

Bolygómozgás

Tuhári Richárd

2018. március 31.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. Elmélet	2
2.1. Analitikus tárgyalás	2
2.1.1. A sebseeég szögfüggése	2
2.1.2. A hely szögfüggése	2
2.1.3. Az energia	3
2.1.4. A kúpszeletek alakjai	3
2.1.5. Periódusidő	4
2.1.6. A redukált tömeg	4
2.2. Numerikus tárgyalás	4
3. A program és vizsgálata	4
3.1. A nagytengely iránya	4
3.2. A lépéshossz vizsgálata	6
3.2.1. Mit is használunk?	7
3.2.2. Adatok	8
3.2.3. Az adatokról	8
3.2.4. A használt értékek	9
3.2.5. A hibákról	10
3.3. A Merkúr perihélium precessziója	10
3.4. Hárromtest-probléma	12
4. Diszkusszió	13
5. Hivatkozások	14

1. Bevezető

Feladatunk a bolygómozgás modellezése, a tárgy honlapjáról letölthető program által nyújtott lehetőségek numerikus hibáinak vizsgálata különböző paraméterek mellett, az adaptív lépéshosszváltozás vizsgálata. További feladat a Merkúr perihélium precessziójának megfigyelése a programban végrehajtott korrekciók után, valamint a program háromtest-problémára való implementálása.

2. Elmélet

2.1. Analitikus tárgyalás

Tekintsük először is a hatvány potenciált:

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{ar^a}, \quad (\alpha > 0, a \neq 0) \quad (2.1.1)$$

ahol $\alpha = GM$ a csillag tömegével attányos és a Napunknál $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$,
és $M = 1.98855 \cdot 10^{30} kg$

Itt stabil körpálya csak $a \geq 1$ értéknél jöhet létre.

Kepler-mozgás esetén $a=1$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-\nabla V(r)}{M} = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2.1.2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{mr^2} \quad (2.1.3)$$

2.1.1. A sebseeág szögfüggése

A 2.1.2 és a 2.1.2 egyenletekből:

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{\alpha m}{N} \mathbf{e}_r = \frac{m}{N} \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} \quad (2.1.4)$$

Integrálunk φ szerint. Legyen a rendszer úgy felépítve, hogy ha a pálya metszi az x tengelyt, akkor a sebességünknek csak y irányú komponense legyen. Ekkor:

$$\mathbf{v}(\varphi) = \frac{\alpha m}{N} (\mathbf{e}_\varphi + \epsilon \mathbf{e}_y) \quad (2.1.5)$$

Ahol ϵ az excentricitás. (Az órai diában itt - előjel fordul elő, mely azzal lehetne indokolható, hogy vagy negatívak lesznek az ϵ értékeink, vagy a $\varphi = 0$ -át a hodográfunk bal oldalán vettük fel. Ezen esetekben valóban - előjel kéne. Fenntartva a lehetőséget, hogy elírás történt, én + -al számolnék tovább)

2.1.2. A hely szögfüggése

Kiindulva az impulzusmomentumból: $N = mr \times \dot{r}$

$$\frac{N}{m} = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z = \frac{\alpha mr}{N} |\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi + \epsilon \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_y|_z = \frac{\alpha mr}{N} (1 + \cos(\varphi)) \quad (2.1.6)$$

Vezessük be: $p = \frac{N^2}{m^2 \alpha} t$

Ekkor r-t kifejezve:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad (2.1.7)$$

2.1.3. Az energia

először is számoljuk ki \dot{r} -t.

$$\dot{r} = -\frac{\dot{\varphi} p \epsilon \sin(\varphi)}{(1 + \epsilon \cos(\varphi))^2} = -\epsilon \sin(\varphi) \dot{\varphi} \frac{r^2}{p} = -\epsilon \sin(\varphi) \frac{m\alpha}{N} \quad (2.1.8)$$

Így már könnyen felírhatjuk az energiát:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{N^2}{2mr^2} - \frac{m\alpha}{2p} (\epsilon^2 - 1) \quad (2.1.9)$$

Ezekből ϵ is kifejezhető:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2pE}{m\alpha}} \quad (2.1.10)$$

