

# Kontrol Grafikleri (devam)

## Hangi Kontrol Grafiği Uygundur?

EĞER;

- üretilen birimlerin niceliksel karakteristikleri ölçülüyor (boyut, ağırlık, vb.),
- kalite karakteristiklerinin dağılımı normal dağılıma uyuyor,
- tahribatsız muayene uygulanıyor
- muayene maliyeti yüksek değil
- muayene süresi uzun değil,
- üretim esnasında örnekleme yapılabiliyor,
- üretim sistemi sürekli

İSE,

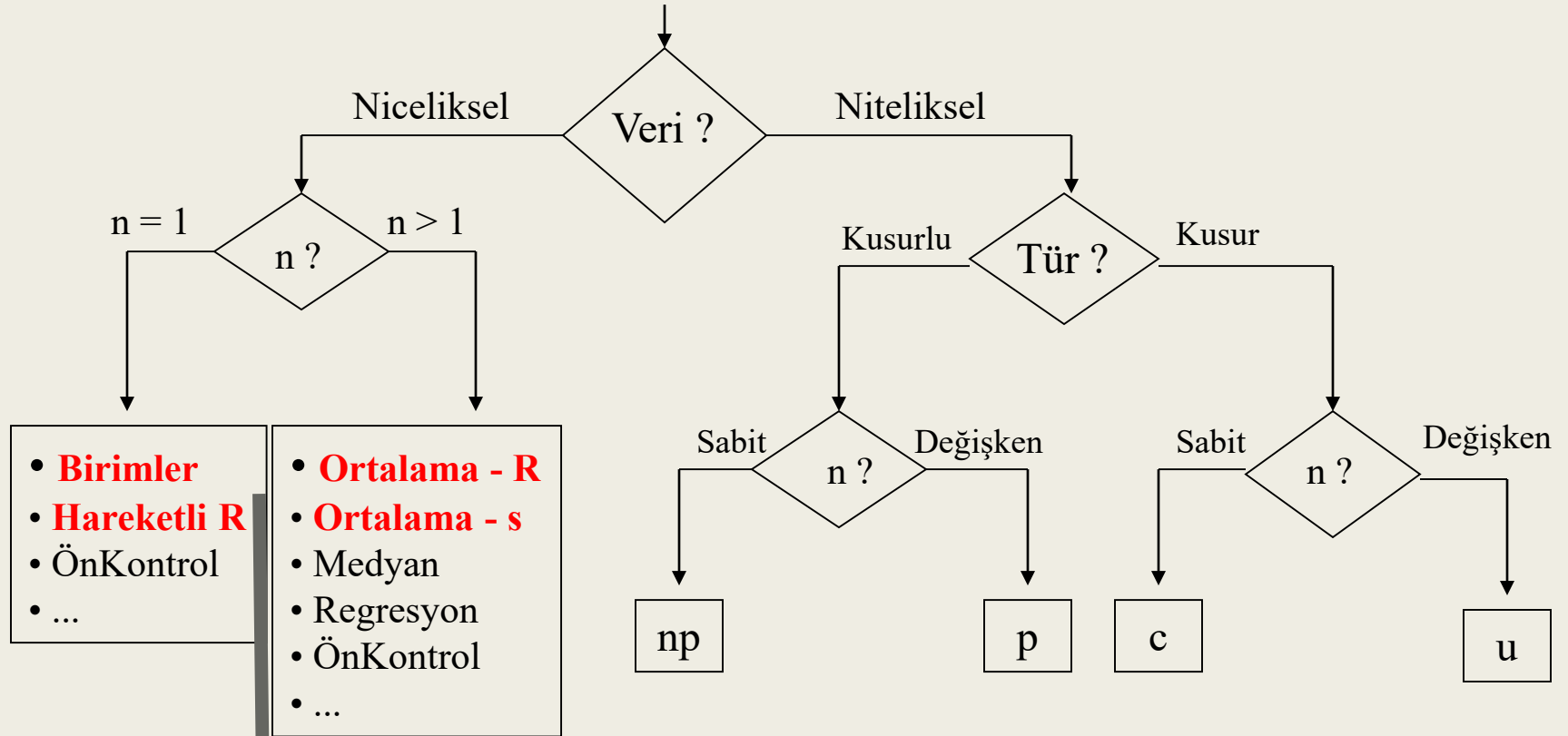
- Ortalama KG **ve** Değişim Aralığı-R KG
- VEYA**
- Ortalama KG **ve** Standart Sapma-s KG

} n>1 olmalı

kullanılır.

