



T.C.  
ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ

---

**NİCELİKSEL ÖLÇÜLER İÇİN  
ÖNEMLİ KONTROL GRAFİKLERİ**  
*( $\bar{X}$ ,  $R$  ve  $s$  Kontrol Grafikleri )*

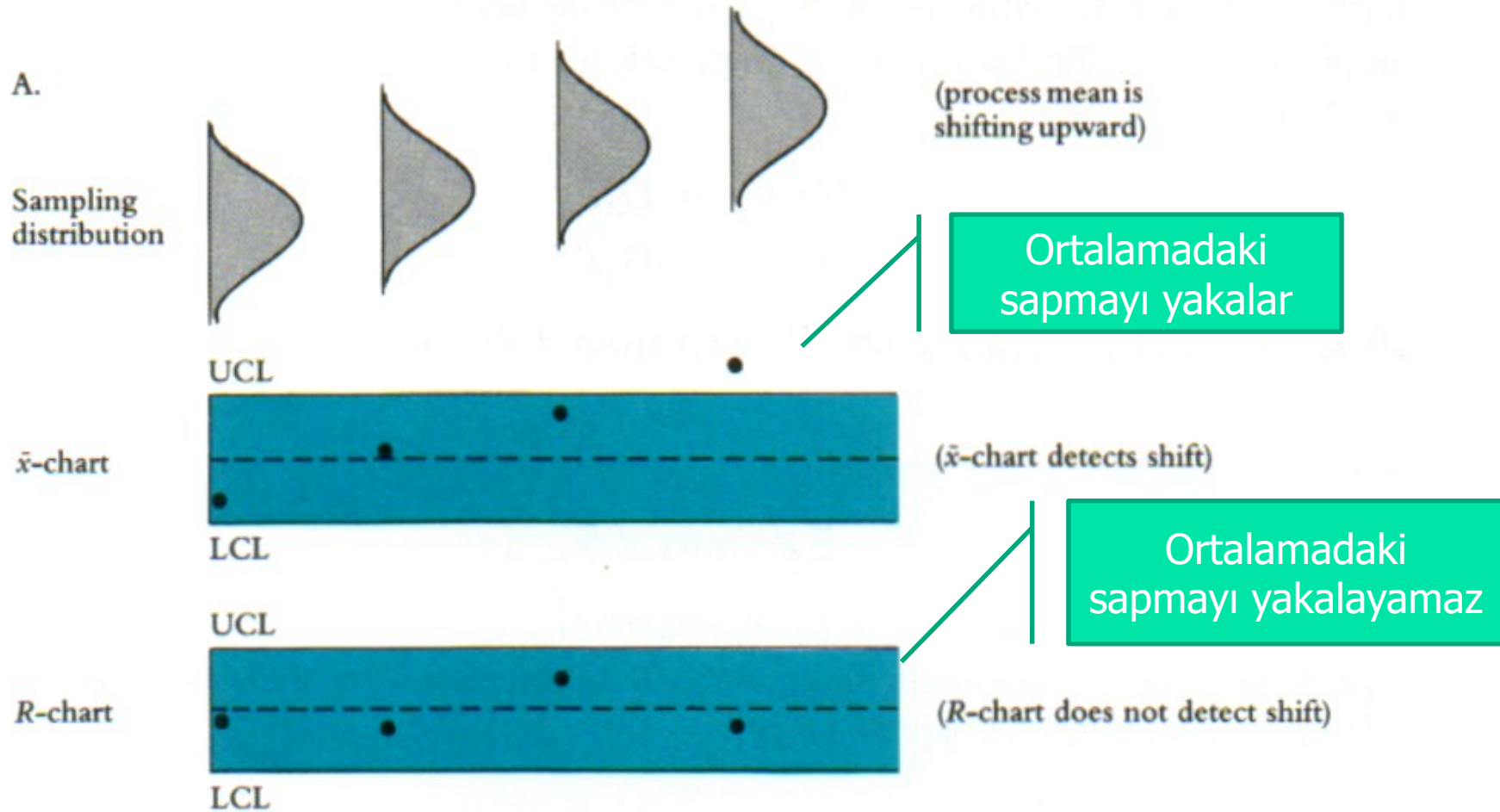
*Prof. Dr. Dr. Ezgi A. DEMİRTAŞ*

Endüstri Mühendisliği Bölümü



# Kontrol Grafiği Uygulama Adımları (hatırlatma)

- Kontrol edilecek uygun karakteristik belirlenir.
- Veri toplama noktası belirlenir.
- Kontrol grafiği tipi belirlenir.
- Örnek büyüklüğü ve frekansı belirlenir.
- Ölçüm metodu belirlenir.
- Ölçme sistem değerlendirmesi yapılır.
- Veri toplama ve grafik hale getirme prosesinin yeteneği hesaplanır.
- Veri toplama, değerlendirme, tedbir alma için prosedür oluşturulur.
- Yazılı dökümanlar hazırlanır ve personel eğitilir.



