

## 19.5 Bosonization of the Tomonaga model Hamiltonian

之前推导的1D哈密顿量最优秀的方面在于它可以使用玻色算符表示成双线性形式。只要这一步完成了就可以琐碎地解决这个问题，因此我们得到了一个惊奇的结果：相互作用多粒子问题的一个“精确”解。

### 19.5.1 Derivation of the bosonized Hamiltonian

首先让我们研究左移与右移密度算符的对易关系

$$\begin{aligned}
 [\rho_R(q), \rho_R(-q)] &= \sum_{kk' > 0} [c_k^\dagger c_{k+q}, c_{k'}^\dagger c_{k'-q}] \\
 &= \sum_{kk' > 0} (c_k^\dagger c_{k'-q} \delta_{k+q, k'} - c_{k'}^\dagger c_{k+q} \delta_{k, k'-q}) \\
 &= \sum_{k > 0} \Theta(k+q) (c_k^\dagger c_k - c_{k+q}^\dagger c_{k+q}) \\
 &= \Theta(q) \sum_{q > k > 0} n_k - \Theta(-q) \sum_{-q > k > 0} n_k \\
 &\approx \frac{\mathcal{L}}{2\pi} \int_0^q dk = \frac{\mathcal{L}q}{2\pi}.
 \end{aligned} \tag{19.30}$$

最后一个关键的近似是假设对于小 $k$ （远小于 $k_F$ ），我们可以将粒子数算符 $n_k$ 替换为无相互作用问题中的期望值，也就是当 $k \ll k_F$ 时 $n_k = 1$ 。这个基本的假设是由于相互作用只修正接近费米面的性质。相似的我们得到：

$$[\rho_L(q), \rho_L(-q)] \approx -\frac{\mathcal{L}q}{2\pi}. \tag{19.31}$$

对于非对角部分 $q \neq q'$ 我们发现

$$\begin{aligned}
 [\rho_R(q), \rho_R(-q')] &= \sum_{k > 0} (c_k^\dagger c_{k+q-q'} \Theta(k+q) - c_{k+q'}^\dagger c_{k+q} \Theta(k+q')) \\
 &= \sum_{k > 0} c_k^\dagger c_{k+q-q'} \Theta(k+q) - \sum_{k > 0} c_k^\dagger c_{k+q-q'} \\
 &= -\Theta(-q) \sum_{|q| > k > 0} c_k^\dagger c_{k+q-q'} \\
 &\approx -\Theta(-q) \sum_{|q| > k > 0} \langle c_k^\dagger c_{k+q-q'} \rangle_0 \\
 &\approx 0,
 \end{aligned} \tag{19.32}$$

其中我们使用了和之前相似的近似，把费米海深处的算符替换为其在自由粒子例子中的期望值。最后我们需要得到

$$\begin{aligned}
[\rho_R(q), \rho_L(-q')] &= \sum_{k>0, k'<0} [c_k^\dagger c_{k+q}, c_{k'}^\dagger c_{k'-q'}] \\
&= \sum_{k>0} (c_k^\dagger c_{k+q-q'} \Theta(-k-q) - c_{k+q'}^\dagger c_{k+q} \Theta(-k-q')) \\
&= \Theta(-q) \sum_{0<k<-q} c_k^\dagger c_{k+q-q'} - \Theta(-q') \sum_{0<k<-q'} c_{k+q'}^\dagger c_{k+q} \quad (19.33) \\
&\approx \delta_{qq'} \Theta(-q) \sum_{0<k<-q} (\langle n_k \rangle_0 - \langle n_{k+q} \rangle_0) \\
&\approx 0.
\end{aligned}$$

总结一下，密度算符 $\rho$ 之间的对易关系是

$$\begin{aligned}
[\rho_R(q), \rho_R(-q')] &= +\delta_{qq'} \frac{q\mathcal{L}}{2\pi} \\
[\rho_L(q), \rho_L(-q')] &= -\delta_{qq'} \frac{q\mathcal{L}}{2\pi} \\
[\rho_R(q), \rho_L(-q')] &= 0.
\end{aligned} \quad (19.34)$$