(İkili kombinasyondan biri tercih edilmelidir. Yani Ortalama KG mutlaka olmalı yanında R veya s tercih edilmelidir.)

# Kontrol Grafikleri



Ders kapsamında kırmızı ile belirtilen grafikler tartışılacaktır.

## ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

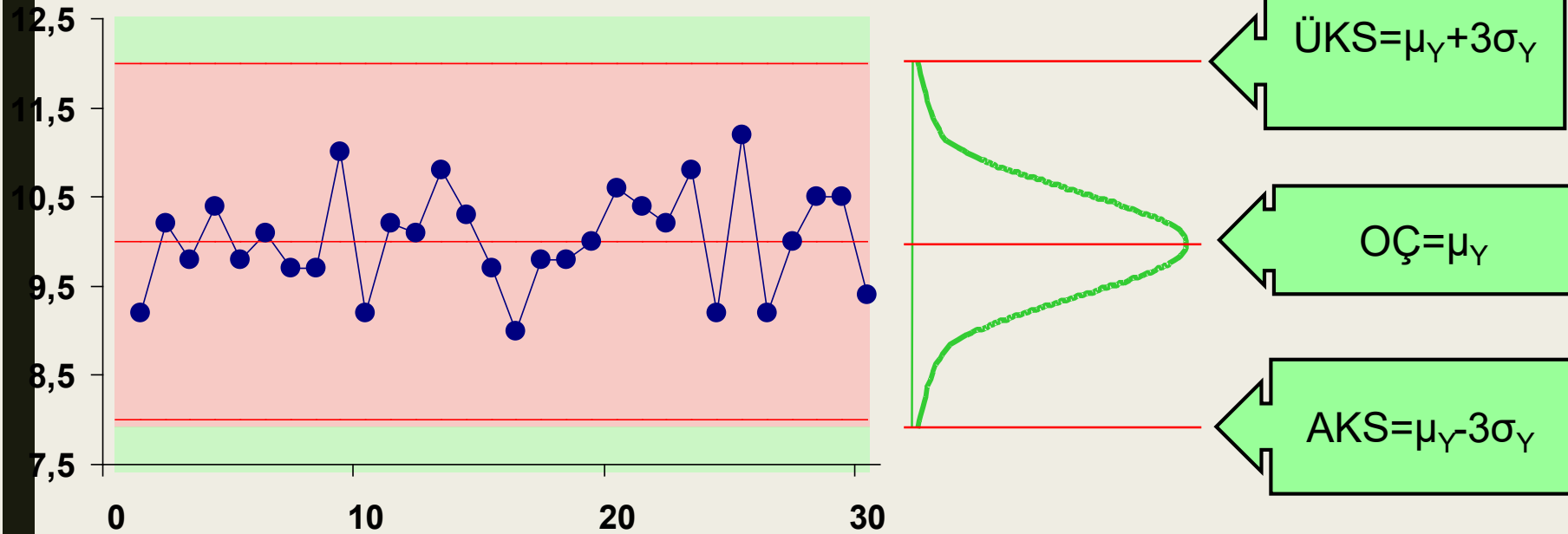
- **Spesifikasyon Sınırları (ASS-ÜSS)**
- **Kontrol Sınırları (AKS-ÜKS)**
- **Doğal Tolerans Sınırları (ADTS-ÜDTS)**
- **Tolerans kavramı**
- **Üretici ve Tüketici Riski ( $\alpha$  ve  $\beta$ )**
- **İşletim Karakteristiği Eğrisi**
- **Muayene ve Ölçme Kavramları**

*Prof. Dr. Ezgi A. Demirtaş*

# Spesifikasyon - Tolerans

- **Spesifikasyon:** Müşteri isteği ya da teknik şartname ile belirlenen üretim aralığı
- **Çift yönlü spesifikasyon**
  - *Nominal  $\pm$  Sapma*  $\Rightarrow$  çift yönlü ( $\mu \pm k\sigma$ )  
Örnek: Yemek masasının boyu
- **Tek yönlü spesifikasyon**
  - *Nominal + Sapma*  $\Rightarrow$  tek yönlü ( $\mu + k\sigma$ )  
Örnek: Buzdolabının gürültü seviyesi
  - *Nominal - Sapma*  $\Rightarrow$  tek yönlü ( $\mu - k\sigma$ )  
Örnek: Kopma mukavemeti
- **Tolerans:** izin verilen  $\pm$  yöndeki sapma miktarı
  - *Alt tolerans limiti; -  $k\sigma$*
  - *Üst tolerans limiti; +  $k\sigma$*

