Skript Lineare Algebra & Geometrie 1, Hertrich-Jeromin

Studierendenmitschrift

2. März 2016

Inhaltsverzeichnis

0 Grundlagen **3**

1 Lineare Räume und Abbildungen **7**

1.1 Von Geometrie zu Algebra 7
1.2 Unterräume und Lineare Hülle 14
1.3 Basis und Dimensionen 19
1.4 Homomorphismen 25
1.5 Summen, Produkte und Quotienten 35

2 Affine Geometrie **47**

2.1 Affine Räume 47
2.2 Affine Abbildungen & Transformationen 57
2.3 Dreiecke in der Affinen Geometrie 64

3 Buchhaltung **68**

3.1 Matrizen 68
3.2 Lineare Gleichungssysteme 75

4 Volumenmessung **80**

4.1 Determinantenformen 80
4.2 Äquiaffine Geometrie 91

0 Grundlagen

Einleitung

Es existieren zwei Methoden zur präzisen Formulierung:

- Funktion einer Formulierung wird präzisiert durch:
  - Definition: Begriffsklärung
  - Satz (Lemma, Proposition, Korollar): Aussage über einen (mathematischen) Sachverhalt
  - Beweis: eine (logische) Argumentationskette, die erklärt, warum ein Satz/Lemma wahr ist
  - Bemerkung, Beispiel: zusätzliche Information/Illustration, die oft Eigenarbeit (Beweis) erfordert
- Formeln und (logische) Symbole werden verwendet:
  - $\forall$ – All-Quantor: „für alle“
  - $\exists(!)$ – Existenz-Quantor: „es existiert (genau) ein“
  - $\neg$ – logische Verneinung: $\neg A$ ist wahr, gdw. (genau dann wenn) A falsch ist
  - $\wedge, \vee$ – logisches „und“ und „oder“
  - $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ – Implikation und Äquivalenz

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Abbildung 0.1: Wahrheitstafel

Beispiele:

- Implikation: Für $x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
- Für Aussagen A und B gilt: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Beweis durch Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Bemerkung $\wedge$, $\vee$, und $\Leftrightarrow$ sind kommutativ (symmetisch), $\Rightarrow$ jedoch nicht, d.h.:

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) &\Leftrightarrow (B \wedge A)\\
(A \vee B) &\Leftrightarrow (B \vee A)\\
(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)\\
(A \Rightarrow B) &\not\Leftrightarrow (B \Rightarrow A)
\end{aligned}$$

weil beispielsweise formal gilt: $x, y \in \mathbb{R} : x = 0 \Rightarrow xy = 0$, aber nicht $xy = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bemerkung (Beweisformen der Implikation) Um eine Implikation $A \Rightarrow B$ zu zeigen, bedient man sich häufig auch folgender Äquivalenzen:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \begin{cases} \neg B \Rightarrow \neg A & \text{(Indirekter Schluss)} \\ \neg(A \wedge \neg B) & \text{(Widerspruchsbeweis)} \end{cases}$$

Beispiel Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$((xy = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)) \Leftrightarrow ((xy = 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow (y = 0))$$

bzw. allgemein:

$$(A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow C)$$

Bemerkung (Mengenlehre) Die Ähnlichkeit mit der Mengensymbolik ist nicht zufällig, z.B. Mengen X, Y:

$$\begin{aligned}
(x \in X \cap Y) &\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)\\
(x \in X \cup Y) &\Leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)\\
(X \subset Y) &\Leftrightarrow \{\forall x : (x \in X \Rightarrow x \in Y)\}
\end{aligned}$$

Definition (Abbildung)

Eine Zuordnung $f : X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y heißt eine *Abbildung*, falls

$$\forall x \in X : \exists! y \in Y : y = f(x).$$

Dabei nennt man X den *Definitionsbereich* der Abbildung und $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$ das *Bild*.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, falls $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- *surjektiv*, falls $\forall y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)$
- *bijektiv*, falls $\forall y \in Y : \exists! x \in X : y = f(x)$

Beispiel Mit $X = Y = \mathbb{R}$ definiert

- die Relation $x^2 = y$ eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x) = x^2$
- die Relation $x = y^2$ keine Abbildung $f : X \to Y$, denn
  - für ein x gibt es zwei y-Werte
  - $x < 0$ ist nicht definiert

Beispiel Die *Identität* $id_X : X \to X,\ x \mapsto id_X(x) := x$ ist eine bijektive Abbildung.

Bemerkung Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Definition (Komposition)

Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, so ist ihre *Komposition/Verkettung* die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Beispiel: Seien $X = Y = Z = \mathbb{R}$,

$$f : X \to Y,\ x \mapsto f(x) := x^2$$
$$g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y) := y^3 + y$$

so ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z, x \mapsto (g \circ f)(x) = (x^2)^3 + x^2 = x^6 + x^2$.

Lemma

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Dann gilt:

i) ist g *Linksinverse* von f, d.h. $g \circ f = id_X$, so ist f injektiv

ii) ist g *Rechtsinverse* von f, d.h. $f \circ g = id_Y$, so ist f surjektiv

iii) ist g Links- und Rechtsinverse von f, so heißt $g = f^{-1}$ *Inverse* von f

Beispiel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto f(n) := n + 1$ hat Linksinverse

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto g(n) := \begin{cases} 15700, & \text{falls } n = 0 \\ n - 1, & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}$$

Tatsächlich ist f injektiv, da

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} : n + 1 = f(n) = f(n') = n' + 1 \Rightarrow n = n'$$

jedoch $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, daher kann keine Rechtsinverse existieren.

Beweis Zwei Aussagen sind zu beweisen:

i) Sei g Linksinverse von f. Dann gilt für $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$:

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$$

also ist f injektiv.

ii) Sei g Rechtsinverse von f und $y \in Y$ beliebig. Setze $x := g(y) \in X$, dann gilt

$$f(x) = f(g(y)) = y$$

Damit existiert zu jedem $y \in Y$ (mindestens) ein $x = g(y)$, sodass $y = f(x)$, d.h. f ist surjektiv.

1 Lineare Räume und Abbildungen

1.1 Von Geometrie zu Algebra

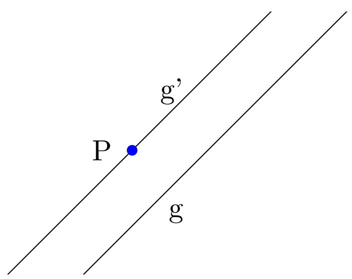
Euklid führte in den „Elementen“ (ca. 300 v. Chr.) das bis heute gültige Schema ein:

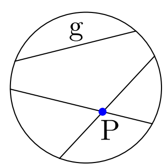
- Definition
- Axiom/Postulat
- Lehrsatz
- Beweis

1.1.1 Parallelenaxiom/-problem (Euklid, Formulierung nach Playfair)

Es existiert genau eine Parallele g' zum Punkt $P \notin g$ zur Geraden g.

Kann das Axiom aus den anderen Axiomen hergeleitet/bewiesen werden? Nein, denn es existieren nichteuklidische, hyperbolische Geometrien (18. Jh.) in denen es mehrere derartige Parallelen gibt. Als Beispiel lässt sich eine Geometrie anführen, die nicht auf einer Ebene sondern auf einem Kreis operiert. Dort lassen sich zu einer Sekante mehrere parallele Sekanten betrachten (also Sekanten, die die ursprüngliche nicht schneiden).





Was ist eine Geometrie? Eine Geometrie ist durch eine Menge X und eine auf X operierende Transformationsgruppe gegeben.

1.1.2 Definition (Gruppe)

Ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung

$$\circ : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto g \circ h$$

heißt Gruppe, falls:

(i) $\forall f, g, h \in G : f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (*Assoziativität*)

(ii) $\exists e \in G\ \forall g \in G : e \circ g = g$ (Existenz eines *neutralen Elements*)

(iii) $\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = e$ (Existenz eines *inversen Elements*)

Die Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*, falls zusätzlich gilt:

$$\forall g, h \in G : g \circ h = h \circ g$$

Bemerkung Das ist eine axiomatische Definition, d.h. der Begriff „Gruppe" wird durch (aus vielen (!) Beispielen abstrahierten) „Rechenregeln" definiert.

Beispiel Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden mit der Addition eine Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Die rationalen Zahlen ohne 0, $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, bilden mit der Multiplikation eine Gruppe $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$.

1.1.3 Definition (Gruppenoperation)

Sind $(G, \circ)$ eine Gruppe und X eine Menge, so heißt eine Abbildung

$$\cdot : G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$$

eine *Gruppenoperation* (von $(G, \circ)$ auf X), falls

(i) $\forall g, h \in G : \forall x \in X : g \cdot (h \cdot x) = (g \circ h) \cdot x$ (entspricht nicht der Assoziativität!)

(ii) $\forall x \in X : e \cdot x = x$ für das neutrale Element e der Gruppe $(G, \circ)$

$(G, \circ)$ heißt dann *Transformationsgruppe* von X.

Bemerkung Operiert G (kurz für $(G, \circ)$, aus dem Zusammenhang ersichtlich) auf X, so ist für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$g : X \to X,\ x \mapsto g \cdot x$$

eine bijektive Abbildung von X auf sich. Wegen der Axiome (i) und (ii) aus der Definition erhält man $g^{-1} : X \to X$ als Inverse der Abbildung.

1.1.4 Beispiel und Definition (Permutationsgruppe)

Die bijektiven Abbildungen einer Menge X auf sich,

$$G := \{g : X \to X \mid g \text{ bij.}\},$$

bilden (mit der Komposition $\circ$) eine (Transformations-)Gruppe $(G, \circ)$ (die auf X operiert): die *Permutationsgruppe* oder *symmetrische Gruppe* S_X von X.

Für $X = \{1, 2, ..., n\}$ schreibt man auch S_n statt $S_{\{1,...,n\}}$.

Bemerkung Im Gegensatz zu allgemeinen Abbildungen stimmen in (Permutations-)Gruppen Links- und Rechtsinverse stets überein.

1.1.5 Lemma (Eindeutigkeit des neutralen Elements)

Das neutrale Element einer Gruppe $(G, \circ)$ ist eindeutig und $\forall g \in G : g \circ e = g$. Weiters:

$$\forall g \in G \; \exists! g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

Beweis Sei $g \in G$ gegeben und (gemäß Gruppenaxiom (iii)):

- $h := g^{-1}$ (Linksinverse von g)
- $k := h^{-1}$ (Linksinverse von h)

Damit berechnen wir (multiplikative Schreibweise: ab statt $a \circ b$):

$$\begin{aligned} hg = e = kh &= k((hg)h) \\ &= k(h(gh)) \\ &= (kh)(gh) = gh \end{aligned} \tag{$*$}$$

und

$$ge = g(hg) = (gh)g \overset{(*)}{=} eg$$

Jedes (links-)neutrale Element e ist also auch rechtsneutral

$$\forall g \in G : eg = ge = g \tag{$**$}$$

und ist $e' \in G$ auch neutrales Element, dann:

$$e' = ee' \overset{(**)}{=} e'e = e$$

Weiters ist jedes (Links-)Inverse auch rechtsinvers (nach $*$)

$$\forall g \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

und sind $h, h' \in G$ Inverse von $g \in G$, so gilt:

$$h' = h'(gh) = (h'g)h = h$$

d.h. Eindeutigkeit des Inversen.

1.1.6 Definition (Körper)

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + :& K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot :& K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto xy \end{aligned}$$

heißt *Körper*, falls:

(i) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 0 und inversem Element $-x$ von x)

(ii) $(K^\times, \cdot)$ ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 1 und inversem Element $\frac{1}{x} = x^{-1}$ von $x \in K^\times$)

(iii) die Distributivgesetze gelten:

$$\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \end{cases}$$

Bemerkung In einem Körper gilt stets:

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$$

denn

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \\ \Rightarrow 0 &= 0 \cdot x + (-(0 \cdot x)) = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-(0 \cdot x)) = 0 \cdot x \end{aligned}$$

und analog $x \cdot 0 = 0$.
Insbesondere folgt damit

$$\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$$

(im zweiten Axiom für Körper wird die abelsche Gruppe für $K^\times$ festgelegt.)

Beispiel Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden mit den üblichen Verknüpfungen Körper.

Bemerkung und Beispiel Aufgrund der Axiome (i) und (ii) enthält K mindestens 2 Elemente, also $\#K \geq 2$, nämlich:

- 0, das neutrale Element bezüglich + und
- 1 ($\neq 0$), das neutrale Elemente (in $K^\times = K \setminus \{0\}$) bezüglich $\cdot$

Es gibt auch einen Körper mit genau 2 Elementen $(\{0,1\}, +, \cdot)$, wobei

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Dieser Körper wird auch $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet.

1.1.7 Bemerkung und Definition (Charakteristik)

In $\mathbb{Z}_2$ gilt $1 + 1 = 0$. Allgemeiner definiert man die *Charakteristik* eines Körpers $(K, +, \cdot)$ (mit neutralen Elementen 0 und 1 von + bzw. $\cdot$) durch

$$\mathrm{Char}(K, +, \cdot) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \forall n \in \mathbb{N}^\times : \sum_{j=1}^n 1 \neq 0 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^\times \mid \sum_{j=1}^n 1 = 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

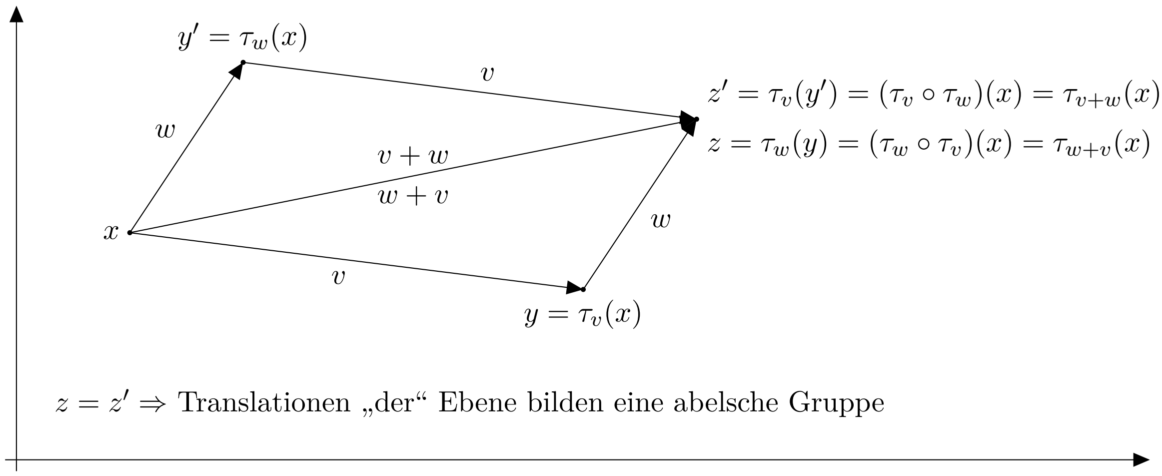
z.B. $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_2) = 2$, da

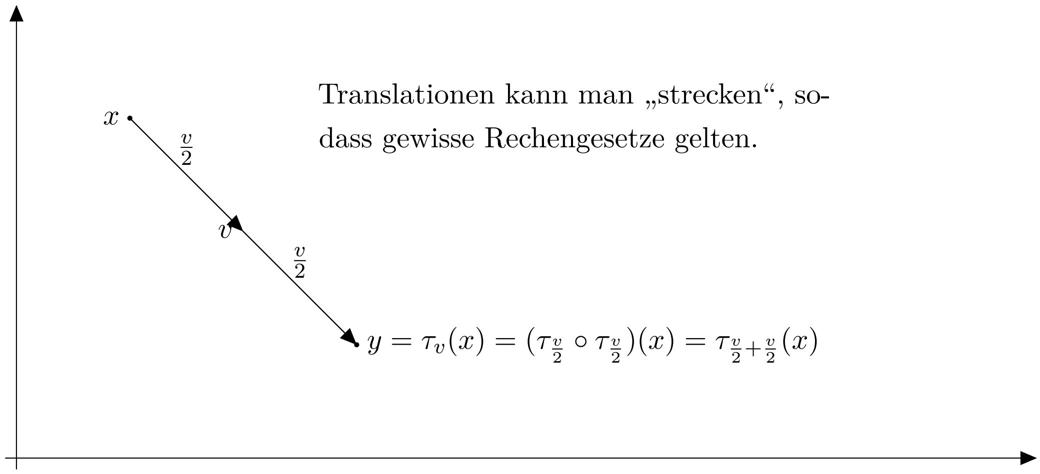
$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{N}^\times \mid \underbrace{1 + ... + 1 = 0}_{\text{n-mal}} = 0\} &= \{n \in \mathbb{N}^\times \mid n = 0 \bmod 2\} \\ &= \{n \in \mathbb{N}^\times \mid n \text{ gerade}\} \end{aligned}$$

und damit $\min\{n \in \mathbb{N}^\times \mid \underbrace{1 + ... + 1 = 0}_{\text{n-mal}}\} = 2$

Wir werden mitunter $\mathrm{Char}(K, +, \cdot) \neq 0$ oder (öfter) $\mathrm{Char}(K, +, \cdot) = 2$ ausschließen (müssen).

1.1.8 Translationen und Vektoren





1.1.9 Definition (Vektorraum)

Sei K ein Körper. Eine Menge V mit zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} + &: V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v + w, \\ \cdot &: K \times V \to V,\ (x, v) \mapsto vx, \end{aligned}$$

heißt *Vektorraum über* K (K-VR), falls gilt:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(ii) $\forall v \in V : v \cdot 1 = v$ und
$\forall x, y \in K\ \forall v \in V : (v \cdot x) \cdot y = v \cdot (x \cdot y)$

(iii) $\forall x, y \in K\ \forall v \in V : v(x + y) = vx + vy$
$\forall x \in K\ \forall v, w \in V : (v + w)x = vx + wx$

Bemerkung Wir notieren die Skalarmultiplikation als Rechtsmultiplikation (Skalar steht rechts):

$$\cdot : K \times V \to V,\ (x, v) \mapsto vx$$

Beispiel Die Translationen eines affinen Raumes bilden einen Vektorraum (vgl. mit der Skizze oben): Dieses Beispiel wird im nächsten Kapitel repräsentiert.

Beispiel Jeder Körper K ist ein K-VR (Vektorraum über sich selbst): das ist ein (trivialer) Spezialfall des folgenden:

1.1.10 Beispiel und Definition (Standardvektorraum)

Ist I eine Menge und K ein Körper, so bilden die K-wertigen Abbildungen

$$v : I \to K,\ i \mapsto v_i$$

einen Vektorraum mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation:

$$I \ni i \mapsto (v + w)_i := v_i + w_i \in K$$
$$I \ni i \mapsto (vx)_i := v_i x \in K$$

Dieser Vektorraum wird mit K^I bezeichnet und *Standardvektorraum* (über I und K) genannt. Im Falle $I = \{1, ..., n\}$ schreibt man auch $K^n := K^{\{1,...,n\}}$

1.1.11 Bemerkung und Definition (Familienschreibweise)

Anstelle der normalen Schreibweise

$$I \ni i \mapsto v(i) \in K$$

für die Auswertung einer Abbildung $v : I \to K$ an einem Punkt $i \in I$ haben wir die *Indexschreibweise* verwendet:

$$I \ni i \mapsto v_i \in K$$

Wir haben damit eine Abbildung $v : I \to K$ als *Familie* $(v_i)_{i \in I}$ über der Indexmenge I aufgefasst – Familie ist ein „alternativer“ Begriff für Abbildung.

Beispiel Sei i eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$ (i entspricht nicht dem Element der Indexmenge aus dem vorherigen Abschnitt). Die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

bildet mit der Addition und Multiplikation einen Körper:

$$
\begin{aligned}
+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : ((x+y),(x'+y')) &\mapsto (x+iy)+(x'+iy') := (x+x')+i(y+y') \\
\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : ((x+iy),(x'+iy')) &\mapsto (x+iy)\cdot(x'+iy') := (xx'-yy')+i(xy'+x'y)
\end{aligned}
$$

Der Körper $\mathbb{C}$ bildet einen $\mathbb{R}$-VR mit

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

wie oben und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : (x',(x+iy)) \mapsto (x+iy)x' := xx' + iyx'$$

Diese Skalarmultiplikation ist also gerade die Einschränkung der komplexen Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ wobei die Identifikation

$$\mathbb{R} \cong \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$$

verwendet wird.

1.2 Unterräume und Lineare Hülle

1.2.1 Definition (Untervektorraum)

Eine Teilmenge $U \subset V$ eines K-VR V heißt *Unter(vektor)raum* (UVR), falls U mit der eingeschränkten Addition und Skalarmultiplikation

$$
\begin{aligned}
+ \,|_{U\times U} &: U \times U \to V,\ (v,w) \mapsto v+w \\
\cdot \,|_{K\times U} &: K \times U \to V,\ (x,v) \mapsto vx
\end{aligned}
$$

selbst ein Vektorraum ist, d.h. wenn insbesondere

$$
\begin{aligned}
&\forall v,w \in U : v+w \in U \text{ und} \\
&\forall x \in K\ \forall v \in U : vx \in U.
\end{aligned}
$$

Bemerkung Eine nicht-leere Teilmenge $U \subset V, U \neq \emptyset$, ist genau dann ein UVR, wenn die auf U eingeschränkten Operationen wohldefiniert sind, d.h. wenn U bzgl. $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

Dies kann zum *Unterraumkriterium* zusammengefasst werden:

$$U \subset V \text{ ist UVR } \Leftrightarrow \begin{cases} U \neq \emptyset \\ \forall v,w \in U\ \forall x \in K : vx+w \in U \end{cases}$$

Beispiel Sei $I = \{1, ..., n\}$. Für jedes (feste) $i \in I$ ist

$$U_i := \{v : I \to K \mid v_i = 0\}$$

ein UVR von K^n, denn

1. $v = 0 \in U_i$, also $U_i \neq \emptyset$
2. Seien $v, w \in U_i$, d.h. $v, w \in K^n$ mit $v_i = w_i = 0$, und $x \in K$; dann gilt $(vx + w)_i = v_i x + w_i = 0 \cdot x + 0 = 0$, also $vx + w \in U_i$ und damit ist U_i UVR nach Unterraumkriterium.

Kein UVR von $K^n, n \geq 2$, ist jedoch die Menge

$$N := \{v : I \to K \mid v_1 \cdot v_2 = 0\},$$

denn

1. N ist zwar nicht-leer, $N \neq \emptyset$, aber
2. $+ \,|_{N \times N}$: $N \times N \to N$ nicht wohldefiniert: seien $v, w \in N$, so dass

$$v_1 = 0, v_2 = 1 \text{ } (v_3...v_n \text{ irrelevant})$$
$$w_1 = 1, w_2 = 0 \text{ } (w_3...w_n \text{ irrelevant})$$

dann gilt:

$$(v + w)_1 = v_1 + w_1 = 0 + 1 = 1$$
$$(v + w)_2 = v_2 + w_2 = 1 + 0 = 1$$

und damit

$$(v + w)_1 (v + w)_2 = 1 \Rightarrow v + w \notin N.$$

Bemerkung und Beispiel In analoger Weise definiert man die Begriffe

- einer *Untergruppe* $H \subset G$ einer Gruppe $(G, \cdot)$, bzw.
- eines *Unter*- oder *Teilkörpers* $T \subset K$ eines Körpers $(K, +, \cdot)$

z.B. bildet jeder UVR $U \subset V$ eines K-VR V (mit der Addition) eine Untergruppe der Gruppe $(V, +)$.
In gleicher Weise bildet eine nicht-leere Teilmenge eine *Untergruppe* bzw. einen *Unterkörper*, falls die eingeschränkten Operationen wohldefiniert sind.

z.B. ist $H \subset G$ eine Untergruppe, falls (Untergruppenkriterium):

1. $H \neq \emptyset$
2. $\forall g, h \in H : g \circ h^{-1} \in H$

Achtung: Inversenbildung muss im Kriterium explizit formuliert werden, sonst würde z.B.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ als Teilmenge von der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ein Gegenbeispiel liefern.

Weitere Beispiele:

- die Translationen bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \cong \{x + iy \mid y = 0\} \subset \mathbb{C}$ bilden Teilkörper von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

1.2.2 Lemma (Schnitt von UVR)

Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von UVR $U_i \subset V$ eines K-VR V, so ist ihr Schnitt

$$U := \bigcap_{i \in I} U_i = \{u \in V \mid \forall i \in I : u \in U_i\}$$

ein UVR von V. (Beweis durch UR-Krit. in Aufgabe 17)

1.2.3 Definition (Lineare Hülle)

Die *lineare Hülle* $[S]$ einer Teilmenge $S \subset V$ eines K-VR V ist der Schnitt aller S enthaltenden UVR $U \subset V$:

$$[S] := \bigcap_{S \subset U \text{ UVR}} U$$

Die lineare Hülle einer Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ in einem K-VR V ist

$$[(v_i)_{i \in I}] := [\{v_i \mid i \in I\}]$$

Bemerkung $[S]$ ist ein UVR (nach Lemma), der „kleinste" UVR, der S enthält, d.h. ist $U \subset V$ UVR mit $S \subset U$, so gilt $[S] \subset U$; da aber $[S] = \bigcap_{S \subset \tilde{U} \text{ UVR}} \tilde{U} \subset U$, da $S \subset U$, also U am Schnitt beteiligt ist.

Bemerkung $[\emptyset] = \{0\}$ und $[V] = V$.

