ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

2022-2023 Bahar Yarıyılı

BULANIK MANTIK

YARIYIL	DERS						
	Teorik	Uygulama	Lab.	Kredisi	AKTS	TÜRÜ	DİLİ
4	2	0	0	2	3	Seçmeli	Türkçe

Dr. H. Serhan Yavuz

Hafta-7: Bulanık genişleme yasası

Bulanık Genişleme Yasası
ve
Bulanık Aritmetik

Hafta-7

Klasik Kümelerde Genişleme Yasası

$$x \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow y$$

Genişleme, *x*'ten *y*'ye *f*(·) aracılığıyla yapılan bir eşlemedir.

$y = f(x)$

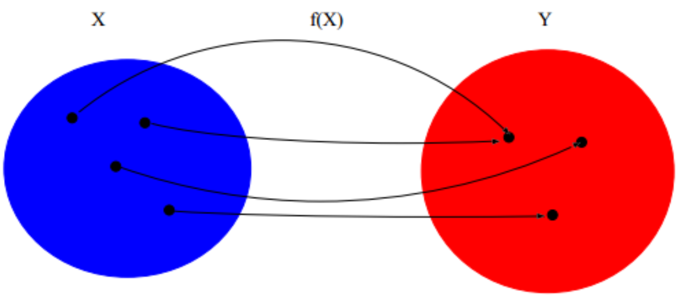
f: X → Y (bir tanım kümesinden bir başka kümeye)

x: giriş değişkeni

y: çıkış değişkeni (*f* üzerinden *x*'in dönüşümü)

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ (tersi alınabilir bir fonksiyon üzerinden *x*'in geri kazanımı)

Eşleme/Haritalama (mapping)



Klasik Kümelerde Genişleme Yasası

x'ten y'ye yapılan eşleme, XxY Kartezyen uzayında tanımlanan bir R ilişkisi üzerinden ifade edilebilir.

Bu ilişkinin karakteristik fonksiyonu, klasik kümeler için 0 veya 1 değerlerini içermelidir.

$$\chi_R(x,y) = \begin{cases} 1\ , & y = f(x) \\ 0\ , & y \neq f(x) \end{cases}$$

Klasik Kümelerde Genişleme Yasası

A, X üzerinde tanımlanmış klasik bir küme olsun. y=f(x) eşlemesi, Y üzerinde tanımlanmış bir B kümesiyle sonuçlanacaktır.

$$B = f(A) = \{y \mid \forall x \in A,\ y = f(x)\},$$

B'nin karakteristik işlevi şu şekilde olacaktır:

$$\chi_B(y) = \chi_{f(A)}(y) = \bigvee_{y=f(x)} \chi_A(x)$$

Burada B klasik bir kümedir.

Klasik Kümelerde Genişleme Yasası

Örnek: X={ -2, -1, 0, 1, 2} ve A={ 0, 1} olsun. A kümesine y= |4x|+2 dönüşümü uygulanırsa B kümesi ne olur?.

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=10 \\ x=-1 \Rightarrow y=6 \\ x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=1 \Rightarrow y=6 \\ x=2 \Rightarrow y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow Y=\{2,6,10\}$$

Klasik Kümelerde Genişleme Yasası

Çözüm #1: Verilen değerlerle doğrudan ilgili formülü uygulayalım:

$$\chi_B(y)=\bigvee_{y=f(x)} \chi_A(x)$$

$$\chi_A(0)=1\,,\ \chi_A(1)=1$$

$$\chi_A(-2)=\chi_A(-1)=\chi_A(2)=0$$

$$\chi_B(2)=\vee\{\chi_A(0)\}=1$$

$$\chi_B(6)=\vee\{\chi_A(-1),\chi_A(1)\}=\vee\{0,1\}=1$$

$$\chi_B(10)=\vee\{\chi_A(-2),\chi_A(2)\}=\vee\{0,0\}=0$$

Klasik Kümelerde Genişleme Yasası

Çözüm #2: İlişki matrisi kullanarak bileşke alalım:

$$\chi_R(x,y) = \begin{cases} 1 \ , & y = f(x) \\ 0 \ , & y \neq f(x) \end{cases}$$