# Kontrol Sınırları?

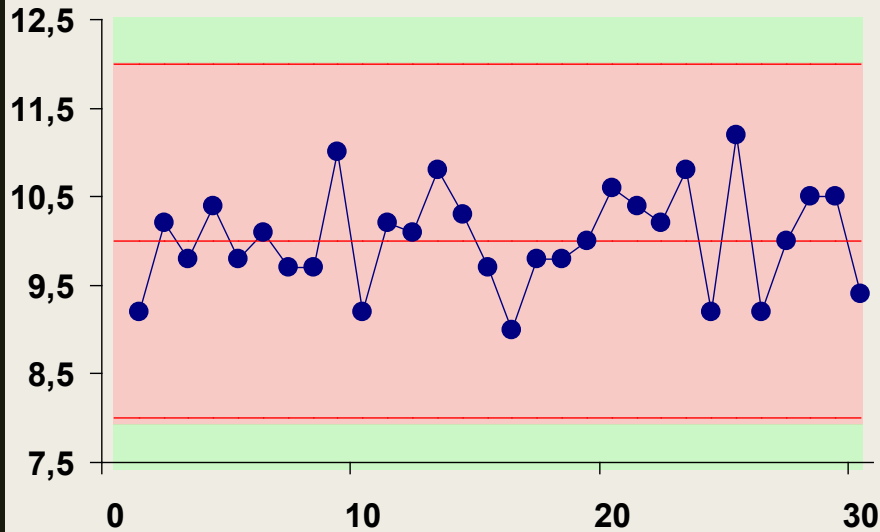


Orta Çizgi ilgilenilen kalite karakteristiğine (Y) ilişkin gözlemlerin ortalamasıdır.

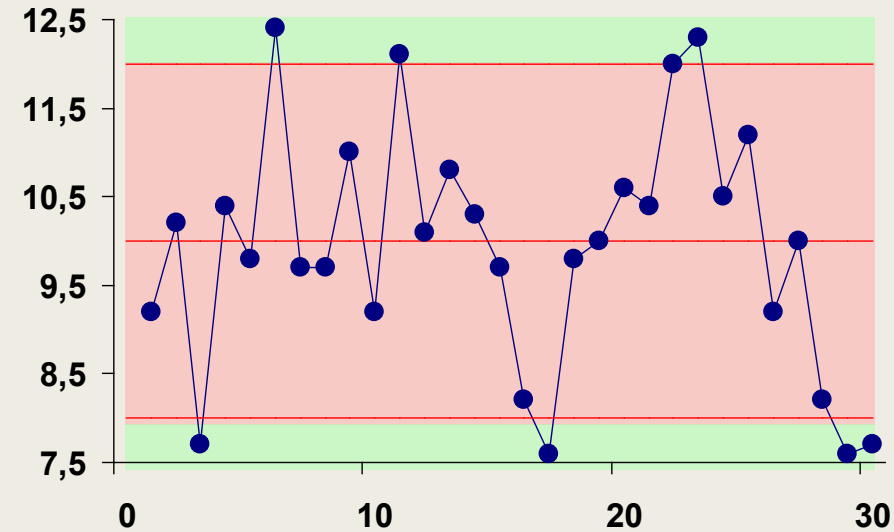
Orta çizgiye  $3\sigma$  eklenip çıkarılarak Üst ve alt kontrol sınırları oluşturulur.

# Kontrol Grafikleri?

## Kontrol altında



## Kontrol dışında

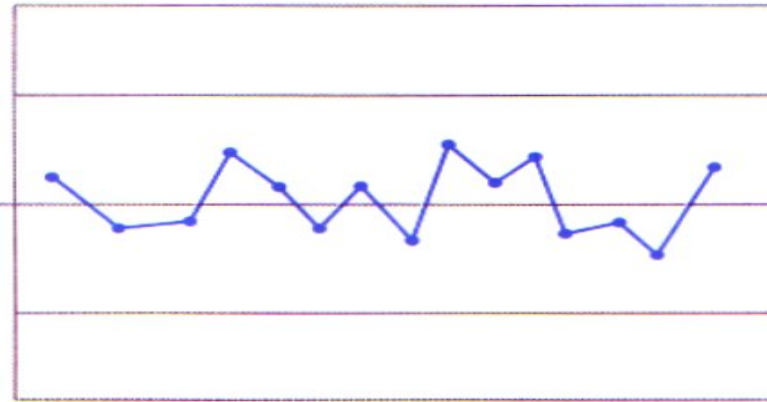


Özel düzenlerin varlığı da  
kontrol edilmeli !!!