Beispiel Ist $U \subset V$ UVR, so gilt $[U] = U$.

Beispiel $N = \{v : I \to K \mid v_1 v_2 = 0\} \subset K^n$, $I = \{1, ..., n\}$, $n \geq 2$, hat die lineare Hülle $[N] = K^n$.

Beispiel Für $I = \{1, ..., n\}$ und $i \in I$ definiere $e_i : I \to K,\ j \mapsto e_i(j) := \delta_{ij}$, wobei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das *Kroneckersymbol* bezeichnet.

Damit ist die lineare Hülle der Familie $(e_i)_{i\in I}$

$$[(e_i)_{i\in I}] = K^n.$$

Nämlich: Da $[(e_i)_{i\in I}] \subset K^n$ ist, gilt für beliebige $x_1, ..., x_n \in K$

$$\underbrace{e_1x_1 \underbrace{+ ... + \underbrace{e_nx_n + 0}_{\in[(e_i)_{i\in I}]}}_{\in[(e_i)_{i\in I}]}}_{\in[(e_i)_{i\in I}]} \in [(e_i)_{i\in I}]$$

da $[(e_i)_{i\in I}] \subset K^n$ UVR ist. Andererseits gilt für beliebiges $v \in K^n$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} e_i v(i) : I \to K,$$

denn

$$\forall j \in I : \left(\sum_{i=1}^{n} e_i v(i)\right)(j) = \sum_{i=1}^{n} e_i(j) v(i) = v(j)$$

Damit ist gezeigt, dass die beiden Abbildungen übereinstimmen; da $v \in K^n$ beliebig war, folgt $K^n \subset [(e_i)_{i\in I}]$

1.2.4 Definition (Linearkombination)

Seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(x_i)_{i\in I}$ Familien in einem K-VR bzw. dem Körper K, wobei

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \text{ , also}$$
$$\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \{i_1, ..., i_n\}$$

für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$; Dann heißt die endliche Summe

$$\sum_{i\in I} v_i x_i := \sum_{j=1}^{n} v_{i_j} x_{i_j}$$

eine *Linearkombination.*

Bemerkung Die Bedingung $\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$ garantiert, dass die Summe wohldefiniert ist $\rightarrow$ vgl. Reihen in der Analysis.

1.2.5 Lemma (Lineare Hülle und Linearkombinationen)

Ist $(v_i)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$, Familie in einem K-VR, so gilt:

$$[(v_i)_{i\in I}] = \left\{ \sum_{i\in I} v_i x_i \mid x : I \to K,\ \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \right\},$$

d.h. die lineare Hülle der Familie ist die Menge aller Linearkombinationen der Familie.

Beweis Wir zeigen (wie üblich) zwei Inklusionen:

"$\supseteq$":

Sei also $(x_i)_{i\in I}$ eine geeignete Familie in K, dann gilt:

$$\sum_{i\in I} v_i x_i = \underbrace{v_{i_1} x_{i_1} + ... + \underbrace{(v_{i_n} x_{i_n} + 0)}_{\in[(v_i)_{i\in I}]}}_{\in[(v_i)_{i\in I}] \text{ nach UR-Krit. (nach } n \text{ Schritten)}}$$

"$\subseteq$":

Setze $U := \{\sum_{i\in I} v_i x_i \mid x : I \to K \text{ mit } \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty\}$, offenbar gilt:

$$\forall i \in I : v_i \in U$$

Wir zeigen, dass U ein Untervektorraum ist. Das heißt:

$$+\ |_{U\times U}\colon U \times U \to U \subset V$$
$$\cdot\ |_{K\times U}\colon K \times U \to U \subset V,$$

also die Addition und Skalarmultiplikation vererben sich auf U.

Zur Skalarmultiplikation:

> Sind $(x_i)_{i\in I}$ mit $\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$ eine Familie in K und $x \in K$, so gilt für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$
>
> $$\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \{i_1, ..., i_n\}$$
>
> und damit
>
> $$\{i \in I \mid x_i x \neq 0\} = \begin{cases} \{i_1, ..., i_n\}, & \text{falls } x \neq 0 \\ \emptyset, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Also folgt

$$\Big(\sum_{i\in I} v_i x_i\Big)x = \Big(\sum_{j=1}^{n} v_{i_j} x_{i_j}\Big)x$$
$$= \sum_{j=1}^{n} v_{i_j}(x_{i_j}x) = \sum_{i\in I} v_i(x_i x) \in U_i,$$

da $\sum_{i\in I} v_i(x_i x)$ Linearkombination (mit der Familie $(x_i x)_{i\in I}$ in K) ist.

Zur Addition:

Ähnlich, siehe Aufgabe.

Bemerkung Um triviale Diskussionen zu vermeiden, setzt man $\sum_{i\in\emptyset} ... := 0$.

1.3 Basis und Dimensionen

1.3.1 Definition (Basis)

Eine Teilmenge $S \subset V$ oder eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V heißt

- *Erzeugendensystem* von V, falls

$$[S] = V \text{ bzw. } [(v_i)_{i\in I}] = V$$

- *linear unabhängig*, falls

$$\forall v \in S : v \notin [S \setminus \{v\}] \text{ bzw. } \forall i \in I : v_i \notin [(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}]$$

  und sonst *linear abhängig*.

Eine *Basis* ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Bemerkung Man kann jede (Teil-)Menge $S \subset V$ als Familie in V auffassen mit

$$v : S \to V,\ v \mapsto id_S(v) = v.$$

Andererseits gilt für eine Familie $(v_i)_{i\in I}$:

$$(v_i)_{i\in I} \text{ linear unabhängig } \Rightarrow \{v_i \mid i \in I\} \text{ linear unabhängig.}$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Eine Familie (in V) enthält mehr Information als eine Teilmenge von V.

1.3.2 Beispiel und Definition (Standardbasis)

Für $V = K^n$ ist $(e_1, ..., e_n)$,

$$e_i : \{1, ..., n\} =: I \to K,\ j \mapsto e_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, n$, eine Basis – die *Standardbasis* des (Standard-)Vektorraumes K^n.

Beweis z.z.: $(e_i)_{i\in I}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Wir wissen bereits $[(e_i)_{i\in I}] = K^n$. Andererseits gilt für jedes $i \in I$ und jede Familie $(x_j \mid j \in I)$ in K

$$\Big(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} e_j x_j\Big)(i) = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} e_j(i) x_j = 0 \neq 1 = e_i(i) \Rightarrow \sum_{j\in I\setminus\{i\}} e_j x_j \neq e_i$$

also gilt

$$\forall i \in I : e_i \notin [(e_j)_{j\in I\setminus\{i\}}] = \Big\{ \sum_{j=I\setminus\{i\}} e_j x_j \mid (x_j)_{j\in I} \Big\} \text{ mit } \#\{j \in I \mid x_j \neq 0\} < \infty$$

1.3.3 Lemma

Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig gdw. für jede Linearkombination

$$0 = \sum_{i\in I} v_i x_i \Rightarrow \forall i \in I : x_i = 0.$$

Beweis Wir zeigen zwei Richtungen der Äquivalenz der Negationen:

$$(v_i)_{i\in I} \text{ linear abhängig } \Leftrightarrow \exists (x_i)_{i\in I} \neq (0)_{i\in I} : \sum_{i\in I} v_i x_i = 0.$$

"$\Leftarrow$": Wir nehmen an, es gäbe eine *nicht-triviale*[1] Linearkombination der Null,

$$0 = \sum_{i\in I} v_i x_i, \text{ wobei } \exists j \in I : x_j \neq 0.$$

Für $(y_i)_{i\in I}, y_i := -\frac{x_i}{x_j}$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= v_j x_j + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} v_i x_i \\ \Rightarrow v_j &= -\Big(\sum_{i\in I\setminus\{j\}} v_i x_i\Big) x_j^{-1} = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} v_i y_i \in [(v_i)_{i\in I\setminus\{j\}}] \end{aligned}$$

[1] d.h. $(x_i)_{i\in I} \neq (0)_{i\in I}$

insbesondere ist also $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig.

"$\Rightarrow$": siehe Aufgabe.

1.3.4 Korollar

Ist $(v_i)_{i\in I}$ Basis von V, so ist jeder Vektor $v \in V$ eindeutig in den v_i darstellbar:

$$\forall v \in V \exists! (x_i)_{i\in I} : v = \sum_{i\in I} v_i x_i$$

Beweis Sei $v \in V$ beliebig, dann gilt:

$$V = [(v_i)_{i\in I}] \Rightarrow \exists (x_i)_{i\in I} : v = \sum_{i\in I} v_i x_i$$

liefern $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_i)_{i\in I}$

$$\begin{aligned} v = \sum_{i\in I} v_i x_i = \sum_{i\in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i\in I} v_i (x_i - y_i) \\ \Rightarrow \forall i \in I : x_i = y_i \Rightarrow (x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

Damit ist die Basisdarstellung $v = \sum_{i\in I} v_i x_i$ von v auch eindeutig.

1.3.5 Basislemma

Sei $S \subset V$ lin. unabh. und $E \subset V$ ein Erzeugendensystem mit $S \subset E$. Dann existiert eine Basis B von V mit $S \subset B \subset E$.

Beweis Wir gehen für den Beweis davon aus, dass $\#E < \infty$. Betrachte alle Teilmengen $X \subset V$ mit $S \subset X \subset E$ und X lin. unabh. Sei B eine solche Menge, die maximal ist, d.h.

$$\forall X \subset E : ((B \subset X \wedge X \text{ lin. unabh.}) \Rightarrow X = B)$$

Nach Konstruktion ist $B = \{b_1, ..., b_n\}$ lin. unabh. Zu zeigen: $V = [B]$.
Ist $B = E$, so folgt $[B] = [E] = V$.
Ist $B \neq E$, so ist $B \cup \{v\}$ für (jedes) $v \in E \setminus B$ lin. abh., da B maximal lin. unabh. ist; also existiert eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

$$\exists x, x_1, ..., x_n \in K : 0 = vx + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

Wäre $x = 0$, so würde folgen $x_1 = ... = x_n = 0$, da B lin. unabh. ist. Also ist $x \neq 0$ und

$$v = -\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{x_i}{x} \in [B].$$

Da dies für beliebiges $v \in E \setminus B$ gilt, folgt

$$E \subset [B] \Rightarrow V = [E] \subset [[B]] = [B],$$

d.h., B ist Erzeugendensystem und damit eine Basis mit $S \subset B \subset E$.

Bemerkung Ist $\#E = \infty$, so kann man einen analogen Beweis führen, falls man die Existenz einer maximalen Menge voraussetzt: Dies garantiert das *Zornsche Lemma* bzw. *Auswahlaxiom.* Wir werden das Lemma auch im Falle $\#E = \infty$ benutzen!

Beispiel Für $V = K^3 = K^I$ mit $I = \{1, 2, 3\}$ betrachte die Standardbasisvektoren

$$e_i : I \to K,\ j \mapsto e_i(j) = \delta_{ij}, \text{ und}$$
$$f_i : I \to K,\ j \mapsto f_i(j) := 1 - \delta_{ij}$$

dann sind $S := \{e_1, f_1\}$ und $E := \{e_i, f_i \mid i \in I\}$ lin. unabh. bzw. Erzeugendensystem von K^3. Ergänzung von S durch einen Vektor e_i oder f_i mit $i = 2, 3$ liefert eine Basis B mit $S \subset B \subset E$.

Zum Beispiel ist $B = \{e_1, f_1, f_2\}$ eine Basis, da sich jede Funktion $v \in K^3$ aus den Funktionen e_1, f_1 und f_2 linear kombinieren lässt:

$$v = e_1 x_1 + f_1 y_1 + f_2 y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v(2) = y_1 \\ v(3) - v(2) = y_1 + y_2 - y_1 = y_2 \\ v(1) + v(2) - v(3) = x_1 + y_2 - y_2 = x_1 \end{cases}$$

Dass B lin. unabh. folgt dann: Wäre B lin. abh., so würde folgen $f_2 \in [\{e_1, f_1\}] \Rightarrow [B] \subset [\{e_1, f_1\}] \neq K^3$, was nicht der Fall ist.

1.3.6 Basisergänzungssatz

Jede lin. unabh. Menge $S \subset V$ kann zu einer Basis B von V ergänzt werden: Es existiert eine Basis B von V mit $S \supset B$.

Beweis Sei $E \subset V$ ein Erzeugendensystem von V (z.B. $E = V$). Dann ist $S \cup E$ ein Erzeugendensystem von V mit $S \subset S \cup E$, das Basislemma liefert dann die[2] gesuchte Basis.

[2]nicht eindeutig!

Bemerkung Strikt genommen haben wir den Basisergänzungssatz (BES) nur unter der Annahme bewiesen, dass V *endlich erzeugt* sei, d.h. V ein endliches Erz. Syst. E besitzt, $V = [E]$ und $\#E < \infty$.

Bemerkung Wir haben für den BES die (in diesem Falle einfachere) Mengenschreibweise (anstelle der Familienschreibweise) verwendet.

Bemerkung Ähnlich kann man einen Verkürzungssatz beweisen: Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V kann zu einer Basis verkürzt werden.

1.3.7 Austauschlemma

Seien $B, B' \subset V$ Basen von V. Dann gilt:

$$\forall b \in B \; \exists b' \in B' : (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\} \text{ ist Basis}$$

Beweis Sei $b \in B$ beliebig gewählt und $S := B \setminus \{b\}$. Da B lin. unabh. ist, gilt

$$b \notin [S] \Rightarrow \emptyset \neq V \setminus [S] = [B'] \setminus [S] \Rightarrow B' \not\subset [S]$$

d.h. es existiert $b' \in B'$ mit $b' \notin [S]$. Wir zeigen, dass $B'' := S \cup \{b'\} = (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$ Basis ist.

1. B'' ist Erzeugendensystem:
   Da $b' \in [B]$ existiert $(x_j)_{j \in B}$ mit

   $$b' = \sum_{j \in B} j x_j \text{ mit } x_b \neq 0, \text{ da } b' \notin [S].$$

   Damit ist $b = (b' - \sum_{j \in S} j x_j) \frac{1}{x_b} \in [B''] \Rightarrow V = [B] \subset [B'' \cup \{b\}] = [B'']$.
2. B'' ist linear unabhängig:
   B'' ist Erz. Syst. und $S \subset B'' = S \cup \{b'\}$ lin unabh., kann also (nach Basislemma) ergänzt werden zu einer Basis $\tilde{B}$ mit $S \subset \tilde{B} \subset B''$. Da $[S] \neq V$ gilt $\tilde{B} \neq S$ und damit $\tilde{B} = B''$ Basis, insbesondere linear unabhängig.

Bemerkung Hier haben wir die Familienschreibweise (mit B bzw. S als Indexmenge) verwendet, um Linearkombinationen darzustellen.

1.3.8 Basissatz

Sei V ein endlich erzeugter K-VR, $V = [E]$ mit $\#E < \infty$. Dann gilt:

(i) V besitzt eine endliche Basis B mit $n := \#B \leq \#E$.

(ii) Ist $B' \subset V$ eine Basis von V, so ist $\#B' = \#B = n$.

Beweis

(i) Dies folgt direkt aus dem Basislemma (mit $S = \emptyset$).

(ii) Seien B, B' Basen von V, $B = (b_1, ..., b_n)$.
Annahme: $\#B' < n,\ B' = (b'_1, ..., b'_k)$ mit $k < n$. Wiederholte Anwendung des Austauschlemmas auf die Basen B und B' liefert nach (spätestens) $k + 1 \leq n$ Schritten einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der neuen Basis B'', da Vektoren b'_i doppelt vorkommen müssen.
Annahme: $\#B' > n,\ B' = (b'_1, ..., b'_n, b'_{n+1})$: Das gleiche Argument mit vertauschten Rollen der Basen führt wieder zum Widerspruch.

1.3.9 Definition (Dimension)

Sei V ein K-VR, die *Dimension* von V ist dann:

- $\dim V := \#B$, falls V endlich erzeugt und B eine Basis von V ist;
- $\dim V := \infty$, falls V nicht endlich erzeugt ist.

Bemerkung Nach dem Basissatz hängt $\dim V = \#B$ (falls V endlich erz.) nicht von der Basis B ab, d.h. $\dim V$ ist wohldefiniert.

Beispiel $\dim K^n = \#\{e_1, ..., e_n\} = n$ (Standardbasis).

1.3.10 Korollar (Dimension und Teilmengen)

Sei V ein K-VR mit $\dim V =: n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) Ist $S \subset V$ linear unabhängig, so ist $\#S \leq n$ und $\#S = n$ gdw. S Basis ist.

(ii) Ist $E \subset V$ Erzeugendensystem, so ist $\#E \geq n$, bzw. $\#E = n$ gdw. E eine Basis ist.

Bemerkung Insbesondere: Ist $U \subset V$ UVR mit $\dim U = \dim V < \infty$, so gilt $U = V$.

Beweis

(i) Ist S linear unabhängig, so existiert (nach BES) eine Basis B von V mit

$$S \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} \#S \leq \#B \\ \#S = \#B \Leftrightarrow S = B \end{cases}$$

(ii) Analog (mit Basislemma), siehe Aufgabe 23.

1.4 Homomorphismen

1.4.1 Definition

Sind V und W K-VR, so heißt eine Abbildung $f : V \to W$ *(K-)linear* oder ein *(Vektorraum-) Homomorphismus* $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, falls gilt:

(i) $\forall v, w \in V : f(v + w) = f(v) + f(w)$,

(ii) $\forall v \in V \ \forall x \in K : f(vx) = f(v)x$,

das heißt, f ist verträglich mit den Vektorraumoperationen in V und W.

Bemerkung Damit die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation sinnvoll ist, müssen V und W Vektorräume über demselben Körper K sein.

Bemerkung Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt stets $f(0_V) = f(0_V \cdot 0_K) = f(0_V) \cdot 0_K = 0_W$.

1.4.2 Bemerkung & Definition

Ebenso erklärt man zum Beispiel *Gruppenhomomorphismen* oder *Körperhomomorphismen*. Sind etwa $(G, \circ)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen, so ist eine Abbildung $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, falls

$$\forall g, h \in G : f(g \circ h) = f(g) \cdot f(h)$$

Beispiel Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Vektorraumhomomorphismus so ist f nach (i) Gruppenhomomorphismus von $(V, +)$ in $(W, +)$.

Beispiel Sei V ein K-VR und $y \in K$ fest, dann ist die Streckung um y

$$\eta_y : V \to V,\ v \mapsto \eta_y(v) := vy$$

ein Homomorphismus von V in sich, $\eta_y \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Eine Streckung nennt man auch *Homothetie*.

Beispiel Sei $V := \mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, dann ist die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto x - iy =: \bar{z} \in \mathbb{C}$$

kein Homomorphismus von $\mathbb{C}$ in sich, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-VR auffasst. Hingegen ist sie ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$ in sich, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR auffasst.

1.4.3 Lemma (Linearkombinationen und Homomorphismen)

$f : V \to W$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für jede beliebige Linearkombination gilt:

$$f\Big(\sum_{i \in I} v_i x_i\Big) = \sum_{i \in I} f(v_i) x_i$$

Beweis Eine Richtung ist trivial, die andere ist mit vollständiger Induktion zu zeigen.

1.4.4 Fortsetzungssatz

Seien V und W K-VR, $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(c_i)_{i \in I}$ eine Familie in W. Dann gilt:

$$\exists! f \in \mathrm{Hom}(V, W) \forall i \in I : f(b_i) = c_i$$

Bemerkung Anders ausgedrückt: Ist $B \subset V$ eine Basis von V, so kann jede Abbildung $f : B \to C \subset W$ eindeutig zu einem Homomorphismus $f : V \to W$ fortgesetzt werden.

Beweis Wir beweisen Existenz und Eindeutigkeit getrennt.

1. Eindeutigkeit: Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ so, dass $\forall i \in I : f(b_i) = c_i$. Sei $v \in V$ beliebig. Da B Erzeugendensystem ist, lässt sich v als Linearkombination in $(b_i)_{i \in I}$ mit geeigneten Koeffizienten $(x_i)_{i \in I}$ in K darstellen.

   $$v = \sum_{i \in I} b_i x_i \Rightarrow f(v) = \sum_{i \in I} f(b_i) x_i = \sum_{i \in I} c_i x_i$$

   Damit ist $f(v)$ eindeutig durch v und die $c_i = f(b_i) x_i$ bestimmt.

2. Existenz: Da $(b_i)_{i\in I}$ auch linear unabhängig ist, ist jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination in $(b_i)_{i\in I}$ dargestellt, damit ist durch

$$f : V \to W,\ v = \sum_{i\in I} b_i x_i \mapsto f(v) := \sum_{i\in I} c_i v_i$$

eine Abbildung wohldefiniert.

Weiters ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ wegen

$$f(v + w) = \sum_{i\in I} c_i(x_i + y_i) = f(v) + f(w) \text{ für alle } v = \sum_{i\in I} b_i x_i \in V, w = \sum_{i\in I} b_i y_i \in V$$

und

$$f(vx) = \sum_{i\in I} c_i(x_i x) = \sum_{i\in I}(c_i x_i)x = \Big(\sum_{i\in I} c_i x_i\Big)x = f(v)x \text{ für } x \in K \text{ und } v = \sum_{i\in I} b_i x_i \in V.$$

Damit ist die Linearität von f gezeigt.

1.4.5 Beispiel und Definition (Dualraum)

Der *Dualraum* $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ eines K-VRs V ist ein K-VR ($\subset K^V$). Ist $\dim V =: n < \infty$ so ist $\dim V^* = n$.

Nämlich: Ist $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V ($\dim V < \infty$), so definieren wir für $i = \{1, ..., n\}$ (nach Fortsetzungssatz):

$$\forall j \in \{1, ..., n\} : V^* \ni b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$$

eine Basis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ von V^*: die zu B *duale Basis* von V^*.

Beweis z.z: V^* ist K-VR. Wir zeigen $V^* \subset K^V$ ist UVR.

- $0 : V \to K$ ist linear, d.h. $0 \in V^* \Rightarrow V^* \neq \emptyset$
- Seien $f, g \in V^*$ und $x \in K$; dann gilt

$$\begin{aligned}\forall v, w \in V : (fx + g)(v + w) &= f(v + w)x + g(v + w)\\ &= (f(v) + f(w))x + (g(v) + g(w))\\ &= (f(v)x + g(v)) + (f(w)x + g(w))\\ &= (fx + g)(v) + (fx + g)(w)\end{aligned}$$

genauso:

$$\begin{aligned}\forall v \in V, y \in K : (fx+g)(vy) &= f(vy)x + g(vy)\\ &= f(v)yx + g(v)y\\ &= (f(v)x + g(v))y\\ &= (fx+g)(v)y\end{aligned}$$

Damit gilt: $fx + g \in \mathrm{Hom}(V, K) = V^*$

Da $f, g \in V^*$ und $x \in K$ beliebig waren, zeigt das UR-Kriterium, dass $V^* \subset K^V$ ein UVR ist und damit selbst K-VR ist.

Beweis z.z: B^* ist Basis. Wir zeigen B^* ist linear unabhängig und Erzeugendensystem.

- B^* ist linear unabhängig: Seien $x_1, ..., x_n$ so, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} b_i^* x_i\\ \Rightarrow \forall j = 1, ..., n : 0 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^* x_i\Big)(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{b_i^*(b_j)}_{\delta_{ij}} x_i = x_j.\end{aligned}$$

  Also $x_1 = ... = x_n = 0$ und damit ist B^* linear unabhängig.

- B^* ist Erzeugendensystem: Sei $f \in V^*$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}\forall j = 1, ..., n : f(b_j) &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{b_i^*(b_j)}_{\delta_{ij}} f(b_i) = \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^* f(b_i)\Big)(b_j)\\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(Fortsetzungssatz)}} \quad f &= \sum_{i=1}^{n} b_i^* f(b_i) \in [B^*]\end{aligned}$$

  Da $f \in V^*$ beliebig war, ist also $V^* = [B^*]$.

Damit ist $B^* = \{b_1^*, ..., b_n^*\}$ eine Basis von V^* – insbesondere also $\dim V^* = n = \dim V = \underbrace{\dim K}_{=1} \cdot \dim V$.

Bemerkung Ist $\dim V = \infty$ und $B = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, so liefert $B^* = (b_i^*)_{i \in I}$ mit

$$\forall j \in I : b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$$

eine linear unabhängige Familie, die jedoch kein Erzeugendensystem von V^* ist:

$$f \in \mathrm{Hom}(V, K) = V^* \text{ mit } \forall j \in I : f(b_j) = 1$$

lässt sich nicht in B^* linear kombinieren. Wäre $f = \sum_{i \in I} b_i^* x_i$, so gälte

$$\forall j \in I : x_j = \sum_{i \in I} \underbrace{b_i^*(b_j)}_{\delta_{ij}} x_j = f(b_j) = 1$$

Das heißt, $(x_i)_{i \in I}$ wäre eine Familie in K mit $\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \infty$, also ist $\sum_{i \in I} b_i^* x_i$ keine Linearkombination.

1.4.6 Satz (Homomorphismen als VR)

$\mathrm{Hom}(V, W)$ ist ein VR, mit $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = m \cdot n$, falls $m := \dim W < \infty, n := \dim V < \infty$.

Beweis Addition und Skalarmultiplikation in $\mathrm{Hom}(V, W)$ werden (wie für K-wertige Abbildungen oder in V^*) punktweise definiert:

- für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ setzt man $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$ für alle $v \in V$,
- für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $x \in K$ setzt man $(fx)(v) := f(v)x$ für alle $v \in V$.

