Z 6.3 Quantum Disorder at T=0

Mermin and Wagner's theorem 不能在 $T=0$ 下应用. 假设存在一个无穷小的 ordering field, 会有一个**唯一的**基态 $|0\rangle$ (例如外场下的铁磁Heisenberg模型, 基态破缺与磁场同向的铁磁态上; 反铁磁体的 Marshall 定理告诉我们反铁磁海森堡模型在没有磁场时有唯一基态, 有磁场?).

在 $T=0$, 任何算符的期望值为

Ⓝ (Assa6.37)

$$\langle A\rangle=\langle 0|A|0\rangle$$

标量积(Assa6.11)此时则定义为

Ⓝ (Assa6.38)

$$(A, B)=\operatorname{Re} \sum_{m \neq 0} \frac{\left\langle 0\left|A^{\dagger}\right| m\right\rangle\langle m|B| 0\rangle}{E_m-E_0}$$

- 对称性和线性性显然满足. $E_m>E_0$, 故同样可以保证内积的正定性.
- 其中取实部限制了这里定义的内积只能是实数. 让$A=B$时, 本来就是实数, 可以扔掉取实部操作.

零温Bogoliubov不等式

下面, 我们和式(Assa6.16)和(Assa6.19)一样选择算符 A, B, 和 C,

$$C=S_{\mathbf{k}}^x, \quad A=S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y,$$

$$B \equiv\left[C^{\dagger}, \mathcal{H}\right], B^{\dagger}=[\mathcal{H}, C]$$

来看看Bogoliubov不等式告诉我们什么. 由于内积定义不太一样, 零温Bogoliubov不等式需要稍微重新推导一下, 我们从式(Assa6.15)的第一行(即Schwarz不等式)出发.

$$|(A, B)|^2 \leq(A, A)(B, B)$$

- (A, A): 我们也不需要将(A, A)进一步放缩然后计算式(Assa6.20)这样的东西, 而是直接计算 susceptibility $(A, A)=(S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y, S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y)$,

  Ⓝ (Assa6.39)

  $$\chi^{yy}(\mathbf{k})=\mathcal{N}^{-1}\left(S_{-\mathbf{k}}^y, S_{-\mathbf{k}}^y\right)=\mathcal{N}^{-1} \sum_{m \neq 0} \frac{\left|\left\langle 0\left|S_{\mathbf{k}}^y\right| m\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle 0\left|S_{-\mathbf{k}}^y\right| m\right\rangle\right|^2}{E_m-E_0}$$

- $|(A, B)|^2$: 首先, 在引入了C (满足$B \equiv\left[C^{\dagger}, \mathcal{H}\right]$) 之后, 有限温时的公式(Assa6.17)是否在零温也成立?

$$
\begin{aligned}
(A,B) &= (A,[C^\dagger,\mathcal{H}]) \\
&= \mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0\,|A^\dagger|\,m\rangle\langle m|\left(C^\dagger\mathcal{H}-\mathcal{H}C^\dagger\right)|0\rangle\left(\frac{1}{E_m-E_0}\right) \\
&= \mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0\,|A^\dagger|\,m\rangle\langle m|\left(C^\dagger\mathcal{H}-\mathcal{H}C^\dagger\right)|0\rangle\left(\frac{1}{E_m-E_0}\right) \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0\,|A^\dagger|\,m\rangle\langle m|C^\dagger|0\rangle \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0\,|A^\dagger|\,m\rangle\langle m|C^\dagger|0\rangle \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{m}\langle 0\,|A^\dagger|\,m\rangle\langle m|C^\dagger|0\rangle+\mathrm{Re}\langle 0|C^\dagger|0\rangle\langle 0\,|A^\dagger|\,0\rangle \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{m}\langle 0\,|A^\dagger C^\dagger|\,0\rangle+\mathrm{Re}\sum_{m}\langle 0|C^\dagger|m\rangle\langle m\,|A^\dagger|\,0\rangle-\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0|C^\dagger|m\rangle\langle m\,|A^\dagger|\,0\rangle \\
&= -\mathrm{Re}\sum_{m}\langle 0\,|A^\dagger C^\dagger|\,0\rangle+\mathrm{Re}\,\langle 0\,|C^\dagger A^\dagger|\,0\rangle-\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0|C^\dagger|m\rangle\langle m\,|A^\dagger|\,0\rangle \\
&= \mathrm{Re}\,\langle 0\,|\,[C^\dagger,A^\dagger]\,|\,0\rangle-\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0|C^\dagger|m\rangle\langle m\,|A^\dagger|\,0\rangle
\end{aligned}
$$

似乎会多出来一项.