现在很明显哈密顿量的相互作用部分可以使用密度算符 $\rho_R$ 和 $\rho_L$ 表示。现在我们希望动能部分也可以使用密度算符表示，我们从对易子开始

$$\begin{aligned}
[H_0, \rho_R(q)] &= v_F \sum_{kk'>0} k [c_k^\dagger c_k, c_{k'}^\dagger c_{k'+q}] \\
&= v_F \sum_{kk'>0} k (c_k^\dagger c_{k'+q} \delta_{k',k} - c_{k'}^\dagger c_k \delta_{k,k'+q}) \\
&= v_F \sum_{k>0} k [c_k^\dagger c_{k+q} - c_{k-q}^\dagger c_k \Theta(k-q)] \\
&= v_F \Theta(q) \sum_{k>0} [k c_k^\dagger c_{k+q} - (k+q) c_k^\dagger c_{k+q}] \\
&\quad + v_F \Theta(-q) \left[ \sum_{k>0} k c_k^\dagger c_{k+q} - \sum_{k>-q} (k+q) c_k^\dagger c_{k+q} \right] \\
&= -v_F q \rho_R(q) + v_F \Theta(-q) \sum_{0<k<-q} (k+q) c_k^\dagger c_{k+q} \approx -q v_F \rho_R(q),
\end{aligned} \quad (19.35)$$

这里我们使用了近似，当远低于费米能时 $c_k^\dagger c_{k+q} \approx \langle c_k^\dagger c_k \rangle \delta_{q,0}$ 。对于左移密度算符我们有相似的结果

$$[H_0, \rho_L(q)] \approx q v_F \rho_L(q), \quad (19.36)$$

这表明无扰动的哈密顿量的本征模式是由下面的式子描述的

$$\langle \rho(q, t) \rangle = e^{-iqv_F(t-t_0)} \langle \rho(q, t_0) \rangle. \quad (19.37)$$

这个式子和(19.34a)、(19.34c)，以及密度算符和粒子数算符是对易的，表明自由电子部分可以写成

$$H_0 = \frac{2\pi v_F}{\mathcal{L}} \sum_{q>0} [\rho_R(-q) \rho_R(q) + \rho_L(q) \rho_L(-q)] + C(N), \quad (19.38)$$

其中 $C(N)$ 是一个只依赖于总粒子数的常数。

在这个推导中我们使用了 $N$ 电子全填充费米海 $|N, 0\rangle$ 作为参考态。可以证明，通过密度算符 $\rho_L$ 和 $\rho_R$ 的线性组合作用于参考态，可以达到任意固定电子数的多粒子态。换句话说， $f(\rho_R, \rho_L)|N\rangle$ 在具有给定数量粒子的子空间内构成一个完整集合。这个证明方法是展示两个表示下的配分函数是相同的，因为如果它们不相同，态就会遗漏。哈密顿量并没有把我们带出常数为 $N$ 的子空间，因此方程(19.38)中的哈密顿量正确地描述了固定数量粒子的希尔伯特空间内的激发能。

我们剩下的工作是找到常数 $C(N)$ 。由全填充无相互作用费米海的能量很容易给出：

$$C(N_L, N_R) = \frac{\pi v_F}{\mathcal{L}} (N_L^2 + N_R^2) = \frac{\pi v_F}{\mathcal{L}} (N^2 + J^2), \quad (19.39)$$