Die so definierten Abbildungen $f + g, fx : V \to W$ sind linear, $f + g, fx \in \mathrm{Hom}(V, W)$, aufgrund der VR-Eigenschaften von V. Damit zeigt man: $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist K-VR (siehe Aufgabe 27).

Seien nun $\dim V = n < \infty$ und $\dim W = m < \infty$. Wir wählen (nach BES) Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ von V und $C = (c_1, ..., c_m)$ von W und definieren

$$\mathrm{Hom}(V, W) \ni f_{ij} := c_i \cdot b_j^* \text{ für } \begin{cases} i \in I := \{1, ..., m\} \\ j \in J := \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Behauptung: $F = (f_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ ist Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Da $(c_i)_{i \in I}$ linear unabhängig in W ist, gilt für jede Familie $(x_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ in K:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_{ij} x_{ij} \Rightarrow \forall k \in J : 0 = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (f_{ij} x_{ij})(b_k) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_i b_j^*(b_k) x_{ij} = \sum_{i \in I} c_i x_{ik} \\ \Rightarrow \forall k \in J \ \forall i \in I : x_{ik} = 0 \end{aligned}$$

Also ist F linear unabhängig.

Da $(c_i)_{i \in I}$ Erzeugendensystem von W ist, existiert zu jedem (fest gegebenen) $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ eine Familie $(x_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ in K, sodass

$$\forall k \in J : f(b_k) = \sum_{i \in I} c_i x_{ik} = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_i b_j^*(b_k) x_{ij} = \Big(\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_{ij} x_{ij} \Big)(b_k)$$

also (nach Fortsetzungssatz):

$$f = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_{ij} x_{ij} \in [F]$$

Da $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ beliebig war, gilt also $\operatorname{Hom}(V, W) = [F]$. Damit ist F Basis von $\operatorname{Hom}(V, W)$ und $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \#F = m \cdot n$

1.4.7 Lemma und Definition (Bild, Kern, Rang & Defekt)

Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann sind *Bild* und *Kern* von f,

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(v) \in W \mid v \in V\} \subset W \\ \ker(f) :&= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V \end{aligned}$$

UVR von W bzw. V. Ihre Dimensionen heißen *Rang* und *Defekt* von f:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} f &:= \dim f(V) \\ \operatorname{def} f &:= \dim \ker f \end{aligned}$$

Bemerkung Da $f(0) = 0$ für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gilt: $\{0_V\} \in \ker f$ und $\{0_W\} \in f(V)$.

Beweis Zu zeigen: Das Bild $f(V) \subset W$ und $\ker f \subset V$ sind UVR. Nach Bemerkung gilt $f(V) \neq \emptyset$ und $\ker f \neq \emptyset$ – wir verwenden dann das UR-Kriterium.

Das Bild $f(V)$ ist UVR:

$f(V) \neq \emptyset$. Es bleibt zu zeigen:

$$\forall w_1, w_2 \in f(V), \forall x \in K : w_1 x + w_2 \in f(V)$$

Seien also $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2) \in f(V)$ und $x \in K$; dann gilt:

$$w_1 x + w_2 = f(v_1)x + f(v_2) = f(v_1 x + v_2) \in f(V)$$

Der Kern $\ker f$ ist UVR:

$\ker f \neq \emptyset$. Seien $v_1, v_2 \in \ker f$ und $x \in K$, dann gilt:

$$f(v_1 x + v_2) = f(v_1)x + f(v_2) = 0 \cdot x + 0 = 0 \Rightarrow v_1 x + v_2 \in \ker f$$

Bemerkung Allgemeiner kann man für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ zeigen:

(i) Ist $U \subset V$ UVR, so ist $f(U) \subset W$ UVR.

(ii) Ist $U \subset W$ UVR, so ist $f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\} \subset V$ ein UVR.

Bemerkung Die Funktion $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$. Nämlich:

- ist f injektiv und $v \in \ker f$, so gilt $f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow v = 0$
- ist $\ker f = \{0\}$ und sind $v, w \in V$ mit $f(v) = f(w)$, so folgt $0 = f(v) - f(w) = f(v - w) \Rightarrow v - w \in \ker f = \{0\} \Rightarrow v = w$

Bemerkung Eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist genau dann

(i) injektiv, wenn $\forall S \subset V : S$ lin. unabh. $\Rightarrow f(S)$ lin. unabh.

(ii) surjektiv, wenn $\forall E \subset V : E$ Erz. Syst. $\Rightarrow f(E)$ Erz. Syst.

(iii) bijektiv, wenn $\forall B \subset V : B$ Basis $\Rightarrow f(B)$ Basis

Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bijektiv, so ist $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$.

1.4.8 Rangsatz

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist $\dim V = n < \infty$, so gilt

$$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{def}\, f = \dim V$$

Ist $\dim V = \infty$, so gilt $\mathrm{rg}\, f = \infty$ oder $\mathrm{def}\, f = \infty$.

Beweis Wir nehmen an, dass $\mathrm{def}\, f = k < \infty$. Sei $(b_1, ..., b_k)$ eine Basis von $\ker f$; nach BES ergänzen wir zu einer Basis $(b_j)_{j \in J}$ von V (bemerke: $\{1, ..., k\} \subset J$). Wir setzen

$$c_i := f(b_i) \quad \text{für } i \in I := J \setminus \{1, ..., k\}$$

Behauptung: $(c_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von $f(V)$.

Lineare Unabhängigkeit:

Gilt für eine Linearkombination in $(c_i)_{i \in I}$:

$$0 = \sum_{i \in I} c_i x_i = \sum_{i \in I} f(b_i) x_i = f\Big(\sum_{i \in I} b_i x_i\Big)$$

so folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} b_i x_i \in \ker f \\
\Rightarrow \exists y_1, ..., y_k \in K :\ &\sum_{i\in I} b_i x_i = \sum_{j=1}^{k} b_j y_j \\
\Rightarrow 0 = &\sum_{i\in I} b_i x_i - \sum_{j=1}^{k} b_j y_j \\
\Rightarrow &\begin{cases} \forall j = 1, ..., k : y_j = 0 \\ \forall i \in I : x_i = 0, \end{cases} \qquad \text{da } (b_j)_{j\in J} \text{ lin. unabh.}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt also $\forall i \in I : x_i = 0$; damit folgt die lineare Unabhängigkeit nach Lemma.

Erzeugendensystem:

Sei $w \in f(V)$, also existiert $v \in V$ mit $w = f(v)$. Da $(b_j)_{j\in J}$ Basis von V ist, existiert eine Familie $(x_j)_{j\in J}$ in K so, dass

$$v = \sum_{j\in J} b_j x_j$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
w = f(v) = f\Big(\sum_{j\in J} b_j x_j\Big) &= \sum_{j\in J} f(b_j x_j) \\
= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{f(b_j)}_{=0} x_j + \sum_{i\in I} \underbrace{f(b_i)}_{=c_i} x_i &= \sum_{i\in I} c_i x_i \in [(c_i)_{i\in I}].
\end{aligned}$$

Da $(c_i)_{i\in I}$ also Basis von $f(V)$ ist folgt:

1. Fall: $(\dim V = n < \infty)$ dann ist $\#J = n$ und $\#I = \#J - k$, also $\operatorname{rg} f = n - k = \dim V - \operatorname{def} f$.

2. Fall: $(\dim V = \infty)$, dann ist $\#J = \infty$ und damit auch $\#I = \#(J \setminus \{1, ..., k\}) = \infty$, also $\operatorname{rg} f = \infty$.

Bemerkung Die Annahme $\operatorname{def} f = k < \infty$, im Beweis ist keine Einschränkung:

1. ist $\dim V < \infty$, so folgt $\operatorname{def} f < \infty$, da $\ker f \subset V$ Untervektorraum ist;
2. ist $\dim V = \infty$, so ist man mit dem Beweis fertig, falls $\operatorname{def} f = \infty$.

Korollar (Homomorphismen zwischen gleichdimensionalen VR) Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\dim W = \dim V = n < \infty$. Dann gilt: Ist f injektiv oder surjektiv, so ist f bijektiv.

Beweis Der Rangsatz liefert:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \ker f = \{0\} &\Rightarrow \operatorname{def} f = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim V - 0 = \dim V = \dim W \\ &\overset{3}{\Rightarrow} f(V) = W \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(V) = W &\Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim W = \dim V \\ &\Rightarrow \operatorname{def} f = \dim V - \operatorname{rg} f = 0 \\ &\Rightarrow \ker f = \{0\} \end{aligned}$$

Beispiel Der *Shiftoperator* für Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in K, $s : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}} : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wobei

$$y_i := \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{für } i \neq 0 \end{cases}$$

ist ein injektiver Homomorphismus, $s \in \operatorname{Hom}(K^{\mathbb{N}}, K^{\mathbb{N}})$ von $K^{\mathbb{N}}$ in sich (damit gilt dim Definitionsbereich $= \dim K^{\mathbb{N}} =$ dim Wertebereich). Aber s ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv. Damit folgt $\dim K^{\mathbb{N}} = \infty$ (sonst hätte man einen Widerspruch zum Korollar).

1.4.9 Definition (Spezielle Homomorphismen)

Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ein Homomorphismus, dann heißt f

- *Endomorphismus*, $f \in \operatorname{End}(V)$, falls $W = V$;
- *Isomorphismus*, $f \in \operatorname{Iso}(V, W)$, falls f bijektiv ist;
- *Automorphismus*, $f \in \operatorname{Aut}(V)$, falls $W = V$ und f bijektiv ist.

Zwei K-VR V und W heißen *isomorph* $W \cong V$, falls $\operatorname{Iso}(V, W) \neq \emptyset$.

Bemerkung Ein Isomorphismus $f \in \operatorname{Iso}(V, W)$ bildet jede Basis B von V auf eine Basis $C = f(B)$ von W ab.

Andererseits: Bildet eine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, eine Basis B von V auf eine Basis $C = f(B)$ von W ab, so ist f ein Isomorphismus.

Nämlich: Ist B Basis von V und $C = f(B)$ Erzeugendensystem, so ist f surjektiv, da

$$f(V) = f([B]) = [f(B)] = [C] = W;$$

[3] $f(V) \subset W$ UVR und $\dim f(V) = \dim W \Rightarrow f(V) = W$

Ist $C = f(B)$ linear unabhängig, so ist f injektiv, denn für

$$\begin{aligned} v &= \sum_{b \in B} b x_b \in \ker f \\ &\Rightarrow 0 = f(v) = f\Big(\sum_{b \in B} b x_b\Big) = \sum_{b \in B} f(b) x_b \\ &\Rightarrow \forall b \in B : x_b = 0 \\ &\Rightarrow v = 0, \text{ d.h., } \ker f = \{0\} \Rightarrow f \text{ inj..} \end{aligned}$$

1.4.10 Isomorphielemma

Seien V und W K-VR mit $\dim V, \dim W < \infty$. Dann gilt:

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Beweis Folgt aus obiger Bemerkung:

"$\Rightarrow$":

Annahme: $V \cong W$; sei $f \in \mathrm{Iso}(V, W) \neq \emptyset$. Wähle eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V (BES); da f bijektiv, ist dann

$$C = f(B) = (f(b_i), \dots, f(b_n))$$

eine Basis von W, womit $\dim W = n = \dim V$.

"$\Leftarrow$":

Sei $\dim W = \dim V = n$. Wähle Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V und $C = (c_1, \dots, c_n)$ von W (BES und Basissatz) und definiere $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ durch (Fortsetzungssatz):

$$\forall i = 1, ..., n : f(b_i) = c_i$$

Da f eine Basis auf eine Basis abbildet ist $f \in \mathrm{Iso}(V, W)$. Damit folgt also $\mathrm{Iso}(V, W) \neq \emptyset \Rightarrow V \cong W$.

Beispiel: Ist V K-VR mit $\dim V < \infty$, so ist $V^* \cong V$. (Achtung: Es gibt aber viele Isomorphismen, keiner ist besonders d.h., *kanonisch*.)

Bemerkung: Ist $f \in \mathrm{Iso}(V, W)$, so ist $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(W, V)$, denn

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})\Big(\sum_{i \in I} v_i x_i\Big) &= f\Big(\sum_{i \in I} f^{-1}(v_i) x_i\Big) = \sum_{i \in I} (f \circ f^{-1})(v_i) x_i \\ &\Rightarrow f^{-1}\Big(\sum_{i \in I} v_i x_i\Big) = \sum_{i \in I} f^{-1}(v_i) x_i. \end{aligned}$$

1.5 Summen, Produkte und Quotienten

1.5.1 Definition (Summe von UVR)

Die *Summe einer Familie* $(U_i)_{i\in I}$ von UVR $U_i \subset V$ eines K-VR ist die Menge

$$\sum_{i\in I} U_i := \Big\{ \sum_{i\in I} u_i \mid \forall i \in I : u_i \in U_i \wedge \#\{i \in I \mid u_i \neq 0\} < \infty \Big\}.$$

Bemerkung Offenbar ist $\sum_{i\in I} U_i \subset V$ UVR mit

$$\bigcup_{i\in I} U_i \subset \sum_{i\in I} U_i \Rightarrow \Big[\bigcup_{i\in I} U_i\Big] \subset \sum_{i\in I} U_i;$$

andererseits gilt:

$$\sum_{i\in I} U_i \subset \Big\{ \sum_{j\in J} v_j x_j \mid \forall j \in J : v_j \in \bigcup_{i\in I} U_i \wedge \#\{j \in J \mid x_j \neq 0\} < \infty \Big\} \subset \Big[\bigcup_{i\in I} U_i\Big].$$

Damit ist die Summe einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ gerade die lineare Hülle ihrer Vereinigung $\bigcup_{i\in I} U_i$,

$$\sum_{i\in I} U_i = \Big[\bigcup_{i\in I} U_i\Big].$$

Beispiel Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum der reellen Folgen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$U_n := \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} : j > n \Rightarrow v_j = 0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \subset U_{n+1}$, und damit auch

$$\sum_{i\leq n} U_i = U_n = \bigcup_{i\leq n} U_i, \quad \text{aber} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} U_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \neq V.$$

Nun setze für $i \in \{0, 1\}$

$$\tilde{U}_i := \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} : j \equiv i \bmod 2 \Rightarrow v_j = 0\}$$

dann ist

$$\bigcup_{i\in\{0,1\}} \tilde{U}_i \neq \sum_{i\in\{0,1\}} \tilde{U}_i = V.$$

1.5.2 Dimensionssatz

Sind $U_i \subset V$ UVR mit $\dim U_i < \infty$ für $i \in \{1, 2\}$, so ist

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Ist $\dim U_1 = \infty$ oder $\dim U_2 = \infty$, so ist auch $\dim(U_1 + U_2) = \infty$.

Beweis Seien

- $B_0 \subset U_1 \cap U_2$ eine Basis von $U_0 := U_1 \cap U_2$;
- $S_i \subset U_i$ lin. unabh., so dass $B_i = B_0 \cup S_i$ Basen von U_i sind ($i = 1, 2$) (nach BES).

Offenbar gilt dann, da $B_i = B_0 \cup S_i$ lin. unabh. sind,

$$B_0 \cap S_1 = \emptyset \text{ und } B_0 \cap S_2 = \emptyset$$

und

$$S_1 \cap S_2 \subset U_1 \cap U_2 = [B_0] \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Wir zeigen, dass $B := B_0 \cup S_1 \cup S_2$ Basis von $U_1 + U_2 =: U$ ist.

- $B \subset U$ ist Erz. Syst. nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, 2\} : U_i = [B_i] \subset [B] \\ &\Rightarrow U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2] \subset [B] \end{aligned}$$

- B ist linear unabhängig: Gegeben sei eine Linearkombination von $0 \in U$,

$$0 = \sum_{b \in B} bx_b = \underbrace{\sum_{b \in B_0} bx_b}_{:=b_0} + \underbrace{\sum_{b \in S_1} bx_b}_{:=s_1} + \underbrace{\sum_{b \in S_2} bx_b}_{:=s_2}$$

  mit $b_0 \in [B_0] = U_0$ und $s_i \in [S_i]$ für $i = 1, 2$;

  dann gilt etwa, da $B_1 = B_0 \cup S_1$ lin. unabh. ist,

$$\underbrace{b_0 + s_1}_{\in U_1} = \underbrace{-s_2}_{\in [S_2]} \in U_1 \cap [S_2] \subset U_0 \Rightarrow s_1 = 0$$

  und damit, da $B_2 = B_0 \cup S_2$ lin. unabh. ist,

$$0 = b_0 + \underbrace{s_1}_{=0} + s_2 \Rightarrow b_0 = s_2 = 0.$$

Mit der linearen Unabhängigkeit von B_0, S_1 und S_2 folgt dann

$$0 = \sum_{b \in B_0} bx_b = \sum_{b \in S_1} bx_b = \sum_{b \in S_2} bx_b \Rightarrow \forall b \in B : x_b = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned}\overbrace{\#B}^{\dim(U_1+U_2)} + \overbrace{\#B_0}^{\dim(U_1\cap U_2)} &= (\#B_0 + \#S_1 + \#S_2) + \#B_0 \\ &= (\#B_0 + \#S_1) + (\#B_0 + \#S_2) \\ &= \underbrace{\#B_1}_{\dim(U_1)} + \underbrace{\#B_2}_{\dim(U_2)}\end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung.

Bemerkung Im Beweis haben wir bemerkt:

Ist z.B. $B_1 = B_0 \cup S_1$ lin. unabh., und $b_0 \in [B_0]$ und $s_1 \in [S_1]$ mit $b_0 + s_1 = 0$ so folgt

$$b_0 = s_1 = 0$$

Sind nämlich $b_0 = \sum_{b\in B_0} bx_b$ und $s_1 = \sum_{b\in S_1} bx_b$, so gilt

$$0 = b_0 + s_1 = \sum_{b\in B_0} bx_b + \sum_{b\in S_1} bx_b = \sum_{b\in B_1} bx_b$$
$$\Rightarrow \forall b \in B_1 : x_b = 0 \Rightarrow b_0 = s_1 = 0.$$

Bemerkung Ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ bzw. $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$, so zeigt der Beweis auch:

$$\forall v \in U_1 + U_2 \ \exists! u_1 \in U_1 \ \exists! u_2 \in U_2 : v = u_1 + u_2$$

1.5.3 Definition (Komplementäre UVR)

Zwei UVR $U_1, U_2 \subset V$ heißen *komplementär* in V, falls

$$U_1 + U_2 = V \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

1.5.4 Lemma (Komplementäre UVR)

Zu jedem UVR $U \subset V$ existiert ein (in V) komplementärer UVR.

Beweis Sei $U \subset V$ UVR eines K-VR V. Seien

- $B \subset U$ eine Basis von U;
- $S \subset V$ lin. unahb., so dass $C = B \cup S$ Basis von V ist (BES).

Definiere $U' := [S]$. Dann ist $U' \subset V$ UVR mit

(i) $U + U' \supset [C] = V$, da $C \subset U \cup U'$ Erz. Syst. von V ist;

(ii) $U \cap U' = [B] \cap [S] = \{0\}$, da $C = B \cup S$ linear unabhängig ist.

Bemerkung Zu einem UVR $U \subset V$ gibt es normalerweise viele komplementäre UVR $U' \subset V$. Zu

$$U := \{v \in K^2 \mid v_2 = 0\}$$

ist beispielsweise jeder UVR $U' = [u']$ mit $u'_2 \neq 0$ komplementär in K^2.

1.5.5 Lemma & Definition (direkte Summe)

Sei $U = \sum_{i \in I} U_i \subset V$ Summe einer Familie von UVR $U_i \in V$; dann besitzt jeder Vektor $u \in U$ eine eindeutige Zerlegung als Summe von u_i, genau dann, wenn

$$\forall i \in I : U_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j = \{0\}.$$

In diesem Falle heißt die Summe *direkt* und man schreibt

$$U = \bigoplus_{i \in I} U_i.$$

Bemerkung Eine Summe $V = \sum_{i \in I} U_i$ ist genau dann direkt, wenn

$$\forall i \in I : U_i, \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j \subset V$$

komplementäre UVR in V sind.

Beweis Zu zeigen ist die Eindeutigkeitsaussage. Sei also $u \in \bigoplus_{i \in I} U_i$,

$$u = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u'_i \text{ mit } \forall i \in I : u_i, u'_i \in U_i;$$

dann gilt für jedes $i \in I$:

$$u'_i - u_i = \sum_{j \neq i} u_j - \sum_{j \neq i} u'_j = \underbrace{\sum_{j \neq i} u_j - u'_j}_{\in \sum_{j \neq i} U_j} \in U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\},$$

da die Summe als direkt angenommen wurde; damit folgt $\forall i \in I : u_i = u'_i$, d.h. die Zerlegung ist eindeutig.

Die Umkehrung ist trivial:

$$\exists i \in I : U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j \neq \{0\}$$
$$\Rightarrow \exists i \in I \ \exists u_i \in U_i \setminus \{0\} \ \exists (u_j)_{j \in I \setminus \{i\}} : (\forall j \in I \setminus \{i\} : u_j \in U_j) \wedge u_i = \sum_{j \neq i} u_j,$$

d.h., die Zerlegung von $u_i \in \sum_{i \in I} U_i$ ist nicht eindeutig.

Bemerkung Sind $\dim V < \infty$ und $\# I < \infty$ so gilt

$$\forall i \in I : \dim U_i < \infty$$

und es gilt die *Dimensionsformel für direkte Summen* (Beweis: Aufgabe 35):

$$\dim \bigoplus_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I} \dim U_i.$$

Ist insbesondere $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V, so gilt

$$\dim V = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} [b_i] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Bemerkung Seien $U, U' \subset V$ komplementäre UVR, also $V = U \oplus U'$, dann werden durch

$$v = u + u' \mapsto \begin{cases} p(v) := u \\ p'(v) := u' \end{cases}$$

Endomorphismen $p, p' \in \mathrm{End}(V)$ (wohl-)definiert, da u, u' durch v eindeutig bestimmt sind (Linearität von p, p' ist klar). Offenbar ist

$$p(V) = U \text{ und } \ker p = U'$$

und es gilt

$$p^2 := p \circ p = p$$

und analog für p'; außerdem gilt ($\circ$ für die Komposition weggelassen)

$$p + p' = id_V \text{ und } p'p = 0 = pp'.$$

1.5.6 Definition (Projektion)

$p \in \mathrm{End}(V)$ heißt *Projektion*, falls $p^2 = p$ (d.h. falls p idempotent ist).

1.5.7 Satz (Projektionen)

Sei $p \in \mathrm{End}(V)$ Projektion, dann ist

$$p' = \mathrm{id}_V - p \quad \text{Projektion mit} \quad pp' = p'p = 0.$$

Gilt andererseits $p + p' = id_V$ und $pp' = 0$ für $p, p' \in \mathrm{End}(V)$, so sind p, p' Projektionen mit

$$V = p(V) \oplus p'(V) = \ker p \oplus \ker p'.$$

Beweis Seien $p \in \mathrm{End}(V)$ Projektion und $p' := id_V - p$; dann gilt:

$$\begin{aligned} pp' &= p(\mathrm{id}_V - p) = p - p^2 = 0 \\ p'p &= (\mathrm{id}_V - p)p = p - p^2 = 0 \end{aligned}$$

und

$$p'^2 = p'(\mathrm{id}_V - p) = p' - p'p = p'$$

d.h., $p' \in \mathrm{End}(V)$ ist Projektion.

Anderseits: Seien p, $p' \in \mathrm{End}(V)$, so dass $p + p' = \mathrm{id}_V$ und $pp' = 0$.

Dann gilt:

$$p - p^2 = p(\mathrm{id}_V - p) = pp' = 0 \Leftrightarrow p^2 = p$$

d.h., $p \in \mathrm{End}(V)$ ist Projektion – damit ist auch p' Projektion (erster Teil) und $p'p = 0$.

Weiters liefert

$$\begin{aligned} \forall v \in V : v = \mathrm{id}_V(v) &= p(v) + p'(v) \\ \Rightarrow V &= p(V) + p'(V) \end{aligned}$$

und ist $w = p(v) = p'(v')$ für geeignete $v, v' \in V$ (d.h., $w \in p(V) \cap p'(V)$), so gilt

$$w = p(v) = p^2(v) = p(p(v)) = p(w) = p(p'(v')) = pp'(v') = 0,$$

also $p(V) \cap p'(V) = 0$ und damit $V = p(V) \oplus p'(V)$.

Ferner gilt

$$0 = p \circ p' \Rightarrow p'(V) \subset \ker p$$

und ist $v \in \ker p$, so folgt

$$v = p(v) + p'(v) = 0 + p'(v) \in p'(V) \Rightarrow \ker p \subset p'(V).$$

Für p' gilt das Gleiche und wir haben

$$\ker p = p'(V) \text{ und } \ker p' = p(V)$$

Damit folgt die letzte Behauptung $V = \ker p \oplus \ker p'$.

Bemerkung Im Beweis haben wir etwas mehr bewiesen als behauptet – nämlich:

$$\ker p = p'(V) \text{ und } \ker p' = p(V)$$

1.5.8 Beispiel und Definition (Involution)

Sei $s \in \operatorname{End}(V)$ eine *Involution* d.h. $s^2 = \mathrm{id}_V$ und

$$p_\pm := \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V \pm s).$$

Offenbar gilt dann

$$p_+ + p_- = \mathrm{id}_V \text{ und } p_+ p_- = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_V + s)(\mathrm{id}_V - s) = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_V^2 - s^2) = 0$$

also (Satz) sind $p_\pm \in \operatorname{End}(V)$ Projektionen mit komplementären Bildern bzw. Kernen.

