

有效哈密顿量和重整化群变换

- 有效模型的出现
 - 电子系统中的相互作用项 $\tilde{V}^{\text{el-el}}$ 使得系统哈密顿量 \mathcal{H} 是一个真正的多体问题, 它的对角化是非常困难的.
 - 数值方法: 局限性在于只能应用在很小的系统, 因为 Hilbert 空间的大小随着电子数量和单粒子基矢数量增加而指数增加.
 - 理论物理学家会构造一些简化模型 \mathcal{H}^{eff} , 简化模型只包含了 Hilbert 空间中一部分的单粒子状态和相互作用矩阵元, 它们的本征值问题更容易求解.
- 将 \mathcal{H} 用有效哈密顿量 \mathcal{H}^{eff} 代替的严格化定义需要用到**重整化群变换**.
 - **格林函数 approach**: 当我们只关心低频和低温度下的关联时, 可以通过将**格林函数**投影到低能子空间的方法将高能态消除, 从而得到了这个**生活在于低能子空间中的有效哈密顿量 \mathcal{H}^{eff}** .
 - For example: in Section 3.2 the t - J model is derived as the effective Hamiltonian of the large-U Hubbard model.
 - **路径积分 approach**: 若采用**路径积分**的讲法, 我们将高频的模式积分掉, 留下一个低能模式的有效拉格朗日量.
 - See for example the renormalization of the nonlinear sigma model in Chapter 13.
 - ["Shankar-Renormalization-group approach to interacting fermions"](#)
- $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{\text{eff}}$ 这一变换称为一次**重整化(renormalization)**,
 - 在重整化下, 有三种不同的相互作用呈现出了不同的变化:
 - 无关相互作用(irrelevant interaction)会被压制;
 - 有关相互作用(relevant interaction)会变大;
 - 临界相互作用(marginal interaction)则保持不变.
 - 因此在重整化的过程中, 能带结构和相互作用的许多微观细节会被扔掉, 只留下了**有关相互作用**. 如果重整化使得模型中的单粒子态和相互作用变少, 那么在多次重整化之后就会得到低能激发的关联.
 - 有效模型的参数可以通过求解微观哈密顿量的重整化群流线得到, 但是对于真实的材料很难计算, 因此模型参数常常通过与实验拟合得到. 正因为没有可靠的计算, 某个相互作用的有关与否是一个悬而未决的争论, 不同模型的支持者有着不同的看法.

Hubbard 模型和量子 Heisenberg 模型

- **Hubbard 模型**: 相互作用电子的其中一个**最小模型**, 只考虑了 on-site 的关联, 在本书第三章中讲述.
 - 尽管它是最小模型, Hubbard 模型依然只有 1d 版本被解出来了.
- **量子 Heisenberg 模型**: 一个在 Hubbard 模型基础之上进一步简化的模型, 是 Hubbard 模型的一个极限.
 - 只考虑了自旋自由度, 它的基态和激发态仍然是**高度关联的**, 也就是并不是少数几个 Fock states 的线性组合.
 - 这个模型的丰富物理可以用"量子磁性"四个字来概括, 这也是本书的主题, 我们会大量讨论**自旋相互作用**以及它的量子涨落和热涨落.
 - 在更广泛的语境下, 量子 Heisenberg 模型可用于解释基本物理概念. 因此, 对于这样一个基本模型, 我们会通过多体问题通用的各种数学技术和近似手段去处理它以加深理解.

Renormalization-group approach to interacting fermions

Abstract

在 RG 的框架下，我们讨论了**非相对论费米系统**对于相互作用的稳定性。以往我们往往用 RG 来解决的是**临界现象**的问题（通常用 ϕ^4 理论来处理），实际上这两个问题是具有很高的相似性的，我们会从各种各样的细节看到它们的类比之处。

Introduction

- 具有凝聚态物理背景的读者会看到 RG 如何允许我们将一些凝聚态理论中看上去不相关的现象打包起来，例如 Landau 的费米液体理论、BCS 不稳定性、电荷密度波和自旋密度波不稳定性、nesting 等等。
- 熟悉 RG 的读者会看到，照着一个和处理临界现象差不多的路子，我们自动得到了凝聚态中的许多模型，并给出了更新的理解方式。
- 当然，临界现象和本文讨论的凝聚态现象依然有很多不同，这也使得 RG 这一视角非常有趣。

RG (renormalization group)

- 1953 年，Stuckelberg 和 Petermann 首次引入 RG 的概念。
- 1954 年，Gell-Mann 和 Low 揭示了 RG 在 QED 中的应用。
- 1970 年，Callan 和 SYmanzik 分别发表文章，推广了 RG 的概念。

What is RG?

