Chapter 17 Green's functions and phonons

在这一章中, 我们将格林函数方法应用到自由声子和电声相互作用之中. 讨论的出发点是第三章中展示的声子问题的二次量子化形式, 尤其是玻色声子产生和湮灭算符 $b^{\dagger}_{-\mathbf{q},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{q},\lambda}$ 的引入(见式 (3.10) 和 (3.22)), 它们出现在凝胶声子哈密顿量 (3.4) 和晶格声子哈密顿量 (3.23).

本章的主要内容

- 首先, 我们对凝胶模型和晶格模型中的自由声子格林函数进行定义和研究.
- 然后, 将格林函数方法应用到电声相互作用问题之中. 在电子-电子相互作用和电声相互作用同时存在的情况下, 我们导出了单电子格林函数(one-electron Green's function).
- 在考虑电声相互作用之后, 自由声子凝胶模型中的高频的Einstein声子是如何重整化为通常的低频声学声子的? 这是3.2 Electron-phonon interaction and the sound velocity节中遗留的问题.
- 最后, 我们证明了所谓电子气体的Cooper不稳定性的存在, 声子诱导的不稳定性是超导电性的起源.

Contents

Summary and outlook

In this chapter we have presented the Green's function formalism and established the Feynman diagram rules for the free phonon system and for the electron-phonon coupling.

One important example concerned the renormalization of the phonon frequencies once the electron-phonon interaction was taking into account. The dispersion-less frequency

$$\Omega_{\mathbf{q}} = \Omega = \sqrt{\frac{Z^2 e^2 N}{\epsilon_0 M \mathcal{V}}},$$

of the non-interacting jellium phonons was changed into the linear phonon dispersion

$$\omega_{\mathbf{q}}(q \to 0, 0) = \sqrt{\frac{Ze^2 \rho_{\text{el}}^0}{k_s^2 \epsilon_0}} q$$

for acoustic phonons in the long-wave limit.

A main result was to demonstrate the existence of the Cooper instability in the electron gas due to electron-phonon interaction. This instability forms the starting point of the BCS theory of ordinary superconductivity, which is the topic of the following chapter.

17.1 自由声子格林函数

声子算符的定义

从式(3.41)中的$H_{\mathrm{el-ph}}^{\mathrm{INA}}$和式(3.43)中的 $H_{\mathrm{el-ph}}^{\mathrm{jel}}$ 这些描述电声相互作用的哈密顿量可以看出, 相关的声子算符从来不是单独的声子产生和湮灭算符, 而是算符 $A_{\mathbf{q}\lambda}$ 和 $A_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}$, 它们是由互为负频率的产生湮灭算符加和而成的

Ⓝ(17.1)

$$A_{\mathbf{q}\lambda} \equiv \left(b_{\mathbf{q}\lambda}+b_{-\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}\right), \quad A_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger} \equiv \left(b_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}+b_{-\mathbf{q}\lambda}\right)=A_{-\mathbf{q}\lambda}.$$

- 如果我们不限制动量的正负的话, 这两套算符实际上是线性相关的, 因此两者的对易关系也是零,

  $$[A_{\mathbf{q}\lambda}, A_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}]=[b_{\mathbf{q}\lambda}+b_{-\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}, b_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}+b_{-\mathbf{q}\lambda}]=[b_{\mathbf{q}\lambda}, b_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}]+[b_{-\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}, b_{-\mathbf{q}\lambda}]$$

- 声子算符 $A_{\mathbf{q}\lambda}$ 从声子系统中移除一个动量 $\mathbf{q}$, 要么通过湮灭一个动量 $\mathbf{q}$ 的声子, 要么通过产生一个动量 $-\mathbf{q}$ 的声子.

