18.6 Gauge symmetry breaking and zero resistivity

第四章中讨论了相变和破缺对称性的关系. 这一节中我们将这些概念应用到正常态到超导态的相变中, 相关的对称性是**全局规范对称性 (global gauge symmetry)**.

- 这一点可以从并非规范不变的London方程(18.52)中清晰地看到.
- 为了理解这一点, 还需要认识到超导序参量是依赖于规范的选择的.

> 4.5.1 Breaking of global gauge symmetry and its consequences

18.6.1 规范变换

首先考虑磁场(由矢势$\mathbf{A}$描述)中的无相互作用电子气体, 哈密顿量由式(1.90)给出

$$H_{\mathbf{A}}=\frac{1}{2m}\sum_{\sigma}\int d\mathbf{r}\Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r})\left(\frac{1}{i}\nabla_{\mathbf{r}}+e\mathbf{A}\right)^{2}\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \tag{18.74}$$

在如下的规范变换(gauge transformation)下

$$\mathbf{A}\quad\rightarrow\quad\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}+\nabla\chi, \tag{18.75a}$$

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{r})\quad\rightarrow\quad\tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{r})=\Psi_{\sigma}(\mathbf{r})e^{-ie\chi} \tag{18.75b}$$

哈密顿量 $H_{\mathbf{A}}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 都保持不变. 这种规范变换在更一般的语境下称为 $\mathrm{U}(1)$ 规范变换, 因为相因子 $\exp(-ie\chi)$ 代表一个 1×1的标量幺正变换. 这一相因子也会出现在其他表象下的产生湮灭算符, 如 $\mathbf{k}$-表象中的 $c_{\mathbf{k}\sigma}$.

但在 Meissner 效应出现的场景下, London 方程 (18.52) 并不是规范不变的, 或者说在变换 (18.75a)下物理电流 $\mathbf{J}_e$ 是会改变的. 考虑横向规范 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, 我们具体地进行计算, 规范变换多出来的纵向部分 $\nabla\chi$ 会影响到序参量 Δ,

$$c_{\mathbf{k}\sigma}\rightarrow c_{\mathbf{k}\sigma}e^{-ie\chi}\Rightarrow\Delta_{\mathbf{k}}=-\sum_{\mathbf{k}'}V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\left\langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow}c_{\mathbf{k}'\uparrow}\right\rangle\rightarrow\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}=\Delta_{\mathbf{k}}e^{-i2e\chi} \tag{18.76}$$

这一结果意味着 Meissner 效应的计算必须是与序参量、或者说与矢势的纵向分量一起自洽地进行的. 这种计算是是随机相位近似的一个推广, 考虑了配对关联. 这一部分的具体计算可以见书籍 Schrieffer (1983). 幸运的是, 自洽计算的结果并没有和最初的London方程由显著不同.

规范变换回改变超导序参量 Δ. 但即使在最简单的零磁场情形, 且考虑一个常数 χ (满足 $\nabla\chi=0$), 序参量也会在规范变换下变化, 因为只要 $-e\chi=\varphi=$ const., 就有

$$\mathbf{A}=0\rightarrow\tilde{\mathbf{A}}=0, \tag{18.77a}$$

$$\Delta_{\mathbf{k}}\rightarrow\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}=\Delta_{\mathbf{k}}e^{i2\varphi}. \tag{18.77b}$$

因此BCS哈密顿量(18.10)中配对场 (pair-field) Δ 的存在似乎打破了最初哈密顿量的规范不变性, 这暗示了这就是超导相变所相关的对称性.

规范对称性的破缺和无耗散流

在临界温度之上, 序参量为零, 哈密顿量在全局规范变换下保持不变. 在 T_c 之下, 对称性是破缺的, 可参加4.4节的定义, 序参量及其相位会获得一个有限值, 这意味着一个特定的"规范角(gauge angle)" φ 被选择了. 这种全局相位相干性是式(18.8)中的复杂叠加和式(18.11)中的关联两者的组合.