- 量子力学中的群就是一些对称操作的集合，在这些对称操作下物理是不变的。
- RG 中所包含的**变换**
 - QED 中我们将相互作用作为微扰处理，电子系统的散射振幅是一个关于耦合常数 α 的级数，每一项的系数都是一个关于 k 的积分。这些积分都是发散的，因为我们允许 k 趋于无穷大，这被称为紫外发散。
 - 然而，实验上给出的散射率都是一些常数，这使得量子场论和实验不符。
 - 重整化就是解决这个问题的工具。
 - 首先，我们将所有积分做上限的截断 Λ (cutoff)，最后积分的结果是有限的且依赖于这个 cutoff.

- 然后，我们希望能否为 Λ 找到一个对应的耦合常数 $\alpha(\Lambda)$ ，两者同时的变化使得散射振幅这样的物理量最终是与 Λ 无关的。
 - 实际上，我们需要对这个理论所涉及到的所有的参数进行重整，应该将上面的 $\alpha(\Lambda)$ 理解为所有的参数。在 QED 中，除了耦合常数，还需要对电子质量进行重整。
- 但这个“重整”并不是所有场论都可以实现的。对于可以实现的，我们称为可重整的场论 (renormalizable field theory)，对于任意阶的散射振幅，都可以在模型相关的参数中，选择出一组 cutoff-dependent 的参数，使得 $k \ll \Lambda$ 的物理是和 cutoff Λ 无关的。由于最终我们会将 cutoff 设为无穷大，这就意味着任一有限的 k 下的物理都有 cutoff-independent 的特性。
 - 这就是重整化操作下的不变性：cutoff Λ 变化，同时各个耦合参数也跟着 cutoff 适当得变化，最终的理论保持不变。
 - 定量得，我们设 cutoff 的变化是乘上一个因子 s ，那么接连两次重整化 s_1, s_2 根据群乘法就应该是一次 $s_1 s_2$ 的重整化。比如 $s = e^{-t}$ ，那么在一次重整化之后，cutoff 就从 Λ_0 变成了 $\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-t}$ ，多次的重整化只需要将它们的 t 值相加。
- 重整化过程中的核心量： β 函数， $\beta(g) = \frac{dg}{dt}$
 - g ：耦合参数的通用符号，它随着 t 的变化率就是 β 函数。
 - 我们采用凝聚态物理中的规范， t 越大，cutoff Λ 越小。场论学家使用的是相反的符号，使得他们的 β 函数定义和我们差一个负号。
- 如果没有紫外发散，似乎这种同时改变耦合参数和 cutoff 使得物理不变的重整化是不需要的。这是否意味着凝聚态物理中，RG 根本没有立足之地？我们都知道，真实的凝聚态体系是一些平移对称性破缺了的晶格，晶格常数 a 给出了一个自然的动量 cutoff $\Lambda \approx 1/a$ (inverse lattice spacing).
 - 这个观点通过 Kadanoff(1965)和 Wilson(1981)这两篇文章而被改变了，这两篇文章为重整化给出了一个更加物理的解释。他们考虑在一个有自然 cutoff、没有紫外发散的问题中如何改变 cutoff 和 couplings。
 - 我们将简略地讨论一个从统计力学中衍生出来的例子。

统计场论和临界现象

考虑一个 d 维的立方晶格，有一个在晶格点上离散分布的实标量场 $\phi(\mathbf{n})$ ， \mathbf{n} 为一个具有正数系数的矢量。根据经典统计场论，这个系统的配分函数为实标量场各种场构型的求和：

$$Z = \int \prod_{\mathbf{n}} d\phi(\mathbf{n}) e^{S(\phi(\mathbf{n}))}$$

其中作用量(action) $S = -\beta\epsilon$ 。

- 当格点是有限数目的时候，某个格点 \mathbf{n} 上的实标量场取值 $\phi(\mathbf{n})$ 看作是一个积分变量， S 只是一个常规的多元函数， Z 则只是一个多重积分。
- 当格点趋向于无穷多的时候， S 就成为了一个函数 $\phi(\mathbf{n})$ 的函数也就是泛函， Z 就变成了泛函积分，或者称为 Feynman 路径积分。
 - Feynman：用他的路径积分，一个 $d+1$ 维经典构型之和，来描述 d 空间维度下的量子力学问题。因此我们上面的配分函数适用于描述 Feynman 表象下的低一维的量子问题。
 - Bosonic operators 问题：见 sec.III.B (Kogut1979)
 - Fermionic operators 问题：见 sec.III

两点关联函数 (two-point function)

两点关联函数：变量 $\phi(\mathbf{n})$ 在两个不同点 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ 上的关联的平均值

$$\begin{aligned} G(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) &= G(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \equiv \langle \phi(\mathbf{n}_1) \phi(\mathbf{n}_2) \rangle \\ &= \frac{\int \prod_{\mathbf{n}} d\phi(\mathbf{n}) \phi(\mathbf{n}_1) \phi(\mathbf{n}_2) e^{S(\phi(\mathbf{n}))}}{\int \prod_{\mathbf{n}} d\phi(\mathbf{n}) e^{S(\phi(\mathbf{n}))}} \end{aligned}$$