在这些预置条件下, 无相互作用声子是由 H_{ph} 和电声相互作用 $H_{\mathrm{el-ph}}$ 给出的:

Ⓝ(17.2a)

$$H_{\mathrm{ph}}=\sum_{\mathbf{q}\lambda} \Omega_{\mathbf{q}\lambda}\left(b_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger} b_{\mathbf{q}\lambda}+\frac{1}{2}\right),$$

Ⓝ(17.2b)

$$H_{\mathrm{el-ph}}=\frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sum_{\mathbf{q}\lambda} g_{\mathbf{q}\lambda} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} A_{\mathbf{q}\lambda}.$$

因为声子哈密顿量 H_{ph} 并不依赖时间, 可以利用式(11.7)来定义虚时相互作用绘景的$\hat{A}_{\mathbf{q}\lambda}(\tau)$

Ⓝ(17.3)

$$\hat{A}_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) \equiv e^{\tau H_{\mathrm{ph}}} A_{\mathbf{q}\lambda} e^{-\tau H_{\mathrm{ph}}}.$$

这一表达式在巨正则系综下也是有效的, 此时相关哈密顿量为 $H_{\mathrm{ph}}-\mu N$, 但由于声子的数量不守恒, 通过对自由能取极小值会得知化学势一定为零, $\partial F / \partial N \equiv \mu=0$.

单声子松原格林函数

有了这个虚时类玻色算符, 可以根据式(11.20)定义对应的自由声子玻色松原格林函数 $\mathcal{D}_\lambda^0(\mathbf{q},\tau)$

$$\mathcal{D}_\lambda^0(\mathbf{q},\tau) \equiv -\left\langle T_\tau \hat{A}_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) \hat{A}_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger(0)\right\rangle_0 = -\left\langle T_\tau \hat{A}_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) \hat{A}_{-\mathbf{q}\lambda}(0)\right\rangle_0,$$

其中 T_τ 是玻色时序算符(11.21), 交换算符$c_{\mathbf{q}\lambda}$和$c_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger$不出符号. 根据式(11.28)变换到频域有

$$\mathcal{D}_\lambda^0\left(\mathbf{q}, iq_n\right) \equiv \int_0^\beta d\tau e^{iq_n\tau} \mathcal{D}_\lambda^0(\mathbf{q},\tau), \quad q_n = \frac{2\pi}{\beta} n$$

$\mathcal{D}_\lambda^0(\mathbf{q},\tau)$ 和 $\mathcal{D}_\lambda^0\left(\mathbf{q}, iq_n\right)$ 的具体形式可以通过11.3.1节中的玻色子结果得到, 做符号替换 $(\nu, \xi_\nu, c_\nu) \to (\mathbf{q}\lambda, \Omega_{\mathbf{q}\lambda}, c_{\mathbf{q}\lambda})$即可.

- 时域自由声子格林函数: 根据(11.39)的推导, 有类似的

> $$\begin{aligned}
> \langle T_r A_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) A_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger(0)\rangle &= \langle T_r \left(b_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) + b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger(\tau)\right)\left(b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger(0) + b_{-\mathbf{q}\lambda}(0)\right)\rangle \\
> &= \langle T_r b_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger(0)\rangle + \langle T_r b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger(\tau) b_{-\mathbf{q}\lambda}(0)\rangle \\
> &= \begin{cases} \langle b_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger(0)\rangle + \langle b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger(\tau) b_{-\mathbf{q}\lambda}(0)\rangle & \tau > 0 \\ \langle b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger(0) b_{\mathbf{q}\lambda}(\tau)\rangle + \langle b_{-\mathbf{q}\lambda}(0) b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger(\tau)\rangle & \tau < 0 \end{cases} \\
> &= \begin{cases} \langle b_{\mathbf{q}\lambda} b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger\rangle e^{-\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau} + \langle b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger b_{-\mathbf{q}\lambda}\rangle e^{\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau} & \tau > 0 \\ \langle b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger b_{\mathbf{q}\lambda}\rangle e^{-\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau} + \langle b_{-\mathbf{q}\lambda} b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger\rangle e^{\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau} & \tau < 0 \end{cases}
> \end{aligned}$$
>
> 最后再利用$\langle b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger b_{\mathbf{q}\lambda}\rangle = n_B(\Omega_{\mathbf{q}\lambda})$和$\Omega_{-\mathbf{q}\lambda} = \Omega_{\mathbf{q}\lambda}$即得到
>
> $$\mathcal{D}_\lambda^0(\mathbf{q},\tau) = \begin{cases} -\left[n_{\mathrm{B}}\left(\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right) + 1\right] e^{-\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau} - n_{\mathrm{B}}\left(\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right) e^{\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau}, & \text{for } \tau > 0, \\ -n_{\mathrm{B}}\left(\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right) e^{-\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau} - \left[n_{\mathrm{B}}\left(\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right) + 1\right] e^{\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\tau}, & \text{for } \tau < 0 \end{cases}$$