一个类比的情境是铁磁系统. 在居里温度之上, 所有自旋旋转一个常数角度不会改变哈密顿量, 因此具有一个全局的SO(3)对称性, 因为自旋期望值 $\langle \mathbf{S} \rangle$ 在旋转下不变. 类似地, 相位旋转会改变超到序参量, $\langle c_\nu c_{\nu'} \rangle$. 超导和铁磁系统的类比如下表所示:

	超导体	**铁磁体**
对称性	全局$\mathrm{U}(1)$规范对称性	全局$\mathrm{SO}(3)$对称性
对称性数学表达式	$c_\nu \to c_\nu e^{i\varphi} \Rightarrow H \to H$	$\mathbf{S} \to \mathbf{US} \Rightarrow H \to H$
对称性破缺	$0 \neq \langle c_\nu c_{\nu'} \rangle \to \langle c_\nu c_{\nu'} \rangle e^{2i\varphi}$	$0 \neq \langle \mathbf{S} \rangle \to \mathbf{U} \langle \mathbf{S} \rangle$

在铁磁体中, 为什么有限的期望值$\langle \mathbf{S} \rangle$会给出磁矩是很清晰的. 但是为什么超导中的对称性破缺会导致没有电阻是不太直接的.

- 超导态对一个整体相位的改变非常敏感, 但波函数上多一个**常数相位**并没有可测量的效应.
- 但是量子力学中, 相位差、或者说**相位梯度**是可以有测量效应的.
  - 假设我们向超导态施加一个和位置有关的相位$\varphi(\mathbf{r})$, 但它随着位置的变化非常缓慢, 只有在一个宏观距离上才能看到显著的变化.
  - 对于任意其他非超导系统, 谈论一个宏观尺度上的量子力学相位差是没有意义的, 这是因为量子相干性在很小的尺度上(对金属$\lesssim 10\mathrm{nm}$)就已经被各种各样的散射时间所破坏了.
  - 超导态和宏观尺度上的相位差相关是一个不平常的事情, 这告诉我们超导电性是一个**宏观量子现象**.

事实上, 如果相位是空间上缓变的, 系统会选择携带一个电流以将自由能最小化. 换句话说, 如果迫使一个电流通过超导体, 它会通过倾斜序参量的相位来响应，从而维持超导序。最终人们发现电流和相位变量的关系为

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \frac{\rho_s}{m_e} \nabla \varphi, \tag{18.78}$$

其中 ρ_s 是处于凝聚状态的电子的密度.

> 具体推导过程可以见4.5.1节中的U(1)变换和超导电性, 但那里的结果中出现的密度是$\rho_0 = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$而不是$\rho_s$, 但注意到这个热平衡期望值 sum over 的态是只有超导态, 可以见关于4.5.1节求迹的讨论.

即使在热力学平衡态, 超导系统也可以通过携带流来最小化能量. 这告诉我们, 这一电流必须是无耗散的, 因为保持热力学平衡态意味着保持一个常数的熵, 常数的熵意味着没有热量改变. 当然, 凝聚能量相比零电流时会变小, 但只要这一能量花费小于走出超导态的其他路径, 则系统会选择携流态. 当携流态和走出超导态的能量花费一致时, 就达到了一个临界电流.

更进一步, 在这一框架下, 可以清晰看到激发能隙并不是超导电性本身的原因. 超导电性是由规范不变性的缺失引起的, 故有可能会存在无能隙的超导体(gapless superconductors).

以上讨论只是定性地给出了超电流(supercurrent)的存在, 即没有电压的电流. 下一节中我们会更严格地讨论 Josephson 效应. Josephson 超电流可以视为式(18.78)的一个离散且极端的版本, 因为它出现在两个由绝缘体连接的超导体之间.

4.5.1 Breaking of global gauge symmetry and its consequences

对称性破缺: 铁磁体 vs 超导体

- 铁磁体回顾: 所有电子的自旋可以同时旋转一个相同角度, 哈密顿量不变, 这是一个**全局SO(3)对称性(global SO(3) symmetry)**.
  - 破缺的SO(3)对称性: 在做平均场的时候, 需要选择出一个磁化方向做为特殊的磁化方向. 由于旋转会改变磁化强度的方向, 也就是期望值$\langle \mathbf{S} \rangle$在同时旋转下*并非*不变. 实际上我们的结果是除了z方向自旋之外其他方向都为零.
- 超导态: 相关的对称性是**全局规范对称性(global gauge symmetry)**, 即给所有电子同时加上一个相同的常数相位, 哈密顿量保持不变.
  - 同样的, 在全局规范对称性破缺之后, 相位的旋转会改变超导的序参量. 因此我们可以想到超导中序参量的形式必然为粒子数不守恒的形式如$\langle c_\nu c_{\nu'} \rangle$和$\langle c_\nu^\dagger c_{\nu'}^\dagger \rangle$.
  - 当然, 粒子数应当是守恒的, 我们这里讨论的超导体实际上是和电子库相连的,

