinde 9. örneğin ÜKS'nin dışında, 10. örneğin AKS'nin, 14. örneğinde ÜKS'nin tam üstünde olduğu görülmektedir. Sürecin kontrol altında olduğu söylenemez.

Ancak $\bar{n}$ değeri kullanılarak sınırlar hesaplandığı için kontrol dışı noktalarda ilgili n_i değeri için yeniden hesaplama yapmak hatayı azaltır. Örneğin 9. ve 10. örnekler için kontrol sınırları yeniden hesaplanırsa $n_9=7$ ve $n_{10}=6$ olduğundan;

9. örnek	**10.örnek**
$ÜKS_{\bar{x}} = 25,0 + 1,134 \cdot 0,16 = 25,181$	$AKS_{\bar{x}} = 25,0 - 1,225 \cdot 0,16 = 24,804$

Bu durumda da karşı gelen ortalamalar yine kontrol sınırları dışında yer aldığından süreç kontrol dışındadır.

Çalışma sorusu:

14. Örnek için durumu değerlendirerek yorumlayınız.

Ortalama çap ise,

$$\overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{2875{,}01}{115} = 25{,}000$$

Bu değerin spesifikasyonlardaki nominal değer ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Önemli Notlar:

Burnak&Demirtaş, 2019: Toplam Kalite Yönetiminde İstatistiksel Süreç Kontrolü

Burada kolaylık sağlayacak bir nokta, $\bar{n}$ ile kontrol sınırları belirlenecek örneğin örnek büyüklüğü n_i arasındaki ilişkidir. Eğer $n_i < \bar{n}$ ise, belirlenecek kontrol sınırları $\bar{n}$ için belirlenenlerin dışında yer alacağından hesaplanması gerekir. $n_i > \bar{n}$ ise, belirlenecek kontrol sınırları $\bar{n}$ için belirlenenlerin arasında yer alacağından hesaplanmasına gerek yoktur.

Yukarıdaki notu dikkate alarak bizim örneğimiz için aslında 9-10 ve 14 no’lu örneklerde kontrol sınırlarının yeniden hesaplanmasına ihtiyaç yoktur.

Ortalama n yerine değişken sınırlar kullanıldığında da bu tip sorunlarla karşılaşılmaz.

Çalışma Sorusu

- Aynı örneği değişken örnek büyüklüklerini kullanarak excel'de çözünüz. Grafiği çiziniz.
- μ ve σ biliniyor. Değişkenlik ölçüsü olarak R kullanılıyor.
- (Bir sonraki soruyu referans alabilirsiniz. Ancak izleyen soruda μ ve σ bilinmiyor)

Burnak&Demirtaş, 2019 Örnek 5.14

Bir mil üzerine açılacak kama yuvasının uzunluğu önemli bir kalite karakteristiği olarak belirlenmiştir. Üretimden alınan örneklerin ölçüm sonuçları tabloda verilmiştir. Örnek büyüklüğündeki farklılaşmanın önemli olduğunu varsayarak, kama yuvası uzunluğunun değişkenliğini ve ortalamasını uygun grafikler yardımıyla değerlendiriniz.

Örnek No	$\overline{X}_i$	R_i	n_i	Örnek No	$\overline{X}_i$	R_i	n_i
1	34,010	0,035	5	9	34,006	0,016	5
2	34,001	0,019	7	10	33,997	0,017	5
3	34,008	0,035	7	11	34,001	0,008	6
4	34,003	0,021	6	12	34,007	0,012	8
5	34,003	0,025	6	13	33,998	0,024	8
6	33,996	0,023	6	14	34,009	0,030	4
7	33,995	0,011	8	15	34,002	0,018	4
8	34,000	0,025	8	16	34,005	0,021	5