若这两个点的距离很远，通常来说它们的关联是指数衰减的，衰减的特征长度 ξ 称为关联长度：

$$G(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \sim e^{-|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2|/\xi}$$

临界现象

但是在临界点 (critical point) 处，关联函数和距离的关系并不是指数衰减，而是呈现幂次率：

$$G(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \sim \frac{1}{|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2|^x}$$

其中 x 被称为临界指数。有趣的是，微观上非常不同的哈密顿量（或者作用量）会具有同样的临界指数，这被称为普适性。

对于写成路径积分的量子问题，关联长度和 mass gap m （从基态往上的最低激发能量）是息息相关的： $\xi = 1/m$ ，那么临界点就对应基态和第一激发态无隙的状态 $m=0$ 。

重整化群变换的三步曲

首先，由于我们将区别对待不同频率的模式，我们首先将场、配分函数和两点关联函数通通做 Fourier 变换：

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \phi(\mathbf{n})$$

- V : 系统的体积
- \mathbf{k} : 在第一布里渊区中取值, 每个方向的边长都是 $2\pi/a$.

$$Z = \int \prod_{|\mathbf{k}| \leq \pi/a} d\phi(\mathbf{k}) e^{S(\phi(\mathbf{k}))}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{k}_1) \phi(\mathbf{k}_2) \rangle &= (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) G(\mathbf{k}_1) \\ &= \frac{\int \prod_{\mathbf{k}} d\phi(\mathbf{k}) \phi(\mathbf{k}_1) \phi(\mathbf{k}_2) e^{S(\phi(\mathbf{k}))}}{\int \prod_{\mathbf{k}} d\phi(\mathbf{k}) e^{S(\phi(\mathbf{k}))}} \end{aligned}$$

然后就是重整化群变换的三步曲, 条件是我们只关心长程物理 (如关联函数 $G(r)$, $r \gg a$), 在动量空间中就是只关心长波的行为, \mathbf{k} 很小的模式.

1. Mode elimination: 消除快的模式, 将 cutoff 从 Λ 缩减到 Λ/s , 找到慢模式对应的有效作用量.
1. 精确说明我们所关心的尺度: 我们只对特定的模式之间的关联感兴趣, 这些模式位于动量空间中以原点为中心、 Λ/s (s 很大) 为半径的小球之中, 另外假设布里渊区为一个半径为 π/a 的球而不是一个立方体(这个修正在小 k 近似下并不影响结果). 在某一次标度因子为 s 的重整化过程中:
 1. 慢模式: $\phi_{<} = \phi(k), 0 < k < \Lambda/s$
 2. 快模式: $\phi_{>} = \phi(k), \Lambda/s \leq k \leq \Lambda$
2. 我们只关心 $\phi_{<}$ 之间的关联, 希望将快模式平均掉, 导出一个慢模式的有效作用量 $e^{S'(\phi_{<})}$. 从总的作用量出发:

$$S(\phi_{<}, \phi_{>}) = S_0(\phi_{<}) + S_0(\phi_{>}) + S_I(\phi_{<}, \phi_{>})$$

将配分函数变形:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{0 \leq k < \Lambda/s} d\phi(k) \prod_{\Lambda/s \leq k < \Lambda} d\phi(k) e^{S_0(\phi_{<})} e^{S_0(\phi_{>})} e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \\ &\equiv \int [d\phi_{<}] \int [d\phi_{>}] e^{S_0(\phi_{<})} e^{S_0(\phi_{>})} e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \\ &= \int [d\phi_{<}] e^{S_0(\phi_{<})} \int [d\phi_{>}] e^{S_0(\phi_{>})} e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \\ &\equiv \int [d\phi_{<}] e^{S'(\phi_{<})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{S'(\phi_<)} &= e^{S_0(\phi_<)} \int [d\phi_>] e^{S_0(\phi_>)} e^{S_I(\phi_<, \phi_>)} \\
&= e^{S_0(\phi_<)} \frac{\int [d\phi_>] e^{S_0(\phi_>)} e^{S_I(\phi_<, \phi_>)}}{\int [d\phi_>] e^{S_0(\phi_>)}} \int [d\phi_>] e^{S_0(\phi_>)} \\
&= e^{S_0(\phi_<)} \langle e^{S_I(\phi_<, \phi_>)} \rangle_{0>} Z_{0>}
\end{aligned}$$