超导体和铁磁体之间的对称性破缺类比如下表所示:

	超导体	**铁磁体**
对称性	全局$\mathrm{U}(1)$规范对称性	全局$\mathrm{SO}(3)$对称性
对称性数学表达式	$c_\nu \to c_\nu e^{i\varphi} \Rightarrow H \to H$	$\mathbf{S} \to \mathbf{US} \Rightarrow H \to H$
对称性破缺	$0 \neq \langle c_\nu c_{\nu'} \rangle \to \langle c_\nu c_{\nu'} \rangle e^{2i\varphi}$	$0 \neq \langle \mathbf{S} \rangle \to \mathbf{U}\langle \mathbf{S} \rangle$

对称性的自发破缺就是哈密顿量具有对称性, 但是系统状态和相关的平均场参数没有这个对称性.

$\mathrm{U}(1)$变换和超导电性

在铁磁体中, 为什么有限的期望值$\langle \mathbf{S} \rangle$会给出磁矩是很清晰的. 但是为什么超导中的对称性破缺会导致没有电阻是不太直接的.

- 超导态对一个整体相位的改变非常敏感, 但波函数上多一个**常数相位**并没有可测量的效应.
- 但是量子力学中, 相位差、或者说**相位梯度**是可以有测量效应的.
  - 假设我们向超导态施加一个和位置有关的相位$\varphi(\mathbf{r})$, 但它随着位置的变化非常缓慢, 只有在一个宏观距离上才能看到显著的变化.
  - 对于任意其他非超导系统, 谈论一个宏观尺度上的量子力学相位差是没有意义的, 这是因为量子相干性在很小的尺度上(对金属$\lesssim 10\mathrm{nm}$)就已经被各种各样的散射时间所破坏了.
  - 超导态和宏观尺度上的相位差相关是一个不平常的事情, 这告诉我们超导电性是一个**宏观量子现象**.

$\mathrm{U}(1)$变换的数学描述

定义一个用于改变相位的幺正算符U

$$U = \exp\left(i \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r})\right) \tag{1}$$

其中$\rho=\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})$为密度算符. 它的性质可以通过它对场算符的作用情况看到(在二次量子化范式中, 场算符可以用于构造所有算符):

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(\mathbf{r})&=U\Psi(\mathbf{r})U^{-1}=\exp\left(i\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r})\exp\left(-i\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\right)\\
&=\Psi(\mathbf{r})\exp(-i\varphi(\mathbf{r}))\\
\tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})&=U\Psi^\dagger(\mathbf{r})U^{-1}=\Psi^\dagger(\mathbf{r})\exp(i\varphi(\mathbf{r})).
\end{aligned}\tag{2}$$

- 这个关系类似于量子光学中常用的公式$e^{i\theta a^\dagger a}ae^{-i\theta a^\dagger a}=ae^{-i\theta}$, $e^{i\theta a^\dagger a}a^\dagger e^{-i\theta a^\dagger a}=a^\dagger e^{i\theta}$, 推导都是利用Baker-Hausdorff公式(BH公式)以及玻色-费米通用的产生湮灭算符-数算符对易关系进行证明. 对易关系出来的 Dirac δ 会将积分去掉.
- 另一种方法, 上式可以通过以下的微分方程和边界条件得到

> $$\begin{cases}\dfrac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{r}')}\tilde{\Psi}(\mathbf{r})=iU\left[\rho(\mathbf{r}'),\Psi(\mathbf{r})\right]U^{-1}=i\tilde{\Psi}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\\ \tilde{\Psi}_{\varphi=0}=\Psi\end{cases}$$
>
> 后面第五章的5.24式也是用相同方式推导的.

这两个结果乘在一起告诉我们密度算符$\rho(\mathbf{r})$在U变换下是不变的.