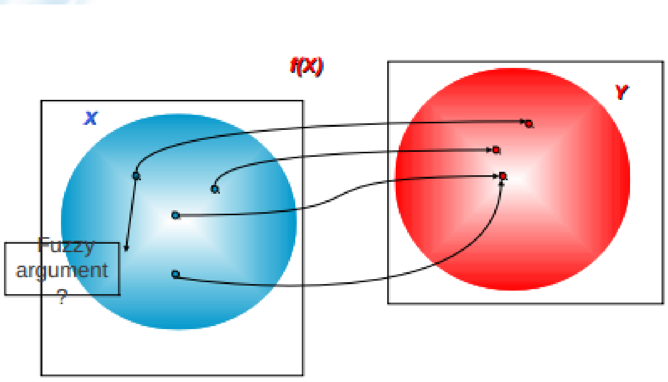
$$R = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 6 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

B = A o R

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 6 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \{2, 6\}$$

Bulanık Eşleme



Bulanık Kümelerde Genişleme Yasası

$\underset{\sim}{A}$: X üzerinde tanımlanan bulanık küme

$y = f(x)$: dönüşüm fonksiyonu (eşleme, haritalama fonksiyonu)

$\underset{\sim}{B}$: X evrensel kümesinde tanımlanan $\underset{\sim}{A}$ kümesinin f üzerinden dönüşümü.

$\underset{\sim}{B}$ kümesi Y evrensel kümesinde tanımlanan bir başka kümedir.

$\underset{\sim}{B} = f\left(\underset{\sim}{A}\right)$

$$\boxed{\mu_B(y) = \bigvee_{f(x)=y} \mu_A(x)}$$

Bulanık Genişleme Yasası

Genel tanım: Daha genel olarak, girdi evrenimizin birçok evrenin Kartezyen çarpımından oluştuğunu varsayalım. Bu durumda, f üzerinden eşleme (genişleme), bu Kartezyen girdi uzayının ve çıktı uzayının güç kümeleri üzerinde tanımlanır.

$$f : \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \cdots \times \mathrm{X}_n) \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{Y})$$

$\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \ldots, \underset{\sim}{A}_n$ kümeleri $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ evrenlerinde tanımlansın.

$$\underset{\sim}{B} = f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \ldots, \underset{\sim}{A}_n) \Rightarrow \boxed{\mu_B(y) = \max_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y} \left\{ \min(\mu_{\underset{\sim}{A}_1(x_1)}, \mu_{\underset{\sim}{A}_2(x_2)}, \ldots, \mu_{\underset{\sim}{A}_n(x_n)},) \right\}}$$

Zadeh'in genişleme prensibi

Bulanık Genişleme Yasası

Örnek:

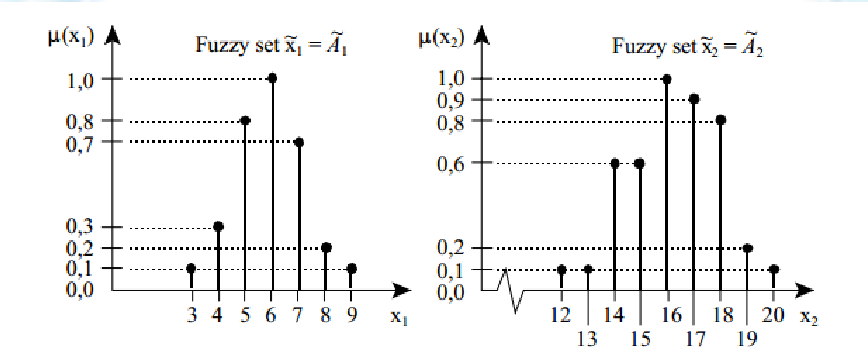
$$\underset{\sim}{A}=\left\{\frac{0.1}{-2}+\frac{0.4}{-1}+\frac{0.8}{0}+\frac{0.9}{1}+\frac{0.3}{2}\right\},\quad f(x)=x^2-3$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.8}{-3}+\frac{(0.4 \vee 0.9)}{-2}+\frac{(0.1 \vee 0.3)}{1}$$

$$\underset{\sim}{B}=\left\{\frac{0.8}{-3}+\frac{0.9}{-2}+\frac{0.3}{1}\right\}$$