## ÖRNEK

- X: A ürünü için uzunluk değeri (cm)
- Ortalamanın 100 cm. standart sapmanın ise 2 cm. olması bekleniyor.

$$(\mu_{\text{beklenen}}=100, \sigma_{\text{beklenen}}=2)$$

- Üretimimiz  $X \sim N(105; 4)$  şeklinde ise  
( $\mu_{\text{gerçekleşen}}=105, \sigma_{\text{gerçekleşen}}=2$ )
- Standart sapma aynı olmasına rağmen ortalamadan pozitif yönde sapma vardır. Bu sapmayı yakalamada Ortalama KG daha güçlüdür.

## ÖRNEK

- X: A ürünü için uzunluk değeri (cm)
- Ortalamanın 100 cm. standart sapmanın ise 2 cm. olması bekleniyor.

$$(\mu_{\text{beklenen}}=100, \sigma_{\text{beklenen}}=2)$$

- Üretimimiz  $X \sim N(100; 9)$  şeklinde ise  
 $(\mu_{\text{gerçekleşen}}=100, \sigma_{\text{gerçekleşen}}=3)$

- Ortalama aynı olmasına rağmen standart sapmada bir birimlik artış vardır. Bu sapmayı yakalamada R ya da S KG daha güçlüdür.

# 1. DEĞİŞİM ARALIĞI (R) KONTROL GRAFİĞİ

- Değişim Aralığı kontrol grafiği, örnek değişim aralıkları temelinde süreç karakteristiğinin değişkenliğini kontrol etmek amacıyla oluşturulur.

$R_i$  = i. örneğin değişim aralığı

$$R_i = X_{\max} - X_{\min} \quad \forall i \text{ için} \quad i=1,2,3,\dots,m$$

(m:örnek sayısı    n:örnek büyüklüğü)