定义了U对场算符的变换结果, 就可以得到其他所有算符的变换结果. 例如, 可以对密度算符$e^{-\beta H}$进行一个U变换, 然后计算新的配分函数

$$\tilde{Z}=\mathrm{Tr}'\left[Ue^{-\beta H}U^{-1}\right]=\mathrm{Tr}'\left[e^{-\beta\tilde{H}}\right]\tag{3}$$

如果我们应用求迹的轮换不变性, U是可以消失的, 这也是我们可以通常说幺正变换并不改变求迹的原因. 但是, 我们并没有这么做. 在处理具有破缺对称性的系统时, 上面的sum-over-states是必须收到约束的, 这将导致求迹的轮换不变性不再成立. 我们通过记号Tr'来表示这个**求迹是受到自发对称性破缺的约束的**.

现在我们进行变换后哈密顿量$\tilde{H}$的计算. 实际上, 上面的变换只会作用在动能项中, 其他的Coulomb相互作用项、杂质散射项和声子耦合项都只包含了密度算符项(或者说同样数目的产生算符和湮灭算符乘在一起), 都是U不变的. 场下的动能项变换如下:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}&=\frac{1}{2m_e}\int d\mathbf{r}\mathbf{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla+e\mathbf{A}\right)^2e^{-i\varphi(\mathbf{r})}\Psi(\mathbf{r})\\
&=\frac{1}{2m_e}\int d\mathbf{r}\mathbf{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\left(\frac{\hbar}{i}\nabla+e\mathbf{A}-\hbar\nabla\varphi(\mathbf{r})\right)^2\Psi(\mathbf{r}),\\
&=H-\hbar\int d\mathbf{r}\nabla\varphi(\mathbf{r})\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r})+\frac{\hbar^2}{2m_e}\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})(\nabla\varphi(\mathbf{r}))^2,
\end{aligned}\tag{4}$$

我们解释一下最后一个等号的推导. 它和粒子流密度算符(particle current density operator)\mathbf{J}(\mathbf{r})中的推导过程是类似的, 但其实不需要重新推一遍. 可以将上式第二个等号中小括号里面,$\nabla\varphi$相关的项凑到矢势$\mathbf{A}$里面去

$$e\left(\mathbf{A}+\frac{\hbar}{-e}\nabla\varphi\right)=e\left[\mathbf{A}-\Phi_0\nabla\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)\right]=e\tilde{\mathbf{A}},\Phi_0=\frac{2\pi\hbar}{e}$$

这看起来就像是$\mathbf{A}$做了一个规范变换$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\alpha \equiv \tilde{\mathbf{A}}$. 因此只需要引用与矢势耦合的哈密顿量(式equ:1.4.3HtoJ), 将其中的$\mathbf{A}$换为$\tilde{\mathbf{A}}$, 然后将$\nabla\varphi$相关的项单独拖出来得证了

equ:4.5.1HamilwithNablaVarphi

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{1}{2m_e}\int d\mathbf{r}\boldsymbol{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + e\tilde{\mathbf{A}}\right)^2\Psi(\mathbf{r}) \\
&= T - \int d\mathbf{r}\left\{\tilde{\mathbf{A}}\cdot(-e)\mathbf{J}^\nabla(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m_e}\tilde{\mathbf{A}}^2\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right\} \\
&= H - \int d\mathbf{r}\left\{\left(\frac{\hbar}{-e}\nabla\varphi\right)\cdot(-e)\mathbf{J}^\nabla(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m_e}\left[2\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\hbar}{-e}\nabla\varphi\right) + \frac{\hbar^2}{e^2}(\nabla\varphi)^2\right]\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right\} \\
&= H - \int d\mathbf{r}\left\{\hbar\nabla\varphi\cdot\mathbf{J}^\nabla(\mathbf{r}) - \hbar\nabla\varphi\cdot\left[\frac{-e}{m_e}\mathbf{A}\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right] - \frac{\hbar^2}{2m_e}(\nabla\varphi)^2\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right\} \\
&= H - \int d\mathbf{r}\left\{\hbar\nabla\varphi\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m_e}(\nabla\varphi)^2\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right\} \\
&= H - \hbar\int d\mathbf{r}\nabla\varphi(\mathbf{r})\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{2m_e}\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})(\nabla\varphi(\mathbf{r}))^2,
\end{aligned} \tag{5}$$

其中流算符$\mathbf{J}(\mathbf{r})$的定义见粒子流密度算符.