1.5.9 Lemma und Definition (Produkt von VR)

Ist $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-VR V_i, so wird das (mengenthoretische) *Produkt*:

$$V := \prod_{i\in I} V_i = \{(v_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I : v_i \in V_i\}$$

mit den komponentenweise definierten VR-Operationen zu einem K-VR. Dies ist der *Produktraum* der Familie $(V_i)_{i\in I}$.

Beweis (V is K-VR) Aufgabe!

Bemerkung Ist $V = \prod_{i\in I} V_i$ ein Produktraum, so erhält man kanonische UVR

$$U_i := \{v = (v_i)_{i\in I} \in V \mid \forall j \neq i : v_j = 0\} \subset V,$$

die isomorph zu den V_i sind mittels der *Faktor-Projektionen*[4]

$$\pi_i : V \to V_i,\ (v_j)_{j\in I} \mapsto v_i,$$

[4] Achtung: Keine Projektion in unserem obrigen Sinn!

bzw. mittels der *Faktor-Injektionen*

$$\iota_i : V_i \to V,\ v_i \mapsto (v_j)_{j\in I}, \text{ wobei } v_j := \begin{cases} v_i & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist dann $\#I < \infty$, so erhält man

$$\prod_{i\in I} V_i \cong \bigoplus_{i\in I} U_i \quad (=: \bigoplus_{i\in I} V_i);$$

Ist $\#I = \infty$, so ist diese Identifikation im Allgemeinen falsch!

Beispiel Für einen Körper K liefert das n-fache Produkt den Standardraum

$$\prod_{i=1}^{n} K = \{(x_i)_{i=1,\dots,n} \mid \forall i \in \{1,\dots,n\} : x_i \in K\} = K^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \{(x_i)_{i=1,\dots,n} \mid \forall j \neq i : x_j = 0\};$$

für den Raum der K-wertigen Folgen ist jedoch

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} K = K^{\mathbb{N}} \ncong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \forall j \neq i : x_j = 0\}.$$

1.5.10 Lemma und Definition (Nebenklassen)

Sei $U \subset V$ UVR. Die Menge der Nebenklassen

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\},$$

wobei

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

die *Nebenklasse*[5] zu $v \in V$ bezeichnet, wird mit den durch

$$\begin{aligned} + &: V/U \times V/U \to V/U,\ ((v+U),(w+U)) \mapsto (v+w)+U, \\ \cdot &: K \times V/U \to V/U,\ (x,(v+U)) \mapsto (vx)+U, \end{aligned}$$

definierten Operationen ein Vektorraum: der *Quotientenraum* V/U.

Beweis Zu zeigen: Wohldefiniertheit der Operationen und VR-Axiome.

Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation:

[5] Bemerke: Nebenklassen sind im Allgemeinen keine UVR, z.B. müssen sie 0 nicht enthalten!

Ist $x \in K$ und sind $(v+U), (v'+U) \in V/U$ gleich, also $v+U = v'+U$, so gilt

$$\begin{aligned} v+U = v'+U &\Leftrightarrow v - v' \in U \\ &\Rightarrow (v-v')x \in U \\ &\Rightarrow vx + U = v'x + U \end{aligned}$$

Das Resultat der Skalarmultiplikation hängt also nicht von dem Repräsentanten v einer Nebenklasse $v+U$ ab, sondern nur von der Nebenklasse.

Die Wohldefiniertheit der Addition ist analog zu beweisen.

Die Vektorraumaxiome sind zu überprüfen.

1.5.11 Bemerkung & Definition (Äquivalenzrelation)

Der Definition von V/U liegt ein allgemeineres Prinzip zugrunde:

$$v \sim w :\Leftrightarrow (v+U) = (w+U) \Leftrightarrow w - v \in U$$

definiert für jeden UVR $U \subset V$ eines K-VR V eine *Äquivalenzrelation* auf V, d.h.:

(i) $\forall v \in V : v \sim v$ (*Reflexivität*)

(ii) $\forall v, w \in V : v \sim w \Leftrightarrow w \sim v$ (*Symmetrie*);

(iii) $\forall u, v, w \in V : u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$ (*Transitivität*).

z.z.: $v \sim w :\Leftrightarrow w - v \in U$ definiert eine Äquivalenzrelation

- Reflexivität: Sei $v \in V$ beliebig, dann gilt $v - v = 0 \in U$, da U UVR.
- Symmetrie: Seien $v, w \in V$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} v \sim w &\Leftrightarrow w - v \in U \\ &\Leftrightarrow v - w \in U \Leftrightarrow w \sim v. \end{aligned}$$

- Transivitität: Seien $u, v, w \in V$ beliebig; gilt nun $u \sim v$, d.h. $v - u \in U$ und $v \sim w$, d.h. $w - v \in U$, so gilt auch:

$$\underbrace{(w-v)}_{\in U} + \underbrace{(v-u)}_{\in U} = w - u \in U \Leftrightarrow u \sim w$$

Ist dann $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, so zerfällt X in Äquivalenzklassen

$$X_x = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

d.h., X ist disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen:

$$X = \dot{\bigcup}_{x\in X} X_x \qquad \text{und} \qquad \underbrace{X_x \cap X_y \neq \emptyset \Rightarrow X_x = X_y}_{\text{zwei Äquivalenzklassen sind entweder disjunkt oder gleich}}$$

Insbesondere zerfällt also ein VR V in Äquivalenzklassen (Nebenklassen)

$$v + U (= V_v) \subset V,$$

wenn U ein UVR von V ist – nach Lemma wird die Menge der Neben- bzw. Äquivalenzklassen dann wieder ein VR. Ähnlich wie den Quotientenvektorraum definiert man (z.B.) die *Faktorgruppe* [Havlicek §.1.11.11].

Bemerkung Allgemeiner definiert man eine (binäre) *Relation* (X, Y, Γ) zwischen Mengen X, Y durch den *Graph der Relation*, eine Teilmenge

$$\Gamma \subset X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Zum Beispiel ist eine Abbildung $f : X \to Y$ eine Relation (X, Y, Γ_f), sodass

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y : (x, y) \in \Gamma_f.$$

Ein anderes Beispiel ist die *Ordnungsrelation* auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$x \leq y :\Leftrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y - x \in \mathbb{N}\},$$

Eine Ordnungsrelation ist reflexiv, transitiv und *antisymmetrisch*, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

Die *Teilmengenrelation*

$$Y \subset \tilde{Y} \text{ für } Y, \tilde{Y} \in \mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$$

liefert auch eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X, jedoch nur eine *Halbordnung* – im Gegensatz zur *Totalordnung* auf $\mathbb{Z}$, wo je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h.,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \vee y \leq x.$$

Auf $\mathcal{P}(X)$ gilt dies im Allgemeinen nicht, denn z.B. in $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ sind $\{0\}, \{1\}$ nicht vergleichbar, denn

$$\{0\} \not\subset \{1\} \wedge \{1\} \not\subset \{0\}.$$

1.5.12 Lemma (Dimensionen von komplementären UVR)

Ist $U \subset V$ UVR und U' komplementärer UVR zu U in V, so gilt

$$U' \cong V/U$$

vermöge

$$U' \ni u' \overset{\phi}{\mapsto} u' + U \in V/U.$$

Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Beweis z.z.: ϕ ist Isomorphismus.

Dass ϕ Homomorphismus ist, folgt aus der Definition der VR-Operationen auf V/U.

Injektivität: Sei $u' \in \ker \phi$, d.h.[6]

$$\begin{aligned} \phi(u') = u' + U &= 0 + U \in V/U \\ &\Rightarrow u' \in U' \cap U = \{0\} \\ &\Rightarrow u' = 0 \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei $v + U \in V/U$ mit $v \in V = U \oplus U'$; mit der Projektion

$$p' : V \to V, \ v = u + u' \mapsto p'(v) := u'$$

ist

$$v + U = u' + \underbrace{u}_{\in U} + U = u' + U = \phi(p'(v))$$

also $V/U = \phi(U')$.

Die Dimensionsformel folgt dann aus der für direkte Summen:

$$\dim V/U = \dim U' \Rightarrow \dim V/U = \dim V - \dim U$$

Beispiel Ist $p \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion, so auch $p' := \mathrm{id}_V - p$ und es gilt

$$V = \ker p \oplus \ker p' = \ker p \oplus p(V),$$

also gilt

$$p(V) \cong V/ \ker p.$$

[6]Bemerke: „=“ steht für die Gleichheit von Nebenklassen!

1.5.13 Homomorphiesatz für lineare Abbildungen:

Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist $f(V) \cong V/\ker f$ vermöge

$$V/\ker f \ni v + \ker f \overset{\phi}{\mapsto} f(v) \in f(V).$$

Beweis Wohldefiniertheit von ϕ:

Sind $v + \ker f, v' + \ker f \in V/\ker f$ und $v + \ker f = v' + \ker f$, so gilt

$$\begin{aligned} v' - v \in \ker f &\Rightarrow f(v') - f(v) = f(v' - v) = 0 \\ &\Rightarrow f(v') = f(v) \end{aligned}$$

d.h. ϕ ist wohldefiniert.

Linearität:

- Für $x \in K$ und $v + \ker f \in V/\ker f$ ist

$$\begin{aligned} \phi((v + \ker f)x) &= f(vx) \\ &= f(v)x \\ &= \phi(v + \ker f) \cdot x \end{aligned}$$

- Für $v + \ker f, w + \ker f \in V/\ker f$ ist

$$\begin{aligned} \phi((v + \ker f) + (w + \ker f)) &= \phi((v + w) + \ker f) \\ &= f(v + w) \\ &= f(v) + f(w) \\ &= \phi(v + \ker f) + \phi(w + \ker f) \end{aligned}$$

Injektivität: Sei $v + \ker f \in \ker \phi$, also

$$\phi(v + \ker f) = f(v) = 0;$$

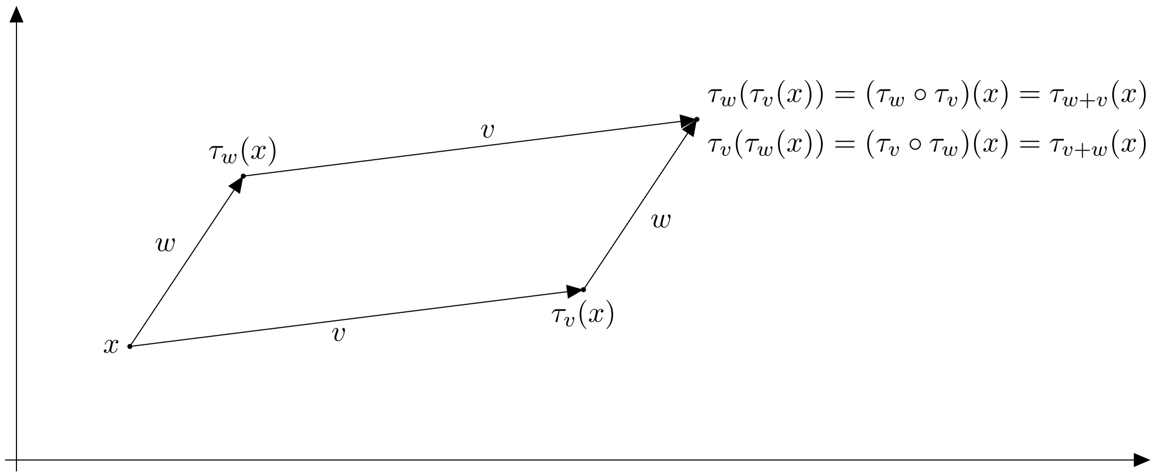
dann folgt

$$v \in \ker f \Rightarrow v + \ker f = \ker f = \underbrace{0}_{0+\ker f} \in V/\ker f.$$

Surjektivität: folgt direkt aus der Definition.

2 Affine Geometrie

2.1 Affine Räume



2.1.1 Definition (Geometrie nach Klein)

Eine Geometrie besteht aus einer Menge A (z.B. Punktmenge) und einer darauf operierenden Gruppe $(G, *)$, d.h., es gibt eine Gruppenoperation

$$\rho : G \times A \to A, (g, a) \mapsto \rho_g(a),$$

wobei gilt

(i) $\forall a \in A \forall g, h, \in G : (\rho_g \circ \rho_h)(a) = \rho_{g*h}(a)$

(ii) $\forall a \in A : \rho_e(a) = a$ für das neutrale Element $e \in G$.

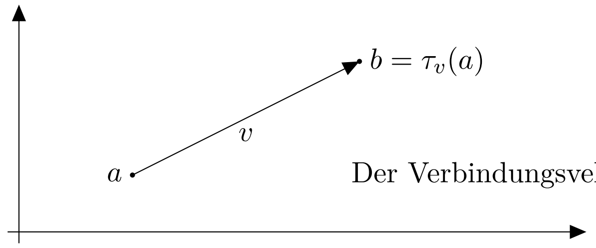
2.1.2 Definition (Affiner Raum)

Sei K ein Körper. Ein affiner Raum (AR) (A, V, τ) über K besteht aus einer Menge A, einem K-Vektorraum V und einer Gruppenoperation

$$\tau : V \times A \to A, (v, a) \mapsto \tau_v(a)$$

von V (als additive Gruppe $(V,+)$) auf A, die einfach transitiv ist, d.h.

$$\forall a, b \in A \exists! v \in V : b = \tau_v(a)$$



Der Verbindungsvektor ist eindeutig.

Weiters nennen wir

- Elemente von A Punkte,
- V den Richtungsvektorraum oder Tangentialraum von A,
- v mit $\tau_v(a) = b$ den Verbindungsvektor von a nach b,
- $\tau_v : A \to A, a \mapsto \tau_v(a)$ die Translation von v
- und $\dim V$ die Dimension des affinen Raums A

Bemerkung Die Translationen eines AR A bilden eine abelsche Gruppe.

Alternative Notation:

$$a + v := \tau_v(a) \text{ und } b - a := v, \text{ falls } b = \tau_v(a)$$

Mit dieser alternativen Schreibweise für die Operation von $(V,+)$ auf A, erscheinen die Bedingungen, dass $V = (V,+)$ einfach transitiv auf A operiert, „offensichtlich".

Gruppenoperation:

(i) $\forall a \in A \forall v, w, \in V : (a+v)+w = a+(v+w)$ ist kurz für $\tau_w(\tau_v(a)) = \tau_{v+w}(a)$, entspricht also nicht der Assoziativität.

(ii) $\forall a \in A : a + 0 = a$ entspricht $\tau_0(a) = a$

Transitivität:

$$\forall a, b \in A \exists v \in V : b = a + v$$

Nämlich: sind $a, b \in A$ gegeben, so liefert $v := b - a$ (weil V einfach transitiv operiert) eindeutig den gesuchten Vektor.

2.1.3 Beispiel & Definition (affiner Standardraum)

Jeder K-VR liefert einen affinen Raum (V, V, τ) mit der Operation

$$\tau : V \times V \to V, (v, a) \mapsto \tau_v(a) := a + v$$

von V auf sich selbst – die Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren wird dann etwas undurchsichtig.

Der affine Standardraum (K^n, K^n, τ) wird mit A^n bezeichnet.

2.1.4 Beispiel & Definition (Ursprung)

Sei (A, V, τ) AR, für jede Wahl eines Ursprungs $o \in A$ ist

$$\tau(o) : V \to A, v \mapsto \tau_v(o)$$

eine Bijektion – ein VR ist also ein „AR mit Ursprung“.

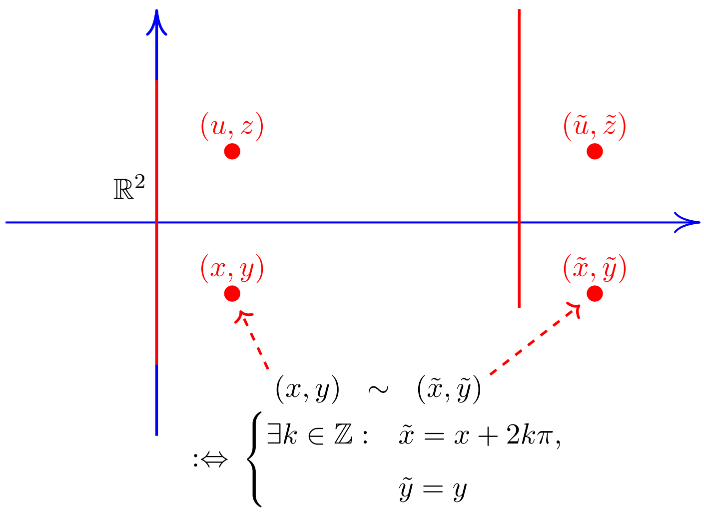
Beispiel Auf einem Zylinder

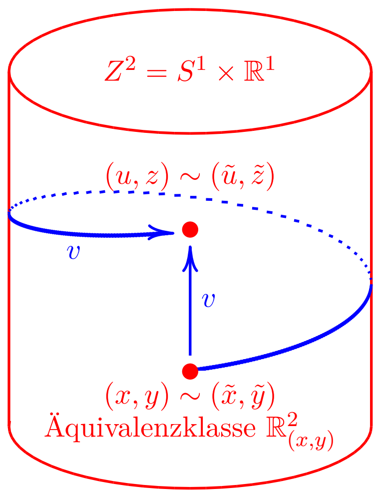
$$Z^2 := S^1 \times \mathbb{R} := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$$

liefert die Operation

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times Z^2 \to Z^2, (v, a) \mapsto a + v$$

keinen affinen Raum, da diese Operation nicht einfach transitiv ist: zu je zwei Punkten gibt es unendlich viele „Verbindungsvektoren“.





2.1.5 Beispiel & Definition (affiner Unterraum)

Ist $U \subset V$ UVR eines K-VR V, so liefert jedes $v \in V$ die Nebenklasse

$$A = v + U$$

einen affinen Raum (A, U, τ) mit

$$\tau : U \times A \to A, (u, a) \mapsto \tau_u(a) := a + u;$$

offensichtlich ist die Operation wohldefiniert (operiert auf der Nebenklasse) und einfach transitiv.

Eine Nebenklasse $A = v + U \subset V$ nennt man daher auch einen affinen Unterraum des VR V.

$A' \subset A$ ist affiner Unterraum (AUR) des affinen Raumes (A, V, τ), falls

$$\exists a \in A \exists U \subset V \text{UVR} : A' = a + U = \{\tau_u(a) \mid u \in U\}.$$

Ist $\dim A' = 1$ oder $\dim A' = 2$, so heißt A' (affine) Gerade bzw. Ebene; ist $\dim A' < \infty$ und $\dim A' = \dim A - 1$, so heißt A' (affine) Hyperebene.

Bemerkung Jeder AUR ist selbst AR mit der „geerbten“ (eingeschränkten) Operation.

Beispiel Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $w \in f(V)$, so erhält man einen affinen Raum

$$(f^{-1}(\{w\}), \ker f, \tau) \text{ mit } \tau_u(a) := a + u.$$

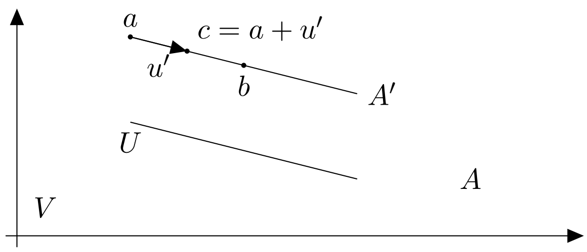
Ist $f \in V^* \setminus \{0\}$ (und $\dim V < \infty$), so wird $f^{-1}(\{x\}) \subset V$ für jedes $x \in K (= f(V))$ eine affine Hyperebene in (V, V, τ) – nach Rangsatz.

Bemerkung Ist $A' = a + U \subset A$ AUR des AR (A, V, τ), so gilt

$$\forall b \in A' \exists u \in U : b = \tau_u(a)$$

und damit

$$\begin{aligned} b + U &= \{\tau_{u'}(b) \mid u' \in U\} \\ &= \{(\tau_{u'} \circ \tau_u)(a) = \tau_{u'+u}(a) \mid u' \in U\} \\ &= \{\tau_{u''}(a) \mid u'' \in U\} = a + U = A' \end{aligned}$$



Damit zeigt man: Ist $(A'_i)_{i\in I}$ eine Familie AUR $A'_i \subset A$ eines AR A, so ist der Schnitt leer oder ein affiner Unterraum. Ist nämlich der Schnitt nicht leer, d.h.,

$$\exists a \in A \forall i \in I : a \in A'_i,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} &\forall i \in I : A'_i = a + U_i \text{ mit einem geeigneten UVR } U_i \subset V \\ &\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A'_i = a + \bigcap_{i\in I} U_i \text{ und } U := \bigcap_{i\in I} U_i \subset V \text{ ist UVR.} \end{aligned}$$

2.1.6 Definition (affine Hülle)

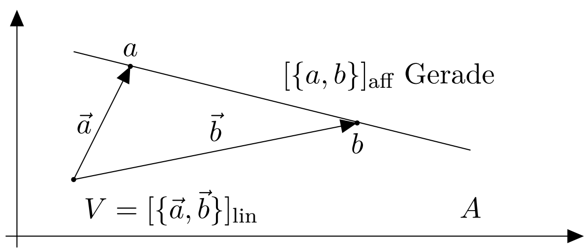
Die affine Hülle $[S]$ einer Teilmenge eines affinen Raumes A ist der Schnitt aller S enthaltenden AUR $A' \subset A$,

$$[S] = \bigcap_{S\subset A' \text{AUR}} A'.$$

Bemerkung Die affine Hülle einer Teilmenge $S \subset A$ ist also der kleinste S enthaltende affine Unterraum von A.

Achtung: In einem K-VR V (den kann man auch als AR auffassen, siehe Beispiel vorher) sind die lineare Hülle und die affine Hülle (in V aufgefasst als AR) im Allgemeinen verschieden:

$$[S]_{\text{lin}} = \bigcap_{S\subset U \text{ UVR}} U \neq \bigcap_{S\subset A \text{ AUR}} A = [S]_{\text{aff}}$$



Beispiel Für $S = \{a\} \subset V$ mit $a \neq 0$ gilt

$$[S]_{\text{lin}} = \{ax \in A = V \mid x \in K\} \neq \{a\} = [S]_{\text{aff}}$$

allgemein gilt:

$$[S]_{\text{aff}} \subset [S \cup \{0\}]_{\text{aff}} = [S]_{\text{lin}}$$

Beweis in Aufgabe 45.

2.1.7 Lemma & Definition (baryzentrischer Kalkül)

Seien $(a_i)_{i\in I}$ und $(x_i)_{i\in I}$ Familien in einem AR A über K bzw. in K, wobei

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \text{ und } \sum_{i\in I} x_i = 1;$$

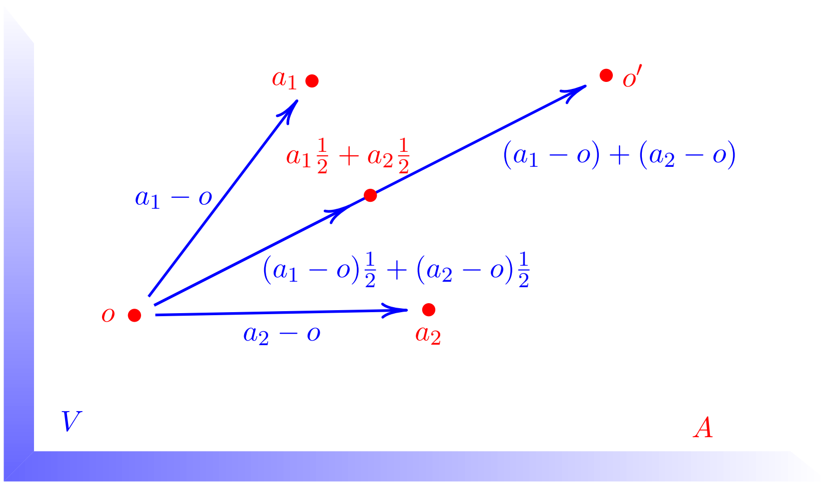
dann ist die mit einem beliebigen Ursprung $o \in A$ definierte Affinkombination

$$\sum_{i\in I} a_i x_i := o + \sum_{i\in I} (a_i - o) x_i$$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs $o \in A$. Dann heißt

$$s := \sum_{i\in I} a_i x_i$$

Schwerpunkt oder Baryzentrum der Punkte a_i mit Gewichten x_i.



Beispiel Sind etwa $K = \mathbb{R}$ und $I = \{1, ..., n\}$, so erhält man mit $x_i = \frac{1}{n}$ für $i \in I$ den üblichen geometrischen Schwerpunkt der (endlichen) Punktmenge,

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{n}.$$

Achtung: Die Ausdrücke

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \text{ oder } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

sind sinnlos, da nicht definiert.