$\mu$  : Süreç karakteristiğinin ortalaması

$\sigma$  : Süreç karakteristiğinin standart sapması

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

## ■ R - kontrol grafiği için kontrol sınırları

$$\ddot{ÜKS}_R = D_2\sigma$$

$$OÇ_R = d_2\sigma$$

$$AKS_R = D_1\sigma$$

4  
Süreç parametreleri  
 $\mu$  ve  $\sigma$  biliniyor ise bu  
şekilde hesaplanır.

$$\ddot{ÜKS}_R = D_4\bar{R}$$

$$OÇ_R = \bar{R}$$

$$AKS_R = D_3\bar{R}$$

4  
Süreç parametreleri  
bilinmiyor ise bu şekilde  
hesaplanır.

**Önemli not:** Formüllerdeki D katsayıları seçilen örnek büyüklüğüne (n) bağlı olarak bir sonraki tablodan alınacaktır.

**Niceliksel Ölçüler Kontrol Grafikleri İçin Katsayılar Tablosu**

| n  | A     | A <sub>1</sub> | A <sub>2</sub> | A <sub>3</sub> | c <sub>2</sub> | c <sub>4</sub> | B <sub>1</sub> | B <sub>2</sub> | B <sub>3</sub> | B <sub>4</sub> | B <sub>5</sub> | B <sub>6</sub> | d <sub>2</sub> | d <sub>3</sub> | D <sub>1</sub> | D <sub>2</sub> | D <sub>3</sub> | D <sub>4</sub> |
|----|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 2  | 2,121 | 3,760          | 1,880          | 2,659          | 0,564          | 0,798          | 0              | 1,843          | 0              | 3,267          | 0              | 2,606          | 1,128          | 0,853          | 0              | 3,686          | 0              | 3,267          |
| 3  | 1,732 | 2,394          | 1,023          | 1,954          | 0,724          | 0,886          | 0              | 1,858          | 0              | 2,586          | 0              | 2,276          | 1,693          | 0,888          | 0              | 4,358          | 0              | 2,575          |
| 4  | 1,500 | 1,880          | 0,729          | 1,628          | 0,798          | 0,921          | 0              | 1,808          | 0              | 2,266          | 0              | 2,088          | 2,059          | 0,880          | 0              | 4,698          | 0              | 2,282          |
| 5  | 1,342 | 1,596          | 0,577          | 1,427          | 0,841          | 0,940          | 0              | 1,756          | 0              | 2,089          | 0              | 1,984          | 2,326          | 0,864          | 0              | 4,918          | 0              | 2,114          |
| 6  | 1,225 | 1,410          | 0,483          | 1,287          | 0,869          | 0,952          | 0,026          | 1,711          | 0,030          | 1,970          | 0,029          | 1,874          | 2,534          | 0,848          | 0              | 5,078          | 0              | 2,004          |
| 7  | 1,134 | 1,277          | 0,419          | 1,182          | 0,888          | 0,959          | 0,105          | 1,672          | 0,118          | 1,882          | 0,113          | 1,806          | 2,704          | 0,833          | 0,205          | 5,203          | 0,076          | 1,924          |
| 8  | 1,061 | 1,175          | 0,373          | 1,099          | 0,903          | 0,965          | 0,167          | 1,638          | 0,185          | 1,815          | 0,179          | 1,751          | 2,847          | 0,820          | 0,387          | 5,307          | 0,136          | 1,864          |
| 9  | 1,000 | 1,094          | 0,337          | 1,032          | 0,914          | 0,969          | 0,219          | 1,609          | 0,239          | 1,761          | 0,232          | 1,707          | 2,970          | 0,808          | 0,546          | 5,394          | 0,184          | 1,816          |
| 10 | 0,949 | 1,028          | 0,308          | 0,975          | 0,923          | 0,973          | 0,262          | 1,584          | 0,284          | 1,716          | 0,276          | 1,669          | 3,078          | 0,797          | 0,687          | 5,469          | 0,223          | 1,777          |
| 11 | 0,905 | 0,973          | 0,285          | 0,927          | 0,930          | 0,975          | 0,299          | 1,561          | 0,321          | 1,679          | 0,313          | 1,637          | 3,173          | 0,787          | 0,812          | 5,534          | 0,256          | 1,744          |
| 12 | 0,866 | 0,925          | 0,266          | 0,886          | 0,936          | 0,978          | 0,331          | 1,541          | 0,354          | 1,646          | 0,346          | 1,610          | 3,258          | 0,778          | 0,924          | 5,592          | 0,284          | 1,716          |
| 13 | 0,832 | 0,884          | 0,249          | 0,850          | 0,941          | 0,979          | 0,359          | 1,523          | 0,382          | 1,618          | 0,374          | 1,585          | 3,336          | 0,770          | 1,026          | 5,646          | 0,308          | 1,692          |
| 14 | 0,802 | 0,848          | 0,235          | 0,817          | 0,945          | 0,981          | 0,384          | 1,507          | 0,408          | 1,594          | 0,399          | 1,563          | 3,407          | 0,762          | 1,121          | 5,693          | 0,329          | 1,671          |
| 15 | 0,775 | 0,816          | 0,223          | 0,789          | 0,949          | 0,982          | 0,406          | 1,492          | 0,428          | 1,572          | 0,421          | 1,544          | 3,472          | 0,755          | 1,207          | 5,737          | 0,348          | 1,652          |



X: Ürün Ağırlıkları (gr) 5'er birimlik 15 örnek alındığında;