Distribution of individual measurements  $x$ : Normal with mean  $\mu = 74$  and  $\sigma = 0.01$

Distribution of  $\bar{x}$ : Normal with mean  $\mu = 74$  and  $\sigma_{\bar{x}} = 0.0045$

Sample:  $n = 5$



UCL = 74.0135

Center Line = 74.0000

LCL = 73.9865

Piston halkası üreten bir firmanın müşterisi, halkaların iç çap ölçüsünün  $74 \pm 0,5$  mm olmasını istiyor.

Firmanın üretim süreci ise  $\mu = 74$  ve  $\sigma = 0,01$  olan normal dağılıma uyuyor (ilk çan eğrisi).

Üretim sürecinin kontrol altında olup olmadığını belirleyelim. Üretim sürecini yorumlayalım.

**Kalite karakteristiği:** Piston halkaları iç çap ölçüsü (mm)  
5'er birimlik 15 örnek ( $n = 5$ ,  $m = 15$ ) alınmış.

- Müşteri için kritik kalite özelliği iç çap ölçüsüdür. Müşteri tarafından arzu edilen üretim aralığı 73,95-74,05 mm'dir. Yani;

Alt Spesifikasyon Sınırı (ASS)=73,95

Üst Spesifikasyon Sınırı (ÜSS)=74,05

Tolerans=0,5 mm (çift yönlü)

Tolerans aralığı= $2 * 0,5 = 1$  mm.

73,95 mm'nin altındaki ve 74.95 mm'nin üstündeki üretim (non conforming-uygun olmayan) istenmez.



# Soru ??

0 halde halka üretim süreci için spesifikasyon dışı üretim oranını hesaplayınız.

**İpucu:** Standart normal dağılımdan yararlanınız.

X: iç çap ölçüsü (mm)

$P(\text{Uygun Olmayan Ürün}) =$

$$1 - P(73,95 \leq X \leq 74,05 \mid \mu = 74 \text{ ve } \sigma = 0,01) = ?$$

Halka üretim süreci için alt-üst doğal tolerans sınırları ise;

$$ADTS = \mu - 3\sigma = 74 - 3 * 0,01 = 73,97$$

$$ÜDTS = \mu + 3\sigma = 74 + 3 * 0,01 = 74,03$$

şeklinde hesaplanır.  $\mu$  ve  $\sigma$  bilinmiyor ise tahmincileri kullanılır.

### ÖNEMLİ NOT:

- DTS'lerin SS'den daha geniş olması arzu edilmez. Bu durum spek.dışı üretim oranının fazla olacağı anlamına gelir. Bu örnekte DTS sınırları SS içerisinde kalmıştır. (Bulduğunuz olasılığa bakınız.)
- SS'ler Kontrol sınırları **ile değil** DTS ile kıyaslanmalıdır.

Halka üretim süreci için ortalama kontrol grafiği kullanıldığında alt-üst kontrol sınırları ise (ikinci çan eğrisi);

$$AKS = \mu - 3\sigma_{\bar{X}} = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 74 - 3 * \frac{0,01}{\sqrt{5}} = 73,9865$$

$$ÜKS = \mu + 3\sigma_{\bar{X}} = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 74 + 3 * \frac{0,01}{\sqrt{5}} = 74,0135$$

şeklinde hesaplanır.

- Kontrol sınırları doğal tolerans sınırlarından dardır. Çünkü 15 gözlemden her biri aslında 5'er birimlik örneklerin ortalamasıdır. (Örnek ortalamalarının dağılımı için bkz. Merkezi Limit Teoremi)
- İkinci çan eğrisinde tüm ortalamalar sınırların içinde olduğundan ve özel bir düzen gözlemlenmediğinden sürecin kontrol altında olduğu söylenebilir.
- Tüm hesaplamalarda  $\mu$  ve  $\sigma$  bilinmiyor ise örnekler yardımıyla hesaplanan tahmincileri kullanılır.