其中我们允许不同支之间可以有不同的电子数并且定义 $N$ 为总粒子数 $J$ 为电流 $N_R - N_L$ ，它们都是守恒量。玻色化哈密顿量的最终形式为：

$$H_0 = \frac{2\pi v_F}{\mathcal{L}} \sum_{q>0} [\rho_R(-q)\rho_R(q) + \rho_L(q)\rho_L(-q)] + C(N_L, N_R) \quad (19.40a)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{q \neq 0} V_1 [\rho_R(q) + \rho_L(q)] (\rho_R(-q) + \rho_L(-q)) \quad (19.40b)$$

$$V_1 = V(0) - V(2k_F) \quad (19.40c)$$

## 19.5.2 Diagonalization of the bosonized Hamiltonian

下面的玻色算符在 $q > 0$ 的情况下定义

$$a_q = \sqrt{\frac{2\pi}{q\mathcal{L}}} \rho_R(q), \quad a_q^\dagger = \sqrt{\frac{2\pi}{q\mathcal{L}}} \rho_R(-q), \quad (19.41a)$$

$$b_q = \sqrt{\frac{2\pi}{q\mathcal{L}}} \rho_L(-q), \quad b_q^\dagger = \sqrt{\frac{2\pi}{q\mathcal{L}}} \rho_L(q), \quad (19.41b)$$

它们之间的对易关系为：

$$[a_q, a_{q'}^\dagger] = [b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'} \quad (19.42a)$$

$$[a_q, a_{q'}] = [b_q, b_{q'}] = [a_q, b_{q'}] = [a_q, b_{q'}^\dagger] = 0 \quad (19.42b)$$

用这些算符可以写出

$$H_0 = v_F \sum_{q>0} q (a_q^\dagger a_q + b_q^\dagger b_q) \quad (19.43a)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{q>0} q V_1 (a_q^\dagger a_q + b_q^\dagger b_q + a_q b_q + b_q^\dagger a_q^\dagger) \quad (19.43b)$$

这个哈密顿量很容易用Bogoliubov变换求解。变换后的玻色算符 $\gamma_q$ 和 $\gamma_q^\dagger$ 定义了Luttinger液体基态 $|LLG\rangle$ 和激发 $|q\rangle$

$$\gamma|LLG\rangle = 0, \quad |q\rangle = \gamma_q^\dagger |LLG\rangle \quad (19.44)$$

相互作用Luttinger-Tomonaga模型的激发能量定义为

$$(H_0 + H_{\text{int}})|q\rangle = E_q|q\rangle = q\tilde{v}|q\rangle, \quad \text{with } \tilde{v} = v_F \sqrt{1 + \frac{V_1}{\pi v_F}} \quad (19.45)$$

### 19.5.3 Real space representation

通常玻色化的Tomonaga-Luttinger实空间表示是更容易处理的，这个形式是由 $\rho_{R,L}(q)$ 的Fourier变换 $\rho_{R,L}(x)$ 得到的

$$\rho_{R,L}(x) = \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_q' e^{iqx} \rho_{R,L}(q) + \rho_0, \quad (19.46)$$

这里由于常数背景同样移除了 $q = 0$ 的项。严格地说，这个Fourier变换在Tomonaga模型中并没有良好的定义，因为对于大的 $|q|$ ，带的底部是达到的。因此，公式(19.46)应该被看作只适用于长波长情况，也就是大 $|q|$ 的贡献必须不重要。或者，可以简单的定义左移和右移色散关系，对所有 $q$ 值都是线性的，即，在带的底部之下。这就与Luttinger模型等价了。现在我们简单的把(19.46)式当成左移和右移密度算符的Fourier变换，但是我们还是要清楚这个理论只在长波长激发情况下有效。

实空间密度算符 $\rho_{R,L}(x)$ 的对易关系为：

$$\begin{aligned} [\rho_R(x), \rho_R(x')] &= \frac{1}{\mathcal{L}^2} \sum_{qq'}' e^{iqx - iq'x'} [\rho_R(q), \rho_R(-q)] \\ &= \frac{1}{2\pi\mathcal{L}} \sum_q' q e^{iq(x-x')} = \frac{1}{2\pi\mathcal{L}} \frac{\partial}{i\partial x} \sum_q' e^{iq(x-x')} \quad (19.47a) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'), \end{aligned}$$

$$[\rho_L(x), \rho_L(x')] = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'). \quad (19.47b)$$