Beweis Zu zeigen: Sind $o, o' \in A$, so gilt

$$o' + \sum_{i \in I} v_i' x_i = o + \sum_{i \in I} v_i x_i, \text{ wobei } \begin{cases} v_i := a_i - o \\ v_i' := a_i - o' \end{cases}$$

Zunächst bemerken wir, dass mit $w := o' - o$ für $i \in I$ gilt: $v_i' + w = v_i$, denn:

$$\begin{aligned} \tau_{v_i'+w}(o) &= \tau_{v_i'}(\tau_w(o)) = \tau_{v_i'}(o') \\ &= a_i = \tau_{v_i}(o), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} o + \sum_{i \in I} v_i x_i &= o + \sum_{i \in I} (w + v_i') x_i = o + \sum_{i \in I} w x_i + \sum_{i \in I} v_i' x_i \\ &= o + w \cdot \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} v_i' x_i = o + w + \sum_{i \in I} v_i' x_i = o' + \sum_{i \in I} v_i' x_i \end{aligned}$$

2.1.8 Lemma (Affine Hülle und Affinkombination)

Ist $S \subset A$ Teilmenge eines AR A, so ist ihre affine Hülle

$$[S] = \{\sum_{a \in S} a x_a \mid \#\{a \in S \mid x_a \neq 0\} < \infty \wedge \sum_{a \in S} x_a = 1\}.$$

Beweis Wir setzen $S \neq \emptyset$ voraus und wählen $o \in S$, dann ist

$$[S] = o + [\{a - o \mid a \in S\}]$$

und die Behauptung folgt aus der entsprechenden für die lineare Hülle.

Beispiel Die affine Hülle zweier Punkte $a, b \in A, a \neq b$ ist die (affine) Gerade

$$[ab] := [\{a, b\}] = \{a(1-t) + bt \mid t \in K\}.$$

Die affine Hülle von drei verschiedenen Punkten $a, b, c \in A$ ist eine Gerade oder Ebene, je nachdem, ob $\dim[\{a, b, c\}]$ gleich 1 oder 2 ist. Im zweiten Fall sagen wir: das Dreieck $\{a, b, c\}$ sei nicht-degeneriert.

2.1.9 Definition (allgemeine Lage)

Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Punkten $a_i \in A$ eines AR A ist affin unabhängig, bzw. in allgemeiner Lage, falls

$$\forall i \in I : a_i \notin [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}],$$

und sonst affin abhängig; Punkte heißen kollinear bzw. koplanar, falls sie in einer Geraden oder einer Ebene liegen.

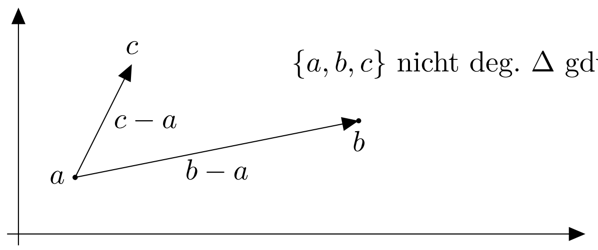
2.1.10 Lemma (Affine und lineare (Un-)Abhängigkeit)

Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn für jedes $i \in I$ die Familie $(a_j - a_i)_{j \in I \setminus \{i\}}$ linear unabhängig ist.

Beweis Die Familie $(a_i)_{i \in I}$ ist genau dann affin abhängig, wenn

$$\begin{aligned}\exists i \in I : a_i \in [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}] &\Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}} : a_i = \sum_{j \neq i} a_j x_j \wedge 1 = \sum_{j \neq i} x_j \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}} : 0 = \sum_{j \neq i} (a_j - a_i) x_j \wedge 1 = \sum_{j \neq i} x_j,\end{aligned}$$

d.h., wenn die Familie $(a_j - a_i)_{j \in I \setminus \{i\}}$ eine nicht-triviale Linearkombination von 0 erlaubt, also linear abhängig ist.



$\{a, b, c\}$ nicht deg. Δ gdw. Vektoren lin. unab.

2.1.11 Lemma (Eindeutigkeit der Punktdarstellung)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn jeder Punkt ihrer affinen Hülle eine eindeutige Affinkombination hat:

$$\forall a \in [\{a_i \mid i \in I\}] \exists! (x_i)_{i\in I} : \begin{cases} 1 = \sum_{i\in I} x_i \\ a = \sum_{i\in I} a_i x_i \end{cases}$$

Beweis Hat jeder Punkt $a \in [\{a_i \mid i \in I\}]$ eine eindeutige Affinkombination, so gilt insbesondere

$$\forall i \in I : a_i = a_i \cdot 1 \notin [\{a_j \mid j \neq i\}].$$

Hat andererseits der Punkt a zwei Affindarstellungen,

$$a = \sum_{i\in I} a_i x_i = \sum_{i\in I} a_i y_i,$$

so folgt mit einem Ursprung $o \in A$ und $v_i = a_i - o$

$$a = o + \sum_{i\in I} v_i x_i = o + \sum_{i\in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i\in I} v_i (y_i - x_i).$$

Ist $(a_i)_{i\in I}$ affin unabhängig, so ist $(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ linear unabhängig für ein beliebiges $i \in I$ und $o := a_i$. Es folgt:

$$\forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = y_j \Rightarrow x_i = 1 - \sum_{j\neq i} x_j = 1 - \sum_{j\neq i} y_j = y_i$$

also $(x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$

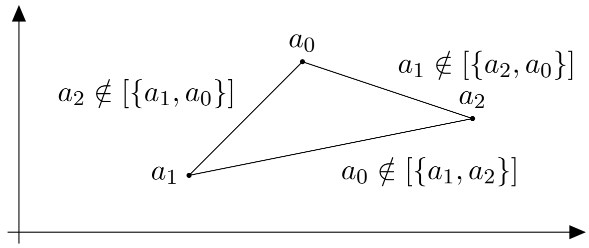
2.1.12 Definition (Affines/baryzentrisches Bezugssystem)

Ein affines Bezugssystem $(o; B)$ eines affinen Raumes (A, V, τ) besteht aus einem Ursprung $o \in A$ und einer Basis B von V; ein baryzentrisches Bezugssystem $(a_i)_{i\in I}$ ist eine affin unabhängige Familie von Punkten, sodass

$$[\{a_i \mid i \in I\}] = A.$$

Bemerkung Ist $n = \dim A$, so enthält

- ein affines Bezugssystem $(o; b_1, ..., b_n)$ einen Punkt und n Vektoren;
- ein baryzentrisches Bezugssystem $(a_0, ..., a_n)$ $n + 1$ Punkte (und keinen Vektor).



Beispiel Drei Punkte $a_0, a_1, a_2 \in A$ sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie die Ecken eines nicht degenerierten Dreiecks sind. Sie bilden dann ein baryzentrisches Bezugssystem der Ebene des Dreiecks. Andernfalls sind sie kollinear.

2.1.13 Definition (Teilverhältnis)

Sind $a, b, c \in A$ kollinear, $c \neq b$, so ist ihr Teilverhältnis

$$(ac : bc) = t :\Leftrightarrow a = bt + c(1-t).$$

Bemerkung Sind $a, b \in A, a \neq b$ gegeben, so bestimmt das Teilverhältnis t die Lage eines Punktes c auf der Verbindungsgeraden $[\{a, b\}]$ eindeutig:

$$\begin{gathered}(ac : bc) = t \Leftrightarrow a = bt + c(1-t) = c + (b-c)t + (c-c)(1-t) \text{ (nach Affinkomb. mit } o = c)\\ \Leftrightarrow a = \tau_{(b-c)t}(c) \Leftrightarrow a - c = (b-c)t\\ \Leftrightarrow a - b \overset{*}{=} (a-c) + (c-b) = (b-c)t + (c-b) \overset{*}{=} (c-b)(1-t)\\ \Leftrightarrow (a-b)\frac{1}{1-t} = c - b \Leftrightarrow \tau_{(a-b)\frac{1}{1-t}}(b) = c\\ \Leftrightarrow c = b + (a-b)\frac{1}{1-t} + (b-b)(1 - \frac{1}{1-t}) = a\frac{1}{1-t} + b(1 - \frac{1}{1-t}) = a\frac{1}{1-t} + b\frac{-t}{1-t}\end{gathered}$$

Dabei erhält man $c = a$ mit $t = 0$, wegen $a \neq b$ muss $t = 1$ ausgeschlossen werden und $c = b$ wird durch kein Teilverhältnis realisiert. (* vgl. Beweis baryzentrischer Kalkül)

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $t < 0$ genau dann, wenn der Punkt c „zwischen“ a und b liegt, d.h. wenn

$$c \in \{a(1-s) + bs \mid s \in (0,1)\}.$$

Man sagt daher auch: „c teilt die Strecke $\overline{ab}$ im Verhältnis $(ac : bc)$.“

Bei nicht geordneten Körpern ist diese Aussage sinnlos!

Bemerkung Das Teilungsverhältnis $t = (ac : bc) = -\frac{s}{1-s}$ für $c = a(1-s) + bs$.

2.2 Affine Abbildungen & Transformationen

2.2.1 Definition

Eine Abbildung $\alpha : A \to A'$ zwischen affinen Räumen A und A' (über dem gleichen Körper K) heißt affin, falls sie

(i) *geradentreu* ist, d.h. die Bilder kollinearer Punkte sind kollinear;

(ii) *teilverhältnistreu* ist, d.h. das Teilverhältnis kollinearer Punkte wird erhalten (solange die Punkte nicht alle zusammenfallen).

Eine bijektive affine Abbildung $\alpha : A \to A$ heißt Affinität oder affine Transformation.

Bemerkung Sei $\alpha : A \to A'$ und $a, b \in A$ sodass $\alpha(a) \neq \alpha(b)$; insbesondere ist dann auch $a \neq b$. Ist α geradentreu, so gilt für jeden Punkt

$$c_s = a(1-s) + bs;\ \ s = (ca : ba),$$

dass $c_s \in [\{a, b\}]$, d.h.

$$\forall s \in K \exists t \in K : \alpha(c_s) = \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-t) + \alpha(b)t \in [\{\alpha(a), \alpha(b)\}]$$

Ist α dann auch teilverhältnistreu, so folgt

$$\frac{-t}{1-t} = (\alpha(a)\alpha(c_s) : \alpha(b)\alpha(c_s)) = (ac_s : bc_s) = \frac{-s}{1-s} \Rightarrow t = s.$$

Insbesondere bildet α die Gerade $[ab]$ dann bijektiv auf die Gerade $[\alpha(a), \alpha(b)]$ durch die Bildpunkte von a und b ab, und

$$\forall s \in K : \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-s) + \alpha(b)s.$$

Enthält die Gerade durch a und b, $a \neq b$ keine Punkte, deren Bilder verschieden sind, so wird die Gerade auf einen einzigen Punkt abgebildet – und die vorherige Gleichung gilt ebenfalls.

Beispiel Die Translationen eines affinen Raumes sind Affinitäten, denn für

$$c_s = a(1-s) + bs = a + ws,\ \text{mit } w := b - a$$

gilt, mit Translationsvektor $v \in V$,

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a + ws) = \tau_v(\tau_{ws}(a)) = \tau_{v+ws}(a) = \tau_{ws+v}(a) = \tau_{ws}(\tau_v(a)) = \tau_v(a) + ws,$$

insbesondere gilt also

$$\tau_v(b) = \tau_v(a) + w$$

und damit

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a) + ws = \tau_v(a) + (\tau_v(b) - \tau_v(a))s = \tau_v(a)(1-s) + \tau_v(b)s.$$

Also sind $\tau_v(a), \tau_v(b)$ und $\tau_v(c_s)$ kollinear und erhalten das Teilverhältnis

$$(\tau_v(a)\tau_v(c_s) : \tau_v(b)\tau_v(c_s)) = (ac_s : bc_s).$$

2.2.2 Lemma

$\alpha : A \to A'$ ist genau dann affin, wenn für jede Affinkombination in A gilt:

$$\alpha(\sum_{i\in I} a_i x_i) = \sum_{i\in I} \alpha(a_i)x_i.$$

Beweis Wir haben schon gesehen: $\alpha : A \to A'$ ist affin genau dann, wenn

$$\forall a, b, \in A \forall s \in K : \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-s) + \alpha(b)s$$

Offenbar ist die vorherige Bemerkung ein Spezialfall des Lemmas. Es bleibt die andere Richtung zu zeigen. Wir benutzen vollständige Induktion über $k = \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$.

Induktionsanfang Für $k = 1$ trivial.

Induktionsannahme Für $a_1, ..., a_k \in A$ und $x_1, ..., x_k \in K^\times$ mit $\sum_{i=1}^k x_i = 1$ gelte

$$\alpha(\sum_{i=1}^k a_i x_i) = \sum_{i=1}^k \alpha(a_i)x_i.$$

Induktionsschluss Seien $a_1, ..., a_{k+1} \in A$ und $x_1, ..., x_{k+1} \in K^\times$ Gewichte, sodass $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, o.B.d.A. $x_{k+1} \neq 1$; dann gilt

$$\alpha(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i) = \alpha((\sum_{i=1}^k a_i \frac{x_i}{1-x_{k+1}})(1-x_{k+1}) + a_{k+1}x_{k+1})$$

$$= \alpha(\sum_{i=1}^k a_i \frac{x_i}{1-x_{k+1}})(1-x_{k+1}) + \alpha(a_k+1)x_{k+1}$$

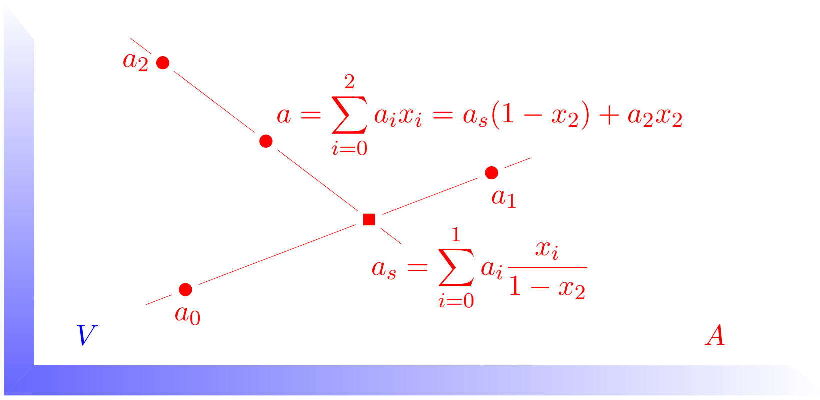
$$= \sum_{i=1}^k \alpha(a_i)\frac{x_i}{1-x_{k+1}}(1-x_{k+1}) + \alpha(a_{k+1})x_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha(a_i)x_i.$$

Damit ist die Behauptung für affine Abbildungen α bewiesen.

Bemerkung Im Beweis wurde benutzt: für Affinkombinationen ist (falls $x_j \neq 1$)

$$\sum_{i \in I} a_i x_i = \left(\sum_{i \neq j} a_i \frac{x_i}{1 - x_j} \right) (1 - x_j) + a_j x_j$$



Bemerkung Mit der Verträglichkeit affiner Abbildungen mit Affinkombinationen folgt, dass die Inverse $\alpha^{-1} : A' \to A$ einer bijektiven affinen Abbildung $\alpha : A \to A'$ ebenfalls affin ist:

$$\alpha \left(\sum_{i \in I} \alpha^{-1}(a_i') x_i \right) = \sum_{i \in I} (\alpha \circ \alpha')(a_i') x_i = \sum_{i \in I} a_i' x_i = \alpha \left(\alpha^{-1}(\sum_{i \in I} a_i' x_i) \right)$$
$$\Rightarrow \sum_{i \in I} \alpha^{-1}(a_i') x_i = \alpha^{-1}(\sum_{i \in I} a_i' x_i),$$

da die Affinkombination $\sum_{i \in I} a_i' x_i \in A'$ beliebig war, folgt damit die Behauptung. Insbesondere sind damit auch die Inversen von Affinitäten Affinitäten.

Bemerkung Sind $\alpha : A \to A'$ und $\beta : A' \to A''$ geraden- und teilverhältnistreu, so ist auch

$$\beta \circ \alpha : A \to A''$$

geraden- und teilverhältnistreu, d.h. die Komposition affiner Abbildungen ist affin. Insbesondere ist damit die Menge G aller affinen Transformationen eines affinen Raumes A abgeschlossen unter der Komposition

$$\circ : G \times G \to G;$$

außerdem ist G abgeschlossen unter Inversenbildung. Damit folgt: G ist Untergruppe der Permutationsgruppe (der symmetrischen Gruppe) des affinen Raumes A: Diese Gruppe bezeichnet man als *affine Gruppe*.

2.2.3 Definition

Die auf einem affinen Raum A operierende Gruppe G der Affinitäten von A bestimmt eine *affine Geometrie.*

Bemerkung Die Verträglichkeit einer affinen Abbildung $\alpha : A \to A'$ mit Affinkombinationen lässt sich auch mithilfe von Vektoren formulieren (unabhängig von der Wahl des Ursprungs $o \in A$):

$$v_i = a_i - o \Rightarrow \alpha\left(\sum_{i\in I} a_i x_i\right) = \alpha\left(o + \sum_{i\in I} v_i x_i\right)$$

$$\sum_{i\in I} \alpha(a_i)x_i = \sum_{i\in I} \alpha(o+v_i)x_i$$

$$\Rightarrow \alpha\left(o + \sum_{i\in I} v_i x_i\right) - \alpha(o) = \sum_{i\in I} \alpha(o+v_i)x_i - \alpha(o)\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I}(\alpha(o-v_i) - \alpha(o))x_i,$$

setzt man also

$$\lambda : V \to V', v \mapsto \lambda(v) := \alpha(o+v) - \alpha(o),$$

wobei V und V' die zu A bzw. A' gehörenden Richtungsvektorräume sind, so erhält man einen Homomorphismus $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$, da sie mit Linearkombinationen verträglich ist:

$$\lambda\left(\sum_{i\in I} v_i x_i\right) = \alpha\left(o + \sum_{i\in I} v_i x_i\right) - \alpha(o) = \sum_{i\in I}\left(\alpha(o+v_i) - \alpha(o)\right)x_i = \sum_{i\in I} \lambda(v_i)x_i$$

2.2.4 Lemma & Definition

Seien A und A' AR mit RVR V bzw. V'; dann ist eine Abbildung $\alpha : A \to A'$ genau dann affin, wenn es $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$ gibt, sodass

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a+v) = \alpha(a) + \lambda(v).$$

Wir nennen λ den *linearen Anteil* einer affinen Abbildung α.

Beweis Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

$\Rightarrow$: Sei $\alpha : A \to A'$ affin. Zu zeigen ist nun die Existenz eines geeigneten $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Nämlich: Wähle $o \in A$ und definiere

$$\lambda : V \to V', v \mapsto \lambda(v) := \alpha(o+v) - \alpha(o).$$

Wegen der Verträglichkeit von α mit Affinkombinationen ist λ linear. Für $a \in A, v \in V$ gilt dann mit $w := a - o$:

$$\alpha(a+v) = \alpha(o+w+v) = \alpha(o) + \lambda(w+v) =$$
$$\alpha(o) + \lambda(w) + \lambda(v) = \alpha(o+w) + \lambda(v) = \alpha(a) + \lambda(v)$$

Insbesondere ist der lineare Anteil $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$ von α wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\Leftarrow$: Für $\alpha : A \to A'$ gilt mit einem $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a+v) = \alpha(a) + \lambda(v)$$

Wegen der Verträglichkeit von λ mit Linearkombinationen ist α verträglich mit Affinkombinationen (siehe oben) und damit affin.

Bemerkung Jede affine Transformation setzt sich also zusammen aus einer Translation und einem Automorphismus $\lambda \in \mathrm{Aut}(V)$. Insbesondere: Ist $\tau_w : A \to A'$ Translation eines affinen Raumes A über V, so ist für $a \in A$ und $v \in V$

$$\tau_w(a+v) = (a+v)+w = a+(v+w) = a+(w+v) = (a+w)+v = \tau_w(a)+v = \tau_w(a) + \mathrm{id}_V(v),$$

d.h. der lineare Anteil einer Translation ist trivial – also die Identität auf V.

2.2.5 Definition

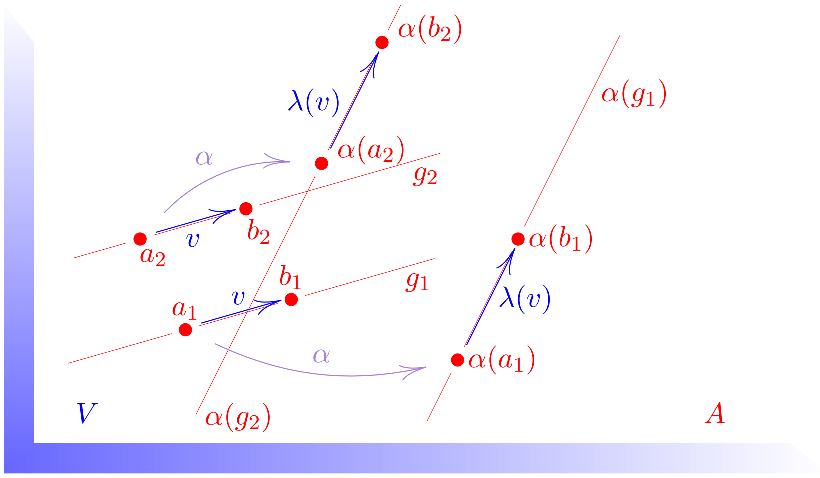
Die Automorphismen eines VR V bilden seine *allgemeine lineare Gruppe*

$$\mathrm{Gl}(V) := \{\lambda \in \mathrm{End}(V) \mid \lambda \text{ invertierbar}\}.$$

2.2.6 Bemerkung & Definition

Sind $g_i = [a_i b_i] = a_i + [v]$ mit $b_i = a_i + v$ für $i = 1, 2$ zwei Geraden mit dem gleichen RVR $[v]$, d.h. *parallel*, so sind auch ihre Bilder unter einer affinen Transformation α parallele Geraden,

$$\alpha(g_i) = \alpha(a_i) + [\lambda(v)] \text{ mit } \lambda \in \mathrm{Gl}(V).$$



2.2.7 Beispiel & Definition

Sei (A, V, τ) ein AR über K und $\lambda \in \mathrm{End}(V)$ eine *Homothetie*, $\lambda = \mathrm{id}_V \cdot c$ für ein $c \in K$.

Ist die zugehörige affine Abbildung $\alpha : A \to A, o + v \mapsto \alpha(o + v) := o + v \cdot c$

eine affine Transformation, d.h., $\lambda \in \mathrm{Gl}(V) \Leftrightarrow c \in K^\times$,

so nennt man α eine *Streckung* mit *Zentrum* $o \in A$. Ist $c \neq 1$, d.h. $\alpha \neq \mathrm{id}_A$, so gilt

$$\alpha(a) = a \Leftrightarrow a = o.$$

also hat die Abbildung α genau einen *Fixpunkt* $a = o$.

2.2.8 Beispiel & Definition

Sind $p \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion ($p^2 = p$) und $o \in A$, so liefert

$$\pi : A \to A, o + v \mapsto \pi(o + v) := o + p(v)$$

eine *Parallelprojektion* von A auf dem affinen Unterraum $o + p(V)$. Ist $p \neq \mathrm{id}_V$, so ist $p \notin \mathrm{Gl}(V)$ und also π keine affine Transformation (sondern eine nicht bijektive affine Abbildung), so hat π nicht-triviale *Fasern*

$$\pi^{-1}(\{a'\}) \subset A \text{ für } a' \in \pi(A),$$

wobei $\dim \pi^{-1}(\{a'\}) = \mathrm{def}\, p \geq 1$.

2.2.9 Beispiel & Definition

Seien $\omega \in V^*$ und $w \in \ker \omega$, sei $o \in A$; die *Scherung*

$$\sigma : A \to A, o + v \mapsto \sigma(o+v) := o + v + w\omega(v)$$

ist dann eine affine Transformation, denn $\lambda = \mathrm{id}_V + w \cdot \omega \in \mathrm{Gl}(V)$

mit $\lambda^{-1} = \mathrm{id}_v - w \cdot \omega.$

Ist $w \cdot \omega \in \mathrm{End}(V) \setminus \{o\}$, so hat σ Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}_\sigma = o + \ker \omega$ und jeder Punkt und sein Bild liegen auf einer zu $o + [w]$ parallelen Geraden:

$$\forall a \in A \setminus \mathrm{Fix}_\sigma : [a, \sigma(a)] \parallel o + [w]$$

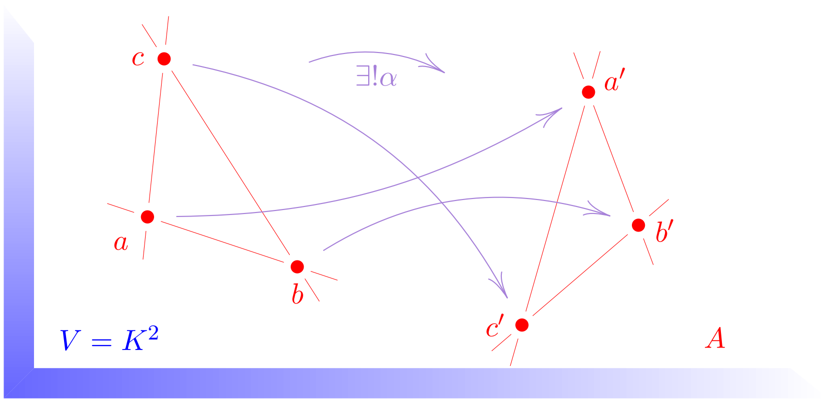
2.2.10 Korollar (Fortsetzungssatz für affine Abbildungen)

Eine affine Abbildung $\alpha : A \to A'$ ist durch die (beliebige) Angabe der Bilder $a_i' = \alpha(a_i)$ der Punkte eines baryzentrischen Bezugssystems $(a_i)_{i \in I}$ von A eindeutig bestimmt.