2.1.4. A kúpszeletek alakjai

Hogy megkapjuk az kúpszeleteket Descartes-koordinátákban leíró paramétereket, először is nagyon meglepő módon, térijünk át descartes-i koordinátákba:

$$x = r \cos(\varphi), \quad p = r(1 + \epsilon \cos(\varphi)) = r + \epsilon x \Rightarrow r^2 = \epsilon^2 x^2 - 2p\epsilon x + p^2 = x^2 + y^2 \quad (2.1.11)$$

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + 2p\epsilon x + y^2 = p^2 \Rightarrow (1 - \epsilon^2) \left[x + \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right]^2 + y^2 = p^2 + \frac{p^2\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2} \quad (2.1.12)$$

Leosztva a jobb oldallal:

$$\begin{cases} \frac{(x+\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & \text{ha } \epsilon < 1, \\ \frac{(x-\epsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, & \text{ha } \epsilon > 1, \\ y^2 = p^2 - 2px, & \text{ha } \epsilon = 1. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

ahol

$$a = \frac{p}{|1 - \epsilon^2|} = \left(= \frac{\alpha m}{2|E|} \right) \quad (2.1.14)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{|1 - \epsilon^2|}} = \sqrt{ap} = \left(= \sqrt{\frac{N^2}{\alpha m^2} \frac{\alpha m}{2|E|}} = \frac{N}{\sqrt{2m|E|}} \right) \quad (2.1.15)$$

$$e = \frac{p\epsilon}{|1 - \epsilon^2|} = \epsilon a = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.1.16)$$

2.1.5. Periódusidő

Kepler II. törvénye: **A Napról mért vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket szűrol.**

T-t egy teljes évnek választva:

$$\dot{f} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{N}{2m} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi \sqrt{a^3 p}}{T} = \frac{\pi N \sqrt{a^3}}{T m \sqrt{\alpha}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}} \quad (2.1.17)$$

2.1.6. A redukált tömeg

Írjuk fel két, egymással kölcsönható tömegpont mozgássegycsillapítóit:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}, \quad (2.1.18)$$

valamint

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}, \quad (2.1.19)$$

ahol $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Kivonva egymásból:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} \quad (2.1.20)$$

ahol a kivonás eleje ugye az m_1 relatív gyorsulása, így jobb oldalon a zárójelben következésképp a relatív tömeg reciproka kell legyen. Azaz a relatív tömeg:

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1.21)$$

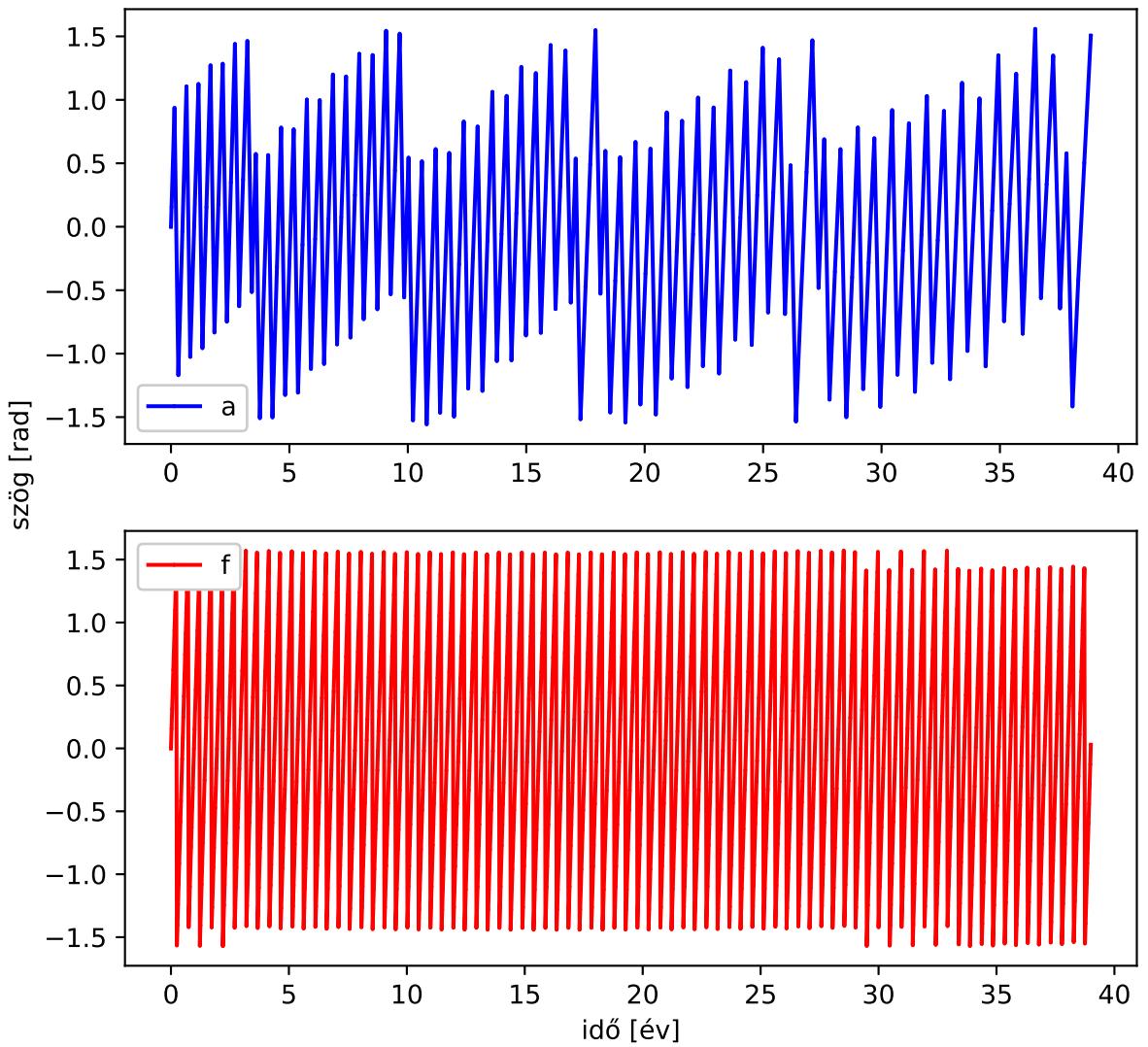
2.2. Numerikus tárgyalás

Mivel az előző jegyzőkönyvek során ezek már részletesen ki lettek veszélyeztetve, ezért csak az esetleges változtatásokat tüntetem fel, de azokat pedig ott, amelyik résznél azok tárgyalva vannak.

3. A program és vizsgálata

3.1. A nagytengely iránya

Először is vizsgáljuk a numerikus hibákat. Legjobban ezt a nagytengely eltérülésének az irányára.