Bulanık Genişleme Yasası

Örnek:



$$z=f(x_1;\,x_2)=3\cdot x_1-x_2+5$$

$(x_1; \mu(x_1))$

$(x_2; \mu(x_2))$

	(3; 0,1)	(4; 0,3)	(5; 0,8)	(6; 1,0)	(7; 0,7)	(8; 0,2)	(9; 0,1)
(12; 0,1)	(2; 0,1)	(5; 0,1)	(8; 0,1)	(11; 0,1)	(14; 0,1)	(17; 0,1)	(20; 0,1)
(13; 0,1)	(1; 0,1)	(4; 0,1)	(7; 0,1)	(10; 0,1)	(13; 0,1)	(16; 0,1)	(19; 0,1)
(14; 0,6)	(0; 0,1)	(3; 0,3)	(6; 0,6)	(9; 0,6)	(12; 0,6)	(15; 0,2)	(18; 0,1)
(15; 0,6)	(-1; 0,1)	(2; 0,3)	(5; 0,6)	(8; 0,6)	(11; 0,6)	(14; 0,2)	(17; 0,1)
(16; 1,0)	(-2; 0,1)	(1; 0,3)	(4; 0,8)	(7; 1,0)	(10; 0,7)	(13; 0,2)	(16; 0,1)
(17; 0,9)	(-3; 0,1)	(0; 0,3)	(3; 0,8)	(6; 0,9)	(9; 0,7)	(12; 0,2)	(15; 0,1)
(18; 0,8)	(-4; 0,1)	(-1; 0,3)	(2; 0,8)	(5; 0,8)	(8; 0,7)	(11; 0,2)	(14; 0,1)
(19; 0,2)	(-5; 0,1)	(-2; 0,2)	(1; 0,2)	(4; 0,2)	(7; 0,2)	(10; 0,2)	(13; 0,1)
(20; 0,1)	(-6; 0,1)	(-3; 0,1)	(0; 0,1)	(3; 0,1)	(6; 0,1)	(9; 0,1)	(12; 0,1)

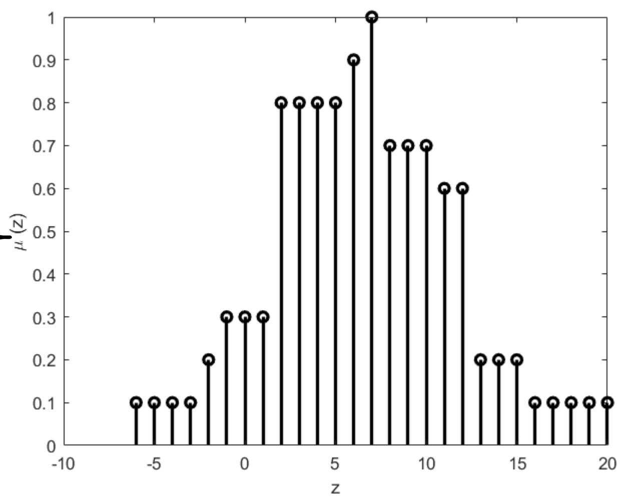
$(z_1; \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\})$

z-tablosu

2	5	8	11	14	17	20
1	4	7	10	13	16	19
0	3	6	9	12	15	18
-1	2	5	8	11	14	17
-2	1	4	7	10	13	16
-3	0	3	6	9	12	15
-4	-1	2	5	8	11	14
-5	-2	1	4	7	10	13
-6	-3	0	3	6	9	12

μ(z) - tablosu

0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
0.1000	0.3000	0.6000	0.6000	0.6000	0.2000	0.1000
0.1000	0.3000	0.6000	0.6000	0.6000	0.2000	0.1000
0.1000	0.3000	0.8000	1	0.7000	0.2000	0.1000
0.1000	0.3000	0.8000	0.9000	0.7000	0.2000	0.1000
0.1000	0.3000	0.8000	0.8000	0.7000	0.2000	0.1000
0.1000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.1000
0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000