我们在最初就假设了相位φ是一个宏观量, 这和超导体中的非超导态是相反. 现在对自由能求关于相位φ的极小值, 从而找到最低自由能的条件. 从上式可以看到能量并不直接依赖于φ本身而是依赖于其梯度$\nabla\varphi$, 因此我们可以直接对平均场自由能关于$\nabla\varphi(\mathbf{r})$求变分

4.55

$$\frac{\delta F}{\delta\nabla\varphi} = -\langle\mathbf{J}(\mathbf{r})\rangle + \frac{\hbar}{m_e}\langle\rho(\mathbf{r})\rangle\nabla\varphi(\mathbf{r}) = 0 \tag{6}$$

可见即使处于平衡态(自由能最小), **当体系携带流的时候能量是最小的**, 此时的流均值为

4.56

$$\langle\mathbf{J}\rangle = \frac{\hbar\rho_0}{m_e}\nabla\varphi \tag{7}$$

其中$\rho_0 = \langle\rho(\mathbf{r})\rangle$为某处的平均密度. 体系中某处的平均流密度是正比于此处的相位梯度的.

超导电性的物理解释

强行施加一个相位梯度到系统之后, 系统能量通过携带流来实现能量的最小化, 即使系统处于热力学平衡态. 这意味着一个无耗散的流(dissipationless current).

> 在现实中, 式4.56中的密度ρ_0应该仅仅包含那些参与到超导凝聚的电子, 这部分电子统称为称为超流(superfluid). 但本节中给出的简化推导是假设了所有电子都包含在ρ_0里头了.

在金属的正常态下，电流总是与非平衡状态相联系，在非平衡状态下，能量不断地从驱动源耗散并被导体吸收。

当然系统携带流是需要付出能量的, 但只要这个能量花费小于走出超导相所需的能量, 那么系统依然会选择**携带流的状态(current carrying state)**. 临界的电流就是上述两个能量相等的时候, 此时超导体就进入正常态了.

总结: 考虑一个系统, 假设其能量依赖于宏观尺度相位差别或相位梯度. 当一个相位梯度被施加到系统之后, 不可避免地会导致系统携带一个无耗散的流, 它将引入相位梯度所耗费的能量最小化.

最后, 应当注意到激发能隙的出现并不是超导电性本身的原因.超导电性实际上是源于规范不变性的缺失的, 事实上无能隙超导体(gapless superconductors)是存在的.

18.7 The Josephson effect

约瑟夫森效应: 当两个超导体被一层薄薄的绝缘层隔开时，仍然可以观察到在它们之间流动的超电流. 绝缘层是真空或者氧化物, 也被称为所谓的隧道结(tunnel junction)。

本节将使用一种基于自由能导数的方法来强调，超电流是平衡量，而不是正常导体中的非平衡耗散电流.

我们将绝缘体层两侧的电子算符分别记为 $c_{\mathbf{k}\sigma}$ 和 $f_{\mathbf{k}\sigma}$. c 和 f 系统都是超导BCS系统, 两者之间的隧穿哈密顿量为(可见式(8.65))

$$H_t = \sum_{\mathbf{kp}\sigma} \left(t_{\mathbf{kp}} c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} f_{\mathbf{p}\sigma} + t^*_{\mathbf{kp}} f^\dagger_{\mathbf{p}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} \right). \tag{18.79}$$

在后面我们假设在感兴趣的能量范围内, 隧穿矩阵元只微弱依赖于 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}$, 进而有近似

$$t_{\mathbf{kp}} \approx t, \qquad \text{a constant.} \tag{18.80}$$

两侧超导体的哈密顿量为通常的BCS哈密顿量,

$$H_c = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_k c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} - \Delta e^{i\phi_c} \sum_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} - \Delta e^{-i\phi_c} \sum_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}, \tag{18.81a}$$

$$H_f = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_k f^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} f_{\mathbf{k}\sigma} - \Delta e^{i\phi_f} \sum_{\mathbf{k}} f^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} f^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} - \Delta e^{-i\phi_f} \sum_{\mathbf{k}} f_{-\mathbf{k}\downarrow} f_{\mathbf{k}\uparrow}, \tag{18.81b}$$

上面已经假设了两个超导体是全同的, 即假设两者序参量的幅值是一个相同的常数Δ, 但可以相差一个相位, 记为 ϕ_c 和 ϕ_f.