- $\langle \rangle_{0>}$ 表示对快模式的平均, $\langle e^{S_I(\phi_<, \phi_>)} \rangle_{0>}$ 是快慢模式相互作用项对快模式的平均;
- 对应的配分函数 $Z_{0>}$ 可以被扔掉, 因为它已经和慢模式 $\phi_<$ 无关了, 对慢模式的关联函数没有影响(作为常数因子, 分子分母直接约掉)

2. Momentum rescaling: 引入标度后的动量 $k' = sk$.

1. 假设在 mode eliminating 之前作用量为 $S(\phi) = r\phi^2 + u\phi^4 + \dots$, 模式消除之后的有效作用量为 $S'(\phi_<) = r'\phi_<^2 + u'\phi_<^4 + \dots$. 当然这样的写法是简略的, 具体地比如说 $u\phi^4$ 应当写为:

$$\begin{aligned}
&\int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \delta(k_4 + k_3 + k_2 + k_1) \\
&\times u(k_4, k_3, k_2, k_1) \phi(k_4) \phi(k_3) \phi(k_2) \phi(k_1)
\end{aligned}$$

- $u(k_4, \dots, k_1)$: **耦合函数(coupling function)**而非简单的耦合常数.

2. 在模式消除前后, 我们会比较各个耦合函数的变换, 如 r 变成了 r' , u 变成了 u' 等等. 但问题在于消除前后的理论完全定义在不同的相空间中, 比如 $u(\Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$ 在新的有效理论中是没有对应的量的. 为了让耦合函数可比, 我们需要在模式消除的同时对耦合函数的自变量 k 做标度变换, $k' = sk$.

3. Field rescaling: 引入标度后的场 (rescaled fields) $\phi'(k') = \xi^{-1} \phi_<(k'/s)$, 并用它们表示出有效作用量。对于一个特定的二次项 quadratic term, 这个作用量应该具有同样的系数。

1. 这个第三步来源于另外一个问题: 将变换前后的耦合函数进行对比, 并不要求严格的一样. 比如下两个作用量

$$\begin{aligned}
S(\phi) &= r\phi^2 + u\phi^4 \\
S'(\phi) &= 4r\phi^2 + 16u\phi^4
\end{aligned}$$

只要做场的标度 $2\phi = \phi'$, 这两个理论的耦合函数其实是一样的. 这告诉我们, 特定的参数变化是物理上不重要的, 如果这个变化可以用过场重新标度被吸收掉的话.

2. 我们定义一个新的场, 加入标度因子 ξ , 他刚好可以让重整化前后的作用量的二次项系数 r 是保持不变的. 最终重整化之后的场写为:

$$\phi'(k') = \xi^{-1} \phi_<(k'/s)$$

最终的有效作用量的自变量就是这个函数, $S'(\phi'(k'))$

固定点

重整化群变换：在某个相空间中，将一个作用量映射为同一相空间中的另一个作用量。

如果我们将最初的作用量表示为耦合参数空间中的一个点，在重整化群变换下这个点会流动。但对于固定点（fixed point） S^* 来说，在经历了重整化群变换之后是不变的。

- 几何上：在重整化群变换下，这个点 S^* 并不会在参数空间中发生流动。
- 关联长度：我们已经知道，设重整化群变换的标度因子为 s ，变换之前关联长度为 ξ ，那么变换之后的关联长度就会减小到 ξ/s 。而在固定点处，变换之后还留在同一个点，关联长度自然也是不变的，这意味着固定点上的关联长度必须是零或者无穷大，我们考虑的是关联长度无穷大的固定点。

总结：cutoff 不再是一个终究会被设定为无穷大的 artifact，而是一个分界线，分割我们感兴趣和不感兴趣的模式。下面我们将讨论，如何能在改变 cutoff 及耦合常数的同时不影响慢模式的物理，即使这个问题根本不会出现紫外发散。

为什么我们想要做这件事情？

普适性 (universality)

具有不同微观哈密顿量的系统如何能够拥有同样的临界指数的？重整化群对这种普适性给出了解释。

考虑完整 k 空间中的两个临界哈密顿量（critical Hamiltonians） S_A 和 S_B ，各自有一组耦合常数（coupling-constant），用 Wilson 的记号，将它们俩表示为空间 \mathcal{S} 中的两个点。空间 \mathcal{S} 是由各种哈密顿量组成的耦合常数空间，每一根坐标轴代表一个耦合常数， $S_A \neq S_B$ 意味着它们处于耦合常数空间中不同的两个点，各种物理量的取值都有较大的区别。

考虑极端长程的物理，两点函数会衰减，我们希望只用慢模式来计算两点函数。

- 我们对模型一直做重整化，直到 cutoff 非常小，得到原始模型哈密顿量的一个等效哈密顿量。（To this end let us trade each Hamiltonian for its equivalent one after renormalization down to a very small cutoff.）
- 我们会发现， S_A 和 S_B 两个哈密顿量会渐近地逼近同一个固定点 S^* ，这也是 AB 两条重整化群流线的终点。
- 这解释了为什么这两个模型具有一样的长程物理性质，比如临界指数。