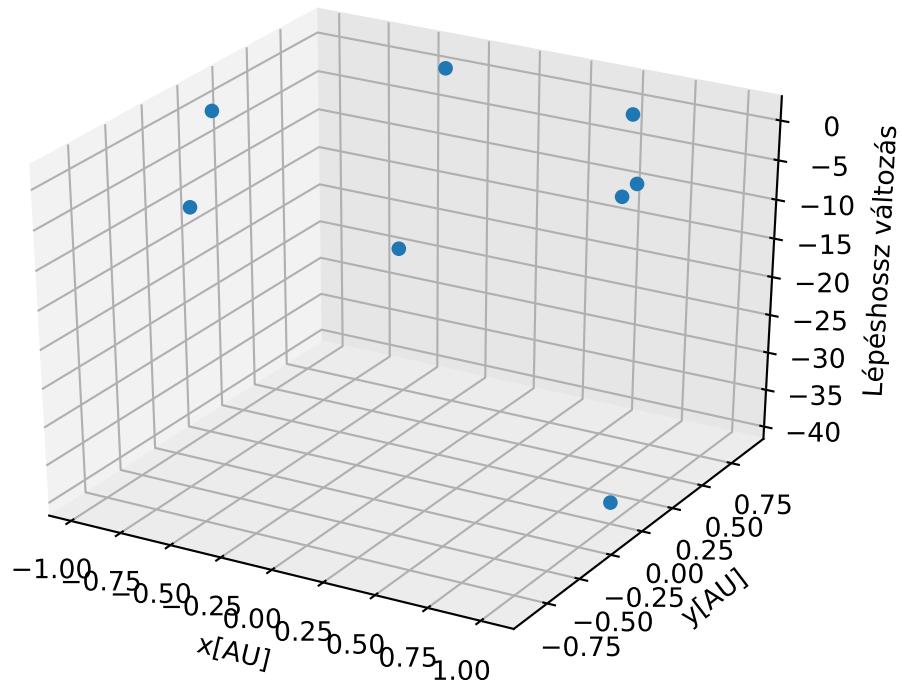


1. ábra. A pálya eltérülése a numerikus hibákból

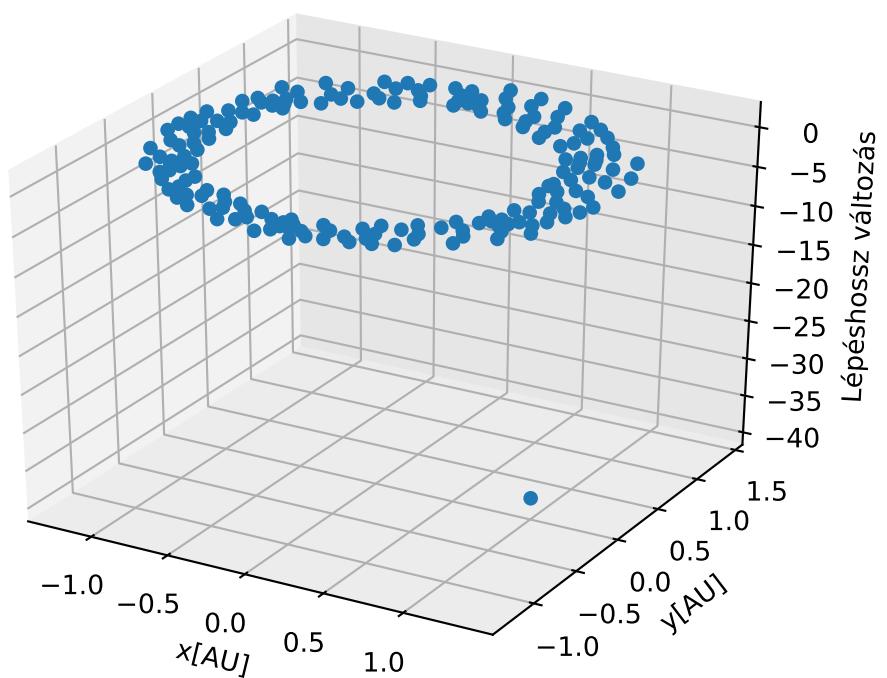
Ez az ábra picit többet mutat, mint a nagytengely iránya, azt a 'tüskék' közepei mutatják. Itt megfigyelhetjük, hogy az egész pálya hogy tériül el. Fentebbi a fix, alábbi az adaptív. Alaposabb vizsgálat után azt tapasztaljuk, hogy a ez az eltérülés fix esetben 0.005 érték alatt, míg adaptív esetben 0.0000005-es pontosság alatt lesz elenyésző (a kiírt tizedesjegyekben nincs változás 1000 lépésig sem) Jelen ábra a 0.025-ös step size-al és 0.025-ös accuracy-val készült.

3.2. A lépéshossz vizsgálata

Az adaptív lépéshossz változását nézve észrevehetjük, hogy pontosságtól függően persze, de jelen esetben ciklusonként 6 vagy 7 változás folyik le:



2. ábra. A lépéshossz változások egy periódus esetén



3. ábra. A lépéshossz változások

3.2.1. Mit is használunk?

Okkal merülhet fel a kérdés, hogy mit is használunk az adott körülmények tekintetében. A simát, ha pontosan, az adaptívát ha gyorsan akarunk számolni? A megfigyel adatok más megvilágítást adnak a dolognak:

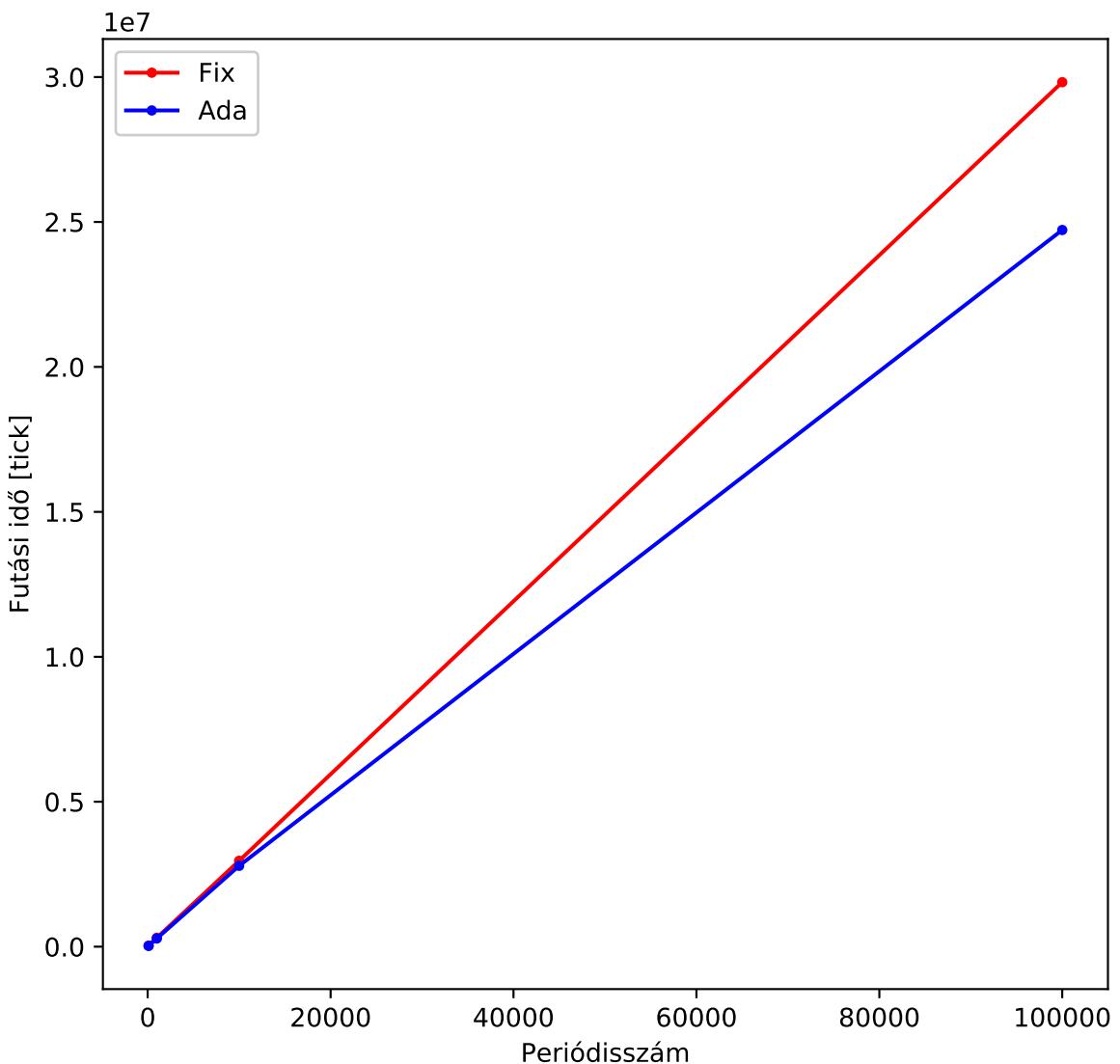
3.2.2. Adatok

A sima és az adaptív módszerek:

Periódusszám	Módszer	t1 [tick]	t2 [tick]	t3 [tick]	t_{atlag} [tick]
100	RK	30547	34883	42803	36078
	ARK	27482	26867	26575	26975
1000	RK	302871	314387	301912	306390
	ARK	279037	286305	283950	283097
10000	RK	2.9634e+06	2.97547e+06	2.95115e+06	2.96334e+06
	ARK	2.81982e+06	2.7364e+06	2.81198e+06	2.7894e+06
100000	RK	2.97114e+07	2.99252e+07	2.98288e+07	2.98218e+07
	ARK	2.46961e+07	2.48291e+07	2.46441e+07	2.47231e+07