这些关系有时被称为Kac-Moody代数，密度算符之间的非零的对易子被称作反常对易子。它们是把电子分成两个不同部分并且附加一个动量截断的结果（或者是Luttinger模型的无限带）。

利用 $\rho_L(x)$ 和 $\rho_R(x)$ 式(19.40a)和(19.40b)中的哈密顿量可以写成

$$H_0 = \pi v_F \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx [\rho_R(x)\rho_R(x) + \rho_L(x)\rho_L(x)] + C(N_L, N_R), \quad (19.48a)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{V_1}{2} \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx [\rho_R(x) + \rho_L(x)] [\rho_R(x) + \rho_L(x)] \quad (19.48b)$$

这个实空间的哈密顿量可以通过引入两个新的场 $\phi(x)$ 和 $P(x)$ 投影成一个熟悉的形式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x) \equiv \rho_R(x) + \rho_L(x) - \rho_{R0} - \rho_{L0}, \quad (19.49)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} P(x) \equiv \rho_R(x) - \rho_L(x) - (\rho_{R0} - \rho_{L0}), \quad (19.50)$$

其中 $\rho_{(R,L)0}$ 分别是左移和右移的背景电荷。

通过对以下对易子进行积分

$$[\partial_x \phi, P] = i\partial_x \delta(x - x'), \quad (19.51a)$$

场 $\phi(x)$ 和 $P(x)$ 互为共轭变量

$$[\phi(x), P(x')] = i\delta(x - x'), \quad (19.51b)$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = [P(x), P(x')] = 0. \quad (19.51c)$$

通过使用这两个新的场算符，哈密顿量可以写成

$$H_0 = \frac{v_F}{2} \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx [P^2(x) + (\partial_x \phi(x))^2], \quad (19.52a)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{V_1}{2\pi} \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx (\partial_x \phi(x))^2, \quad (19.52b)$$

因此总的哈密顿量为

$$H = \frac{\tilde{v}}{2} \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx \left[ gP^2(x) + \frac{1}{g} (\partial_x \phi(x))^2 \right], \quad (19.52c)$$

$$g^{-1} = \sqrt{1 + \frac{V_1}{\pi v_F}}, \quad \tilde{v} = \frac{1}{g} v_F \quad (19.52d)$$

无扰动的哈密顿量 $H_0$ 等价于弦， $P$ 扮演动量算符的角色， $\phi$ 表述局部的位移场。注意与练习19.2中的传输线模型的相似性。无扰动哈密顿量相对应的运动方程为

$$\dot{P}(x) = -\frac{\delta H_0}{\delta \phi(x)} = v_F \partial_x^2 \phi(x) \quad (19.53a)$$

$$\dot{\phi}(x) = +\frac{\delta H_0}{\delta P(x)} = v_F P(x) \quad (19.54b)$$

通过结合(19.53)和(19.49)我们得到连续性方程 $\partial_x J + \dot{\rho} = 0$ ，其中流的定义为

$J = v_F(\rho_R - \rho_L)$ 以及总电荷密度为 $\rho = \rho_R + \rho_L$ 。哈密顿方程(19.53)导出波动方程 $\ddot{\phi} - v_F^2 \partial_x^2 \phi = 0$ ，色散关系为 $\omega = v_F q$ 。