- 频域自由声子格林函数: 仿照(11.43)进行推导得到

> $$\mathcal{D}_\lambda^0\left(\mathbf{q}, iq_n\right) = \frac{1}{iq_n - \Omega_{\mathbf{q}\lambda}} - \frac{1}{iq_n + \Omega_{\mathbf{q}\lambda}} = \frac{2\Omega_{\mathbf{q}\lambda}}{\left(iq_n\right)^2 - \left(\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right)^2},$$
>
> 其中利用了 $n_{\mathbf{B}}\left(\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right) = 1/\left[\exp\left(\beta\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\right) - 1\right]$.

17.2 电声相互作用和费曼图

下面, 我们利用费曼图来对电声相互作用进行微扰处理. 这一节中, 我们先不考虑电子-电子相互作用. 非微扰哈密顿量是自由电子哈密顿量H_{el}和自由声子哈密顿量H_{ph}之和

Ⓝ(17.8)

$$H_0=H_{\mathrm{el}}+H_{\mathrm{ph}}=\sum_{\mathbf{k}\sigma}\varepsilon_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}c_{\mathbf{k}\sigma}+\sum_{\mathbf{q}\lambda}\Omega_{\mathbf{q}\lambda}\left(b_{\mathbf{q}\lambda}^{\dagger}b_{\mathbf{q}\lambda}+\frac{1}{2}\right).$$

当只考虑 H_0的时候, 电子自由度和声子自由度是完全解耦的, 如式(1.106)所示, 基矢是由两个子空间中的Fock态简单外积而成

Ⓝ(17.9)

$$|\Psi_{\text{basis}}\rangle=|n_{\mathbf{k}_1\sigma_1},n_{\mathbf{k}_2\sigma_2},\ldots\rangle\,|N_{\mathbf{q}_1\lambda_1},N_{\mathbf{q}_2\lambda_2},\ldots\rangle$$

进一步考虑式(17.2b)中的相互作用 $H_{\mathrm{el-ph}}$, 基矢会有什么变化? 我们首先对单电子格林函数 $\mathcal{G}_\sigma(\mathbf{k},\tau)$ 进行计算. 和式(13.8)类似, 我们在相互作用表象下讨论, 但变换到动量空间, 将那边的两粒子相互作用哈密顿量 $\hat{W}(\tau)$ 替换为电声相互作用 $\hat{P}(\tau)$

Ⓝ(17.10)

$$\mathcal{G}_\sigma(\mathbf{k},\tau)=-\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^\beta d\tau_1\ldots\int_0^\beta d\tau_m\left\langle T_\tau\hat{P}(\tau_1)\ldots\hat{P}(\tau_m)\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}(\tau)\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}(0)\right\rangle_0}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^\beta d\tau_1\ldots\int_0^\beta d\tau_m\left\langle T_\tau\hat{P}(\tau_1)\ldots\hat{P}(\tau_m)\right\rangle_0},$$