| ■ Ör.No | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $\bar{X}$ | R    | s    |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|------|------|
| ■ 1     | 9,48  | 10,73 | 10,65 | 10,40 | 10,48 | 10,35     | 1,25 | 0,50 |
| ■ 2     | 10,00 | 10,38 | 10,15 | 9,40  | 10,05 | 10,00     | 0,98 | 0,36 |
| ■ 3     | 10,55 | 9,90  | 10,43 | 9,65  | 9,88  | 10,08     | 0,90 | 0,39 |
| ■ 4     | 10,53 | 9,78  | 10,38 | 9,55  | 9,78  | 10,00     | 0,98 | 0,42 |
| ■ 5     | 9,83  | 10,00 | 10,10 | 10,35 | 10,03 | 10,06     | 0,53 | 0,19 |
| ■ 6     | 10,00 | 9,98  | 10,68 | 10,33 | 11,13 | 10,42     | 1,15 | 0,49 |
| ■ 7     | 9,68  | 10,70 | 10,45 | 10,13 | 10,43 | 10,28     | 1,03 | 0,39 |
| ■ 8     | 10,20 | 10,43 | 9,45  | 10,53 | 10,45 | 10,21     | 1,08 | 0,44 |
| ■ 9     | 9,90  | 10,60 | 10,10 | 10,35 | 11,13 | 10,42     | 1,23 | 0,48 |
| ■ 10    | 10,28 | 10,40 | 10,50 | 10,48 | 10,43 | 10,42     | 0,23 | 0,09 |
| ■ 11    | 9,48  | 10,65 | 9,68  | 10,45 | 9,88  | 10,03     | 1,18 | 0,50 |
| ■ 12    | 10,20 | 10,73 | 10,25 | 9,60  | 10,58 | 10,27     | 1,13 | 0,43 |
| ■ 13    | 10,43 | 10,48 | 10,58 | 10,33 | 11,20 | 10,60     | 0,88 | 0,35 |
| ■ 14    | 10,55 | 10,55 | 10,63 | 10,35 | 11,13 | 10,64     | 0,78 | 0,29 |
| ■ 15    | 10,48 | 9,73  | 10,38 | 9,55  | 9,83  | 9,99      | 0,92 | 0,41 |

# R-Kontrol Grafiği için hesaplamalar...

| No    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $R_i$ | 1,25 | 0,98 | 0,90 | 0,98 | 0,53 | 1,15 | 1,03 | 1,08 | 1,23 | 0,23 | 1,18 | 1,13 | 0,88 | 0,78 | 0,92 |

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m} = \frac{1,25 + 0,98 + \dots + 0,92}{15} = 0,9473$$

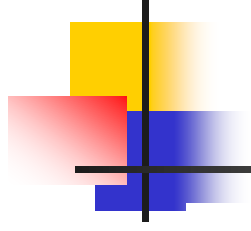
$n = 5$  için, katsayılar tablosundan,  
 $D_4 = 2,114$  ve  $D_3 = 0$ ;

$$\dot{ÜKS}_r = D_4 \bar{R} = 2,114 * 0,9473 = 2,003$$

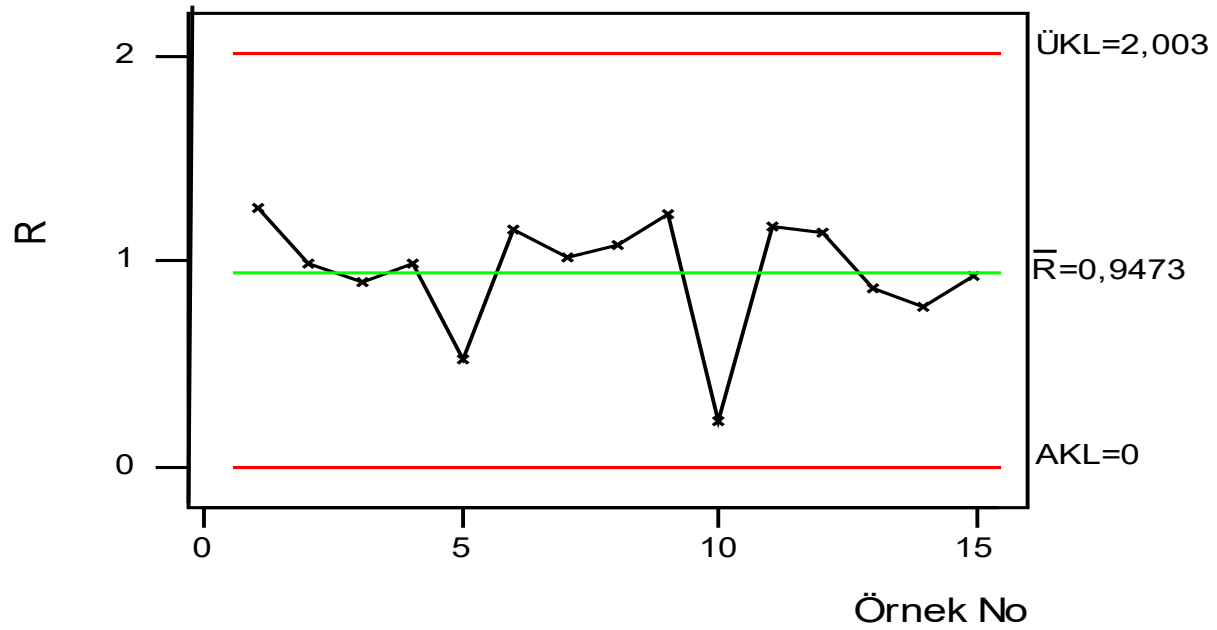
$$OC_{sR} = \bar{R} = 0,9473$$

$$AKS_r = D_3 \bar{R} = 0$$

Süreç parametreleri  
Bilinmiyor.