(19.52c)的模型包含相互作用，它给出了 $(g\tilde{v}/v_F)\partial_x J + \dot{\rho} = 0$ ，表明物理电流为 $(g\tilde{v}/v_F)J$ 。返回到定义，我们看到 $g\tilde{v}/v_F = 1$ ，这个相互作用模型因此保持电荷守恒。然而等离子体的速度被相互作用重整化，这一点可以从相应的波动方程看出： $\ddot{\phi} - \tilde{v}^2 \partial^2 \phi = 0$ ，这一点和式子(19.45)中的色散关系是相对应的。相互作用参数和压缩性 $\kappa$ 直接联系， $\kappa$ 的定义为：

$$\kappa \equiv \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} \right)^{-1}. \quad (19.54)$$

按照公式(19.52c)中的哈密顿量，密度上的变化会导致能量的变化 $\delta E = \pi \tilde{v} (\delta \rho)^2 / 2g$ ，因此 $\kappa = g/\pi \tilde{v}$ 。比值 $g v_F / \tilde{v}$ 是 $1/(1 + V_1/[\pi v_F])$ ，对于排斥相互作用，这小于1，在这种情况下，压缩性因相互作用而降低，正如我们在物理上所期望的那样。

最后我们类比3.3节中的声子问题，对角化式(19.52c)中的哈密顿量。首先，我们引入 $\phi(x)$ 和 $P(x)$ 的Fourier变换 $\phi_k$ 和 $P_k$ ，得到

$$H = \frac{\tilde{v}}{2\mathcal{L}} \sum_k \left[ gP_{-k}P_k + \frac{k^2}{g} \phi_{-k}\phi_k \right], \quad (19.55)$$

以及

$$[\phi_k, P_{-k'}] = i\mathcal{L}\delta_{kk'}. \quad (19.56)$$

下一步我们定义玻色算符来对角化(19.55)式

$$\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{L}}} \left( \sqrt{\frac{|k|}{g}} \phi_k + i\sqrt{\frac{g}{|k|}} P_k \right), \quad \gamma_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{L}}} \left( \sqrt{\frac{|k|}{g}} \phi_{-k} - i\sqrt{\frac{g}{|k|}} P_{-k} \right), \quad (19.57)$$

它们有对易关系 $[\gamma_k, \gamma_k^\dagger] = \delta_{kk'}$ , 逆变换很容易得到

$$\phi_k = \sqrt{\frac{\mathcal{L}g}{2|k|}} (\gamma_k + \gamma_{-k}^\dagger), \quad P_k = i\sqrt{\frac{\mathcal{L}|k|}{2g}} (\gamma_{-k}^\dagger - \gamma_k). \quad (19.58)$$

哈密顿量就被对角化为

$$H = \sum_k \tilde{v}|k| \gamma_k^\dagger \gamma_k, \quad (19.59)$$

本征模式和之前Bogoliubov变换的结果, 式子(19.45), 相同

## 19.6 Electron operators in bosonized form

我们之前所做的是发现相互作用模型的电荷密度本征模式和集体激发。我们还没有发现的是one-particle的性质, 也就是通过tunneling实验和输运实验探测到的局域态密度。为此, 我们需要使用玻色子算符表示的单电子算符的显式形式, 这将允许计算单电子格林函数和高阶关联函数。这里我们会构造一个遵循反对易关系的算符, 并且它会使电荷密度偏移一个电荷。

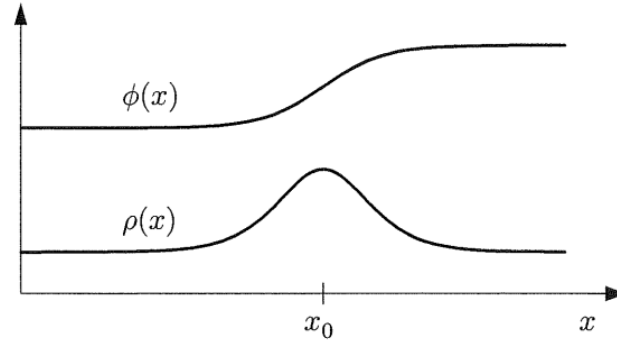


FIG. 19.4. Illustration of a 1D electron gas with a single charge excitation created by adding an electron at position  $x_0$ . The corresponding peak in the density  $\rho(x)$  around  $x_0$  is associated with a kink at  $x_0$  in the phase field  $\phi(x)$ .