## ÖNEMLİ NOT:

- Doğal tolerans sınırlarının spesifikasyon sınırlarından daha geniş olması arzu edilmez.
- Bu durum spek.dışı üretim oranının fazla olacağı anlamına gelir.
- Bu örnekte DTS sınırları SS içerisinde kalmıştır. (önceki slaytta bulduğunuz olasılığa bakınız.)
- SS'ler Kontrol sınırları **ile değil** DTS ile kıyaslanmalıdır.

- Spesifikasyon sınırları genellikle  $\mu \pm 4\sigma$  şeklinde belirlenir.

Örneğimizde  $74 \pm 0,05$  idi.

Buna göre beklenen ortalama 74'tür. Sürecin üretim ortalaması da (gerçekleşen) 74'tür. Süreçte ortalamadan sapma söz konusu değildir.

Beklenen standart sapma  $0,05/4=0,0125$  iken gerçekleşen standart sapma 0,01'dir. Gerçek standart sapmanın daha küçük olması sürecin yeteneğini gösterir. Standart sapma 0,0125'ten büyük, ortalama 74'ten uzak olsaydı spesifikasyon dışı üretim oranı artacaktı.

# Üretici-Tüketici Riski



## Üretici riski:

I. Tip hata yapma olasılığı

$$\alpha = P(H_0 \text{ ret} / H_0 \text{ dogru})$$

## Tüketici riski:

II. Tip hata yapma olasılığı

$$\beta = P(H_0 \text{ kabul} / H_0 \text{ yanlis})$$

## Testin gücü:

$$(1 - \beta) = P(H_0 \text{ ret} / H_0 \text{ yanlis})$$

## Güven aralığı:

$$(1 - \alpha) = P(H_0 \text{ kabul} / H_0 \text{ dogru})$$

# Gerekli Örnek Büyüklüğü Nasıl Hesaplanır?

Ortalamadan delta kadar sapmış bir süreçte, sürecin kontrol altındaymış gibi değerlendirilmesi yani sapmayı yakalayamama olasılığı  $\beta$ 'dir (Yanlış alarm-false alarm). Seçilen  $\alpha$  ve  $\beta$  olasılıklarına bağlı olarak alınması gereken örnek büyüklüğü formülü ise en altta görülmektedir.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0 \quad (\mu = \mu_0 + \delta)$$

$$\beta = P(-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2} / H_a \text{ dogru}; \mu = \mu_0 + \delta)$$

$$\beta = \Phi(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}) - \Phi(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma})$$

$$n = \frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta})^2 \cdot \sigma^2}{\delta^2}$$

# Örnek



$\alpha=0,05$ ;  $\beta=0,10$   $\sigma=6$  ve  $\delta=1$  için gerekli örnek büyüklüğü;

$$n = \frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta})^2 \cdot \sigma^2}{\delta^2}$$
$$= \frac{(1,96 + 1,285)^2 \cdot 6^2}{1^2} \cong 379$$

Aynı koşullarda  $\delta=2$  için gerekli örnek büyüklüğü;

**Büyük sapmalar küçük örneklerle bile yakalanabilir.**

$$n = \frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta})^2 \cdot \sigma^2}{\delta^2}$$
$$= \frac{(1,96 + 1,285)^2 \cdot 6^2}{2^2} \cong 95$$



# İşletim Karakteristiği Eğrisi

Bkz. Burnak, Demirtaş; 2019

$$\beta = P(\text{AKS}_Y \leq \bar{Y} \leq \ddot{\text{UKS}}_Y / \mu = \mu_0 + k\sigma) \delta = k\sigma$$

$$\ddot{\text{UKS}}_Y = \mu_0 + 3\sigma / \sqrt{n}$$

$$\text{AKS}_Y = \mu_0 - 3\sigma / \sqrt{n}$$

$$\beta = P\left(\frac{\text{AKS}_Y - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{\ddot{\text{UKS}}_Y - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