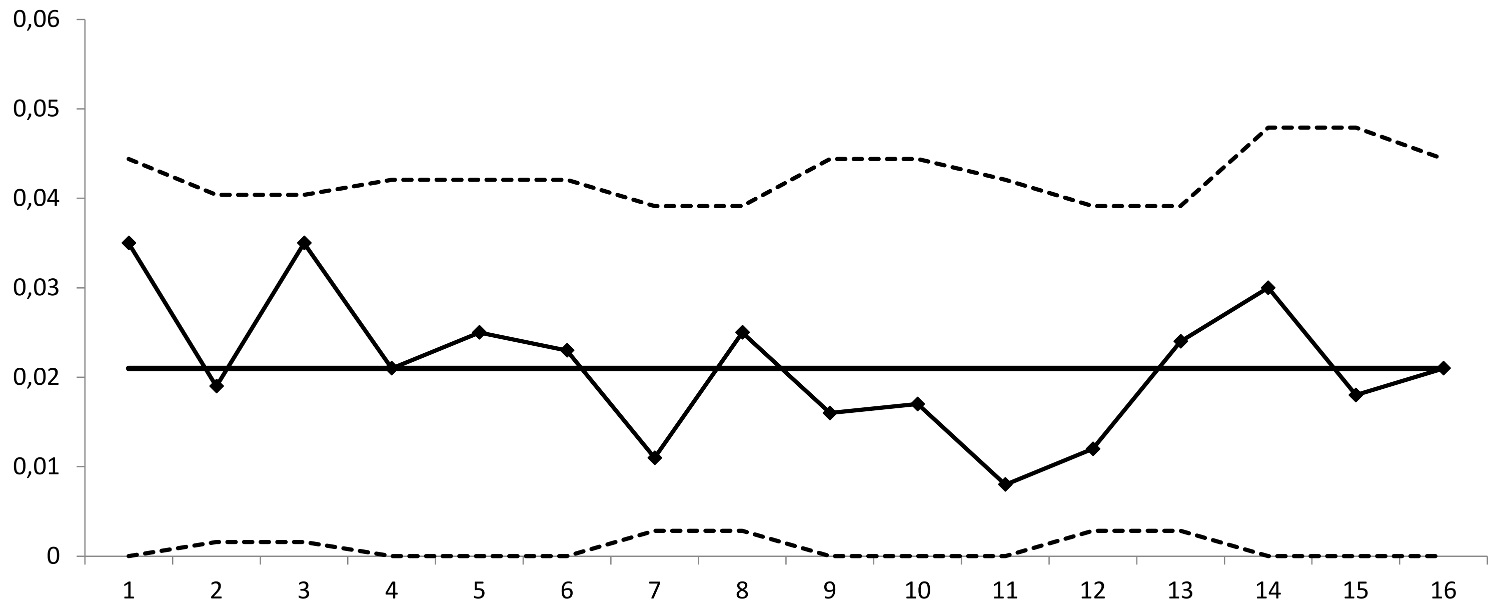
$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i R_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{2{,}053}{98} = 0{,}021$$

Katsayılar tablosundan karşı gelen D3 ve D4 değerleri kullanılarak değişken sınırlar hesaplanırsa;

Örnek No	n_i	D_3	D_4	R_i	AKS_R	$ÜKS_R$
1	5	0	2,114	0,035	0	0,0444
2	7	0,076	1,924	0,019	0,010	0,0404
3	7	0,076	1,924	0,035	0,010	0,0404
4	6	0	2,004	0,021	0	0,0421
5	6	0	2,004	0,025	0	0,0421
6	6	0	2,004	0,023	0	0,0421
7	8	0,136	1,864	0,011	0,017	0,0391
8	8	0,136	1,864	0,025	0,017	0,0391
9	5	0	2,114	0,016	0	0,0444
10	5	0	2,114	0,017	0	0,0421
11	6	0	2,004	0,008	0	0,0421
12	8	0,136	1,864	0,012	0,017	0,0391
13	8	0,136	1,864	0,024	0,017	0,0391
14	4	0	2,282	0,030	0	0,0479
15	4	0	2,282	0,018	0	0,0479
16	5	0	2,114	0,021	0	0,0444

μ ve σ bilinmiyor!!!

R-KG aşağıda görülmektedir.