3.2.3. Az adatokról

A folyamat sotán a <ctime>-ból használtam clock-ot. Habár a feladat úgy fogalmaz, legyen ugyanakkora a hiba adott hoszon, bátorkodtam picit módosítani. Ugyebár ha mondjuk megnézzük 10-re, 100-ra 1000-re, hogy ugyanakkora legyen a hiba (ameddig kiírja az értékeket), később akkor is el fog mászni. Ám ha erre nézzük, akkor nem tudhatjuk biztosra, hogy a már nem befolyásolható hangolás miatt történt-e az eredmény amit kaptunk, vagy az egyik folyamat valóban ideálisabb a másiknál. Így ahhoz folyamodtam, hogy a még ellenőrizhető tartományon legyen pontosabb a lépéshosszváltoztatásos módszer, mert ha még e mellett is gyorsabb, akkor már megfogalmazódhat bennünk a válasz a fentebbi kérdésre. Így a megfigyelésből következtetve kijelenthető, hogy az adaptív módszer ugyanakkora pontosság mellett is gyorsabb, mint ahogyan azt a következő ábra is szemlélteti.



4. ábra. A futási idők

3.2.4. A használt értékek

1. step size: 0.015
2. adaptive accuracy: 0.000006 (a korábban említett kezdeti ráhangolás 0.000007 -nél volt)

3.2.5. A hibákról

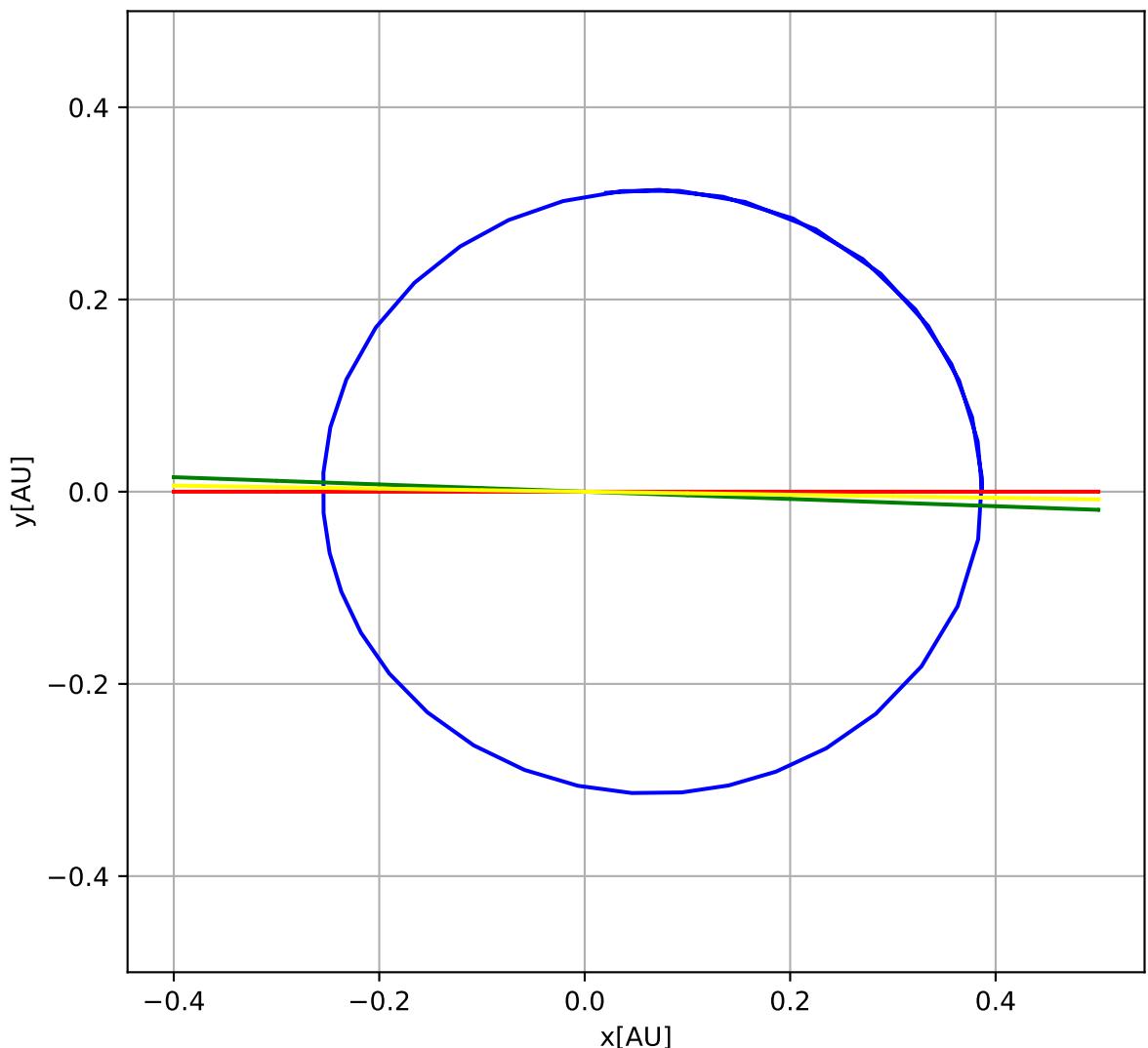
Mivel a kapott eredmények erősen gépfüggőek ezért nem is írtam hibákat. Viszont a relatív értékek, a módszerek futási idejének egymáshoz való viszonya, azaz, amiből a fentebbi következtetés levonódik, mely más gépeken is reprodukálható.