## R Kontrol Grafiği





## 2. STANDART SAPMA (s) KONTROL GRAFİĞİ

Örnek standart sapmaları temelinde süreç karakteristiğinin değişkenliğini kontrol etmek amacıyla oluşturulur.

$X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \dots, X_{in}$  : i-inci örnek ölçüm değerleri

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n - 1}$$

$s_i = \sqrt{s_i^2}$  : i-inci örneğin standart sapması



## s Kontrol Grafiği için kontrol sınırları

$$\ddot{ÜKS}_s = B_6\sigma$$

$$OÇ_s = c_4\sigma$$

$$AKS_s = B_5\sigma$$

Süreç parametreleri  
 $\mu$  ve  $\sigma$  biliniyor ise bu  
şekilde hesaplanır.

$$\ddot{ÜKS}_s = B_4\bar{s}$$

$$OÇ_s = \bar{s}$$

$$AKS_s = B_3\bar{s}$$

Süreç parametreleri  
bilinmiyor ise bu şekilde  
hesaplanır.

Tüm katsayılar için slayt 11'deki tabloya bakınız!

## s-Kontrol Grafiği için hesaplamalar...

| No             | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| S <sub>i</sub> | 0,50 | 0,36 | 0,39 | 0,42 | 0,19 | 0,49 | 0,39 | 0,44 | 0,48 | 0,09 | 0,50 | 0,43 | 0,35 | 0,29 | 0,41 |

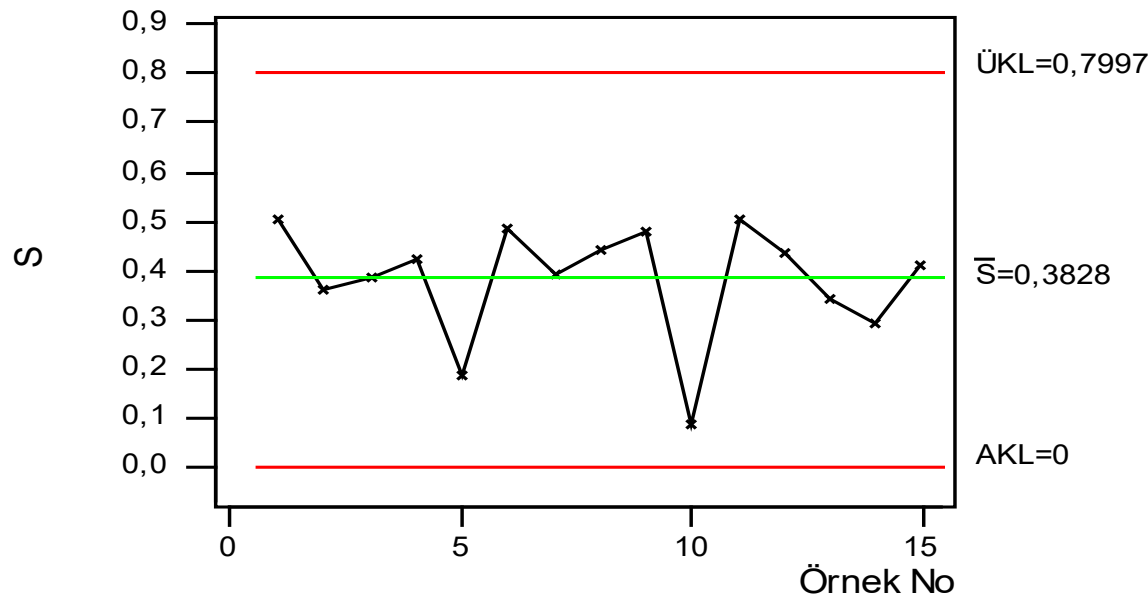
$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^m s_i}{m} = \frac{0,50 + 0,36 + \dots + 0,41}{15} = 0,3828$$

n = 5 için, katsayılar tablosundan,  
B<sub>4</sub> = 2,089 ve B<sub>3</sub> = 0

- $\bar{ÜKL}_S = B_4 \bar{s} = 2,089 * 0,3828 = 0,7997$
- $OÇ_S = \bar{s} = 0,3828$
- $AKL_S = B_3 \bar{s} = 0$

Süreç parametreleri  
Bilinmiyor.