玻色化的哈密顿量式(19.40a)是Fock空间表示, 态是由给定左移和右移电子数量的完全填充的费米海 $|N_R, N_L\rangle$ , 加上一些重新排列费米海的玻色子算符 $\rho_L$ 和 $\rho_R$ 的线性组合。实际上, 任何态可以被写成

$$\mathcal{O}(\{\rho_L(x)\}, \{\rho_R(x)\})|N_R, N_L\rangle, \quad (19.60)$$

$\mathcal{O}$ 是某个函数。应该使用这个Fock空间的表示来构建费米算符。首先我们把电子场算符分为左移和右移部分

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \sum_k c_k e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \sum_{k>0} c_{Lk} e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \sum_{k<0} c_{Rk} e^{ikx} = \Psi_R(x) + \Psi_L(x). \quad (19.61)$$

所以一个场算符 $\Psi_R(x)$ 作用在一个态上时会做两件事：它使电子的数量减少了1，并使该特定状态的玻色子构型发生位移。下面我们引入“梯子算符”，它的作用是使电子数改变1

$$U_R|N_R, N_L\rangle = |N_R - 1, N_L\rangle, \quad U_R^\dagger|N_R, N_L\rangle = |N_R + 1, N_L\rangle, \quad (19.62)$$

类似的我们有集合 $(U_L, U_L^\dagger)$

电子场算符的另一个操作是位移对应于一个电子电荷突然消失的玻色子模式。这一点最容易从它和密度算符的对易子看出

$$[\Psi_\eta(x), \rho_\eta(x')] = \delta(x - x')\Psi_\eta(x), \quad (19.63)$$

其中 $\eta$ 表示电子的种族，在我们的例子中表示左移和右移，即 $\eta = L, R$ 。

因为密度算符已经被表示为一个玻色算符，我们可以试图用位移算符 $e^B$ 来表示单电子算符，其中 $B$ 是玻色算符的某个线性方程。从练习19.1(a)中我们知道这个算符与密度算符的对易与(19.63)式有一个相似的形式：

$$[e^B, \rho_\eta(x')] = [B, \rho_\eta(x')]e^B, \quad (19.64)$$

式(19.47a)与(19.47b)中的 $\rho$ 算符形式表明

$$\Psi_\eta(x) = A e^{-i\theta_\eta(x) \mp ik_F x} U_\eta, \quad \eta = R, L, \quad (19.65a)$$

$$\begin{aligned} [\rho_R(x), \rho_R(x')] &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'). \\ [\rho_L(x), \rho_L(x')] &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (19.47)$$

依赖于 $x$ 的相算符 $\theta_\eta(x)$ 是：

$$\theta_\eta(x) = \mp 2\pi \int_{-\infty}^x dx' [\rho_\eta(x') - \rho_{\eta 0}], \quad \eta = R, L. \quad (19.65b)$$

这里—对应 $\eta = R$ ，+对应 $\eta = L$ 。我们特别注意密度的常数部分，它给出了 $\Psi_\eta(x)$ 定义中的因子 $\mp ik_F x$ 。

让我们检查一下，事实上，这是有效的

$$[\Psi_\eta(x), \rho_\eta(x')] = A \left[ e^{-i\theta_\eta(x)}, \rho_\eta(x') \right] e^{\mp ik_F x} U_\eta \quad (19.66)$$

其中 $A$ 是一个还未被找到的归一化系数，

$$\begin{aligned} \left[ e^{-i\theta_\eta(x)}, \rho_\eta(x') \right] &= \pm i e^{-i\theta_\eta(x)} (2\pi) \int_{-\infty}^x dy [\rho_\eta(y), \rho_\eta(x')] \\ &= \pm 2\pi i e^{-i\theta_\eta(x)} \int_{-\infty}^x dy \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - x') \right] \\ &= \delta(x - x') e^{-i\theta_\eta(x)} \end{aligned} \quad (19.67)$$