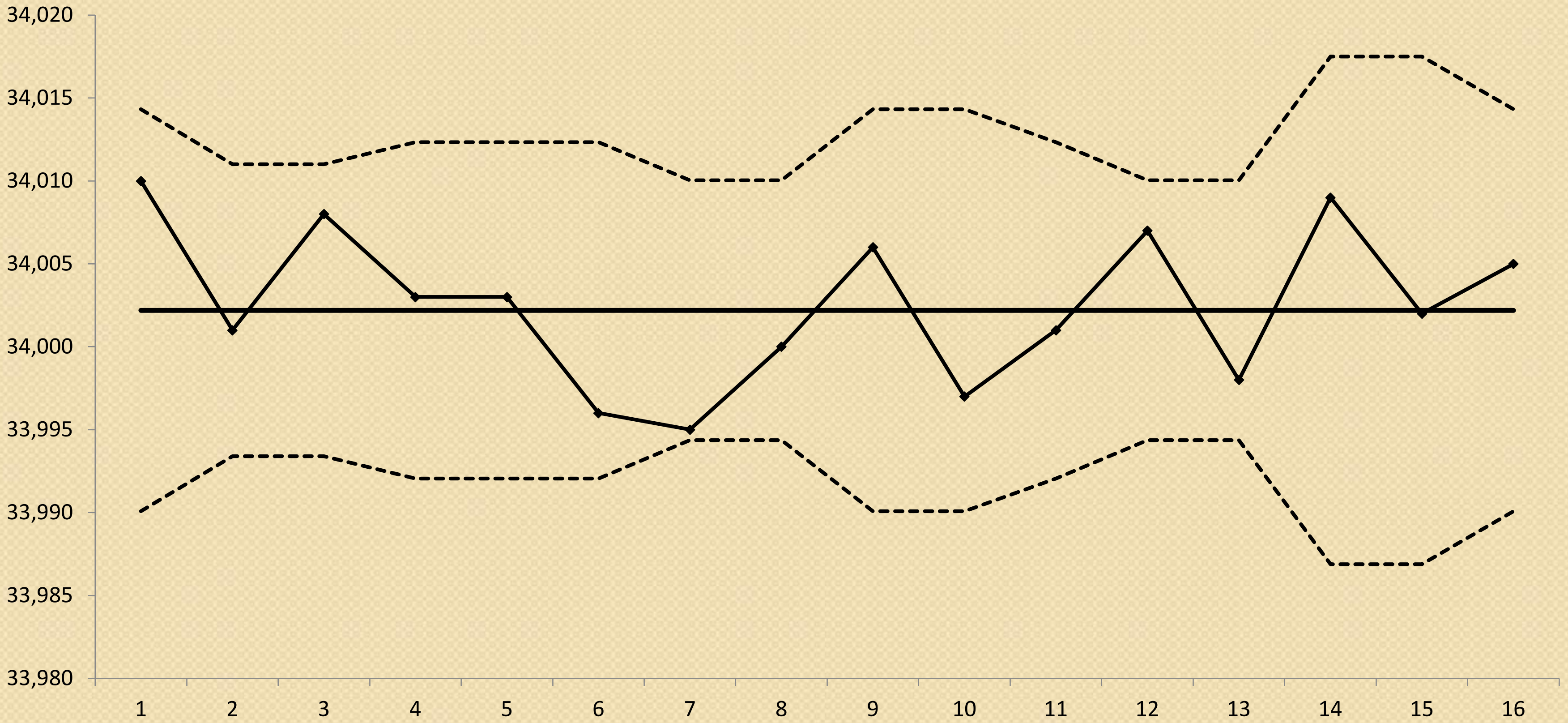
ÜKS$_{\bar{x}}$

$\bar{X}$ KG için hesaplamalar…

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{3332{,}215}{98} = 34{,}0022$$

Her n_i için farklı A_2 katsayısı

Örnek No	**n_i**	**A_2**	$\bar{x}_i$	AKS$_{\bar{x}}$	ÜKS$_{\bar{x}}$
1	5	0,577	34,010	33,990	34,014
2	7	0,419	34,001	33,993	34,011
3	7	0,419	34,008	33,993	34,011
4	6	0,483	34,003	33,992	34,012
5	6	0,483	34,003	33,992	34,012
6	6	0,483	33,996	33,992	34,012
7	8	0,373	33,995	33,994	34,010
8	8	0,373	34,000	33,994	34,010
9	5	0,577	34,006	33,990	34,014
10	5	0,577	33,997	33,990	34,014
11	6	0,483	34,001	33,992	34,012
12	8	0,373	34,007	33,994	34,010
13	8	0,373	33,998	33,994	34,010
14	4	0,729	34,009	33,987	34,017
15	4	0,729	34,002	33,987	34,017
16	5	0,577	34,005	33,990	34,014



$\overline{x}$-kontrol grafiği incelendiğinde, tüm örnek ortalamalarının kontrol sınırları arasında yer aldıkları görülür. 7. örnekte $\overline{X}_7$ değerinin $AKS_{\overline{x}}$ değerine çok yakın çıktığı, neredeyse çakıştığı görülmektedir. Belirtilen örneğin alındığı zamandaki koşulların değerlendirilmesi gerekmektedir. Herhangi bir özel nedenin olmadığı kabul edilirse, süreç kontrol altındadır.

Çalışma Sorusu

- Aynı örnekte $\bar{n}$ kullanılsaydı, durum ne olurdu?

Hatırlatma

- R yerine s ya da s' kontrol grafiği kullanılsaydı tüm analizler aynı şekilde yapılacak, s veya s' KG için geçerli formüller kullanılacaktı.

$\bar{X}$ KG için İşletim Karakteristiği Eğrisi

İşletim Karakteristiği, İK, eğrisi kontrol grafiğinin, örnek büyüklüğünü dikkate alarak, sapmalara karşı duyarlılığını belirler.

μ_0 : süreç kontrol altında iken süreç ortalaması

$\mu^* = \mu_0 + k\sigma$: süreç ortalamasının yeni değeri

β : sürecin yeni ortalaması μ^* değerinde iken, alınacak ilk örneğin ortalamasının kontrol sınırları arasında çıkması olasılığı,

yani

β : sürecin yeni ortalaması μ^* değerinde iken, alınacak ilk örnekte bu sapmanın belirlenmemesi olasılığı.

1- β ve OÇS'yi hatırlayınız.

İşletim Karakteristiği Eğrisi

$\beta = P(AKS_{\overline{X}} \leq \overline{X} \leq ÜKS_{\overline{X}} \ / \ \mu^{*})$

$$\beta = P\left(\frac{AKS_{\bar{x}} - \mu^{*}}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X} - \mu^{*}}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{ÜKS_{\bar{x}} - \mu^{*}}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

$$\beta = P\left(\frac{AKS_{\bar{x}} - \mu^{*}}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{ÜKS_{\bar{x}} - \mu^{*}}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

Örnek

DYS'de excel dosyası verilen örnekte slayt 28'deki formüller kullanılarak

n=5 ve n=9 olduğu durumlarda β ve OÇS değerleri hesaplanmış, İK eğrileri çizilmiştir.

Excel dosyasındaki hesaplamaları inceleyiniz!!!!

n=5 ve n=9 için Excel'deki İK Eğrileri