S - Kontrol Grafiği



Şeklin R-KG ile aynı  
olduğuna dikkat ediniz.

### ÖNEMLİ NOT

$2 \leq n \leq 5$  için R-KG

$n \geq 5$  için s-KG'nin etkinliği

daha yüksektir.



### 3. ORTALAMA KONTROL GRAFİĞİ

---

- $\bar{X}$ -Kontrol grafiği, süreçten alınan **n** birimlik örneklerin aritmetik ortalamasını izlemek üzere geliştirilen bir kontrol grafiğidir.
- Süreç parametreleri  $\mu$ , nominal değer, ile  $\sigma$ 'nın, standart sapma, bilinip bilinmemesine göre  $\bar{X}$  - kontrol grafiği oluşturulur.



 $\bar{X}$ 

## -Kontrol grafiğinin oluşturulması

- Süreçten alınan i-inci örnek ölçüm değerleri  
:

- $X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \dots, X_{in}$

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n X_{ij}}{n}$$

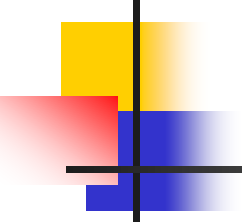
n birimlik örnek ortalamaları

- Genel ortalama

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}$$

Örnek ortalamalarının ortalamaları

# İşlemler...


$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m} = \frac{10,35 + 10,00 + \dots + 9,99}{15} = 10,25$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m} = \frac{1,25 + 0,98 + \dots + 0,92}{15} = 0,9473$$

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^m s_i}{m} = \frac{0,50 + 0,36 + \dots + 0,41}{15} = 0,3828$$



## a) Süreç Parametreleri Biliniyor ise

---

$$\ddot{ÜKS}_{\bar{X}} = \mu + A\sigma$$

$$O\check{Ç}_{\bar{X}} = \mu$$

$$AKS_{\bar{X}} = \mu - A\sigma$$

Bilinen parametreleri kullanıyoruz. Tahminleme yapmıyoruz.

A katsayısı için slayt 11'deki tabloya bakınız.

## b) Süreç Parametreleri ( $\mu$ ve $\sigma$ bilinmiyor ise)

- Değişkenlik ölçüsü olarak R kullanıldıysa;

$$\ddot{ÜKS}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$\text{OÇ}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}$$

$$AKS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$$

- Değişkenlik ölçüsü olarak s kullanıldıysa;

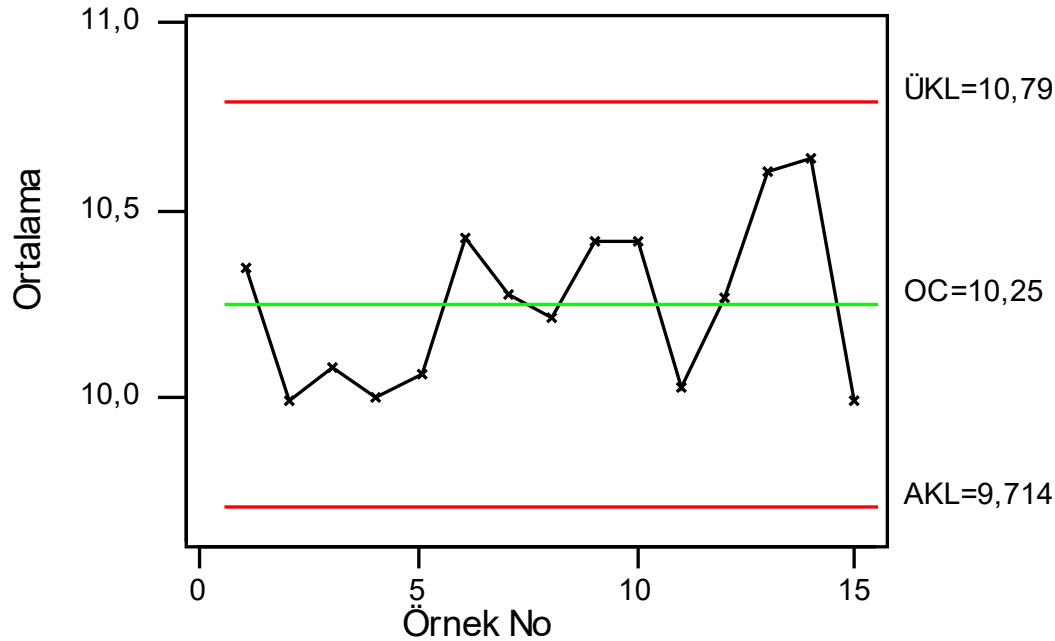
$$\ddot{ÜKS}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{s}$$

$$\text{OÇ}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}$$

$$AKS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{s}$$

A2 ve A3 katsayıları için slayt 11'e bakınız !!!