因此，我们得出结论，事实上，对易子的计算结果与预期结果一致。此外，我们看到反对易关系也正确地出现了

$$\begin{aligned}\Psi_\eta(x)\Psi_\eta(x') &= \Psi_\eta(x')\Psi_\eta(x)\exp(-[\theta(x),\theta(x')]) \\ &= -\Psi_\eta(x')\Psi_\eta(x)\end{aligned}\quad (19.68)$$

这是因为通过使用Kac-Moody代数关系(19.47a)和(19.47b)，我们在指数上有对易子

$$[\theta_\eta(x),\theta_\eta(x')] = \pm i\pi\text{sign}(x' - x). \quad (19.69)$$

相同的论证也可以用于在不同位置 $x \neq x'$ 时的反对易子 $\{\Psi_\eta^\dagger(x), \Psi_\eta(x')\}$ 。在相同位置 $x = x'$ ，反对易子并没有良定义，不过我们可以在场 $\theta_\eta$ 的Fourier变换中引入一个有限动量截断，使得相同位置时的反对易子有良定义”：

$$\theta_\eta(x) = \pm \frac{2\pi i}{\mathcal{L}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} e^{ikx - \alpha|k|/2} \rho_\eta(k). \quad (19.70)$$

为了确定截断 $\alpha$ 和式(19.65a)中比例系数的关系，我们计算 $x \rightarrow x'$ 时的反对易关系。我们把 $\Psi_\eta(x)\Psi_\eta^\dagger(x')$ 中的湮灭和产生算符分开，因此湮灭算符在产生算符的左边。这里我们用(19.41a)中的玻色子来表示右移电子算符：

$$\Psi_R(x) = A e^{-ik_F x} \exp\left(\frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k>0} \sqrt{\frac{kL}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha k/2}}{k} [e^{ikx} a_k - e^{-ikx} a_k^\dagger]\right), \quad (19.71a)$$

$$\Psi_R^\dagger(x') = A^* e^{ik_F x'} \exp\left(\frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k'>0} \sqrt{\frac{k'L}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha k'/2}}{k'} [e^{-ik'x'} a_{k'}^\dagger - e^{ik'x'} a_{k'}]\right), \quad (19.71b)$$

$$\Psi_R^\dagger(x') = A^* e^{ik_F x'} \exp\left(\frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k'>0} \sqrt{\frac{k'L}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha k'/2}}{k'} [e^{-ik'x'} a_{k'} - e^{ik'x'} a_{k'}^\dagger]\right) ???$$

$$\begin{aligned}\{\Psi_R(x), \Psi_R^\dagger(x')\} &\equiv |A|^2 e^{-ik_F(x-x')} (e^B e^C + e^C e^B) \\ &= |A|^2 e^{-ik_F(x-x')} e^{B+C} (e^{[B,C]/2} + e^{-[B,C]/2}),\end{aligned}\quad (19.72)$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[B, C] &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k>0} \frac{e^{-k\alpha}}{k} (e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}) \\ &= i \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-k\alpha} \sin(k(x-x')) = i \tan^{-1}\left(\frac{x-x'}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

(19.72)中的对易子因此变为

$$\{\Psi_\eta(x), \Psi_\eta^\dagger(x')\} = |A|^2 e^{-ik_F(x-x')} e^{B+C} \frac{2\alpha}{\sqrt{(x-x')^2 + \alpha^2}}$$

因为 $e^{B+C}$ 中仍然包含截断参数 $\alpha$ 所以我们还不能取 $\alpha \rightarrow 0$ 。为了以可控的方式做到这一点，我们必须把表达式中的产生和湮灭算符分开

$$e^{B+C} \equiv \exp\left(\sum_{k>0} [a_k^\dagger f_k - a_k f_k^*]\right), \quad (19.75)$$