Beweis ist analog dem des Fortsetzungssatzes für lineare Abbildungen: Mit der Verträglichkeit der gesuchten affinen Abbildung mit Affinkombinationen muss gelten:

$$\alpha\left(\sum_{i \in I} a_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \alpha(a_i) x_i \text{ für } a = \sum_{i \in I} a_i x_i \text{ mit } \sum_{i \in I} x_i = 1$$

Eindeutigkeit folgt, da jeder Punkt $a \in A$ eine Affindarstellung $a = \sum_{i \in I} a_i x_i$ besitzt. Existenz von α folgt aus der Eindeutigkeit der Affindarstellung jedes Punktes $a \in A$ im baryzentrischen Bezugssystem $(a_i)_{i \in I}$.



Beispiel Gegeben sind die Ecken eines nicht-degenerierten Dreiecks $a, b, c \in A^2 := (A, K^2, \tau)$ und drei Punkte $a', b', c' \in A^2$; es existiert genau eine affine Abbildung $\alpha : A^2 \to A^2$ mit $(a, b, c) \mapsto$

(a', b', c'). Dieses α ist genau dann eine affine Transformation von A^2, wenn das Bilddreieck $\{a', b', c'\}$ nicht-degeneriert ist, d.h. (a', b', c') ein baryzentrisches Bezugssystem ist (dann bekommt man die Inverse mittels Fortsetzungssatz durch $(a', b', c') \overset{\alpha^{-1}}{\mapsto} (a, b, c)$).

2.3 Dreiecke in der Affinen Geometrie

2.3.1 Beispiel & Definition

Der (geometrische) Schwerpunkt zweier Punkte $a, b \in A$ eines affinen Raumes über dem Körper K ist ihr Mittelpunkt
$$s_{a,b} = a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2}.$$

Dies ist sinnlos, falls $\operatorname{Char} K = 2$ ist, was wir also ausschließen müssen. Ist etwa A AR über $K = \mathbb{Z}_2$, so enthält jede Gerade genau zwei Punkte,

$$\forall a, b \in A : [ab] = \begin{cases} \{a, b\}, & \text{falls } a \neq b \\ \{a\}, & \text{falls } a = b \end{cases}$$

Für den Rest des Kapitels wird $\operatorname{Char} K \neq 0$ ausgeschlossen.

Bemerkung Ist K ein geordneter Körper, e.g. $K = \mathbb{R}$, so kann man die *Strecke*

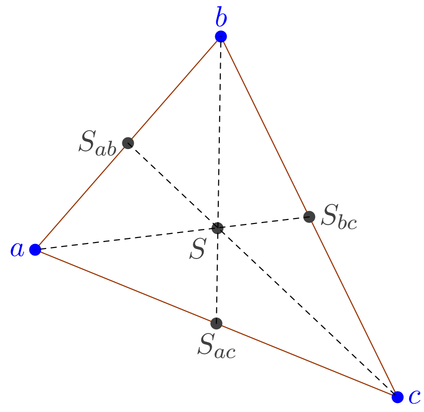
$$\overline{ab} := \{a(1-s) + bs \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

zwischen zwei Punkten $a, b \in A$ definieren. Jeder Punkt $c \in \overline{ab}$ auf der Strecke liegt *zwischen* ihren *Endpunkten* a und b; s_{ab} ist dann auch Mittelpunkt der Strecke $\overline{ab}$.

Offenbar ist das sinnlos, wenn der Körper K nicht angeordnet ist.

2.3.2 Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt eines nicht-degenerierten Dreieck $\{a, b, c\} \subset A$ ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, die er im Verhältnis $-\frac{1}{2}$ teilt.



Beweis Der (geometrische) Schwerpunkt des Dreiecks $\{a, b, c\} \subset A$ ist

$$s = a \cdot \frac{1}{3} + b \cdot \frac{1}{3} + c \cdot \frac{1}{3} = (a \cdot \frac{1}{2} + b\frac{1}{2})\frac{2}{3} + c \cdot \frac{1}{3} = s_{ab} \cdot \frac{2}{3} + c \cdot \frac{1}{3} \in [s_{ab}c];$$

weiters gilt

$$(s_{ab}s : cs) = -\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2},$$

s teilt die Strecke $\overline{s_{ab}c}$ im Verhältnis $-\frac{1}{2}$. Aus Symmetriegründen gelten diese Resultate genauso für die anderen Seitenhalbierenden.

Bemerkung Andere bekannte Schnittsätze im Dreieck machen in der affinen Geometrie keinen Sinn. Sätze wie der Höhensatz oder über den Umkreismittelpunkt können gar nicht erst formuliert werden: in der affinen Geometrie kennt man weder Längen- noch Winkelmessung.

Dem gegenüber sind die Sätze von Menelaos und Ceva „affine Sätze“, d.h. sie können rein affin formuliert werden und beschreiben unter affinen Transformationen *invariante* Sachverhalte.

2.3.3 Bemerkung & Definition

Sind $\alpha : A \to A'$ und $\beta : A' \to A''$ affine Abbildungen und bezeichnen $\lambda : V \to V'$ bzw. $\mu : V' \to V''$ ihre linearen Anteile,

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a + v) = \alpha(a) + \lambda(v) \text{ und } \forall a' \in A' \forall v' \in V' : \beta(a' + v') = \beta(a') + \mu(v'),$$

so gilt für ihre Komposition

$$(\beta \circ \alpha)(a + v) = \beta(\alpha(a) + \lambda(v)) = \beta(\alpha(a)) + \mu(\lambda(v)) = (\beta \circ \alpha)(a) + (\mu \circ \lambda)(v),$$

d.h. der lineare Anteil einer Komposition von affinen Abbildungen ist die Komposition der linearen Anteile.

Da eine affine Transformation, deren linearer Anteil Vielfaches der Identität ist, eine Translation oder eine Streckung ist, bilden die Translationen und Streckungen eines affinen Raumes eine Gruppe, die *Dilatationsgruppe*.

2.3.4 Satz von Menelaos

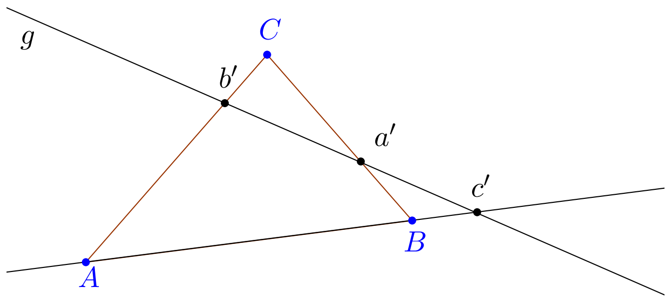
Seien $\{a, b, c\} \subset A$ ein nicht-degeneriertes Dreieck und $g \subset A$ eine Gerade, die die drei Seiten des Dreiecks außerhalb der Ecken des Dreiecks schneidet;

$$a' \in g \cap [bc], b' \in g \cap [ca] \text{ und } c' \in g \cap [ab]$$

bezeichne die Schnittpunkte. Dann gilt:

$$(ac' : bc')(ba' : ca')(cb' : ab') = 1$$

Umgekehrt garantiert die TV-Bedingung, dass drei Punkte $a' \in [bc], b' \in [ca]$ und $c' \in [ab]$ auf den Seiten des Dreiecks kollinear sind.



Beweis Betrachte Streckung γ mit Zentrum c' und Faktor $s_{ab} \in K^\times$,

$$\gamma : A \to A, c' + v \mapsto \gamma(c' + v) := c' + v s_{ab};$$

insbesondere ist für $s_{ab} = \frac{1}{(ac':bc')}$

$$\gamma(a) = c' + (a - c')\frac{1}{(ac' : bc')} = c' + (b - c') = b.$$

Definiert man Streckungen α und β entsprechend, mit Zentren a' bzw. b' und Faktoren $s_{bc} = \frac{1}{(ba':ca')}$ bzw. $s_{ca} = \frac{1}{cb':ab'}$, so liefert die Komposition eine affine Transformation

$$\delta := \beta \circ \alpha \circ \gamma : A \to A :, a + v \mapsto \delta(a + v) := a + v s_{ab} s_{bc} s_{ca},$$

da
$$a \overset{\gamma}{\mapsto} b \overset{\alpha}{\mapsto} c \overset{\beta}{\mapsto} a.$$

Damit gilt
$$(ac' : bc')(ba' : ca')(cb' : ab') = 1 \Leftrightarrow \delta = \mathrm{id}_A$$

Wegen $a \notin [c'a']$ ist andererseits
$$\delta = \mathrm{id}_A \Leftrightarrow [c'a'] = \delta([c'a']) = \beta([c'a']),$$

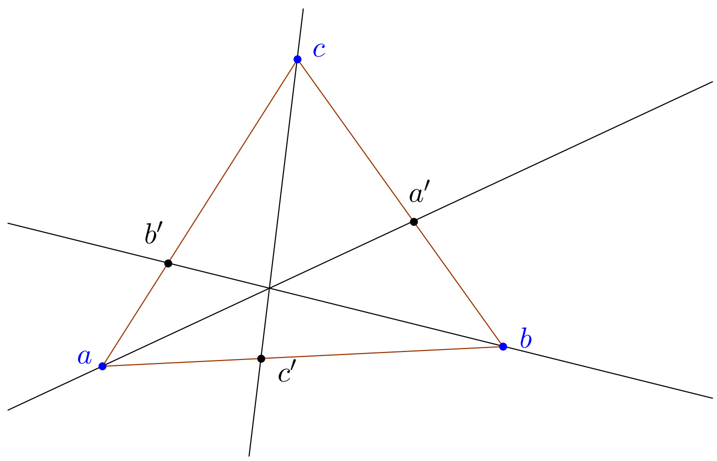
da $\gamma([c'a']) = [c'a']$ und $\alpha([c'a']) = [c'a']$, was die letzte Gleichung liefert, damit ist
$$\delta = \mathrm{id}_A \Leftrightarrow [c'a'] = \beta([c'a']) \Leftrightarrow b' \in [c'a'],$$

da β Streckung mit Zentrum b' ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2.3.5 Satz von Ceva

Seien $\{a, b, c\} \subset A$ ein nicht-degeneriertes Dreieck und
$$a' \in [bc] \setminus \{b, c\}, b' \in [ac] \setminus \{a, c\}, c' \in [ab] \setminus \{a, b\}.$$

Schneiden sich die drei Transversalen $[aa'], [bb']$ und $[cc']$ in einem Punkt, so gilt
$$(ac' : bc')(ba' : ca')(cb' : ab') = -1.$$



Beweis in Aufgabe 59.

Bemerkung Für die Seitenmitten gilt der Satz (Schwerpunktsatz).

3 Buchhaltung

Dieses Kapitel zeigt eine Art „Tabellenkalkül“ – eine effiziente Rechenmethode in der linearen Algebra.

Vorteil: Selbst durch einen Trottel (e.g. einen Computer) ausführbar.

Nachteil: Selbst durch einen Trottel ausführbar.

Generalvoraussetzung Alle VR haben in diesem Kapitel endliche Dimension.

3.1 Matrizen

Idee Ein Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ wird (nach Fortsetzungssatz) durch die Bilder $f(b_j)$ der Vektoren einer Basis $(b_j)_{j \in J}$ eindeutig festgelegt; ist $(c_i)_{i \in I}$ eine Basis von W, so hat jedes dieser $f(b_j)$ eine eindeutige Basisdarstellung.

$$\forall j \in J \exists! (x_i)_{i \in I} : f(b_j) = \sum_{i \in I} c_i x_{ij}$$

Sind $n = \dim V$ und $m = \dim W$ endlich, so kann man also f mithilfe der Basen $(b_j)_{j \in J}$ von V und $(c_i)_{i \in I}$ von W komplett durch die Tabelle der Koeffizienten beschreiben:

f	$f(b_1)$	$f(b_2)$	$\ldots$	$f(b_j)$	$\ldots$	$f(b_n)$
c_1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1j}	$\ldots$	x_{1n}
c_2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2j}	$\ldots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_i	x_{i1}	x_{i2}	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$	x_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mj}	$\ldots$	x_{mn}

Dabei spielt es prinzipiell keine Rolle, ob die Bilder $f(b_j)$ der Basisvektoren in den Spalten stehen (wie oben) oder in den Zeilen der Tabelle – es ist aber wichtig, dass dies konsistent gemacht wird.

In dieser LVA: Bilder $f(b_j)$ der Basisvektoren werden durch Spalten beschrieben.

3.1.1 Definition

Eine *Matrix* $X \in K^{m\times n}$ ist eine Tabelle von Elementen $x_{ij} \in K$ mit m Zeilen und n Spalten:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Die *(Darstellungs-)Matrix* eines $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bzgl. Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ von V bzw. W, ist die Matrix

$$X = \xi_B^C(f) \in K^{m\times n} \text{ mit } \forall j = 1, \dots, n : f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}.$$

Bemerkung Mit $I := \{1, \dots, m\}$ und $J := \{1, \dots, n\}$ kann eine Matrix auch als Abbildung aufgefasst werden

$$X = (x_{ij})_{i\in I, j\in J} \quad \text{bzw.} \quad X : I \times J \to K,\ (i, j) \mapsto x_{ij}.$$

Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und sind $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ Basen von V bzw. W, so sind

$$x_{ij} = c_i^*(f(b_j))$$

die Komponenten der Darstellungsmatrix $\xi_B^C(f)$ von f bzgl. der Basen B und C mit der zu C dualen Basis $C^* = (c_1^*, \dots c_m^*)$ von W^*.
Mit der zu B dualen Basis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ von V^* ist dann auch

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i x_{ij} b_j^*.$$

3.1.2 Lemma

Mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf $K^{m\times n}$,

$$(x_{ij}) + (y_{ij}) := (x_{ij} + y_{ij}) \text{ und } (x_{ij}) \cdot z := (x_{ij} \cdot z),$$

wird $K^{m\times n}$ ein Vektorraum und man erhält einen Isomorphismus zu Basen B und C von V bzw. W.

$$\xi_B^C : \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{m\times n},\ f \mapsto \xi_B^C(f).$$

Bemerkung Die komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation sind gerade die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen als Abbildungen.

Beweis Dass $\mathrm{Hom}(V,W)$ und $K^{m\times n}$ K-VR sind, ist bekannt (vgl. Kap. 1.4 bzw. Kap. 1.1). Die Linearität von ξ_B^C folgt direkt, da mit der zu C dualen Basis C^* von W^*

$$\forall_{i=1,\dots,m}\forall_{j=1,\dots,n} : x_{ij} = c_i^*(f(b_j)).$$

Nämlich: für $f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $x,y \in K$ ist dann

$$\begin{aligned}\forall_{i=1,\dots,m}\forall_{j=1,\dots,n} : c_i^*((fx+gy)(b_j)) &= c_i^*(f(b_j)x + g(b_j)y) \\ &= c_i^*(f(b_j))x + c_i^*(g(b_j))y.\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$K^{m\times n} \ni X = (x_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i x_{ij} b_j^* = f \in \mathrm{Hom}(V,W)$$

liefert die Inverse von $f \mapsto \xi_B^C(f)$, also ist ξ_B^C ein Isomorphismus.

Bemerkung Damit folgt (vgl. Kap. 1.4): $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim K^{m\times n} = m \cdot n$.

3.1.3 Lemma & Definition

Sind U,V,W K-VR mit Basen $A = (a_1,\dots,a_p)$, $B = (b_1,\dots,b_n)$, $C = (c_1,\dots,c_m)$, so gilt für $g \in \mathrm{Hom}(U,V)$ und $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$\xi_A^C(f \circ g) = \xi_B^C(f) \cdot \xi_A^B(g),$$

wobei die *Matrixmultiplikation*

$$\cdot : K^{m\times n} \times K^{n\times p} \to K^{m\times p},\ (X,Y) \mapsto X \cdot Y = Z$$

definiert ist durch

$$z_{ik} := \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{jk}.$$

Bemerkung Das Element z_{ik} in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $Z = XY$ wird also aus der i-ten Zeile von X und der k-ten Spalte von Y berechnet.

$$\begin{pmatrix} & & \\ x_{i1} & \dots & x_{in} \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & y_{1k} & \\ & \vdots & \\ & y_{nk} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & z_{ik} & \\ & & \end{pmatrix}$$

Beweis Wir verwenden die Darstellungsmatrizen

$$\begin{cases} X = \xi_B^C(f) \in K^{m\times n} & \text{von } f \in \operatorname{Hom}(V,W) \\ Y = \xi_A^B(g) \in K^{n\times p} & \text{von } g \in \operatorname{Hom}(U,V) \end{cases}$$

bezüglich B und C bzw. A und B, dann gilt für $k = 1, \dots, p$

$$(f \circ g)(a_k) = f\Big(\sum_{j=1}^n b_j y_{jk}\Big) = \sum_{j=1}^n f(b_j) y_{jk} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} y_{jk} = \sum_{i=1}^m c_i \Big(\sum_{j=1}^n x_{ij} y_{jk}\Big),$$

d.h. durch $I = \{1, \dots, m\},\ J = \{1, \dots, n\},\ K = \{1, \dots, p\}$ und

$$\xi_A^C(f \circ g) = Z = (z_{ik})_{i\in I, k\in K} \quad \text{mit} \quad \forall i \in I\ \forall k \in K : z_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{jk}$$

erhält man die Darstellungsmatrix

$$\xi_A^C(f \circ g) = \xi_B^C(f)\xi_A^B(g)$$

der Komposition als Produkt der Darstellungsmatrizen von f und g.

3.1.4 Notation & Definition

Wir notieren die definierende Gleichung einer Darstellungsmatrix $X = \xi_B^C(f)$ von $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ auch in Kurzform

$$CX = (c_1, \dots, c_m)X = (f(b_1), \dots, f(b_n)) = f(B).$$

Für die *Koordinatenspalte eines Vektors*

$$Y \in K^{n\times 1} \text{ mit } v = \sum_{j=1}^n b_j y_{j1}$$

ist dann

$$f(v) = (f(b_1), \dots, f(b_n))Y = (c_1, \dots, c_m)XY.$$

Die Familien $(c_1, \dots, c_m)$ und $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ sind keine Matrizen, denn die Elemente sind Vektoren!

Bemerkung Wir schreiben die Skalarmultiplikation als Rechts-Multiplikation.

Beispiel Die neue Notation liefert einen alternativen „Beweis“ für $\xi_A^C(f \circ g) = \xi_B^C(f)\xi_A^B(g)$:

Gilt für jeden Vektor $a_k,\ k = 1, \dots, p$

$$g(a_k) = \sum_{j=1}^{n} b_j y_{jk}, \text{ wobei } Y = \xi_A^B(g)$$

so erhalten wir

$$(f(g(a_1)), \dots, f(g(a_p))) = (f(b_1), \dots, f(b_n))Y = (c_1, \dots, c_m)\xi_B^C(f) \cdot Y = C \cdot XY$$

womit nun

$$(f \circ g)(A) = C \cdot XY,$$

also

$$\xi_A^C(f \circ g) = X \cdot Y = \xi_B^C(f) \cdot \xi_A^B(g).$$

Einfacher (aber weniger überzeugend) ist die folgende, die Linearität von f benutzende Version:

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(BY) = f(B) \cdot Y = C \cdot XY$$

Bemerkung Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $r := \operatorname{rg} f$, dann existieren Basen B und C von V bzw. W, sodass

$$\xi_B^C(f) = X \text{ mit } x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \leq r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$X = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

Nämlich – wie im Beweis des Rangsatzes: Die Basen B und C werden so gewählt, dass

(i) $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ Basis von $\ker f$ ist, und dann

(ii) $c_i := f(b_i)$ für $i = 1, \dots, r$ eine Basis von $f(V)$ liefert.

Offenbar hat $\xi_B^C(f)$ dann die gewünschte Form:

$$f(b_1) = c_1, \dots, f(b_r) = c_r, f(b_{r+1}) = 0, \dots, f(b_n) = 0,$$

d.h.

$$f(B) = (f(b_1), \dots, f(b_n)) = (c_1, \dots, c_m) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) = CX.$$

Umgekehrt: gibt es eine Darstellungmatrix von f dieser Form, so ist $\operatorname{rg} f = r$.

3.1.5 Beispiel & Definition

Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V, so hat der Isomorphismus

$$\phi : V \to K^n \text{ mit } \forall j = 1, \dots, n : \phi(b_j) = e_j$$

bezüglich B und der Standardbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ von K^n die *n-reihige Einheitsmatrix* als Darstellungsmatrix:

$$\xi_B^E(\phi) = E_n := (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

Beispiel Sind $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ Basen von V, wobei

$$\forall j = 1, \dots, n : b_j = \sum_{i=1}^{n} b'_i x_{ij},$$

so hat die Identität id_V die Darstellungsmatrix

$$\xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = X = (x_{ij})_{i,j=1\dots,n}.$$

Sind dann B und B' Basen von V und C und C' Basen von W, so erhält man für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ die Transformationsformel

$$\xi_{B'}^{C'}(f) = \xi_{B'}^{C'}(\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V) = \xi_C^{C'}(\mathrm{id}_W) \cdot \xi_B^C(f) \cdot \xi_{B'}^B(\mathrm{id}_V)$$

3.1.6 Beispiel & Definition

Ist $f \in \mathrm{Iso}(V, W)$ mit Basen B und C von V bzw. W, so gilt (mit $n = \dim V = \dim W$)

$$\xi_C^B(f^{-1}) \cdot \xi_B^C(f) = \xi_B^B(f^{-1} \circ f) = \xi_B^B(\mathrm{id}_V) = E_n$$

und

$$\xi_B^C(f) \cdot \xi_C^B(f^{-1}) = \xi_C^C(f \circ f^{-1}) = \xi_C^C(\mathrm{id}_W) = E_n.$$

Eine Matrix $X \in K^{n\times n}$ nennt man invertierbar mit Inverser X^{-1}, falls

$$\exists X^{-1} \in K^{n\times n} : X^{-1}X = E_n$$

Damit ist die Darstellungsmatrix der Inversen die Inverse der Darstellungsmatrix:

$$\xi_C^B(f^{-1}) = (\xi_B^C(f))^{-1}$$

3.1.7 Bemerkung & Definition

Jedes $X \in K^{m\times n}$ liefert (eindeutig) $f_X \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ nach Fortsetzungssatz via

$$f_X : K^n \to K^m,\ f_X(e_j) = \sum_{i=1}^{m} e'_i x_{ij} \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Bezüglich der Standardbasen $E = (e_1, \ldots, e_n)$ von K^n und $E' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ von K^m ist dann

$$\xi_E^{E'}(f_X) = X.$$

Damit definiert man den Rang einer Matrix $X \in K^{m\times n}$ als

$$\mathrm{rg}\, X := \mathrm{rg}\, f_X$$

Eine Matrix $X \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{rg}\, X = n$. Man setzt

$$\mathrm{Gl}(n) := \{X \in K^{n\times n} \mid \mathrm{rg}\, X = n\}.$$

3.1.8 Bemerkung & Definition

Nach der Transformationsformel für Darstellungsmatrizen gilt bei Basiswechseln in V und W für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$\xi_{B'}^{C'}(f) = \xi_C^{C'}(\mathrm{id}_W) \cdot \xi_B^C(f) \cdot \xi_{B'}^B(\mathrm{id}_V).$$

Dabei sind $\xi_{B'}^B(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{Gl}(n)$ und $\xi_C^{C'}(\mathrm{id}_W) \in \mathrm{Gl}(m)$ invertierbar, da etwa

$$\xi_{B'}^B(\mathrm{id}_V) \cdot \xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = \xi_B^B(\mathrm{id}_V) = E_n;$$

Sind andererseits die Basis B und $P \in \mathrm{Gl}(n)$ gegeben, so ist

$$\xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = P^{-1} \text{ für } B' := BP,$$

d.h. jedes $P \in \mathrm{Gl}(n)$ realisiert einen Basiswechsel in V, kommt also in der Transformationsformel vor.

Daher definiert man auch Matrizen $X, X' \in K^{m\times n}$ als *äquivalent*,

$$X \sim X', \quad \text{falls } \exists P \in \mathrm{Gl}(n) \exists Q \in \mathrm{Gl}(m) : X' = QXP^{-1}.$$

3.2 Lineare Gleichungssysteme

Mission: Viele Probleme in Anwendungen oder Naturwissenschaften werden zu „linearen Problemen“ reduziert, d.h. auf lineare Gleichungssysteme unterschiedlicher Komplexität. Diese Reduktion ist etwa eine wichtige Aufgabe der Analysis; Aufgabe der linearen Algebra ist dann die Lösung bzw. Strukturanalyse der linearen Gleichungssysteme.

3.2.1 Definition

Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) ist ein System von m Gleichungen

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = y_m \end{array} \tag{$\star\star$}$$

für n Unbekannte $x_1, \dots, x_n \in K$, wobei die Parameter $a_{ij}, y_i \in K$ gegeben sind. Ist $y_1 = \dots = y_m = 0$, so heißt das System *homogen*, anderenfalls *inhomogen*.

Bemerkung Mit Matrizen $A \in K^{m\times n}, X \in K^{n\times 1}$ und $Y \in K^{m\times 1}$ lässt sich ein lineares Gleichungssystem kompakter schreiben als

$$AX = Y \tag{$\star$}$$

Die Standardbasen E und E' von K^n bzw. K^m liefern den Isomorphismus

$$K^{m\times n} \ni A \mapsto f_A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m), \text{ wobei } f_A(E) = E'A,$$

damit lässt sich ($\star$) umformulieren als Gleichung eines affinen Unterraumes von K^n :

$$f_A(x) = y \text{ mit } x = EX \text{ und } y = E'Y.$$

Nämlich: Existiert eine Lösung $x \in f_A^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, so ist der Lösungsraum

$$f_A^{-1}(\{y\}) = x + \ker f_A \subset K^n$$

ein affiner Unterraum.