- (B,B): 这样也会多出来一项

$$
\begin{aligned}
(B,B) &= (B,[C^\dagger,\mathcal{H}]) \\
&= \mathrm{Re}\,\langle 0\,|\,[C^\dagger,B^\dagger]\,|\,0\rangle-\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0|C^\dagger|m\rangle\langle m\,|B^\dagger|\,0\rangle \\
&= \mathrm{Re}\,\langle 0\,|\,[C^\dagger,[\mathcal{H},C]]\,|\,0\rangle-\mathrm{Re}\sum_{m\neq 0}\langle 0|C^\dagger|m\rangle\langle m\,|[\mathcal{H},C]|\,0\rangle
\end{aligned}
$$

> $$
> \begin{aligned}
> [C^\dagger,[\mathcal{H},C]]^\dagger &= [\mathcal{H},C]^\dagger C - C[\mathcal{H},C]^\dagger \\
> &= \left(C^\dagger\mathcal{H}-\mathcal{H}C^\dagger\right)C - C[\mathcal{H},C]^\dagger \\
> &= [C^\dagger,\mathcal{H}]\,C - C\,[C^\dagger,\mathcal{H}] \\
> &= [[C^\dagger,\mathcal{H}]\,,C]
> \end{aligned}
> $$
>
> 并不是厄米的, 取实部有意义.

前面这一项大概(取实部?)可以像有限温中的式(Assa6.22)一样定义为$F(\mathbf{k})$, 然后一定会有

$$
F(\mathbf{k})\leq hm_{\mathbf{q}}+S(S+1)\bar{J}|\mathbf{k}|^2
$$

将上式应用到式(Assa6.15)的第一行, 然后应用(Assa6.26) 得到**零温 Bogoliubov 不等式**

$$
\begin{aligned}
m_{\mathbf{q}}^2 &\leq \chi^{yy}(\mathbf{k}+\mathbf{q})F(\mathbf{k}) \\
&\leq \chi^{yy}\left[h m_{\mathbf{q}} + S(S+1)\bar{J}|\mathbf{k}|^2\right]
\end{aligned}
$$

变形然后对布里渊区求和得到

Ⓝ (Assa6.41)

$$
\frac{m_{\mathbf{q}}^2}{(2\pi)^d}\int_0^{\bar{k}} \frac{dk^d}{h m_{\mathbf{q}} + S(S+1)\bar{J}|\mathbf{k}|^2} \leq \mathcal{N}^{-1}\sum_{\mathbf{k}} \chi^{yy}(\mathbf{k})
$$

因此, 如果有

Ⓝ (Assa6.42)

$$
\mathcal{N}^{-1}\sum_{\mathbf{k}} \chi^{yy}(\mathbf{k}) = C < \infty
$$

且我们处于1d或2d, 为了满足(Assa6.41)序参量 $m_{\mathbf{q}}$ 必须随着h而趋于零.在这种情况下, 甚至在$T=0$也不会有长程序.

- 根据式(Assa6.39), 式(Assa6.42)的成立与否取决于能谱. 对于无能隙的铁磁自旋波, $\omega \sim k^2$, 则一维和二维系统下χ是发散的, 零温Wagner-Mermin定理不适用, 则会有铁磁序出现.

激发谱能隙

如果激发谱中存在能隙,

Ⓝ (Assa6.43)

$$
E_m - E_0 > \Delta, \quad \forall m \neq 0
$$

其中 Δ 与 $h, \mathcal{N}$无关, 则海森堡模型的基态必须是无序的.

> 证明: 这一能隙允许我们得到 susceptibility (6.39)的一个上界, 由关联函数给出:
>
> Ⓝ (Assa6.44)
>
> $$
> \chi^{yy}(\mathbf{k}) \leq \frac{2}{\mathcal{N}\Delta}\sum_m \left|\langle 0 | S_{\mathbf{k}}^y | m\rangle\right|^2 = 2\frac{S^{yy}(\mathbf{k})}{\Delta}
> $$
>
> 且因为 $\mathcal{N}^{-1}\sum_k S^{yy} \leq S(S+1)$, 条件 (6.42)会得到满足. 有趣的是, Δ 起到了不等式(Assa6.14)中T的作用.

例: 反铁磁整数自旋链, 会在激发谱中展现 "Haldane gap". $T=0$的 Mermin-Wagner theorem 意味着这些模型的基态不会具有真正的长程序. 事实上, **非线性 sigma 模型**分析预测道, 它们的关联会在长距离下指数decay (见 Section 15.2).

逆命题 (无能隙激发意味着长程序) 是错的. 例如, 1d 的spin-1/2 海森堡反铁磁体具有无能隙激发,但是在$T=0$时也没有长程序.