其中的 $\hat{W}(\tau)$-积分(见式(13.9))由 $\hat{P}(\tau)$-积分代替了,

Ⓝ(17.11)

$$\int_0^\beta d\tau_j\hat{P}(\tau_j)=\frac{1}{\mathcal{V}}\int d\tau_j\sum_{\mathbf{k}\sigma}\sum_{\mathbf{q}\lambda}g_{\mathbf{q}\lambda}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^{\dagger}(\tau_j)\,\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}(\tau_j)\,\hat{A}_{\mathbf{q}\lambda}(\tau_j)$$

式(13.8)和式(17.10)中的两个单粒子电子格林函数看上去非常不同, 因为 $\hat{W}(\tau)$ 包含了四个电子算符, 而 $\hat{P}(\tau)$ 只包含了两个. 然而, 我们会看到两者是非常相似的. 因为现在式(17.10)等号右边中的热平均都是 with respect to 自由哈密顿量H_0, 电子和声子自由度是解耦的, 这使得比如说分母中的m阶项热平均可以写成声子和电子热平均的乘积

Ⓝ(17.12)

$$\begin{aligned}&\left\langle T_\tau\hat{A}_{\mathbf{q}_1\lambda_1}(\tau_1)\ldots\hat{A}_{\mathbf{q}_m\lambda_m}(\tau_m)\,\hat{c}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1\sigma_1}^{\dagger}(\tau_1)\,\hat{c}_{\mathbf{k}_1\sigma_1}(\tau_1)\ldots\hat{c}_{\mathbf{k}_m+\mathbf{q}_m\sigma_m}^{\dagger}(\tau_m)\,\hat{c}_{\mathbf{k}_m\sigma_m}(\tau_m)\right\rangle_0=\\&\left\langle T_\tau\hat{A}_{\mathbf{q}_1\lambda_1}(\tau_1)\ldots\hat{A}_{\mathbf{q}_m\lambda_m}(\tau_m)\right\rangle_0\left\langle T_\tau\hat{c}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1\sigma_1}^{\dagger}(\tau_1)\,\hat{c}_{\mathbf{k}_1\sigma_1}(\tau_1)\ldots\hat{c}_{\mathbf{k}_m+\mathbf{q}_m\sigma_m}^{\dagger}(\tau_m)\,\hat{c}_{\mathbf{k}_m\sigma_m}(\tau_m)\right\rangle_0.\end{aligned}$$

根据式(17.1), 可以知道只有偶数数量的声子算符会带来非零的平衡态热平均, 因此可以定义新的求和指标n为 $m=2n$,

Ⓝ(17.10a)

$$\mathcal{G}_\sigma(\mathbf{k},\tau)=-\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}\int_0^\beta d\tau_1\ldots\int_0^\beta d\tau_{2n}\left\langle T_\tau\hat{P}\left(\tau_1\right)\ldots\hat{P}\left(\tau_{2n}\right)\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}(\tau)\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}(0)\right\rangle_0}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}\int_0^\beta d\tau_1\ldots\int_0^\beta d\tau_{2n}\left\langle T_\tau\hat{P}\left(\tau_1\right)\ldots\hat{P}\left(\tau_{2n}\right)\right\rangle_0}$$

下一步, 利用玻色算符的 Wick 定理(11.82), 这一 n-粒子声子格林函数($2n$个声子算符期望值)会变成n个单粒子声子格林函数的乘积, 每个单粒子声子格林函数具有如下形式

Ⓝ(17.13)

$$\begin{aligned}
&g_{\mathbf{q}_i\lambda_i}g_{\mathbf{q}_j\lambda_j}\left\langle T_\tau\hat{A}_{\mathbf{q}_i\lambda_i}\left(\tau_i\right)\hat{A}_{\mathbf{q}_j\lambda_j}\left(\tau_j\right)\right\rangle_0\\
&\quad=\left|g_{\mathbf{q}_i\lambda_i}\right|^2\left\langle T_\tau\hat{A}_{\mathbf{q}_i\lambda_i}\left(\tau_i\right)\hat{A}_{-\mathbf{q}_i\lambda_i}\left(\tau_j\right)\right\rangle_0\delta_{\mathbf{q}_j-\mathbf{q}_i}\delta_{\lambda_i\lambda_j}\\
&\quad=-\left|g_{\mathbf{q}_i\lambda_i}\right|^2\mathcal{D}_\lambda^0\left(\mathbf{q}_i,\tau_i-\tau_j\right)\delta_{\mathbf{q}_j-\mathbf{q}_i}\delta_{\lambda_i\lambda_j}
\end{aligned}$$