Das nächste Lemma folgt dann mit dem Basisisomorphismus:

$$K^{n\times 1} \ni X \mapsto EX =: x \in K^n$$

3.2.2 Definition & Lemma

Der *Lösungsraum* $L_{A,Y}$ eines linearen Gleichungssystems,

$$L_{A,Y} := \{X \in K^{n\times 1} \mid AX = Y\} \subset K^{n\times 1}$$

ist leer oder ein affiner Unterraum der Dimension $k = n - \operatorname{rg} A$.

Ist $Y = 0$, so gilt $0 \in L_{A,Y}$ und $L_{A,Y} \subset K^{n\times 1}$ ist ein linearer Unterraum (UVR).

Bemerkung Jede Lösung X_l eines (inhomogenen) LGS $AX = Y$ lässt sich schreiben als Summe einer *Partikulärlösung* $X_0 \in K^{n\times 1}, AX_0 = Y$, und einer Lösung V des homogenen LGS $AX = 0$:

$$\forall X_l \in L_{A,Y} \exists V \in L_{A,0} : X_l = X_0 + V = \tau_V(X_0)$$

Bemerkung Der Lösungsraum eines „unendlichen linearen Gleichungssystems“ hat die gleiche Struktur eines affinen Unterraums wie im endlichen Fall, z.B.:

$$\{x \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} : x''(t) = t^2\}$$

ist ein (2-dim) AUR, des unendlich-dim. R-VR C^∞, wobei $C^\infty(\mathbb{R})$ den (Vektor-)Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ notiert.

3.2.3 Bemerkung & Definition

Ist $AX = Y \neq 0$ ein inhomogenes LGS, so gilt

$$L_{A,Y} = \emptyset \Leftrightarrow y \notin f_A(K^n)$$

mit der *erweiterten Koeffizientenmatrix*

$$(A \mid Y) \in K^{m\times(n+1)}$$

lässt sich dies formulieren als

$$f_{(A|Y)}(K^{n+1}) \neq f_A(K^n) \Leftrightarrow \operatorname{rg} f_{(A|Y)} \neq \operatorname{rg} f_A \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A \mid Y) \neq \operatorname{rg} A.$$

Folglich ist

$$L_{A,Y} \neq \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A \mid Y) = \operatorname{rg} A$$

3.2.4 Bemerkung & Definition, Gaußsches Eliminationsverfahren

Eine Idee zur Lösung eines LGS ist, das Gleichungssystem zu „vereinfachen“, ohne dabei den Lösungsraum zu verändern: Man nennt zwei LGS $AX = Y$ und $A'X = Y'$ *äquivalent*, wenn sie den gleichen Lösungsraum haben,

$$(AX = Y) \sim (A'X = Y') :\Leftrightarrow L_{A,Y} = L_{A',Y'}$$

*Links*multiplikation der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid Y)$ mit den folgenden Matrizen (mit $i \neq j$) liefert z.B. äquivalente Systeme:

$D_i = (d_{kl}) \in \mathrm{Gl}(m), \qquad d_{kl} := \delta_{kl} + (d-1)\delta_{ik}\delta_{il} \quad (d \in K^x)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$T_{ij} = (t_{kl}) \in \mathrm{Gl}(m), \qquad t_{kl} := \delta_{kl} - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(\delta_{il} - \delta_{jl})$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & \dots & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \vdots \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$S_{ij} = (s_{kl}) \in \mathrm{Gl}(m), \qquad s_{kl} := \delta_{kl} + s\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (s \in K)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & s & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die entsprechenden Operationen auf dem LGS werden als *elementare Zeilenoperationen/-umformungen* bezeichnet (elZumf) bezeichnet:

- $(A \mid Y) \to D_i(A \mid Y)$, Multiplikation der i-ten Gleichung mit $d \neq 0$;

- $(A \mid Y) \to T_{ij}(A \mid Y)$, Vertauschung der i-ten und j-ten Gleichung;
- $(A \mid Y) \to S_{ij}(A \mid Y)$, Addition des s-fachen der j-ten Gleichung zur i-ten Gleichung.

Da $D_i, T_{ij}, S_{ij} \in \mathrm{Gl}(m)$, sind die elementaren Zeilenumformungen reversibel, verändern daher den Lösungsraum nicht: für D_i und T_{ij} ist das klar; $S_{ij} = S_{ij}(s)$ ist invertierbar mit

$$(S_{ij})^{-1} = (S_{ij}(s))^{-1} = S_{ij}(-s).$$

Geometrisch ist S_{ij} Darstellungsmatrix einer Scherung.

Mit Hilfe der elementaren Zeilenumformungen kann man das LGS auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ a_{31} & \dots & a_{3n} & y_3 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elZUmf}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & y_1' \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & y_2' \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & y_r' \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & y_{r+1}' \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & y_m' \end{pmatrix}$$

Ein System in Zeilenstufenform kann dann einfach gelöst werden – oder auch nicht, falls eine Gleichung $0 = y' \neq 0$ auftaucht.

Beispiel Wir betrachten das LGS $AX = Y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Elementare Zeilenumformungen liefern dann:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 2 & 5 & 8 & y_3 \end{pmatrix} &\overset{T_{12}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 2 & 5 & 8 & y_3 \end{pmatrix} \\ &\overset{S_{31}(-2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 0 & -3 & -6 & y_3 - 2y_2 \end{pmatrix} \\ &\overset{S_{32}(1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 + y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\overset{D_2(\frac{1}{3})}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 1 & 2 & y_1\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 \end{pmatrix}$$

d.h. ein äquivalentes LGS $A'X = Y'$ ist gefunden mit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1\frac{1}{3} \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Das LGS $AX = Y$ ist also genau dann lösbar, wenn $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$; in diesem Falle ist dann

$$L_{A,Y} = \{X = \begin{pmatrix} y_2 - 7t - 4(-2t + \frac{1}{3}y_1) \\ -2t + \frac{1}{3}y_1 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\} = \{X = \begin{pmatrix} t - \frac{4}{3}y_1 + y_2 \\ -2t + \frac{1}{3}y_1 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$$

Historische Bemerkung Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist schon seit ca. 2000 Jahren bekannt, also schon lange vor Gauß (1777-1855) entwickelt worden.

Nutzen der Methode

- lässt sich einfach programmieren (leider ggf. numerisch instabil)
- nützlich für mittelgroße Systeme (tausende Gleichungen)
- nicht effizient für große Systeme (Millionen von Gleichungen)

Bemerkung Mehrere LGS $AX = Y_1, AX = Y_2, \ldots AX = Y_k$ mit derselben Koeffizientenmatrix A können simultan gelöst werden, indem man elementare Zeilenumformungen auf die um alle Y erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid Y_1 \mid Y_2 \mid \cdots \mid Y_k)$ anwendet.

Bemerkung Das Gaußsche Eliminationsverfahren kann zur Bestimmung der Inversen einer Matrix $A \in \mathrm{Gl}(n)$ verwendet werden. Insbesondere ist eine *untere Dreiecksmatrix* $A \in K^{n\times n}$, d.h $a_{ij} = 0$ für $i < j$ genau dann invertierbar, wenn $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

4 Volumenmessung

Grundlegende Idee: Wir definieren ein Spat- oder Parallelotop-Volumen.

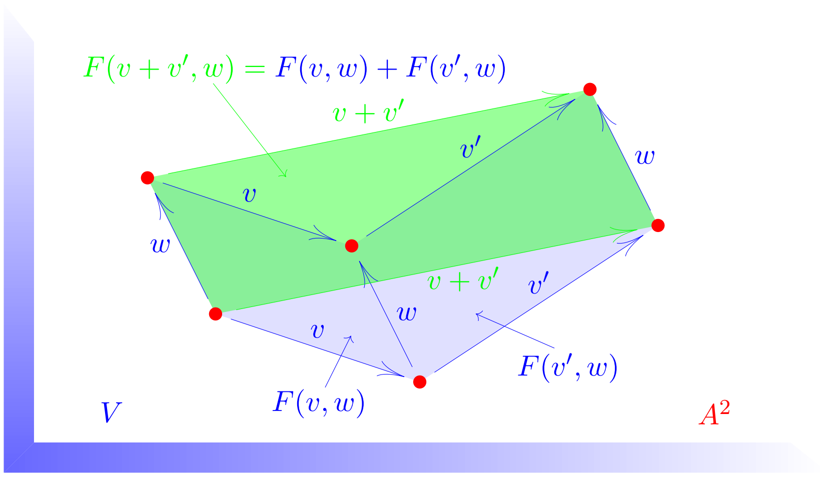
Algebraisch: Dieses Volumen kann dann benutzt werden, um zu testen, wann ein Spat/Parallelotop „zusammenklappt“.

4.1 Determinantenformen

Idee: Für den Flächeninhalt $F(v, w)$ eines von zwei Vektoren $v, w \in V$ aufgespannten Parallelogramms gilt

$$F(vx, w) = F(v, w) \cdot x$$
$$F(v + v', w) = F(v, w) + F(v', w)$$

und entsprechend für das zweite Argument.



Außerdem verschwindet der Flächeninhalt, wenn das Parallelogramm „zusammenklappt“, also insbesondere gilt

$$w = v \Rightarrow F(v, w) = 0$$

Die folgende Definition verallgemeinert diese Eigenschaften:

4.1.1 Definition

Sei V ein K-VR. Eine Abbildung $\omega : V^m \to K$ heißt

- *m-linear*, bzw. eine *m-(Linear-)Form*, falls ω in jedem Argument linear ist, d.h.

$$\forall i = 1, \dots, m : V \ni v_i \mapsto \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m) \in K$$

  ist linear;

- *alternierend*, falls $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$ wann immer zwei Vektoren gleich sind, d.h.

$$v_i = v_j \text{ für } i \neq j \Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_m) = 0.$$

Die Menge der alternierenden m-Formen wird mit $\Lambda^m V^*$ bezeichnet. Ist $\dim V = n$, so heißt ein $\omega \in \Lambda^n V^*$ auch *Determinantenform.*

Beispiel Jede Linearform $\omega \in V^*$ ist eine (alternierende) 1-Form, $\Lambda^1 V^* = V^*$.

Bemerkung $\Lambda^m V^*$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ selbst ein K-VR.

4.1.2 Lemma

Für eine alternierende m-Form $\omega \in \Lambda^m V^*$ und $i \neq j$ gilt:

(i) $\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$;

(ii) $\omega(\dots, v_i, \dots, v_i s + v_j, \dots) = \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)$ für $s \in K$ [1];

(iii) $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$, falls $(v_i)_{i \in \{1,\dots,m\}}$ linear abhängig ist.

Beweis Seien $v_1, \dots, v_m \in V$ und $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) \\ &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \\ &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i s, \dots) \\ &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i s + v_j - v_j, \dots) \\ &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i s + v_j, \dots) - \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) \end{aligned}$$

[1] Geometrisch entspricht dies einer Scherung!

Dies beweist (i) und (ii).

Ist die Familie $(v_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ linear abhängig, o.B.d.A

$$v_m = \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_i \in [(v_i)_{i\in\{1,\dots,m-1\}}]$$

so gilt

$$\begin{aligned}\omega(v_1,\dots,v_m) &= \omega(v_1,\dots,v_{m-1},\sum_{i=1}^{m-1} v_i x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{\omega(v_1,\dots,v_{m-1},v_i)}_{0} x_i = 0\end{aligned}$$

womit (iii) bewiesen ist.

Bemerkung (i) liefert eine äquivalente Formulierung von „alternierend“ für m-Linearformen, wenn $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Nämlich: sind $v_1,\dots,v_m \in V$ mit $v_i = v_j$ für $i \neq j$, so gilt

$$\begin{aligned}0 &= \omega(\dots,v_i\dots,v_j,\dots) + \omega(\dots,v_j,\dots,v_i,\dots)\\ &= 2\omega(\dots,v_i,\dots,v_j,\dots)\\ \Rightarrow 0 &= \omega(\dots,v_i,\dots,v_j,\dots)\end{aligned}$$

Buchhaltung Benutzt man (vgl. Gausssches Eliminationsverfahren) die Elementarmatrizen

$$\begin{aligned}D_i = (d_{kl}) \in \mathrm{Gl}(m);\ d_{kl} &= \delta_{kl} + (d-1)\delta_{ik}\delta_{il} \quad (d \in K^\times);\\ T_{ij} = (t_{kl}) \in \mathrm{Gl}(m);\ t_{kl} &= \delta_{kl} - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(\delta_{il} - \delta_{jl});\\ S_{ij} = (s_{kl}) \in \mathrm{Gl}(m);\ s_{kl} &= \delta_{kl} + s\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (s \in K)\end{aligned}$$

und beschreibt man eine Familie $(v_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ von Vektoren $v_i \in V$ durch ein m-*Tupel* $A = (v_1,\dots,v_m)$ von Werten der Familie, so lassen sich die *Homogenität* und Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas einfach schreiben als

$$\omega(AD_i) = \omega(A)d,\ \omega(AT_{ij}) = -\omega(A),\ \omega(AS_{ij}(s)) = \omega(A)$$

4.1.3 Wiederholung & Definition

Die bijektiven Abbildungen (Permutationen)

$$\sigma : I \to I,\ i \mapsto \sigma(i),\ \text{der Menge } I = \{1,\dots,m\}$$

bilden eine Gruppe (mit der Komposition als Verknüpfung), die Permutationsgruppe S_m der Menge I. Eine *Transposition* $\tau_{ij} \in S_m, i \neq j$ ist eine Permutation, die zwei Indizes vertauscht,

$$\tau_{ij} : I \to I,\ k \mapsto \tau_{ij}(k) := \begin{cases} j, & \text{falls } k = i, \\ i, & \text{falls } k = j, \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede Permutation ist eine Komposition von Transpositionen, wie man leicht durch Induktion über m zeigt:

Ist $\sigma(m) = i < m$, so ist $\tau_{im} \circ \sigma$ eine Permutation, die m fixiert, also

$$\tau_{im} \circ \sigma \mid_{\{1,\ldots,m-1\}} \in S_{m-1}$$

Bemerkung Die Eigenschaft (i) des Lemmas, $\omega(AT_{ij}) = -\omega(A)$, lässt sich mit τ_{ij} dann formulieren als

$$\omega(v_{\tau_{ij}(1)}, \ldots, v_{\tau_{ij}(m)}) = -\omega(v_1, \ldots, v_m)$$

Da jede Permutation $\sigma \in S_m$ Komposition von Transpositionen ist, folgt

$$\forall \sigma \in S_m : \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \pm\omega(v_1, \ldots, v_m).$$

Frage: Was ist das Vorzeichen bzw. wie kann man es berechnen?

4.1.4 Lemma & Definition

Das Signum einer Permutation $\sigma \in S_m$ ist die Zahl

$$\operatorname{sgn} \sigma := \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{\pm 1\};$$

ist $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, so heißt σ gerade, sonst ungerade. Signum liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{sgn} : S_m \to (\{\pm 1\}, \cdot).$$

Beispiel Eine Transposition τ_{ij} ist eine ungerade Permutation, da

$$\operatorname{sgn} \tau_{ij} = \prod_{k<l} \frac{\tau_{ij}(k) - \tau_{ij}(l)}{k - l} = \frac{j - i}{i - j} \prod_{k \neq i,j} \frac{i - k}{j - k} \frac{j - k}{i - k} = -1$$

Beweis Seien $\sigma, \tau \in S_m$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \cdot \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}\end{aligned}$$

Setze $i' := \sigma(i), j' := \sigma(j)$

$$\begin{aligned}&= \prod_{i'<j'} \frac{\tau(i') - \tau(j')}{i' - j'} \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).\end{aligned}$$

Da jede Permutation Komposition von Transpositionen ist, folgt daraus

$$\forall \sigma \in S_m : \operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$$

und dass

$$\operatorname{sgn} : S_m \to (\{\pm 1\}, \cdot)$$

Gruppenhomomorphismus ist.

Bemerkung Damit folgt für $\omega \in \Lambda^m V^*$ und $\sigma \in S_m$

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \omega(v_1, \dots, v_m) \operatorname{sgn} \sigma.$$

4.1.5 Leibniz-Formel

Seien $\omega \in \Lambda^m V^*$, $(b_i)_{i \in \{1,\dots,m\}}$ linear unabhängig und $(v_j)_{j \in \{1,\dots,m\}}$ eine Familie in $[(b_i)_{i \in \{1,\dots,m\}}] \subset V$,

$$\forall j = 1, \dots, m : v_j = \sum_{i=1}^{m} b_i x_{ij}$$

dann gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \omega(b_1, \dots, b_m) \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m}$$

Beweis Ausmultiplizieren ergibt:

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_m=1}^{m} \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_m}) x_{i_1 1} \cdots x_{i_m m}$$

Es gilt: $\omega(\dots) = 0$, wenn zwei b's gleich sind, d.h. wann immer $\{1, \dots, m\} \ni j \mapsto i_j \in \{1, \dots, m\}$ nicht injektiv ist, also keine Permutation ist.

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_m} \omega(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(m)}) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m} \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \omega(b_1, \dots, b_m) \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m} \end{aligned}$$

Beispiel Ist die *Koeffizientenmatrix* $x = (x_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,m\}}$ in der Leibniz-Formel eine obere Dreiecksmatrix, d.h.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1m} \\ 0 & x_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \forall j = 1, \dots, m : v_j = \sum_{i=1}^{j} b_i x_{ij}$$

so gilt für jede Permutation $\sigma \in S_m$ von $I = \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} x_{\sigma(1)1}, \dots, x_{\sigma(m)m} \neq 0 &\Rightarrow \forall j \in I : \sigma(j) \leq j \\ &\Rightarrow \sigma = \mathrm{id}_I \end{aligned}$$

und damit

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \omega(b_1, \dots, b_m) x_{11} \cdots x_{mm}.$$

4.1.6 Buchhaltung

Mit

$$A := (v_1, \dots, v_m) = \underbrace{(b_1, \dots, b_m)}_{:=B} X = BX$$

und der *Determinante*

$$\det X := \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m}$$

der Koeffizientenmatrix $X \in K^{m \times m}$ lässt sich die Leibniz-Formel auch kürzer schreiben als

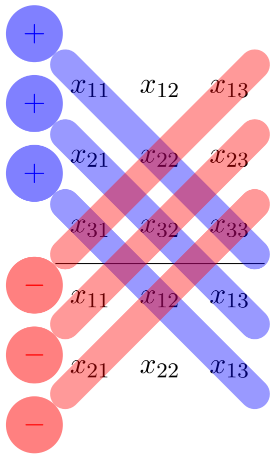
$$\omega(A) = \omega(B) \cdot \det X.$$

Für $m = 2$ und $m = 3$ lässt sich $\det X$ einfach berechnen:

- für $m = 2$ ist
$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$

- für $m = 3$ mit Hilfe der *Regel von Sarrus* (zuerst zyklische (gerade) Permutationen, dann mit einem Fixpunkt, also Transpositionen $\tau_{1,3}, \tau_{1,2}, \tau_{2,3}$)

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{r} x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23} \\ -x_{31}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23} \end{array}$$



Für $m > 3$ liefert der Laplacesche Entwicklungssatz eine Methode, die Terme (Permutationen) zu sortieren: Für fest gewähltes $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt[2]

$$\det X = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} x_{ij} \det X_{ij}$$

mit[3]

$$X_{ij} := (x_{kl})_{\substack{k \neq i \\ l \neq j}} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(j-1)} & x_{1j} & x_{1(j+1)} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ x_{(i-1)1} & & & \vdots & & & x_{(i-1)m} \\ x_{i1} & \cdots & \cdots & x_{ij} & \cdots & \cdots & x_{im} \\ x_{(i+1)1} & & & \vdots & & & x_{(i+1)m} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & & & x_{mj} & & & x_{mm} \end{pmatrix}$$

Nämlich: Ist o.B.d.A. $v_m = b_i$ in der Leibniz-Formel, also $x_{km} = \delta_{ik}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \det X &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big(\prod_{j=1}^{m-1} x_{\sigma(j)j} \Big) x_{\sigma(m)m} \end{aligned}$$

[2] Entwicklung nach j-ter Spalte

[3] Die i-te Zeile und die j-te Spalte sind in dieser Matrix „gestrichen", d.h. die Matrix ist aus $K^{(m-1)\times(m-1)}$

nach Voraussetzung gilt: $x_{\sigma(m)m} = 0$ für $\sigma(m) \neq i$ und $x_{\sigma(m)m} = 1$ für $\sigma(m) = i$,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ \sigma(m)=i}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{m-1} x_{\sigma(j)j} \\
&= \sum_{\sigma' \in S_{m-1}} (-1)^{m-i} \operatorname{sgn}(\sigma') \prod_{j=1}^{m-1} x_{\sigma'(j)j} \\
&= (-1)^{m-i} \det X_{im}.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt werden die Transpositionen berücksichtigt die notwendig sind, um die nun „gestrichene“ i-te Zeile ans Ende zu verschieben.

Ausmultiplizieren des o.B.d.A. m-ten Eintrags in einer alternierenden m-Form $\omega \in \Lambda^m V^*$ liefert also

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \ldots, v_m) &= \sum_{i=1}^{m} \omega(v_1, \ldots, v_{m-1}, b_i) x_{im} \\
&= \omega(b_1, \ldots, b_m) \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-1} x_{im} \det X_{im}
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung, da $\omega(b_1, \ldots, b_m) \neq 0$ angenommen werden kann (siehe unten).

Da wegen $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}(\sigma))^{-1} = \operatorname{sgn}(\sigma)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{m} x_{j\sigma(j)} &= = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{m} x_{\sigma^{-1}(j)j} \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)j} \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)j}
\end{aligned}$$

gleicht die Determinante einer Matrix X der ihrer *Transponierten*:

$$\det X^t = \det X \quad \text{mit} \quad X^t := (x_{ji})_{i,j \in \{i, \ldots, m\}}$$

Damit gilt der Laplacesche Entwicklungssatz auch für die Entwicklung nach einer Zeile von X, anstelle nach einer Spalte, wie oben.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von $\det X$ liefert das Gausssche Eliminationsverfahren (hier mit elementaren Spaltenumformungen; es wird von rechts multipliziert), da (vgl. oben)

$$\begin{aligned}
&\det X D_i = d \cdot \det X \Leftrightarrow \det D_i X^t = d \cdot \det X^t \\
&\det X T_{ij} = -\det X \Leftrightarrow T_{ij} X^t = -\det X^t \\
&\det X S_{ij} = \det X \Leftrightarrow S_{ij} X^t = \det X^t
\end{aligned}$$

Bemerkung Diese „Rechenmethoden“ sind von historischer Bedeutung, manchmal sind sie theoretisch praktisch, aber von beschränkter praktischer Bedeutung (seit man Computer hat).

4.1.7 Beispiel & Definition (Blockmatrix)

Für eine Blockmatrix

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$X_{11} \in K^{m \times m}, \ X_{12} \in K^{m \times n}, \ X_{22} \in K^{n \times n}$$

gilt

$$\det X = \det X_{11} \cdot \det X_{22}$$

Beweis in Übung.

4.1.8 Beispiel & Definition (Vandermonde-Determinante)

Für $x_1, \dots, x_k \in K$ hat die *Vandermonde-Matrix*

$$X = (x_i^{k-j})_{i,j \in \{1,\dots,k\}} = \begin{pmatrix} x_1^{k-1} & x_1^{k-2} & \cdots & x_1^0 \\ x_2^{k-1} & x_2^{k-2} & \cdots & x_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{k-1} & x_k^{k-2} & \cdots & x_k^0 \end{pmatrix} \in K^{k \times k}$$

die *(Vandermonde-)Determinante*:

$$\det X = \det (x_i^{k-j})_{i,j=1,\dots,k} = \prod_{i<j} x_i - x_j$$

Denn:

Für $k = 2$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

also ist die Induktionsvoraussetzung gegeben.

Für $k > 2$ gilt

$$
\begin{aligned}
&XS_{21}(-x_k)\cdots S_{k(k-1)}(-x_k)\\
&= \begin{pmatrix} x_1^{k-1} & \cdots & x_1 & 1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_k^{k-1} & \cdots & x_k & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -x_k & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0\\ & & -x_k & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} x_1^{k-1} - x_1^{k-2}x_k & x_1^{k-2} - x_1^{k-3}x_k & \cdots & x_1 - x_k & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_{k-1}^{k-1} - x_{k-1}^{k-2}x_k & x_{k-1}^{k-2} - x_{k-1}^{k-3}x_k & \cdots & x_{k-1} - x_k & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (x_1 - x_k)x_1^{k-2} & (x_1 - x_k)x_1^{k-3} & \cdots & x_1 - x_k & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-2} & (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-3} & \cdots & x_{k-1} - x_k & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

also ist (Laplacescher Entwicklungssatz nach letzter Zeile):

$$
\begin{aligned}
\det X &= 0 + (-1)^{k+k} \det \begin{pmatrix} (x_1 - x_k)x_1^{k-2} & (x_1 - x_k)x_1^{k-3} & \cdots & x_1 - x_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-2} & (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-3} & \cdots & x_{k-1} - x_k\end{pmatrix}\\
&= 1 \cdot (x_1 - x_k)\cdots(x_{k-1} - x_k) \det \begin{pmatrix} x_1^{k-2} & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ x_{k-1}^{k-2} & \cdots & 1\end{pmatrix}\\
&= (x_1 - x_k)\cdots(x_{k-1} - x_k) \prod_{\substack{i<j\\ i,j\in\{1,\dots,k-1\}}} (x_i - x_j)\\
&= \prod_{\substack{i<j\\ i,j\in\{1,\dots,k\}}} (x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

Also folgt die Behauptung mit Induktion.