# İşletim Karakteristiği Eğrisi

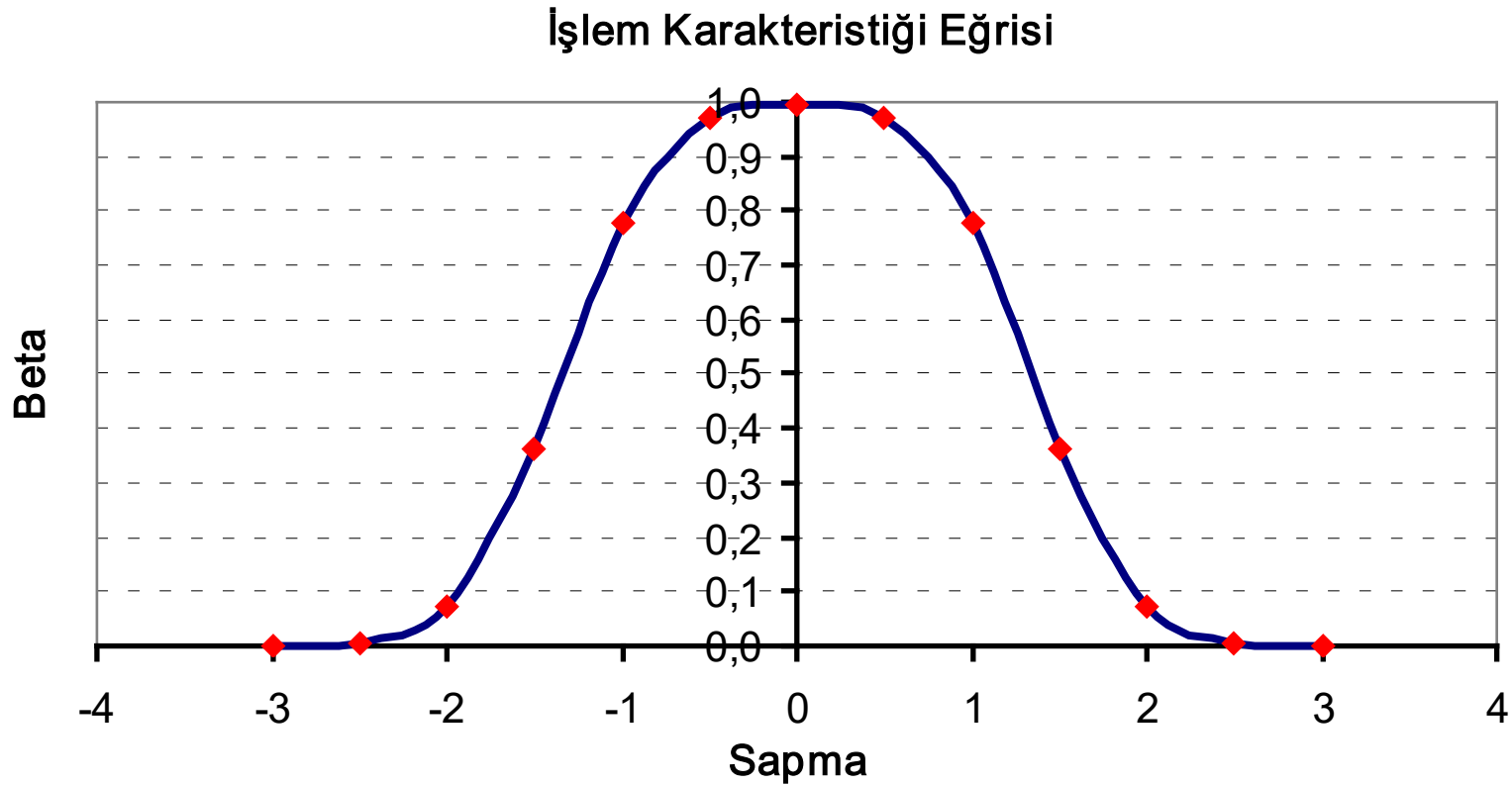
**n=5**



Birikimli Olasılıklar  
Bkz. Normal Dağılım Tablosu

k	$(3-k\sqrt{n})$	$(-3-k\sqrt{n})$	$F(3-k\sqrt{n})$	$F(-3-k\sqrt{n})$	Beta	(1-Beta)	OÇS=1/(1-Beta)
-3	9,71	3,71	1,00	1,00	0,0001	1,00	1
-2,5	8,59	2,59	1,00	1,00	0,0048	1,00	1
-2	7,47	1,47	1,00	0,93	0,0705	0,93	1
-1,5	6,35	0,35	1,00	0,64	0,3616	0,64	2
-1	5,24	-0,76	1,00	0,22	0,7775	0,22	4
-0,5	4,12	-1,88	1,00	0,03	0,9701	0,03	33
0	3,00	-3,00	1,00	0,00	0,9973	0,00	370
0,5	1,88	-4,12	0,97	0,00	0,9701	0,03	33
1	0,76	-5,24	0,78	0,00	0,7775	0,22	4
1,5	-0,35	-6,35	0,36	0,00	0,3616	0,64	2
2	-1,47	-7,47	0,07	0,00	0,0705	0,93	1
2,5	-2,59	-8,59	0,00	0,00	0,0048	1,00	1
3	-3,71	-9,71	0,00	0,00	0,0001	1,00	1