其中 $f_k$ 是



$$f_k = -\frac{2\pi}{k\mathcal{L}} \sqrt{\frac{k\mathcal{L}}{2\pi}} \left( e^{-ikx} + e^{ikx'} \right) e^{-\frac{1}{2}\alpha k}. \quad (19.76)$$

$$e^{B+C} = \exp \left( \sum_{k>0} a_k^\dagger f_k \right) \exp \left( - \sum_{k>0} a_k f_k^* \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k>0} |f_k|^2 \right). \quad (19.77)$$

对于上式的最后一项我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_k |f_k|^2 &= -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k>0} \frac{e^{-k\alpha}}{k} \left( e^{-ikx} - e^{-ikx'} \right) \left( e^{ikx} - e^{ikx'} \right) \\ &= - \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-k\alpha} \{1 - \cos[k(x-x')]\} = \ln \sqrt{\frac{\alpha^2}{(x-x')^2 + \alpha^2}}, \end{aligned} \quad (19.78)$$

现在对于(19.77)中的前两项我们可以安全的取极限 $\alpha \rightarrow 0$ ，因为在远小于截断能量 $\propto 1/\alpha$ 的能量处，这两项中的 $k$ 求和被湮灭算符截断。换句话说，对于一个典型的矩阵元

$$\langle n | \exp \left( \sum_k a_k^\dagger f_k \right) \exp \left( - \sum_k a_k f_k^* \right) | m \rangle, \quad (19.79)$$

$|n\rangle$ 和 $|m\rangle$ 中被占据的 $k$ 态远低于 $1/\alpha$ 因此我们可以忽略矩阵元中的 $\alpha$ 。我们因此剩下

$$\left\{ \Psi_R(x), \Psi_R^\dagger(x') \right\} = |A|^2 e^{-ik_F(x-x')} \exp \left( \sum_k a_k^\dagger f_k \right) \exp \left( - \sum_k a_k f_k^* \right) \frac{2\alpha^2}{(x-x')^2 + \alpha^2}. \quad (19.80)$$

取极限 $\alpha \rightarrow 0$ 最后一个因子会变成 $2\pi\alpha\delta(x-x')$ ，并且假设 $f_k(x=x')=0$ ，我们最后得到

$$\left\{ \Psi_\eta(x), \Psi_\eta^\dagger(x') \right\} \rightarrow 2\pi\alpha |A|^2 \delta(x-x'), \quad \text{for } \alpha \rightarrow 0. \quad (19.81)$$

归一化系数 $|A|^2$  因此为

$$|A|^2 = \frac{1}{2\pi\alpha}. \quad (19.82)$$

因为我们希望用场 $\phi$ 和 $P$ 来表示单粒子算符，我们发现 $\{\theta_L, \theta_R\}$ 和 $\{\phi, P\}$ 的对应：

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\theta_R - \theta_L), \\ P &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\partial_x \theta_R + \partial_x \theta_L), \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \theta_R &= \sqrt{\pi} \left[ -\phi + \int^x dx' P(x') \right], \\ \theta_L &= \sqrt{\pi} \left[ \phi + \int^x dx' P(x') \right], \end{aligned} \right. \quad (19.83)$$

归一化电子算符的最终形式写作：

$$\Psi_{R,L}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} U_{R,L} e^{\pm ik_F x} e^{-i\sqrt{\pi}[\mp\phi(x) + \Phi(x)]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} U_{R,L} e^{\pm ik_F x} e^{-i\theta_{R,L}(x)}, \quad (19.84)$$

其中

$$\Phi(x) = \int^x dx' P(x') \quad (19.85)$$

注意(19.84)中的算符性质是在极限 $\alpha \rightarrow 0$ 下的。