有关量、无关量和边缘量

耦合常数空间一般是无限维的，我们下面以 3d 的 toy model 为例讨论。设所有临界哈密顿量位于 $x - y$ 平面（临界平面）上，在重整化群变换下，它们流动到固定点 S^* （设为 $(1, 1, 0)$ ）。然后，我们将坐标原点移动到固定点。

- 临界平面上相对固定点的任何偏离 $S - S^*$ 都称为“无关的”（irrelevant），因为这个点处的关联长度随着重整化会趋于 0，在关心长程物理时都是不重要的。
- 固定点是临界点的一种特殊情况，它的关联函数具有幂次衰减的特性。

在固定点处，我们施加微扰到耦合常数空间中的其他点，这种微扰分为三种：

- 无关微扰（irrelevant perturbation）：受到微扰的系统依然具有同样的幂次衰减率。微扰过后，在重整化之下会很快回到固定点。
 - 如果泛函积分可以对应上一些量子系统的路径积分，这意味着一个无能隙系统在无关微扰作用下会保持无能隙。
- 有关微扰（relevant perturbation）：如果我们的微扰不是在临界 $x - y$ 平面，而是将之扰动到了 $z \neq 0$ 的地方，那么这种微扰是有关的，在重整化群变换下会被放大。
 - 有关微扰下，关联的长程行为是不清晰的，收到重整化群流线的最终目的地控制，通常（并不总是）对应一种指数衰减。
- 边缘微扰（marginal perturbation）：在重整化群变换下既不变大也不变小的扰动。
 - 这种微扰在非相对论电子问题中占据重要地位，真正的边缘微扰不会导致能隙。

本 review 的核心问题

考虑一个无相互作用费米子体系，其色散关系既可以是自由的形式 $E = \mathbf{K}^2/2m$ （in the continuum，连续极限），也可以是晶格中定义在布里渊区中的色散关系 $E(\mathbf{K})$ 。

- 基态：零温时系统处于多体的基态，所有单粒子态从低到高被占据了，最高能量为化学势 μ 。费米球的半径为 $K_F = \sqrt{2m\mu}$ 。
- 激发态：这个基态是具有无能隙激发（gapless excitations）的，在费米面附近的电子只要往上走一点点就到达激发态了。
- 问题：如果我们对这个自由体系加入微扰，那么这个系统是会马上发展出一个能隙，还是会保持无能隙状态？
 - 如果它保持无能隙，有没有一个自然的方式来描述这个系统的低能物理（也就是系统对低频探测的相应）？

这些问题的答案和费米面附近的模式息息相关，在微扰论对基态的修正中，修正项的分母是 $|E_i - E_0|$ ，因此费米面附近的模式贡献 ddE 是最多的。因此我们关注费米面附近能带宽度 Λ 的模式（称为这个问题中的慢模式），不考虑这个 cutoff 之外的模式（快模式）的反应。为此，我们特地定义一个小写的 k ：

$$k = |\mathbf{K}| - K_F$$

且只考虑满足 $|k| \leq \Lambda$ 的模式。

凝聚态问题中快模式的消除

- 方法：利用投影矩阵，将哈密顿量投影到慢模式的子空间中，得到有效哈密顿量。
 - 这个有效哈密顿量是依赖于 cutoff 的，从而可以让最终留下的慢模式和不动点（如果存在）是不依赖于 cutoff 的。这和前面重整化群变换的基本思想一样——cutoff 和耦合常数一起变使得最终的物理不变。
- 前人之作：这个想法最初是 Anderson, Wilson 等人处理 Kondo 问题时提出的方法，这给重整化群进入量子多体问题提供了范式，但是它只是一维的，我们想处理的是二维和三维的问题。

本文的 approach

- 为了强调和临界现象的类比，首先我们从算符 approach 转移到路径积分 approach 上来，写下路径积分。
 - 无相互作用问题：由于它是无能隙的，我们期待它就是（cutoff 减小的）重整化群变换中的固定点。我们找到这样的重整化群变换，偏离固定点的微扰被分为有关的、无关的和边缘的。
 - 无关和边缘微扰：系统在微扰下保持无能隙
 - 有关微扰：不好说，只有当我们假设这个小微扰下的行为可以在强耦合时保持住，才能知道这个微扰的结果。我们所关心的所有情况，有关微扰都会带来 spectrum 中能隙的打开。
- 临界现象和凝聚态中的重整化的不同之处：需要我们回溯到慢模式所占据的相空间
 - 临界现象：考虑长波行为，也就是 k 空间中以原点为中心的很小一个球的范围，固定点只用少数几个耦合常数表征。
 - 对于连续场论比如 QED 和 QCD，不管是费米还是玻色系统的动量也都是局限在一个原点为中心的小球处，半径为 $\text{cutoff}\Lambda$ 。
 - 但对于我们现在的自由电子气体 + 微扰的问题，重整化的方向并不是一个点，而是一个平面——费米面，甚至非球面的费米面本身在重整化的过程中还可能会变化。
 - 临界现象中所有动量和动量转移量都很小，而自由电子气体问题中是 $k = |\mathbf{K}| - K_F$ 很小， $\sim K_F$ 的动量转移量在慢模式中也是可能的。
 - 重整化只会减小 k 在费米面法向的分量，而费米面切向的动量分量是保持的。