X-ortalama Kontrol Grafiği



- Slayt 12'deki veriler için  $\bar{X}$  KG sınırlarını bir önceki slaytta yer alan formüllere göre hesaplayınız.
- Yukarıdaki grafikte elde edilen sınırları kontrol amaçlı kullanabilirsiniz.

- X-ortalama ve R/s KG'ler incelendiğinde sürecin kontrol altında olduğu görülmektedir.
- Detaylı analizler için Süreç ortalaması ( $\mu$ ) ve standart sapması ( $\sigma$ ) bilinmediğinde alınan örneklerden hareketle tahminleme yapmak gerekir:
- $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  ve
- $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$  ya da
- $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$
- Bu durumda üretimin doğal değişkenliğine bakılarak (doğal tolerans sınırları-DTS hesaplanarak) üretimin istenen spesifikasyon sınırları (ASS-ÜSS) içerisinde olup olmadığı araştırılmalıdır:
- $ADTS = \hat{\mu} - 3\hat{\sigma}$  ve  $\ddot{UDTS} = \hat{\mu} + 3\hat{\sigma}$

Bu örnek için (slayt 12);

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 10,25 \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = 0,3828/0,940 \approx 0,407$$

$c_4=0,940$  (n=5 için tablo değeri)

4  $\sigma$  şeklinde belirlendi  
ise;

- Spesifikasyon  $10 \pm 2$  gr. olsaydı;
- ASS=8 ve ÜSS=12 olacaktı.
- Doğal tolerans sınırları ise;
- ADTS=  $10,25 - 3 * 0,407 = 11,472$
- ÜDTS=  $10,25 + 3 * 0,407 = 9,029$

Değişkenlik sınırlarının SS'ler içinde olduğu görülmektedir. Bu durum bize spek. dışı üretim oranının az olduğunu da gösterir.

$$\mu_{gerçekleşen} = 10,25 \approx \mu_{beklenen} = 10$$

$$\sigma_{gerçekleşen} = 0,407 < \sigma_{beklenen} = \frac{2}{4} = 0,5$$

İstenilen  
durum

## Çalışma sorusu:

Bir önceki örnekte spesifikasyon dışı üretim oranını hesaplamak istersek;

