

Üstel Dağılımın Özellikleri

1) Belleksizlik Özelliği (Memorilessness Property)

$s, t > 0$, $X \sim \exp(\lambda)$ ise

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) = e^{-\lambda s}$$



2) İki Üstel dağılmış r.d için $P(X \leq Y)$ olasılığı?

$$X \sim \exp(\lambda)$$

$$Y \sim \exp(\mu)$$

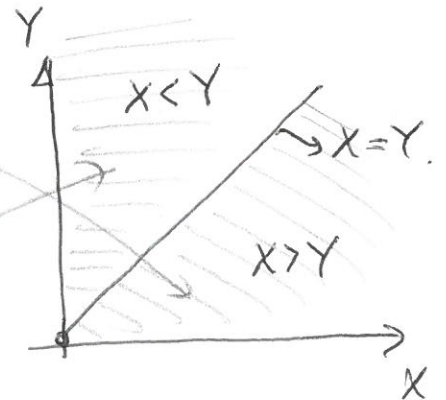
X, Y bağımsız r.d. olsun

SORU:

$$P(X < Y) = ?$$

$$P(X = Y) = ?$$

$$P(X > Y) = ?$$



SDRU:

$$P(X \leq Y) = P(X < Y) + P(X = Y)$$

Yanıt: $y \in \mathbb{R}$ sabit olursa, ($y > 0$)

$$P(X \leq y) = F_x(y) = 1 - e^{-\lambda y} \quad \text{elde ederiz.}$$

Y 'ye göre koşullandıralım:

$$P(X \leq Y | Y=y) = P(X \leq y | Y=y) \underset{\substack{\downarrow \\ X, Y \text{ bağımsız}}}{=} P(X \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

Toplam Olasılık Kuralından

$$P(X \leq Y) = \int_0^{\infty} P(X \leq Y | Y=y) \underbrace{P(Y=y)}_{= f_Y(y)} dy$$

$$= \int_0^{\infty} P(X \leq y) f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} dy - \mu \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)y} \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)} dy$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \int_0^{\infty} (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)y} dy = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad \text{veya} \quad \frac{B[X]}{B[X]+B[Y]} = ?$$

Örnek: $X \sim \exp(\lambda = 4/\text{saat}) \rightarrow \mu_X = B(X) = \frac{1}{4} \text{ saat}$
 $Y \sim \exp(\mu = 6/\text{saat}) \quad \mu_Y = B(Y) = \frac{1}{6} \text{ saat}$

Sorular:

$$P(X=Y) = ?$$

$$P(X \leq Y) = \dots = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{4}{4+6} = 0.40 \quad \text{olarak bulunur}$$

$$P(X > Y) = 1 - P(X \leq Y) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{6}{10} = 0.60.$$

$$P(X \leq Y) = \frac{B(Y)}{B(X) + B(Y)} = \frac{1/6}{1/4 + 1/6} = \dots = ? =$$

3) 2 üstel dağılmış r.d. minimumunun dağılımı nedir?

$$X \sim \exp(\lambda) \quad \lambda > 0$$

$$Y \sim \exp(\mu) \quad \mu > 0$$

X, Y bağımsız

Soru: $Z = \min(X, Y)$ dağılımını bulunuz.

Gözlem

$$Z = \min(X, Y) \quad \text{ise}$$

$$\begin{aligned} \{Z > z\} &\equiv \{\min(X, Y) > z\} \equiv \{X > z \text{ ve } Y > z\} \\ &\equiv \{X > z\} \cap \{Y > z\}. \end{aligned}$$

$\begin{array}{c} | \\ \hline X \\ | \\ \hline Y \\ | \\ \hline z \end{array}$

$$P(Z > z) = P(X > z) \cdot P(Y > z)$$

$$= e^{-\lambda z} \cdot e^{-\mu z} = e^{-(\lambda+\mu)z}$$

$Z \sim$ hangi dağılımdır?

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F_Z(z)$$

$$1 - F_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)z}$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z} \quad z > 0$$

Her iki tarafın z 'ye göre türevini alırsak

$$f_z(z) = \begin{cases} (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)z} & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$Z \sim \exp(\lambda+\mu)$ yani z 'de parametresi $(\lambda+\mu)$ olan üstel dağılıma uygun dağılır.

Örnek: Bir sistem seri bağlı 2 makina şeklinde çalışıyor.



sistemin çalışma süresi = $\min(X, Y)$

hangi makina önce bozulursa onun çalışma süresine esittir.