0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.2000	0.3000	0.3000	0.3000	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.9000
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

1	0.7000	0.7000	0.7000	0.6000	0.6000	0.2000	0.2000	0.2000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Bulanık Aritmetik

$\underset{\sim}{\mathrm{I}}$, *X* evreninde gerçek doğru üzerinde tanımlanan ve $\underset{\sim}{\mathrm{J}}$, ve *Y* evreninde gerçek doğru üzerinde tanımlanan iki bulanık sayı olsun. * simgesi de genel bir aritmetik işlemi temsil etsin.

$$* \equiv \{ + , - , \times , \div \}$$

$\underset{\sim}{\mathrm{I}} * \underset{\sim}{\mathrm{J}}$ ile gösterilen bu iki sayı arasındaki bir aritmetik işlem, bulanık genişleme yasası kullanılarak hesaplanabilir. Bu yeni sonuç Z evreninde tanımlıdır.

$$\boxed{\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{I}} * \underset{\sim}{\mathrm{J}}}(z) = \bigvee_{x * y = z} \left(\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{I}}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}(y)\right)}$$

Bulanık Aritmetik

Örnek: Yaklaşık olarak bir rakamı $\underset{\sim}{1} = \left\{ \frac{0.2}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.2}{2} \right\}$ biçiminde tanımlanırsa, $\underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{1}$ işlemi üzerinden yaklaşık olarak iki değerini hesaplayınız.

Cevap: $\underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{1} = \left\{ \frac{0.2}{0} + \frac{0.2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.2}{4} \right\}$

Çözüm: $\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}=\underset{\sim}{2}=\left(\frac{0.2}{0}+\frac{1}{1}+\frac{0.2}{2}\right)+\left(\frac{0.2}{0}+\frac{1}{1}+\frac{0.2}{2}\right)$

$$=\left\{\frac{\min(0.2,0.2)}{0}+\frac{\max[\min(0.2,1),\min(1,0.2)]}{1}\right.$$

$$+\frac{\max[\min(0.2,0.2)\min(1,1),\min(0.2,0.2)]}{2}$$

$$\left.+\frac{\max[\min(1,0.2),\min(0.2,1)]}{3}+\frac{\min(0.2,0.2)}{4}\right\}$$

$$=\left\{\frac{0.2}{0}+\frac{0.2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.2}{4}\right\}.$$

Örnek: $\underset{\approx}{A}=\left\{\frac{0.2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.7}{4}\right\}$, $\underset{\approx}{B}=\left\{\frac{0.5}{1}+\frac{1}{2}\right\}$ ise $f(\underset{\approx}{A},\underset{\approx}{B})=\underset{\approx}{A}\times\underset{\approx}{B}$ (A çarpı B - aritmetik çarpım) işlemini hesaplayınız.

$$f(\underset{\approx}{A},\underset{\approx}{B})=\underset{\approx}{A}\times\underset{\approx}{B}$$

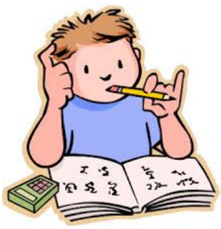
$$=\left\{\min\left(\frac{0.2,0.5}{1}+\frac{\max[\min(0.2,1),\min(0.5,1)]}{2}\right.\right.$$

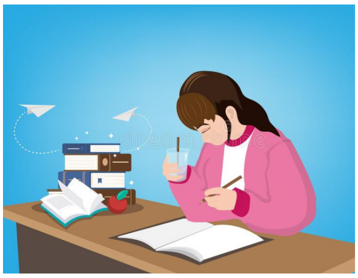
$$\left.+\frac{\max[\min(0.7,0.5),\min(1,1)]}{4}+\frac{\min(0.7,1)}{8}\right\}$$

$$=\left\{\frac{0.2}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{1}{4}+\frac{0.7}{8}\right\}.$$

Ödev

Evde bireysel çalışma:
Ders kitabından bu konuyla ilgili ekstra örneklere ve bölüm sonu problemlerine bakınız.





Ders Sonu: Soru - Cevap