规范变换和隧穿电流的表达式

在如下的规范变换下

$$c \to e^{i\frac{1}{2}\phi_c} c \text{ and } f \to e^{i\frac{1}{2}\phi_f} f, \tag{18.82}$$

隧穿哈密顿量会出来一个两侧相位差, 它可以吸收进隧穿矩阵元t里面去

$$t \to e^{-i\frac{1}{2}(\phi_c - \phi_f)} t = e^{-i\frac{1}{2}\phi} t, \tag{18.83}$$

其中定义了相位差 $\phi = \phi_c - \phi_f$. 将变换(18.82)和 (18.83)代入到隧穿哈密顿量(18.79), 在平衡态即没有电压偏置施加时, 会存在一个称为Josephson电流的电流I_J流过隧穿结

$$I_J = \langle I \rangle = (-2e) \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} H_t \right\rangle = (-2e) \frac{\partial F}{\partial \phi} \tag{18.84}$$

- 第二个等号: I 是电流算符 $I = (-e)\dot{N}_c$, 对H_t进行求导

> $$\frac{\partial H_t}{\partial \phi}=-i\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{kp}\sigma}\left(te^{-i\frac{1}{2}\phi}c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}f_{\mathbf{p}\sigma}-t^*e^{i\frac{1}{2}\phi}f_{\mathbf{p}\sigma}^{\dagger}c_{\mathbf{k}\sigma}\right)$$
>
> 会看到本来描述两个不同方向的隧穿过程之间差了一个负号,这样的话这两项描述的就是同一方向的电流, 第一项描述$\mathbf{p}$电子隧穿到$\mathbf{k}$处引起的$\mathbf{k}$电子变多, 第二项描述 $\mathbf{k}\to\mathbf{p}$ 电流的相反数. 然后与式(8.67)定义的流过隧穿结电流比较, 只需要加一个2与$1/2$ cancel, 然后重新按照式(18.83)定义隧穿矩阵元, 即可证明这个等号.

- 第三个等号: $F=\langle E\rangle-TS$ 是自由能. 注意在规范变换(18.82)下, 两侧超导体哈密顿量对ϕ的依赖已经转移到了H_t里面, H_c和H_f已经不显含ϕ, 因此对F的偏导相当于对H_t的偏导.

Josephson 电流存在于热平衡态, 因此是它在没有外加电压偏置的意义上可以说是无耗散的, 在平衡态两侧的化学势根据定义是一样的.

dc Josephson 效应

下面, 我们计算 Josephson 电流 (18.84)到关于隧穿振幅的二阶. 我们需要计算 H_t 导数的热平衡期望值, 其中涉及到一个热权重因子, 只需展开到关于H_t的一阶即可, $\exp(-\beta H)\approx\exp\left(-\beta H_0\right)T_\tau\left[1-\int_0^\beta d\tau\hat{H}_t(\tau)\right]$:

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial\phi}H_t\right\rangle\approx-\int_0^\beta d\tau\left\langle T_\tau\hat{H}_t(\tau)\frac{\partial}{\partial\phi}H_t\right\rangle_0=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}\int_0^\beta d\tau\left\langle T_\tau\hat{H}_t(\tau)H_t\right\rangle_0, \tag{18.85}$$

其中期望值符号 $\langle.\rangle_0$ 是关于非微扰哈密顿量(18.81a)和(18.81b)的. 将隧穿哈密顿量代入, 并凑成Nambu格林函数(18.44)的非对角矩阵元

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}\int_0^\beta d\tau\left\langle T_\tau\hat{H}_t(\tau)H_t\right\rangle_0&=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\int_0^\beta d\tau\sum_{\mathbf{kp}}t^2e^{i\phi}\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{21}(\mathbf{k},\tau)\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{12}(\mathbf{p},-\tau)+\text{ c.c.}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{ik_n}\sum_{\mathbf{kp}}t^2e^{i\phi}\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{21}\left(\mathbf{k},ik_n\right)\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{12}\left(\mathbf{p},ik_n\right)+\text{ c.c.}\right),\end{aligned}\tag{18.86}$$