3.3. A Merkúr perihélium precessziója

A programban eszközölt változtatás után, ami a következő,

```
f [3] = - GmPlusM * r_x / rCubed * (1 + (1.1e-8/rSquared));
f [4] = - GmPlusM * r_y / rCubed * (1 + (1.1e-8/rSquared));
```

vizsgáltam a Merkúr perihélium precesszióját. 10000 évenként (mármint a programban :D) megnéztem az elfordulást:



5. ábra. A merkúr perihéliumának precessziója 10000 évenként

ami a valóságban 4300 ívmásodperc, itt pedig 3269. Ez az eltérés valószínűleg azért van, mert a valós pálya nincs teljesen a síkban, mi pedig ott néztük, meg persze nem feledkezhetünk meg a számtalan hibáról, ami közbe jöhet, már akár a felhasznált adatoknál is amik itt:

1. Apoapsis: 0.387 AU

2. Excentricity: 0.2056
3. α : 1.1e-8 AU²
4. T=0.241 Ey

3.4. Háromtest-probléma

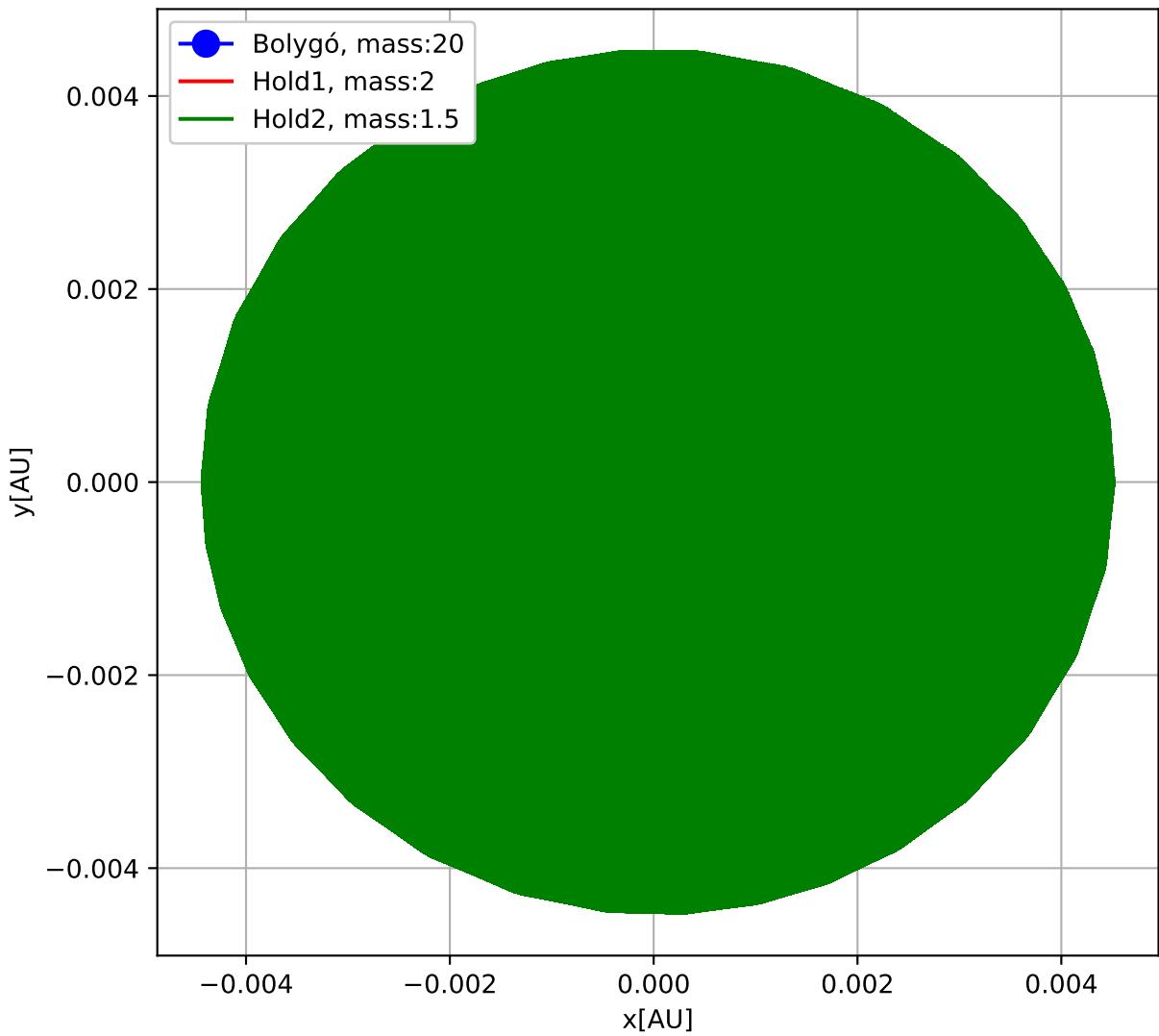
A kód átalakítása után, (itt a harmadik testre)

```
M=(m1+m2+m3)/(m1*m2+m1*m3+m2*m3)
f [3] = - GmPlusM * r_x1 / rCubed * m- GmPlusM * r_x2 / rCubed * mm;
f [4] = - GmPlusM * r_y1 / rCubed * m- GmPlusM * r_x2 / rCubed * mm;
```

Ahol kicsi m az épp a Vector-ba beadott égitesthez tartozó tömeg és mm a másikhoz:

```
double t = x[0], r_x1 = x1[1], r_x2 = x2[1], r_y1 = x1[2], r_y2 = x2[2], v_x1 = x1[3],
```

jól látható, hogy a bolygónk és a két holdja kering a rendszer tömegközéppontja körül. Mivel sok futás történt, ezért a kinti pályák 'egymásba oladtak' így az ábrán egy pálya tűnik fel helyettük, csak vastagabbként mint a valódi. Sajnos nincs időm OpenGL-ben megcsinálni.



6. ábra. Háromtest-probléma

4. Diszkusszió

A számítógépes modellezés nagyon hasznos lehet akármilyen területhez. A fentebbi vizsgálat betekintést nyújtott ennek haszálataiba az égi mechanikában. Legtanúlságosabbnak a módszerek se-

bességének átható tanulmányozását mondanám. Az utolsó részben pedig megtapasztaltuk, hogy a dolgok kiterjesztése olyan bonyolultabb problémákra is nagyon hasznos, melyeknek már nem állnánk neki analitikusan.

5. Hivatkozások

<https://stegegerjozsef.web.elte.hu/teaching/szamszim/index.php>