热平均迫使配对动量必须相加为零, 因为$\hat{A}_{\mathbf{q}_j\lambda_j}(\tau_j)=\hat{A}^{\dagger}_{-\mathbf{q}_j\lambda_j}(\tau_j)$; 且两个声子也必须是相同支的. 这两个$\delta$符号使得最终的$2n$个$\hat{P}$积分带来的$2n$个$\sum_{\mathbf{q}\lambda}$积分只有$n$个留了下来. 现在我们重新定义$\hat{\mathcal{P}}(\tau)$ 积分为如下的有效双粒子相互作用算符:

Ⓝ(17.15)

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau_i\hat{\mathcal{P}}\left(\tau_i\right)=\int_0^\beta d\tau_i\int_0^\beta d\tau_j\sum_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\sum_{\mathbf{k}_2\sigma_2}\sum_{\mathbf{q}\lambda}\frac{1}{2\mathcal{V}^2}\left|g_{\mathbf{q}\lambda}\right|^2\mathcal{D}_\lambda^0\left(\mathbf{q},\tau_i-\tau_j\right)\\
\times\hat{c}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\sigma_1}^{\dagger}\left(\tau_j\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},\sigma_2}^{\dagger}\left(\tau_i\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_2\sigma_2}\left(\tau_i\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\left(\tau_j\right)
\end{aligned}$$

这是两个$\hat{P}(\tau)$积分的合并结果, 其中已经对声子自由度取好了热平均; 注意与式(17.13)相比, 其中引入了库伦相互作用标志性的重复计数系数$\frac{1}{2}$, 并且抹去了符号(-1), 后面会对其进行说明. 单电子格林函数则变为

Ⓝ(17.14)

$$\mathcal{G}_\sigma(\mathbf{k},\tau)=-\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\int_0^\beta d\tau_1\ldots\int_0^\beta d\tau_{n}\left\langle T_\tau\hat{\mathcal{P}}\left(\tau_1\right)\ldots\hat{\mathcal{P}}\left(\tau_{n}\right)\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}(\tau)\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}(0)\right\rangle_0}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\int_0^\beta d\tau_1\ldots\int_0^\beta d\tau_{n}\left\langle T_\tau\hat{\mathcal{P}}\left(\tau_1\right)\ldots\hat{\mathcal{P}}\left(\tau_{n}\right)\right\rangle_0},$$

- 组合系数的确定: 原先式(17.10a)中的因子 $(-1)^{2n}/(2n)!=1/(2n)!$ 按照如下步骤进行修正
  - 首先是n个(17.13)式会出来n个负号, 这就得到了所需的符号因子 $(-1)^n$.
  - 在对式(17.10a)应用Wick定理(11.82)的时候, 注意到这$2n$个$\hat{P}(\tau_j)$积分都是全同的, 因此将其缩并为n个(17.13)式子, 有$(2n)!/n!2^n$种完全等价的缩并方式.

- - 一种数的方式是不断从$2n$个里面挑出两个, 但是要除以这n对的排列数

$$\frac{C_{2n}^{2}C_{2n-2}^{2}\cdots C_{2}^{2}}{n!}=\frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!}\frac{(2n-2)!}{2!\,(2n-4)!}\cdots\frac{2!}{2!}=\frac{(2n)!}{n!2^{n}}$$

    注意到Wick定理积和式(11.82)的项数其实只有$(n)!$项, 而上面这个组合数显然是大于$n!$的, 额外的自由度是来源于声子算符的产生算符和湮灭算符是一回事, 缩并的时候还得先选出n个作为产生算符.