- 固定点：由一个平面和定义在其上的耦合函数（coupling functions）来表征。
- 特例： $d=1$ 的自由电子气体问题，此时费米面是两个点。
 - 不考虑这个 doubling 的效果（它将非相对论费米子转化为了 Dirac 费米子），此时的长程行为（慢模式所处相空间范围）和连续场论、临界现象是类似的，都只有少数几个耦合常数。
 - 这也是为什么在将重整化群方法应用到凝聚态体系中 1d 费米子问题的这个方向，已经有很多成果

本书所使用的二次量子化的语言规范.

A.1 Fock States

- 单粒子态空间基矢: $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^N$, 满足正交归一关系 $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$
 - 第 i 个单粒子态 $|\phi_i\rangle$ 的产生算符 a_i^\dagger 和湮灭算符 a_i , 以及第 i 个单粒子态所对应的单粒子真空态 $|0\rangle_i$ (表示该粒子不处于第 i 本征态)

$$|\phi_i\rangle = a_i^\dagger |0\rangle_i, \quad a_i |0\rangle_i = 0$$

- Fock 态: 利用多个产生算符连续作用在单粒子真空态上, 可以得到一个多体的态, 对应的总粒子数为 $N = \sum_i n_i$

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle_i$$

- 第 i 本征态的粒子数算符: $n_i \equiv a_i^\dagger a_i$, 其和 $(a_i^\dagger)^n$ 的对易关系我们要求为:

$$[a_i^\dagger a_i, (a_i^\dagger)^n] = n (a_i^\dagger)^n$$

上面的要求实际上等价于下面这个要求: 连续的 a_i^\dagger 作用下会得到多个处于 $|\phi_i\rangle$ 的粒子:

$$a_i^\dagger a_i (a_i^\dagger)^n |0\rangle_i = [(a_i^\dagger)^n a_i^\dagger a_i + n (a_i^\dagger)^n] |0\rangle_i = n (a_i^\dagger)^n |0\rangle_i$$

- 归一化常数 $1/\sqrt{n_i!}$, 需要引入连续产生算符的作用来解释
- 对 Fock 态加入交换对称性和反对称性, 得到产生湮灭算符之间的代数关系:

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger]_\zeta &= a_i a_j^\dagger - \zeta a_j^\dagger a_i = \delta_{ij}, \\ [a_i, a_j]_\zeta &= 0 \end{aligned}$$

$\zeta = 1$ 对应交换对称的玻色子, $\zeta = -1$ 对应交换反对称的费米子.

- 表象变换: 在不同的单粒子基矢之间变换, 产生湮灭算符将会做对应的变换, 我们一般只考虑么正变换

$$a_\alpha^\dagger = \sum_i U_{\alpha i} a_i^\dagger, \quad U^\dagger U = I$$

变换之后的产生湮灭算符用 α 标记, 依然满足代数关系 ["A.1 algebra"](#)

$$\begin{aligned}
[a_\alpha, a_\beta^\dagger] &= \left[\sum_i U_{\alpha i} a_i, \sum_j U_{\beta j}^* a_j^\dagger \right] = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta j}^* [a_i, a_j^\dagger] \\
&= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \sum_i U_{\alpha i} (U^\dagger)_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

A.2 Normal Bilinear Operators

本节是一些纯数学技术。

首先我们确定一套单粒子表象 $|i\rangle$, 然后会有对应的一组产生湮灭算符 a_i, a_j^\dagger . 利用产生湮灭算符, 我们可以将普通的矢量和矩阵映射为 Fock space 中好用的算符:

- 线性算符(linear operators): 将矢量 \mathbf{v} 通过产生算符 a^\dagger 映射为线性算符 $\hat{\mathbf{v}}^\dagger$

$$\hat{\mathbf{v}}^\dagger = \sum_i v_i a_i^\dagger = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\dagger$$

其中 \mathbf{a}^\dagger 是 $|i\rangle$ 表象下产生算符组成的一个矢量, 矢量 \mathbf{v} 的维度和 $|i\rangle$ 表象的维度是一致的。