第二个等号代入了时域格林函数的Fouirer展开形式并将τ积分做掉了, 频域Nambu格林函数见式(18.47). 可以继续计算松原频率求和:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}}\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{21}\left(\mathbf{k},ik_n\right)=\sum_{\mathbf{p}}\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{12}\left(\mathbf{p},ik_n\right)&\\=\frac{1}{2}\Delta d\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\frac{1}{\left(ik_n\right)^2-E^2}&\\=-\frac{1}{2}\Delta d\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)\frac{\pi}{\sqrt{k_n^2+\Delta^2}}.&\end{aligned}\tag{18.87}$$

其中第二步连续化的同时近似将态密度视为了费米能级处的常数态密度, 这是因为被积函数主要集中在$\xi=0$附近. 这样, 我们可以得到Josephson 电流 I_J,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}\int_0^\beta d\tau\left\langle T_\tau \hat{H}_t(\tau)H_t\right\rangle_0 &= \frac{1}{\beta}\left(\sum_{ik_n} t^2 i e^{i\phi}\sum_{\mathbf{kp}}\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{21}\left(\mathbf{k}, ik_n\right)\overline{\overline{\mathcal{G}}}_{12}\left(\mathbf{p}, ik_n\right)+\text{ c.c. }\right)\\
&= \frac{1}{\beta}\sum_{ik_n} t^2\left(\frac{\pi\Delta d\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)}{2}\right)^2\frac{1}{k_n^2+\Delta^2}\left(ie^{i\phi}+\text{ c.c. }\right)\\
&= \frac{1}{\beta}\sum_{ik_n}\left(\frac{\pi\Delta d\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)t}{2}\right)^2\frac{1}{k_n^2+\Delta^2}\left(-2\sin\phi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\sum_{ik_n}\frac{1}{k_n^2+\Delta^2} = -\frac{1}{\beta}\sum_{ik_n}\frac{1}{\left(ik_n\right)^2-\Delta^2} &= \frac{1}{2\beta\Delta}\sum_{ik_n}\left(\frac{1}{ik_n+\Delta}-\frac{1}{ik_n-\Delta}\right)\\
&= \frac{1}{2\beta\Delta}\sum_{ik_n}\left(\frac{e^{ik_n0^+}}{ik_n+\Delta}-\frac{e^{ik_n0^+}}{ik_n-\Delta}\right)\\
&= \frac{1}{2\Delta}\left[n_F\left(-\Delta\right)-n_F\left(\Delta\right)\right]\\
&= \frac{1}{2\Delta}\left[\frac{1}{1+e^{-\beta\Delta}}-\frac{1}{1+e^{\beta\Delta}}\right]\\
&= \frac{1}{2\Delta}\frac{e^{\beta\Delta}-1}{e^{\beta\Delta}+1}=\frac{1}{2\Delta}\tanh\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_J &= (-2e)\frac{-1}{\beta}\sum_{ik_n}\left(\frac{\pi\Delta d\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}\right)t}{2}\right)^2\frac{1}{k_n^2+\Delta^2}\left(-2\sin\phi\right)\\
&= -e\left[\pi\Delta d\left(\varepsilon_F\right)t\right]^2\left(\frac{1}{\beta}\sum_{ik_n}\frac{1}{k_n^2+\Delta^2}\right)\sin\phi\\
&= -\frac{1}{2}e\left[\pi d\left(\varepsilon_F\right)t\right]^2\Delta\tanh\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)\sin\phi\\
&= -\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{eR_N}\tanh\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)\sin\phi,
\end{aligned}
\tag{18.88}
$$

其中定义了正常态的隧穿电阻

$$
\frac{1}{R_N}=\pi d^2t^2\frac{e^2}{\hbar}.
\tag{18.89}
$$

- 式(18.88)是一般结果 $\mathbf{J}\propto\nabla\varphi$ (见式(18.78))的一个特例.
- 在小相位差极限下, 我们得到 $I_J\propto\sin\varphi\approx\varphi=\varphi_c-\varphi_f\approx\ell\nabla\varphi$, 其中 ℓ 是两个超导体之间间隔的特征长度.
- 这里计算出来的Josephson 电流是对绝缘体层附近的常数超导相位差ϕ的dc响应, 称为dc Josephson效应.

> - 另外, 还存在一个ac Josephson e效应, ac电流是对隧穿结两端外加电压偏置的响应. 这一效应的讨论可以见 Exercise 18.10.