4.1.9 Fortsetzungssatz für Determinantenformen

Ist $(b_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis von V (also $\dim V = n$) und $d \in K$, so gilt:

$$\exists!\omega \in \Lambda^n V^* : \omega(b_1, \dots, b_n) = d$$

Beweis Eindeutigkeit folgt aus der Leibniz-Formel und der Tatsache, dass $V = [(b_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}]$.

Existenz: Gegeben sind eine Basis $(b_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ von V und $d \in K$. Wir definieren ω durch die Leibniz-Formel:

$$\omega : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{n\text{-mal}} \to K,\ \omega(v_1, \dots, v_n) := d \cdot \det X$$

wobei $X \in K^{n\times n}$ die Koeffizientenmatrix für die Basisdarstellung der (v_i) ist,

$$(v_1, \dots, v_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot X.$$

Dann gilt:

- ω ist wohldefiniert, da $(b_i)_{i\in\{i,\dots,n\}}$ linear unabhängig ist, womit die Koeffizienten $x_{ij},\ i = 1, \dots, n$ für jedes $j = 1, \dots, n$ eindeutig sind.
- ω ist n-Form, d.h.
$$\forall j = 1, \dots, n : v_j \mapsto d \cdot \det X$$
ist linear; offensichtlich!
- ω ist alternierend, d.h.
$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ falls } v_i = v_j \text{ für } i \neq j;$$
ist aber $v_i = v_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$, so gilt:
$$\operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} + \operatorname{sgn}(\tau_{ij} \circ \sigma)x_{(\tau_{ij}\circ\sigma)(1)1} \cdots x_{(\tau_{ij}\circ\sigma)(n)n} = 0,$$
denn
$$\operatorname{sgn}(\tau_{ij} \circ \sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{und} \quad x_{(\tau_{ij}\circ\sigma)(1)1} \cdots x_{(\tau_{ij}\circ\sigma)(n)n} = x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}$$
da $v_i = v_j$.

  Damit folgt:
$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} = 0,$$
da mit $\sigma \in S_n$ auch $\tau_{ij} \circ \sigma \in S_n$ in der Summe vorkommt.

4.1.10 Korollar

Ist $\dim V = n$, so ist $\dim \Lambda^n V^* = 1$. Beweis in der Übung.

4.1.11 Korollar

Ist $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$ für eine Determinantenform $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$, so ist die Familie $(v_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ linear abhängig.

Beweis Ist $\omega \neq 0$, so existiert eine Basis $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ von V mit $\omega(b_1,\ldots,b_n) = d \neq 0$. Annahme: $(v_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ ist linear unabhängig, d.h. (v_i) ist Basis und damit existiert $Y \in K^{n\times n}$ mit

$$(b_1,\ldots,b_n) = (v_1,\ldots,v_n)Y,$$

nach Leibniz-Formel ist damit

$$0 \neq \omega(b_1,\ldots,b_n) = \omega(v_1,\ldots,v_n)\cdot \det Y.$$

Damit folgt

$$\omega(v_1,\ldots,v_n) \neq 0 \text{ (und } \det Y \neq 0)$$

Bemerkung Ist also $\dim V = n$ und sind $\omega \in \Lambda^n V^*$ und $(b_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Familie in V, so folgt aus zwei der folgenden Aussagen die dritte:

(i) $\omega \neq 0$

(ii) $\omega(b_1,\ldots,b_n) \neq 0$

(iii) $(b_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ ist Basis von V.

Bemerkung Weiter folgt damit: Sind $f \in \mathrm{End}(V)$, $(b_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ Basis von V und $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$, so gilt:

$$f \in \mathrm{Gl}(V) \Leftrightarrow \omega(f(b_1),\ldots,f(b_n)) \neq 0$$

bzw.

$$\mathrm{Gl}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \omega(f(b_1),\ldots,f(b_n)) \neq 0\}$$

4.2 Äquiaffine Geometrie

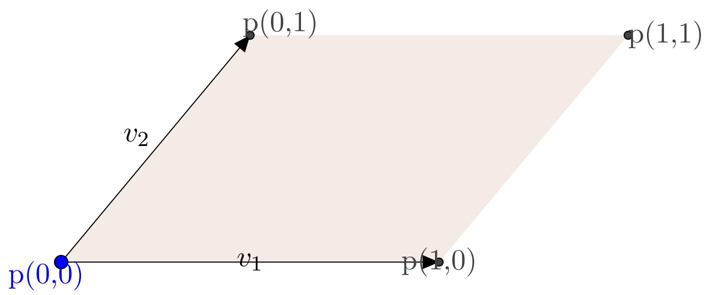
4.2.1 Definition

Seien (A, V, τ) ein n-dimensionaler affiner Raum und $p_0 \in A$; das von einer Familie $(v_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ in V aufgespannte *Parallelotop* oder *Spat* ist die (über dem *abstrakten Würfel* $\mathbb{Z}_2^n$ indizierte) Familie

$$p : \mathbb{Z}_2^n \to A,\ \epsilon \mapsto p_\epsilon := p_0 + \sum_{j=1}^{n} v_j \epsilon_j.$$

Ist $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$, so ist das zugehörige *(Spat-)Volumen* von $(p_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{Z}_2^n}$

$$\mathrm{vol}(p) := \omega(v_1,\ldots,v_n).$$



4.2.2 Bemerkung & Definition

Im Falle $n = 2$ heißt ein Parallelotop p auch *Parallelogramm*, sein Spatvolumen auch sein *Flächeninhalt*. Der Flächeninhalt ist *orientiert*: Mit

$$\epsilon = (\epsilon_j)_{j\in\{1,2\}} \cong (\epsilon_1, \epsilon_2)$$

und

$$v_1 = p_{(1,0)} - p_{(0,0)} \text{ und } v_2 = p_{(0,1)} - p_{(0,0)}$$

ändert der Flächeninhalt das Vorzeichen, wenn man die Kantenvektoren vertauscht:

$$\mathrm{vol}(p) = \omega(v_1, v_2) = -\omega(v_2, v_1) = \mathrm{vol}(p')$$

mit $p'_\epsilon = p_{\epsilon\circ\tau_{12}}$.

Bemerkung Für ein Dreieck $\{a, b, c\}$ wählt man eine Orientierung, e.g. (a, b, c), und setzt den Flächeninhalt

$$F(a, b, c) := \omega(b - a, c - a) \cdot \frac{1}{2}$$

d.h. als halben Flächeninhalt des Parallelogramms

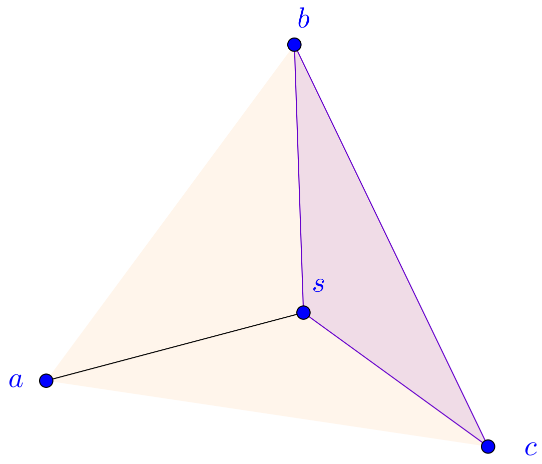
$$p_{(0,0)} := a,\ p_{(1,0)} := b,\ p_{(0,1)} := c \text{ und } p_{(1,1)} := a(-1) + b \cdot 1 + c \cdot 1.$$

Dieser Flächeninhalt ist wohldefiniert, d.h. er hängt nur vom Dreieck und der gewählten Orientierung ab – insbesondere ist für Permutationen σ von $\{a, b, c\}$ mit $\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$ der Flächeninhalt gleich dem ursprünglichen. (Siehe Aufgabe)

Bemerkung Ist A eine affine Ebene mit Flächenmessung vol und $\{a, b, c\}$ ein nicht-degeneriertes Dreieck, also ein baryzentrisches Bezugssystem, so gilt (vgl. Cramersche Regel)

$$\forall s \in A : s = a \cdot \frac{F(s, b, c)}{F(a, b, c)} + b \cdot \frac{F(a, s, c)}{F(a, b, c)} + c \cdot \frac{F(a, b, s)}{F(a, b, c)}$$

Diese Flächenformel für die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes s ist unabhängig von der (gewählten) Flächenmessung, da sich verschiedene Flächenmessungen nur um einen Faktor unterscheiden (der unabhängig vom Dreieck ist): $\dim \Lambda^2 V^* = 1$



4.2.3 Definition

Eine affine Abbildung $\alpha : A \to A'$ zwischen AR A und A' mit Volumenmessungen vol und vol$'$ heißt *volumentreu*, falls für alle Parallelotope p in A gilt

$$\mathrm{vol}'(\alpha \circ p) = \mathrm{vol}(p)$$

Eine *äquiaffine Transformation* ist eine volumentreue Affinität.

Bemerkung Ist $\alpha : A \to A'$ affin mit linearem Anteil $\lambda : V \to V'$ und p ein von einer Familie $(v_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ von Vektoren aufgespanntes Parallelotop in A, so ist

$$\begin{aligned} p' := \alpha \circ p : \mathbb{Z}_2^n \to A',\ \epsilon \mapsto p'_\epsilon &= \alpha(p_0) + \lambda\Big(\sum_{j=1}^n v_j \epsilon_j\Big) \\ &= \alpha(p_0) + \sum_{j=1}^n \lambda(v_j)\epsilon_j \end{aligned}$$

ein von der Familie $(\lambda(v))_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ von Vektoren in V' aufgespanntes Parallelotop in A'. Damit ist $\mathrm{vol}'(\alpha \circ p)$ ein sinnvoller Ausdruck, also der Begriff „volumentreu“ sinnvoll für affine Abbildungen.

Bemerkung Offenbar bilden die volumentreuen Affinitäten eine Gruppe: eine Untergruppe der affinen Gruppe (nach Untergruppenkriterium).

4.2.4 Äquiaffine Geometrie

Ist $(A, V, \tau, \mathrm{vol})$ ein mit einem Spatvolumen versehener Affiner Raum, so bestimmt die auf A operierende Gruppe der volumentreuen Affinitäten (der äquiaffinen Transformationen) eine *äquiaffine Geometrie.*

4.2.5 Bemerkung & Definition

Ist $\alpha : A \to A$ Affinität eines AR A mit Volumenmessung vol, so gibt es genau eine Zahl $\delta(\alpha) \in K^\times$, sodass für jedes Parallelotop p in A gilt

$$\mathrm{vol}(\alpha \circ p) = \delta(\alpha)\,\mathrm{vol}(p),$$

wobei $\delta(\alpha)$ die *Volumenverzerrung* genannt wird.

Die Volumenverzerrung $\delta(\alpha)$ hängt nur vom linearen Anteil $\lambda \in \mathrm{End}(V)$ ab: für ein von einer Basis $(v_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ von V aufgespanntes Parallelotop ist

$$\delta(\alpha) = \frac{\omega(\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_n))}{\omega(v_1, \dots, v_n)}$$

4.2.6 Definition

Seien $f \in \mathrm{End}(V)$, wobei $\dim V = n$, und $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\det f := \frac{f^*\omega}{\omega}$$

die *Determinante* von f, wobei

$$f^*\omega : V^n \to K,\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \omega(f(v_1), \dots, f(v_n)).$$

Bemerkung Offenbar ist $f^*\omega \in \Lambda^n V^*$; wegen $\dim \Lambda^n V^* = 1$ ist $\Lambda^n V^* = [\omega]$, d.h.

$$\exists! x \in K : f^*\omega = \omega \cdot x \quad ((\omega) \text{ ist Basis von } \Lambda^n V^*)$$

dieses x ist die Determinante von f, also $\det f = x$.

Alternativ: Die Abbildung

$$B \mapsto \frac{f^*\omega(B)}{\omega(B)} \in K$$

ist konstant ($\equiv x$, unabhängig von der Basis B).

Bemerkung Da $f^*(\omega x) = (f^*\omega)x$ für $x \in K$, liefert jedes $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ die gleiche Determinante $\det f$: die Determinante bzw. Volumenverzerrung ist unabhängig von der gewählten Volumenform $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$, d.h. der „Referenzvolumenmessung".

4.2.7 Determinantenmultiplikationssatz

Für $f, g \in \mathrm{End}(V)$ gilt
$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g.$$

Beweis Mit $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ berechnet man
$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega) = g^*(\omega \cdot \det f) = (g^*\omega) \det f = \omega \cdot \det g \cdot \det f$$

Wiederholung & Bemerkung Sind $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ und B eine Basis von V, so gilt
$$\mathrm{Gl}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid 0 \neq \omega(f(B)) = f^*\omega(B)\}.$$

Damit folgt also
$$\mathrm{Gl}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \det f \neq 0\}$$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt dann:

4.2.8 Korollar

$$\det : \mathrm{Gl}(V) \to (K^\times, \cdot)$$

ist Gruppenhomomorphismus.

4.2.9 Korollar & Definition

$$\det{}^{-1}(\{1\}) = \{f \in \mathrm{Gl}(V) \mid \det f = 1\} \subset \mathrm{Gl}(V)$$

liefert eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}(V)$, die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{Sl}(V) := \{f \in \mathrm{Gl}(V) \mid \det f = 1\}$$

Beweis Für $g \in \mathrm{Gl}(V)$ gilt nach DMS:

$$1 = \det \mathrm{id}_V = \det(g^{-1} \circ g) = \det g^{-1} \cdot \det g$$
$$\Rightarrow \det g^{-1} = (\det g)^{-1}$$

damit folgt

$$g \in \mathrm{Sl}(V) \Rightarrow g^{-1} \in \mathrm{Sl}(V),$$

also mit DMS

$$\forall f, g \in \mathrm{Sl}(V) : g^{-1} \circ f \in \mathrm{Sl}(V),$$

d.h. $\mathrm{Sl}(V) \subset \mathrm{Gl}(V)$ ist eine Untergruppe nach Untergruppenkriterium.

4.2.10 Korollar

Eine Affinität ist genau dann eine äquiaffine Transformation, wenn ihr linearer Anteil eine spezielle lineare Transformation ist.

Beweis Ist $\lambda \in \mathrm{End}(V)$ linearer Anteil der Affinität $\alpha : A \to A$ eines AR A über V, und ist p ein von einer Basis $B = (b_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ von V aufgespanntes Parallelotop, so gilt

$$(\alpha \circ p)_\epsilon = \alpha(p_0) + \sum_{j=1}^{n} \lambda(b_j)\epsilon_j,$$

also für eine durch $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ gegebene Volumenmessung

$$\frac{\mathrm{vol}(\alpha \circ p)}{\mathrm{vol}(p)} = \frac{\omega(\lambda(b_1), \ldots, \lambda(b_n))}{\omega(b_1, \ldots, b_n)} = \det \lambda,$$

d.h. α ist volumentreu genau dann, wenn $\lambda \in \mathrm{Sl}(V)$. ($\to$ vgl. Idee der Definition $\det f$)

Bemerkung Dies liefert einen alternativen Beweis, dass die äquiaffinen Transformationen eine Gruppe (Untergruppe der Affinitäten) bilden:

Der lineare Anteil einer Komposition von Affinitäten ist die Komposition ihrer linearen Anteile – und $\mathrm{Sl}(V)$ ist eine Gruppe (Untergruppe von $\mathrm{Gl}(V)$).

Beispiel Ist $\lambda = \mathrm{id}_V + w \cdot \psi$ mit $\psi \in V^*$ und $w \in \ker \psi$ linearer Anteil einer Scherung

$$\sigma : A \to A,\ o + v \mapsto \sigma(o + v) = o + \lambda(v),$$

wobei $w \cdot \psi \neq 0$, so wähle eine Basis $B = (b_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ von V mit

$$w = b_1 \text{ und } \ker \psi = [(b_j)_{j\in\{1,\ldots,n-1\}}].$$

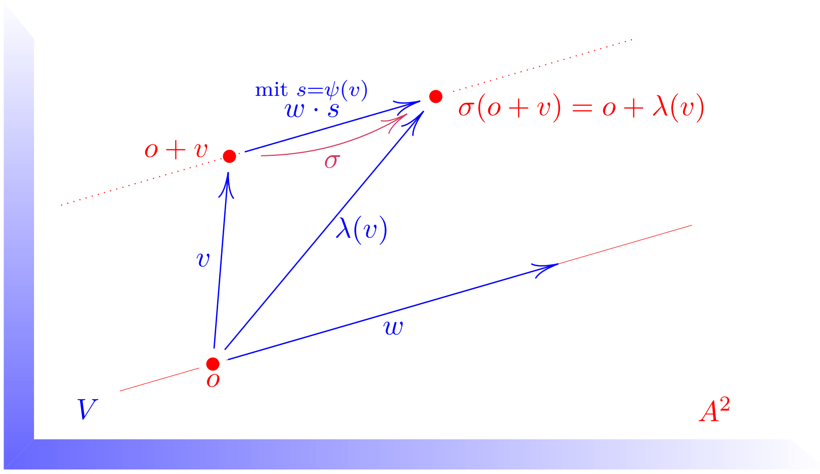
Dann ist

$$\xi_B^B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \psi(b_n) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{1n}(\psi(b_n))$$

und mit einer Determinantenform $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$

$$\det \lambda = \frac{\lambda^*\omega(B)}{\omega(B)} = \frac{\omega(\lambda(B))}{\omega(B)} = \frac{\omega(BS_{1n}(\psi(b_n)))}{\omega(B)} = \frac{\omega(B)}{\omega(B)} = 1.$$

Jede Scherung ist also äquiaffine Transformation.



Bemerkung (Dreischerungssatz) Jede äquiaffine Transformation einer affinen Ebene (mit Flächenmessung) ist Komposition von (höchstens drei) Scherungen.

Mit dem Fortsetzungssatz für affine Abbildungen kann der Dreischerungssatz rein konstruktiv bewiesen werden.

4.2.11 Lemma

Sind $f \in \mathrm{End}(V)$ und B eine Basis von V, so gilt

$$\det f = \det \xi_B^B(f)$$

Beweis Mit Leibniz-Formel (LF): Für $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ mit $n = \dim V$, gilt

$$f^*\omega(B) = \omega(f(B)) \overset{\text{Def. } \xi}{=} \omega(B \cdot \xi_B^B(f)) \overset{\text{LF}}{=} \omega(B) \cdot \det \xi_B^B(f).$$

Achtung: Im Allgemeinen ist für unterschiedliche Basen B, C von V

$$\det f \neq \det \xi_B^C(f).$$

Zum Beispiel: Sei $f \in \mathrm{Gl}(V)$ und B eine beliebige Basis, dann ist $C := f(B)$ auch eine Basis – und

$$\xi_B^C(f) = E_n \Rightarrow \det \xi_B^C(f) = 1$$

Für $f = 2 \cdot \mathrm{id}_V$ etwa gilt also

$$\det f = 2^n \cdot 1 \neq 1$$

4.2.12 Buchhaltung

Aus obigem Lemma folgt auch: Für $X \in K^{n \times n}$ gilt

$$\xi_E^E(f_X) = X \Rightarrow \det X = \det \xi_E^E(f_X) = \det f_X.$$

Der DMS für Endomorphismen liefert also einen *Determinantenmultiplikationssatz für Matrizen*: Für $X, Y \in K^{n \times n}$ gilt

$$\det XY = \det f_{XY} = \det(f_X \circ f_Y) = \det f_X \cdot \det f_Y = \det X \cdot \det Y.$$

Ebenso lassen sich nun andere Tatsachen auf die Determinante für Matrizen von der für Endomorphismen übertragen. Insbesondere definiert man

$$\mathrm{Sl}(n) := \{X \in K^{n \times n} \mid \det X = 1\} = \{X \in K^{n \times n} \mid f_X \in \mathrm{Sl}(K^n)\},$$

und nennt sie die *spezielle lineare Gruppe in n Variablen.* $\mathrm{Sl}(n)$ ist Untergruppe von $\mathrm{Gl}(n)$.

Neuer Begriff der Äquivalenz Definiert man zwei Matrizen $X, X' \in K^{n \times n}$ als *äquivalent*,

$$X \sim X' :\Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{Gl}(n) : X' = PXP^{-1},$$

so erhält man:

$$X \sim X' \Rightarrow \det X = \det X'$$

Nämlich: Sind $f \in \mathrm{End}(V)$ und B und $B' = BP^{-1}$ (mit $P \in \mathrm{Gl}(n)$) Basen von V, so gilt

$$\xi_{B'}^{B'}(f) = \xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V) \cdot \xi_B^B(f) \cdot \xi_{B'}^B(\mathrm{id}_V) = \xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V) \cdot \xi_B^B(f) \cdot \left(\xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V)\right)^{-1}$$

mit

$$\xi_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = P, \text{ da } B' = \mathrm{id}_V(B') = BP^{-1}$$

Insbesondere gilt also für $X, X' = PXP^{-1} \in K^{n\times n}$ mit $P \in \mathrm{Gl}(n)$:

$$\begin{aligned}
\det X' = \det f_{X'} &= \det f_P \circ f_X \circ f_{P^{-1}} \\
&= \det f_P \circ f_X \circ (f_P)^{-1} \\
&= \det f_P \cdot \det f_X \cdot \det f_P^{-1} = \det f_X = \det X
\end{aligned}$$

Achtung Dies ist ein zweiter Begriff der Äquivalenz von Matrizen – für Darstellungsmatrizen von Endomorphismen, im Gegensatz zur Äquivalenz für Darstellungsmatrizen von Homomorphismen (im Allgemeinen nicht quadratisch).

Index

Äquiaffine Geometrie, 93
Äquiaffine Transformation, 93
Äquivalente LGS, 77
Äquivalente Matrizen, 74
Äquivalenzrelation, 43

Abbildung, 5
Affine Abbildung/Affinität, 57
Affine Geometrie, 60
Affine Hülle, 51
Affine Hülle und Affinkombination, 53
Affine und lineare (Un-)Abhängigkeit, 54
Affiner Raum, 47
Affiner Standardraum, 49
Affiner Unterraum, 50
Affines/baryzentrisches Bezugssystem, 55
Affinkombination/Baryzentrum, 52
Allgemeine Lage, 54
Allgemeine lineare Gruppe, 61
Austauschlemma, 23

Basis, 19
Basisergänzungssatz, 22
Basislemma, 21
Basissatz, 24
Bild, Kern, Rang & Defekt, 30
Blockmatrix, 87

Charakteristik, 11

Darstellungsmatrix einer Komposition, 70
Definition, 41
Determinante, 85
Determinante eines Endomorphismus, 94
Determinantenmultiplikationssatz, 94
Dilatationsgruppe, 65
Dimension, 24
Dimension der Determinantenform, 90
Dimension und Teilmengen, 24
Dimensionen von komplementären UVR, 45
Dimensionssatz, 35
Direkte Summe, 38
Dualraum, 27

Eindeutigkeit der Punktdarstellung, 55
Eindeutigkeit des neutralen Elements, 9
Einheitsmatrix, 73
Erweiterte Koeffizientenmatrix, 76

Fortsetzungssatz, 26
Fortsetzungssatz für affine Abbildungen, 63
Fortsetzungssatz für Determinantenformen, 89

Geometrie, 47
Gruppe, 8
Gruppenoperation, 8

Homomorphiesatz für lineare Abbildungen, 46
Homomorphismen als VR, 29
Homomorphismen zwischen gleichdimensionalen VR, 32
Homomorphismus, 25

Inverse, 6
Invertierbare Matrix, 73
Isomorphielemma, 34

Körper, 10
Komplementäre UVR, 37
Komposition, 5

Kurzform der def. Gleichung einer Darst.-Matrix, 71

Lösungsraum, 76
Leibniz-Formel, 84
Lineare Hülle und Linearkombinationen, 18
Lineares Gleichungssystem, 75
Linearform/Determinantenform, 81
Linearkombinationen und Homomorphismen, 26

Matrix, 69
Matrizen als VR, 69
Mittelpunkt, 64

Nebenklassen, 42

Parallele Geraden, 61
Parallelogramm/Flächeninhalt, 91
Parallelotop im affinen Raum, 91
Parallelprojektion, 62
Permutationsgruppe, 9
Produkt von VR, 41
Projektion, 39
Projektionen, 40

Rang einer Matrix, 74
Rangsatz, 31

Satz von Ceva, 67
Satz von Menelaos, 66
Scherung, 63
Schnitt von UVR, 16
Schwerpunktsatz, 64
Signum einer Permutation, 83
Spezielle Homomorphismen, 33
Spezielle lineare Gruppe, 95
Standardbasis, 20
Standardvektorraum, 13
Streckung, 62
Summe von UVR, 35

Teilverhältnis, 56
Transponierte Matrix, 87
Transposition, 83

Untervektorraum, 14
Ursprung, 49

Vandermonde-Determinante, 88
Vektorraum, 12
Volumenverzerrung, 93

Zeilenstufenform, 78