# İşletim Karakteristiği Eğrisi



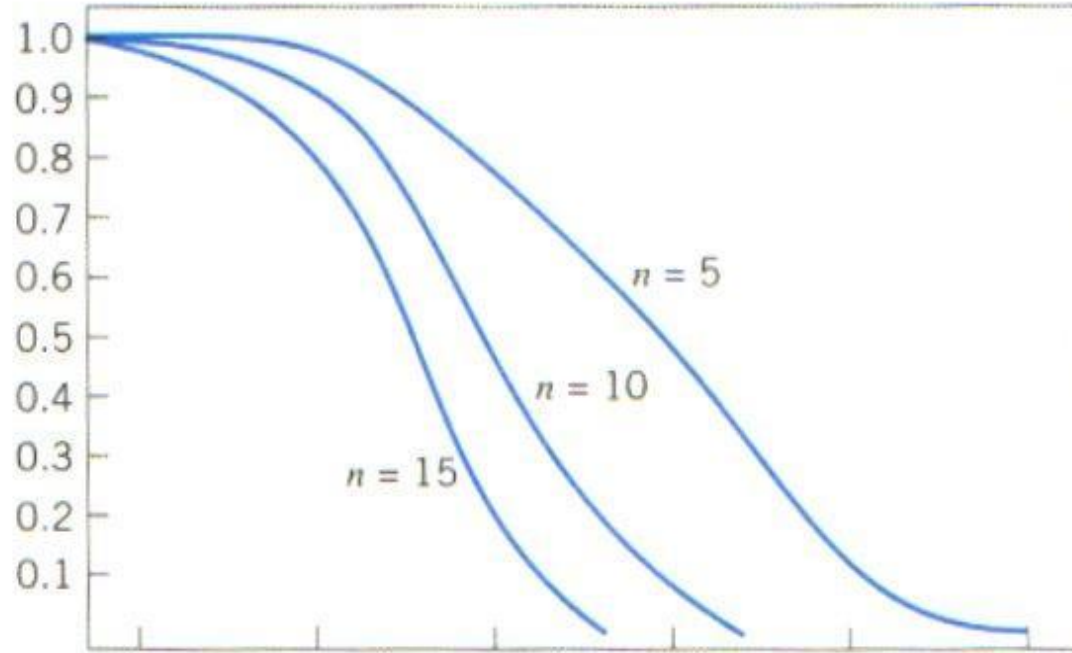
# Üretici-Tüketici Riski

## Örnek Büyüklüğü



Verilen parametreler için gerekli örnek büyüklüğü İşletim Karakteristiği Eğrisi (OCC-Operating Characteristic Curve) ile de bulunabilir.

Sapmayı yakalayamama olasılığı  
( $\beta$ )



Sapma ( $k\sigma$ )

# Muayene ve Ölçme

Muayene (inspection) hammadde, yarımamul ya da mamul biriminin ölçülmesi, denenmesi, sınanması ya da karşılaştırılması işlemidir (Bkz. Burnak & Demirtaş, 2019).

## Amaçları:

- Ürünlerin spesifikasyonları sağlayıp sağlamadıklarının belirlenmesi,
- Spesifikasyonları sağlamayan birimlerin tanımlanması ve ayıklanması,
- Sapmaların raporlanması

# Muayene ve Ölçme



Kalite Karakteristiği ✓ **Kullanılan ölçme cihazı**  
✓ **Kullanım Yönergeleri**  
✓ **Kullanan Kişiler**

- **DOĞRULUK (ACCURACY)**
- **HASSASİYET (PRECISION)**

# Muayene ve Ölçme

**DOĞRULUK:** Yapılan bir dizi ölçüm değerlerinin ölçülen kalite karakteristiğine gösterdiği uyum (ölçüm değerlerinin ortalaması ile ölçülen kalite karakteristiğinin gerçek değeri arasındaki fark)