Chapter 18 Superconductivity

超导电性的Bardeen-Coopper-Schrieffer(BCS)理论是理论物理的一个里程碑. 从1957年提出开始, 它的影响远远超过了最初的范围. 最初它是在微观层面上, 对很大范围的复杂而有趣的金属低温现象(即超导电性)作出相关解释. 除了金属超导电性, BCS-like理论还被用于解释:

- 超流$^3\mathrm{He}$
- 核子在原子核中的运动
- 高能物理中基本物质场的动力学

这一章我们只讨论金属系统中的**常规超导电性**.

- 1911: Kamerlingh-Onnes发现超导电性. 在冷却汞(mercury)到临界温度$T_c = 4.2\mathrm{K}$之下之后, DC电阻突然就消失了.
- 1933: Meissner和Ochsenfeld发现处于超导态的金属是完美的抗磁体, 也就是可以将磁场完全地排出.
- 1934: Gorter和Casimir提出了超导电性的出现是因为电子处于类似超流态的状态.
- 1935: London在他的唯象理论中, 将这一模型推广到了电磁现象之中.
- 1950: Frohlich在他的电声理论中强调晶格振动对超导电性的重要性, 这一观点得到了Reynolds等人和Maxwell的独立观测到的isotope效应的支持, 即T_c对离子质量的依赖.
- 1957: BCS理论提出, 这是首个成功的超导电性的微观理论. 下面我们将会给出它的简要介绍. 对于更深的研究, 建议阅读一些经典教科书, 比如Schrieffer (1983), de Gennes (1999) or Tinkham (1996).

Contents

- 18.1 The Cooper instability 325
- 18.2 The BCS groundstate 327
- 18.3 Microscopic BCS theory 329
- 18.4 BCS theory with Matsubara Green's functions 331
  18.4.1 Self-consistent determination of the BCS order parameter Ak 332
  18.4.2 Determination of the critical temperature T 333
  18.4.3 Determination of BCS quasiparticle density of states 334
- 18.5 The Nambu formalism of the BCS theory 335
  18.5.1 Spinors and Green's functions in Nambu formalism 335
  18.5.2 The Meissner effect and the London equation 336
  18.5.3 Zero paramagnetic current response in BCS theory 337
- 18.6 Gauge symmetry breaking and zero resistivity 341
  18.6.1 Gauge transformations 341
  18.6.2 Broken gauge symmetry and dissipationless current 342
- 18.7 The Josephson effect 343
- 18.8 Summary and outlook 346

更多链接

[superconductivity - Superconducting gap, temperature dependence: how to calculate this integral? - Physics Stack Exchange]

Summary and outlook

超导性是电子对凝聚的结果，因此它是一种宏观量子态。这种情况类似于玻色-爱因斯坦凝聚，其中粒子总数的有限部分会占据着零动量状态。

- BEC的描述方式: 零动量状态的占据数为 $N_0=\left\langle a_0^{\dagger} a_0\right\rangle$, 但如果这一状态是宏观占据地, 可以说从凝聚体中移走单个粒子并不会改变宏观状态, 进而有 $\langle a_0\rangle \neq 0$, 这实际上就是BEC的序参量, 其尺度由$N_0$决定, $N_0=\left\langle a_0^{\dagger} a_0\right\rangle=\left\langle a_0^{\dagger}\right\rangle\langle a_0\rangle$, 进而有$\langle a_0\rangle=\sqrt{N_0}$.
- 超导体的描述方式: 超导的凝聚体由电子对组成, 和BEC相类比, 相变会在期望值 $\langle c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle$ 非零时发生. 在这一章中, 我们描述了这一相变的平均场理论, 并进一步讨论了超导相的一些结果.
  - 在态密度中会出现一个能隙, 这是BCS理论的结果, 但实际上并不总是这样, 因为在一些情形中, 能隙会在倒空间的特殊点处取零.
  - 全局规范对称性的破缺对超导相是很重要的. 其两个重要结果为:
    - Meissner 效应
    - 超导体可能存在超电流. 这一点我们以 Josephson 效应为例展示了, 即使没有施加电压偏置, 两个分离超导体之间也可以存在超电流.

超导体的物理的经典书籍:

- Schrieffer (1983),
- de Gennes (1999),
- Tinkham (1996).

近年来，介观和纳米超导体的物理学也得到了发展，并发现了新的有趣现象。