- 双线性算符(bilinear operators): 将矩阵 A 通过左产生右湮灭映射为双线性算符 \hat{A} :

$$\hat{A} = \sum_{ij} a_i^\dagger A_{ij} a_j \equiv \mathbf{a}^\dagger \cdot A \cdot \mathbf{a}$$

- 双线性算符和线性算符的对易关系:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{\mathbf{v}}^\dagger] &= \left[\sum_{ij} a_i^\dagger A_{ij} a_j, \sum_i v_i a_i^\dagger \right] \\
&= \sum_{ijk} A_{ij} v_k a_i^\dagger [a_j, a_k^\dagger] = \sum_{ijk} A_{ij} v_k a_i^\dagger \delta_{jk} \\
&= \sum_{ij} A_{ij} v_j a_i^\dagger = (A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}^\dagger
\end{aligned}$$

- 双线性算符和双线性算符的对易关系

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \mathbf{a}^\dagger [A, B] \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] &= \left[\sum_{ij} a_i^\dagger A_{ij} a_j, \sum_{mn} a_m^\dagger B_{mn} a_n \right] \\
&= \sum_{ijmn} A_{ij} B_{mn} [a_i^\dagger a_j, a_m^\dagger a_n] \\
&= \sum_{ijmn} A_{ij} B_{mn} \left(a_m^\dagger [a_i^\dagger, a_n] a_j + a_i^\dagger [a_j, a_m^\dagger] a_n \right) \\
&= \sum_{ijmn} A_{ij} B_{mn} \left(a_i^\dagger \delta_{jm} a_n - a_m^\dagger \delta_{in} a_j \right) \\
&= \sum_{ijn} a_i^\dagger A_{ij} B_{jn} a_n - \sum_{ijm} a_m^\dagger B_{mi} A_{ij} a_j \\
&= a_i^\dagger A_{ij} B_{jn} a_n - a_i^\dagger B_{ij} A_{jn} a_n \\
&= a_i^\dagger [A, B]_{in} a_n = \mathbf{a}^\dagger [A, B] \mathbf{a}
\end{aligned}$$

超算符的本征算符

上面是一般的讨论. 现在我们加入 \mathbf{v} 和 A 之间的关系: \mathbf{v} 是 A 的本征矢量, $A\mathbf{v} = v\mathbf{v}$, 那么更有趣的事情会发生:

$$[\hat{A}, \hat{\mathbf{v}}^\dagger] = (A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}^\dagger = v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\dagger) = v \hat{\mathbf{v}}^\dagger$$

也就是线性算符 $\hat{\mathbf{v}}$ 是超算符 $[\hat{A}, \cdot]$ 的本征算符(eigenoperator).

为什么我们需要用对易子定义超算符和本征算符这两个概念? 有什么方便之处吗? 方便之处就在于, 量子力学中, 我们经常需要算一个相似变换 $e^A B e^{-A}$, 这个量可以通过["Baker-Hausdorff 公式"](#)转换为 A 和 B 的多重对易子:

如果 B 刚好是超算符 $\tilde{A} \equiv [A, \cdot]$ 的本征算符 ($\tilde{A}B = [A, B] = \omega B$), 那么上面这个展开式就会非常容易计算. 多重对易子可以化为:

$$\begin{aligned}
[A^{(i)}, B] &= [A, [A^{(i-1)}, B]] = [A, [A, [A^{(i-2)}, B]]] \\
&= [A, [A, \dots [A, B]]] \\
&= \tilde{A} \tilde{A} \dots \tilde{A} B = (\tilde{A})^i B = (\omega)^i B
\end{aligned}$$

$$e^A B e^{-A} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\omega)^i B = e^\omega B$$

这让我们想起了线性代数里面, 算符和本征函数的一个有趣应用, 假设矢量 \mathbf{v} 是 A 的一个本征矢量, $A\mathbf{v} = v\mathbf{v}$, 那么有可以很容易计算 A 的指数对 \mathbf{v} 的作用:

$$e^A \mathbf{v} = e^v \mathbf{v}$$

利用上面的结果, 我们计算线性算符 $\hat{\mathbf{v}}^\dagger$ 在么正变换下的行为:

- 旋转操作

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{A}}\hat{\mathbf{v}}^\dagger e^{-i\theta\hat{A}} &= \hat{\mathbf{v}}^\dagger + i\theta [\hat{A}, \hat{\mathbf{v}}^\dagger] + \frac{(i\theta)^2}{2} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\mathbf{v}}^\dagger]] + \dots \\ &= e^{iv\theta} \hat{\mathbf{v}}^\dagger \end{aligned}$$

