RASSAL MODELLER

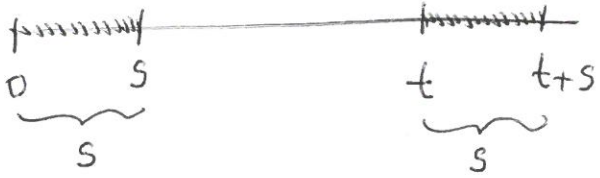
11 Ocak 2021

Üstel Dağılımın Özellikleri

1) Belleksizlik Özelliği (memorilessness Property)

$s, t > 0$, $X \sim exp(\lambda)$ ise

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) = e^{-\lambda s}$$



2) İki üstel dağılmış r.d için $P(X \leq Y)$ olasılığı ?

$X \sim exp(\lambda)$

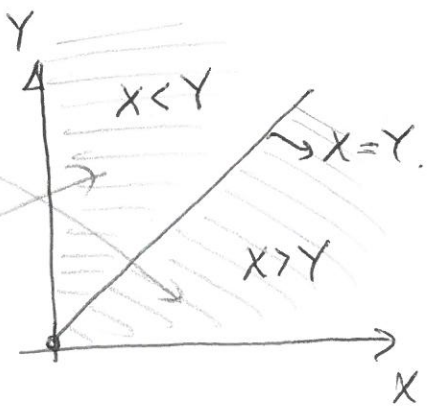
$Y \sim exp(\mu)$

X, Y bağımsız r.d. olsun

SORU: $P(X < Y) = ?$

$P(X = Y) = ?$

$P(X > Y) = ?$



SORU: $P(X \leq Y) = P(X < Y) + P(X = Y)$

Yanıt: $y \in \mathbb{R}$ sabit olursa, $(y > 0)$

$P(X \leq y) = F_X(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ elde ederiz.

Y'ye göre koşullandıralım:

$$P(X \leq Y \mid Y = y) = P(X \leq y \mid Y = y) \underset{\downarrow}{=} P(X \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

X, Y bağımsız

Toplam Olasılık Kuralından

$$P(X \leq Y) = \int_0^\infty P(X \leq Y \mid Y = y) \underbrace{P(Y = y)}_{\equiv f_Y(y)} dy$$

$$= \int_0^\infty P(X \leq y) f_Y(y) dy = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy$$

$$= \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} dy - \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu) y} \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)} dy$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \int_0^\infty (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu) y} dy = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad \text{veya} \quad \frac{B[Y]}{B[X]+B[Y]} = ?$$

Örnek: $X \sim exp(\lambda = 4/saat) \rightarrow \mu_X = B(X) = \frac{1}{4}$ saat

$Y \sim exp(\mu = 6/saat)$ $\quad \mu_Y = B(Y) = \frac{1}{6}$ saat

Sorular:

$P(X = Y) = ?$

$P(X \leq Y) = \dots = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{4}{4+6} = 0.40$ olarak bulunur

$P(X > Y) = 1 - P(X \leq Y) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{6}{10} = 0.60.$

$P(X \leq Y) = \frac{B(Y)}{B(X)+B(Y)} = \frac{1/6}{1/4+1/6} = \text{\_\_\_\_\_} = ? =$

3) 2 üstel dağılmış r.d. minimumunun dağılımı nedir?

$X \sim exp(\lambda)$ $\lambda > 0$

$Y \sim exp(\mu)$ $\mu > 0$

X, Y bağımsız

Soru: $Z = min(X, Y)$ dağılımını bulunuz.

Gözlem

$Z = min(X, Y)$ ise

$\{Z > z\} \equiv \{min(X,Y) > z\} \equiv \{X > z \text{ VE } Y > z\}$

$\equiv \{X > z\} \cap \{Y > z\}.$

$$P(Z>z) = P(X>z) \cdot P(Y>z)$$

$$= e^{-\lambda z} \cdot e^{-\mu z} = e^{-(\lambda+\mu)z}$$

$Z \sim$ hangi dağılımdır?

$$P(Z>z) = 1 - P(Z \le z) = 1 - F_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)z}$$

$$1 - F_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)z}$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z} \qquad z \ge 0$$

Her iki tarafın z'ye göre türevini alırsak

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)z} & z \ge 0 \\ 0 & z < 0. \end{cases}$$

$Z \sim exp(\lambda+\mu)$ yani Z'de parametresi $(\lambda+\mu)$ olan üstel dağılıma uygun dağılır.

<u>Örnek:</u> Bir sistem seri bağlı 2 makina şeklinde çalışıyor.

sistemin çalışma süresi = $\min(X, Y)$

hangi makina önce bozulursa onun çalışma süresine eşit.