

# RASSAL MODELLER (By Aykut Arapoğlu)

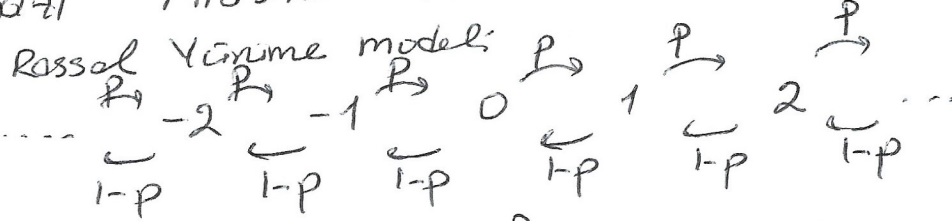
7 Aralık 2020

## \* Ara Sınav Sonuçları

NO: 5-89  $\bar{x}=47$

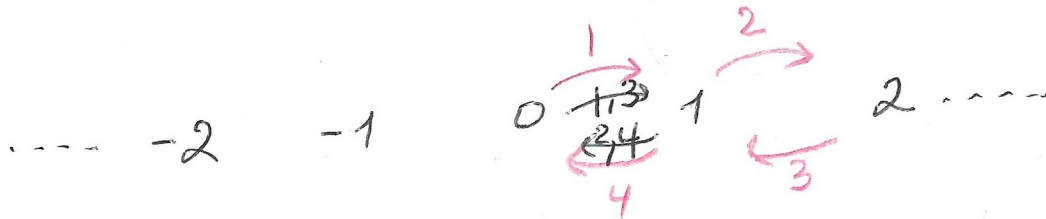
i.ö. 19-86  $\bar{x}=54$

## \* Bazı Ara Sınav Soruları



$S = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$  Durum Utağı

$P(X_4=0 | X_0=0) = ?$   $P_{00}^{(4)}$  ile aynı



2 Kırmızı yol + simetrik yol

2 Siyah yol + simetrik yol

Bir tane daha var hangisi ?

farklı yol var.

(farklı sıralama ile)

Herbiri 2 adım sağa + 2 adım sola şeklinde

$$p \cdot p (1-p) (1-p) = p^2 (1-p)^2$$

Toplam olasılık :  $P_{00}^{(4)} = \frac{?}{1} p^2 (1-p)^2$  olmak.

2

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

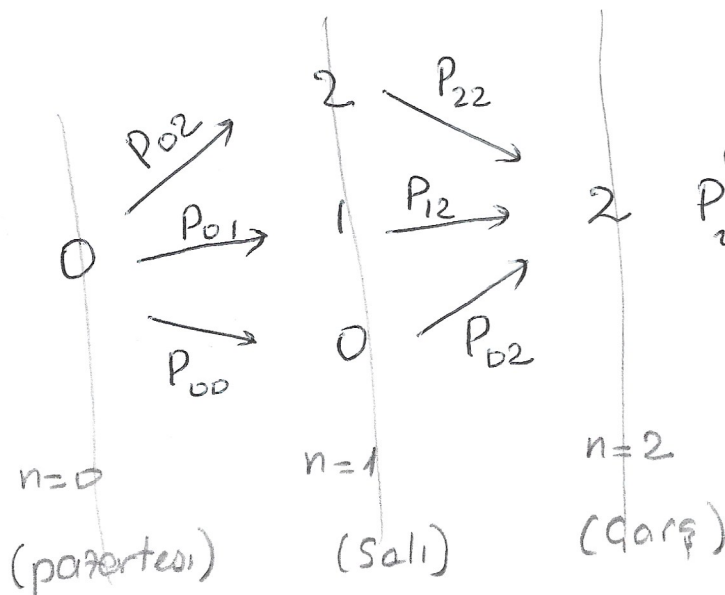
$$P(X_4=2 | X_2=0) = P(X_4=2 | X_2=0) =$$

(neder?)

$$= P(X_2=2 | X_0=0) = P_{02}^{(2)} = P_{00}P_{02} + P_{01}P_{12} + P_{02}P_{22}$$

adım (zaman)

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$



Genel Kural

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_k P_{ik} P_{kj}$$

Genel Kural

\* SORU

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = ?$$

→ Geometrik dizi değil!