## **Doğruluğu etkileyen başlıca nedenler:**

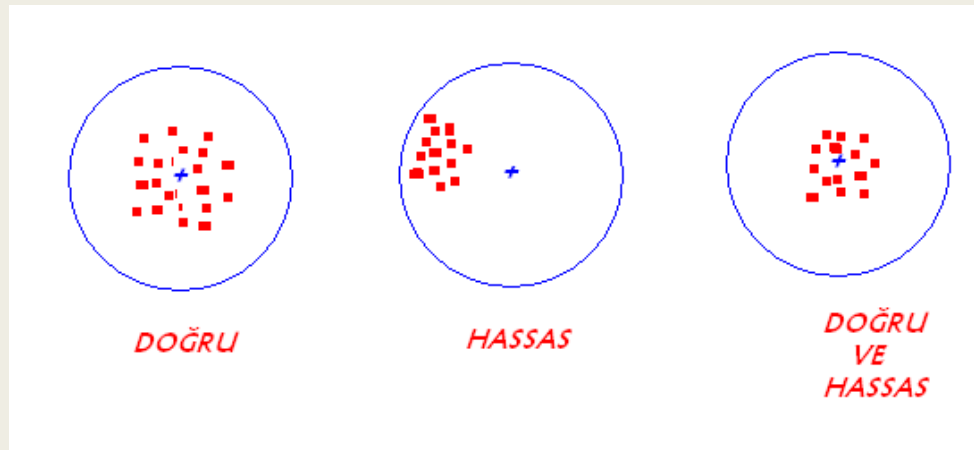
Cihazın aşınması,  
Ayar hatası,  
Operatör tarafından yanlış kullanım

# Muayene ve Ölçme

**HASSASIYET:** Bir kalite karakteristiği üzerinde yapılan bir dizi tekrarlı ölçümlerin birbirleri ile gösterdiği uyum

**Hassasiyetin belirlenmesinde önemli iki kavram:**

- Tekrar Edebilme (repeatability),
- Yeniden üretebilme (reproducibility)





# Spesifikasyon–Tolerans Örnek 1

- Özellikleri aşağıda verilen dört parçanın montajı sonrasında elde edilen ürünün spesifikasyonunu belirleyiniz.

- $X_1 \sim N(2.0; 0.0004)$
- $X_2 \sim N(4.5; 0.0009)$
- $X_3 \sim N(3.0; 0.0004)$
- $X_4 \sim N(2.5; 0.0001)$

- $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
- $B[Y] = B[X_1 + X_2 + X_3 + X_4] = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$   
 $= 2.0 + 4.5 + 3.0 + 2.5 = 12.0$
- $V(Y) = V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2$   
 $= 0.0004 + 0.0009 + 0.0004 + 0.0001 = 0.0018$
- $\sigma = 0.042$
- Spesifikasyon:  $12.0 \pm 4(0.042)$
- $12 \pm 0.168 \Rightarrow 11.832 \leq Y \leq 12.168$

Tasarım spesifikasyonu  $12.0 \pm 0.10$  olsaydı...

$$\begin{aligned} \blacksquare P(11.90 \leq Y \leq 12.10) &= P(Y \leq 12.10) - P(Y \leq 11.90) \\ &= \Phi(2.36) - \Phi(-2.36) \quad \nearrow \text{Birikimli olasılıklar} \\ &= 0.99086 - 0.00914 \\ &= 0.98172 \end{aligned}$$

■ Üretilenlerin %98.172'si spesifikasyon limitleri içinde kalmaktadır.

■  $P(Y < 11.90) \Rightarrow$  **ıskarta oranı**

■  $P(Y > 12.10) \Rightarrow$  **yeniden işleme oranı**

## Spesifikasyon–Tolerans Örnek 2

- Spesifikasyonu  $6.00 \pm 0.06$  cm olan bir ürün; ortalamaları aşağıda verilen ve varyansları eşit olan üç parçanın montajıyla elde edilmektedir. Montajda kullanılan parçaların toleranslarını belirleyiniz.
  - $\mu_1 = 1.0$
  - $\mu_2 = 3.0$
  - $\mu_3 = 2.0$

# Spesifikasyon - Tolerans

- $\mu_Y \pm 4\sigma_Y$
- $\mu_Y = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$   
 $= 1.0 + 3.0 + 2.0 = 6.0$
- $\sigma_Y = 0.06 / 4 = 0.015$
- $\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (0.015)^2 = 0.000225$   
 $= 3 \sigma^2$
- $\sigma^2 = \sigma_Y^2 / 3 = 0.000075$
  
- $X_1: 1.0 \pm 4\sqrt{0.000075} = 1.0 \pm 0.0346$
- $X_2: 3.0 \pm 4\sqrt{0.000075} = 3.0 \pm 0.0346$
- $X_3: 2.0 \pm 4\sqrt{0.000075} = 2.0 \pm 0.0346$