$$1-P(8 \leq X \leq 12 \mid \mu=10,25 \sigma=0,407)=???$$

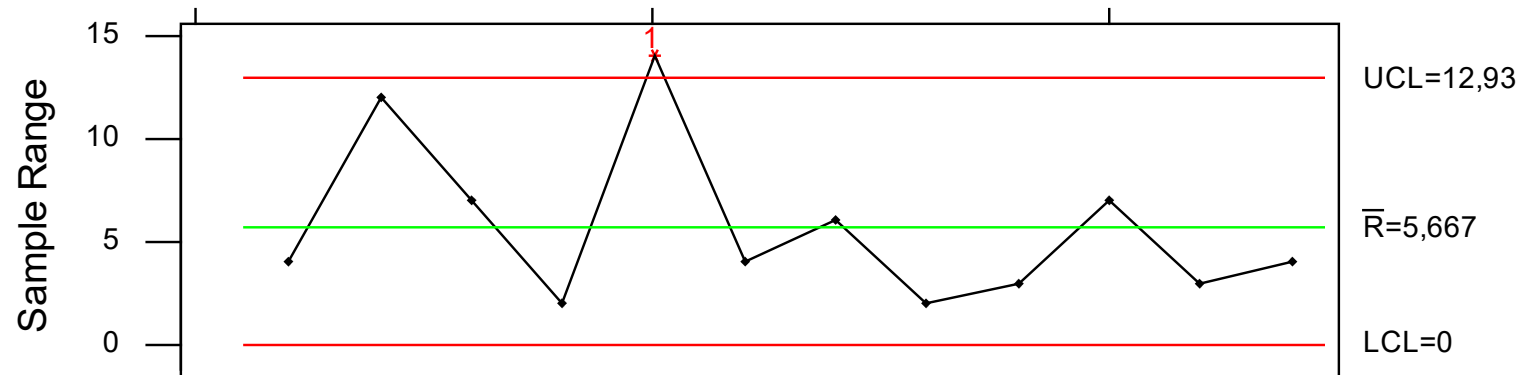
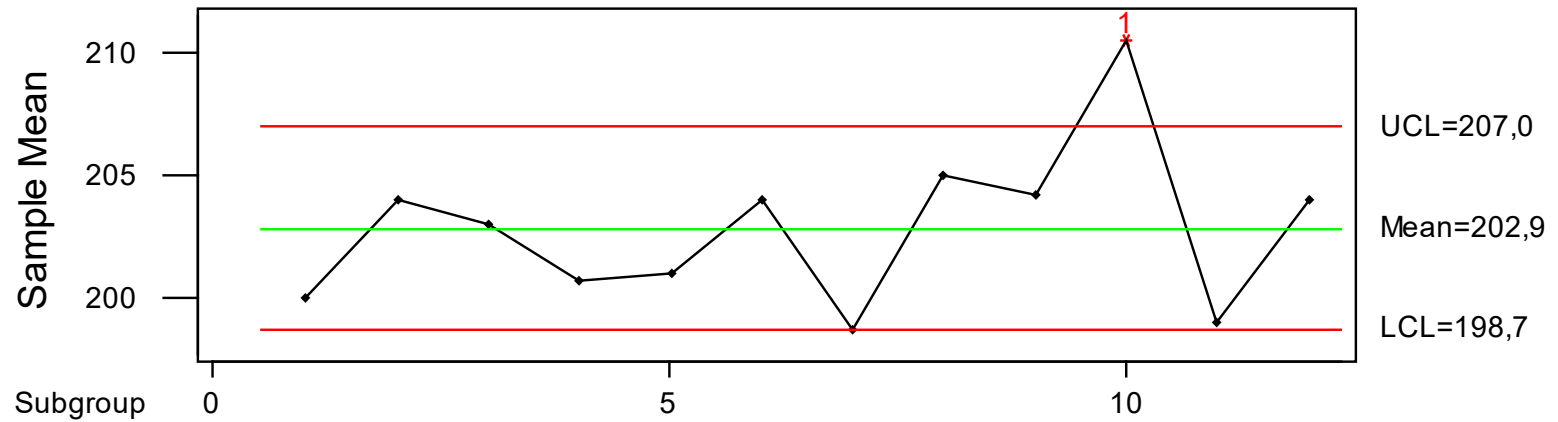


## ÖDEV:

Bir cihazın sinyal süreleri (sn) ölçülmekte ve süreç değişkenliği izlenmek istenmektedir. Süreçten 4'er birimden oluşan 12 örnek alınarak aşağıdaki tabloya kaydedilmiştir. Süreç değişkenliğini uygun kontrol grafikleri ile değerlendiriniz. Çözüm izleyen slayttadır.

| No | X1  | X2  | X3  | X4  |
|----|-----|-----|-----|-----|
| 1  | 202 | 201 | 198 | 199 |
| 2  | 200 | 202 | 212 | 202 |
| 3  | 202 | 201 | 208 | 201 |
| 4  | 201 | 200 | 200 | 202 |
| 5  | 210 | 196 | 200 | 198 |
| 6  | 202 | 206 | 205 | 203 |
| 7  | 198 | 196 | 202 | 199 |
| 8  | 206 | 204 | 204 | 206 |
| 9  | 206 | 204 | 203 | 204 |
| 10 | 208 | 214 | 213 | 207 |
| 11 | 198 | 201 | 199 | 198 |
| 12 | 204 | 204 | 202 | 206 |

## Xbar/R Chart for X1-X4



$\bar{X}$  / R Kontrol Grafikleri

## **ÇALIŞMA SORUSU:**

Bir önceki örnekte özel nedene yol açan durumların belirlenip giderildiğini varsayarak kontrol sınırlarını yeniden oluşturunuz.

**İpucu:** (5) ve (10) no'lu örnekleri çıkarıp kalanlar için yeni düzenleme yapınız. Kontrol sınırlarını excel yardımıyla hesaplayarak grafikleri excel ile çiziniz.