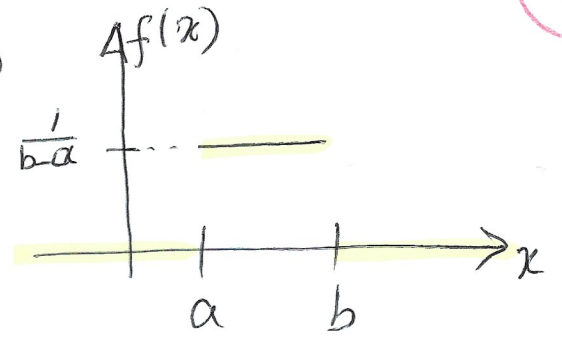
$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

Harmonik seri → yakınsamaz

$X \sim \text{Sürekli Düzgün } U(a, b)$

$$E(X) = 4 \quad \text{Var}(X) = \frac{25}{3}$$

$$P(7 \leq X \leq 10) = ?$$



Önce  $a, b$  değerlerini bulalım:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = 4 \Rightarrow a+b = 8 \quad (1)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{3} \Rightarrow (b-a)^2 = 100$$

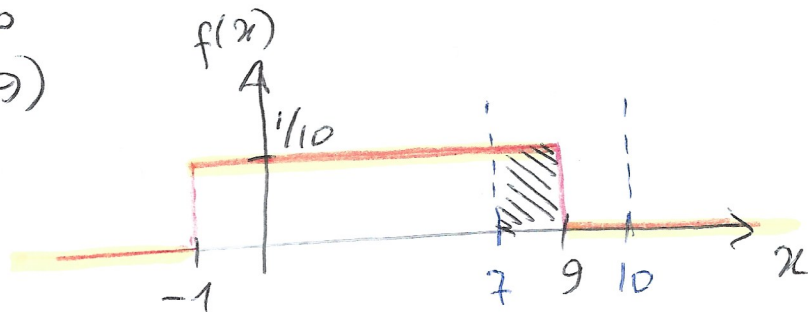
$$|b-a| = 10 \quad b > a$$

$$b-a = 10 \quad (2)$$

(1) ve (2) birlikte çözersek

$$2b = 18 \quad \begin{cases} b = 9 \\ a = -1 \end{cases} \text{ olarak bulunur}$$

$$X \sim U(-1, 9)$$



Dikkat:

$$P(7 \leq X \leq 10) = P(7 \leq X \leq 9) = 2 \times \frac{1}{10} = 0.20$$

4

Rasgele seçilen  $n=60$  kişiden en az birinin 25 Kasım'da doğmuş olma olasılığı nedir?

Çözüm:

$$A = \{ \text{En az birinin 25 Kasım'da doğması} \}$$
$$(\geq 1 : 1, 2, 3, \dots, 60)$$

$$P(A) = ?$$

$$\bar{A} = \{ \text{Hiçbirinin 25 Kasım'da doğmaması olması} \}$$

$$K_i = \{ i. \text{ kişinin 25 Kasım'da doğmuş olması} \}$$

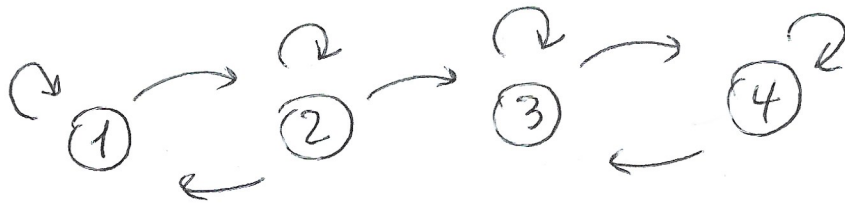
ve olayları bağımsızdır. (Neden?)

$$\bar{A} = \bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 \cap \bar{K}_3 \cap \dots \cap \bar{K}_{60}$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{K}_1) \cdot P(\bar{K}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{K}_{60})$$
$$= \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{60} \approx 0.848$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.848 \approx 0.1518$$

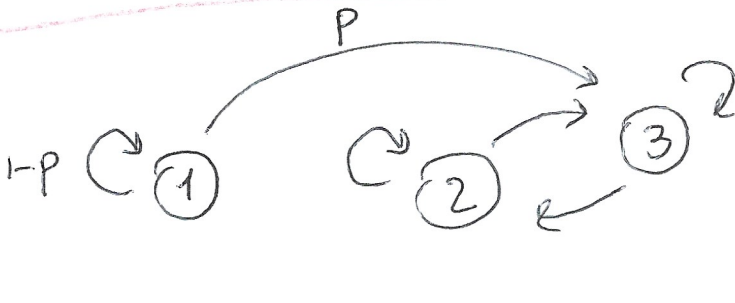
Aşağıdaki MZ'nin durumlarını sınıflandırınız:



Durum uzayı:

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

Haberleşen sınıflar:  $C_1 = \{ \}$   
 $C_2 = \{ \}$



$$C_1 = \{ \}$$

$$C_2 = \{ \}$$

$$E[1. \text{ ziyaret sayısı} | X_0 = 1] = ?$$

$X = 1$ . ziyaret sayısı

$$P(X=1) = P$$

$$P(X=2) = (1-p)P$$

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} P \quad k=1,2,\dots$$

$$X \sim \text{Geo}(P) \rightarrow E[X | X_0=1] = \frac{1}{P}$$

$$E[2. \text{ durum ziyaret sayısı} | X_0=1] = ?$$

Transient bir durumdan Recurrent bir duruma geçiş mümkün mü?  
 Rec. " " Transient " " " mümkün mü?