  - 另外一种数的方式: 从其中选择n个作为独立动量, 会有组合系数 $C_{2n}^{n}=(2n)!/(n!n!)$; 接着, 要将剩下的n个动量与前面的n个独立动量两两组合就会有一个因子 $n!/2^{n}$.

- 最终的组合因子是 $\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$, 其中的$(1/2)^{n}$分配给$n$个有效相互作用$\hat{\mathcal{P}}(\tau_j)$积分.

- 从上面的有效相互作用算符(17.15), 我们发现声子诱导了一种新型的电子-电子相互作用 $V_{\text{el}-\text{el}}^{\text{ph}}$

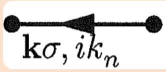
Ⓝ(17.16)

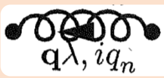
$$V_{\text{el}-\text{el}}^{\text{ph}}=\frac{1}{2\mathcal{V}}\sum_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\sum_{\mathbf{k}_2\sigma_2}\sum_{\mathbf{q}\lambda}\frac{1}{\mathcal{V}}\left|g_{\mathbf{q}\lambda}\right|^{2}\mathcal{D}_{\lambda}^{0}\left(\mathbf{q},\tau_i-\tau_j\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\sigma_1}^{\dagger}\left(\tau_j\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},\sigma_2}^{\dagger}\left(\tau_i\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_2\sigma_2}\left(\tau_i\right)\hat{c}_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\left(\tau_j\right)$$

  将声子诱导有效相互作用算符和库伦相互作用算符(2.34)对比, 可以看到它们非常类似, 唯一的不同在于时间依赖性方面.

  - 库伦相互作用在时间上是**瞬时的(instantaneous)**或者说**局域的(local)**,
  - 而声子诱导相互作用是**推迟的(retarded)**, 即在时间上**非瞬时(非局域, non-local)**, 不管是算符上的 τ_i 和 τ_j之分, 还是耦合强度的表达式 $(1/\mathcal{V})\left|g_{\mathbf{q}\lambda}\right|^{2}\mathcal{D}_{\lambda}^{0}\left(\mathbf{q},\tau_i-\tau_j\right)$, 都反应了这一点.

基于电声相互作用最终改写成的声子诱导有效电子-电子相互作用形式, 可以仿照库伦相互作用情形的费曼规则(13.27)得到电声相互作用的动量空间费曼图形规则

- (1) 带有4-动量指向的费米子线:  $\equiv\mathcal{G}_{\sigma}^{0}(\mathbf{k},ik_n)$

- (2) 带有4-动量指向的声子线(Phonon lines):  $\equiv-\frac{1}{\mathcal{V}}|g_{\mathbf{q}\lambda}|^{2}\,\mathcal{D}_{\lambda}^{0}(\mathbf{q},iq_n)$

- (3) 顶点处保持自旋和4-动量的守恒, 入射动量一定要和出射动量相等.
- (4) 对于第 n 阶, 画出所有拓扑不同的连通图, 包含了n条有向声子线 $-\frac{1}{\mathcal{V}}\left|g_{\mathbf{q}\lambda}\right|^{2}\mathcal{D}_{\lambda}^{0}\left(\mathbf{q},iq_n\right)$, 2条外部费米子线 $\mathcal{G}_{\sigma}^{0}\left(\mathbf{k},ik_n\right)$, 和 $2n-1$ 条内部费米子线 $\mathcal{G}_{\sigma}^{0}\left(\mathbf{p}_j,ip_j\right)$, 共有$2n+1$条费米子线. 所有顶点都必须包含一进一出两个费米子线, 以及一条声子线.

- (5) 每一张图乘上符号$(-1)^F$, F 是费米子环的数量.
- (6) 对于每个内部4-动量 $\tilde{p}$ 乘上归一化因子 $\frac{1}{\beta\mathcal{V}}$, 然后开展求和 $\sum_{\tilde{p}\sigma'\lambda}$.

其中最大的区别就在于没有了等时格林函数的烦恼.