## Örnek: (Urn model)

İki torbamız var (A ve B olsun)

Her iki torbada toplam  $N$  tane Beyaz,  $N$  Kırmızı top  
Deneyde: iki torbadan rasgele birer top seçiliyor ve  
seçilen toplar yer değiştiriliyor. Bu deney bağımsız  
şekilde tekrarlanıyor.

$X_n$ :  $n$ . tekrar/deney sonrası A'daki Beyaz top sayısı

$n=1,2,3,\dots$

Başlangıçta tüm Beyaz toplar A'da ve tüm Kırmızı toplar B'de

$X_0 = ?$

Not:  $X_n$  değeri bize torbalarda hangi renkten kaç top  
olduğu bilgisini bize veriyor. (Sistemin durumunu tam  
olarak belirlediği için Durum Değişkeni olarak kullanılabilir.)

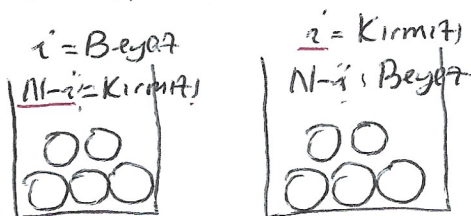
Durum uzayı =  $S = \{ \quad \}$  yazınız.

$X_n$ 'in Kesikli Zaman MZ olduğunu söyleyebiliriz.

$\rightarrow \{X_n, n=0,1,2,\dots\}$  KZMZ

$P(\text{A'dan Kırmızı, B'den Beyaz top seçilmesi}) =$   
( $n$ . deneyde / seçimde)

$$= P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0) = \frac{N-i}{N} \cdot \frac{N-i}{N} = P_{i,i+1}$$



A

B

~~Kırmızı~~  
←  
Beyaz

Dikkat:  $0 < i < N$  için doğru!

$P_{0,1} = ?$

$P_{N,N-1} = ?$



Diğer olasılıklar benzer şekilde hesaplanır:

$P(\text{Ade} \text{ Beyaz}, \text{Bde} \text{ Kirmizi} \text{ top} \text{ seçilmesi})$

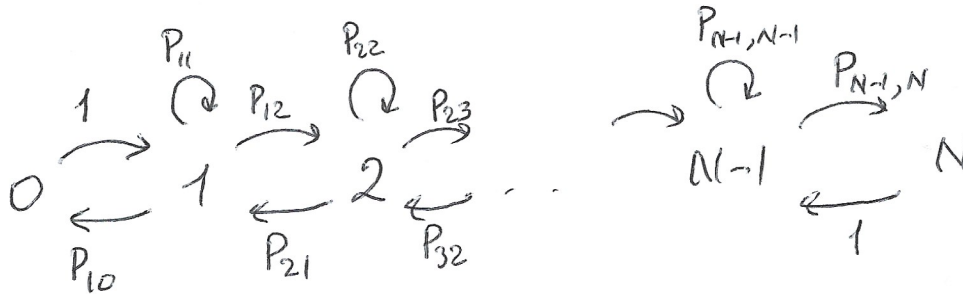
$$= P(X_{n+1}=i-1 \mid X_n=i, X_{n-1}, \dots, X_0) = \frac{i}{N} \cdot \frac{i}{N} = P_{i,i-1}$$

$P(\text{Ave Bde} \text{ aynı renk topun seçilmesi})$

$$= P(X_{n+1}=i \mid X_n=i, X_{n-1}, \dots, X_0) = \frac{N-i}{N} \cdot \frac{i}{N} + \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N}$$

$\downarrow$  Ade Kirmizi     $\downarrow$  Bde Kirmizi     $\downarrow$  Ade Beyaz     $\downarrow$  Bde Beyaz

$$= 2 \cdot \left(\frac{i}{N}\right) \left(\frac{N-i}{N}\right) = P_{ii}$$



Soru 1) ilgili tek adım geçiş matrisini yazınız ve satır toplamlarının 1 olduğunu gösterin.

Soru 2) Bu modelin adı nedir ?

Yansıtıcı Bariyerli Rassal Yürüme Modeli

0 ve N durumları Rassal Yürüme yansıtıcılar. iki farklı gaz moleküllerinin geçirgen bir membran (tar) yayılması bu şekilde modellenir (Bkz: Ehrenfest modeli)