- 任意的么正变换 U : 可以用一组厄米生成元 A_α 和参数 θ_α 来构造, 用参数组成的矢量 θ 来标记 U

$$U_\theta = e^{i\sum_\alpha \theta_\alpha A_\alpha}$$

利用它构造对应的多体算符 \hat{U} :

$$\hat{U}_\theta = e^{i\sum_\alpha \theta_\alpha \hat{A}_\alpha}$$

- 如果所有的生成元 A_α 具有一个共同的本征矢量 \mathbf{v} , 对应本征值分别记为 v_α , 则 \mathbf{v} 自然也是 U_θ 的本征矢量, 对应本征值为 $\exp(i\sum_\alpha \theta_\alpha v_\alpha)$. 但我们并不需要这个条件, 实际上某一个李群的生成元往往是互不对易的, 比如 $SO(3)$ 群. 设 $A_\theta \equiv \sum_\alpha \theta_\alpha A_\alpha$, 我们只需要有 $A_\theta \mathbf{v} = v_\theta \mathbf{v}$ 即可.
- 利用 A_θ 的本征矢量 \mathbf{v} 可以映射出一个线性算符 \mathbf{v}^\dagger , 用 \hat{U}_θ 去夹它得到:

$$\begin{aligned} \hat{U}_\theta \hat{\mathbf{v}}^\dagger \hat{U}_\theta^{-1} &= e^{iA_\theta} \hat{\mathbf{v}}^\dagger e^{-iA_\theta} = e^{iv_\theta} \hat{\mathbf{v}}^\dagger = e^{iv_\theta} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\dagger) \\ &= (e^{iv_\theta} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}^\dagger = (e^{iA_\theta} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}^\dagger = (U_\theta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}^\dagger \end{aligned}$$

- 第一行的第二个等号利用了超算符和本征算符的特性, 第三个等号将线性算符 $\hat{\mathbf{v}}^\dagger$ 的定义展开来了.
- 第二行第二个等号利用了算符 U_θ 及其本征矢量 \mathbf{v} 的关系, 将指数上的数 v_θ 反过来换成了矩阵 A_θ . 最后一个等号回归到 U_θ 的形式.

Example: Spin Algebra

我们用厄米矩阵--三个泡利矩阵来构造**双线性自旋算符(bilinear spin operators)**:

$$S^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{ss'=1}^2 a_s^\dagger \sigma_{ss'}^\alpha a_{s'} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{a}, \quad \alpha = x, y, z$$

$$(\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

三个双线性自旋算符满足角动量的代数关系, 利用前面的导出的["双线性算符之间的对易关系"](#), 可以直接代入["泡利矩阵的对易关系"](#)得到:

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$$

A.3 Noninteracting Hamiltonians

无相互作用的哈密顿量在数学上就是一个双线性算符. 我们开始将上一节的数学技术用在物理上.

- Normal quadratic Hamiltonians

$$\mathcal{H} = \sum_{ii'} a_i^\dagger H_{ii'} a_{i'} = \sum_k (\epsilon_k - \mu) a_k^\dagger a_k = \sum_k (\epsilon_k - \mu) \hat{n}_k$$

- H 为一个厄米矩阵, ϵ_k 是它的本征能量, 用 k 标记, 上式中将能量零点取为化学势 μ .
- a_k 则是在 H 的本征表象下的湮灭算符, 同时可以看到 a_k 是双线性算符 \mathcal{H} 对应超算符 $[\mathcal{H}, \cdot]$ 的本征算符.
- 配分函数: 首先将玻尔兹曼因子拆成若干个矩阵的乘积, 这些矩阵因子互相独立, 用 k 标记

$$e^{-\mathcal{H}/T} = \exp \left[-\frac{\sum_k (\epsilon_k - \mu) \hat{n}_k}{T} \right] = \prod_k \exp \left[-\frac{(\epsilon_k - \mu) \hat{n}_k}{T} \right]$$

对上式求迹, 就是用 Fock 态去夹上式, 并穷尽所有 Fock 态然后求和. 技巧就是对各个矩阵因子分别求迹, 只用穷尽第 k 本征态空间的所有 Fock 态:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\mathcal{H}/T} = \prod_k \sum_{n_k=0}^{n_{\max}} \langle n_k | \exp \left[-\frac{(\epsilon_k - \mu) \hat{n}_k}{T} \right] | n_k \rangle \\ &= \prod_k \sum_{n_k=0}^{n_{\max}} \exp \left[-\frac{(\epsilon_k - \mu) n_k}{T} \right] \\ &= \prod_k \left(1 - \eta e^{-(\epsilon_k - \mu)/T} \right)^{-\eta} \end{aligned}$$

- 玻色系统: $n_{\max} = \infty, \eta = +1$
- 费米系统: $n_{\max} = 1, \eta = -1$
- 自由能

$$F \equiv -T \ln Z = \eta T \sum_k \ln \left(1 - \eta e^{-(\epsilon_k - \mu)/T} \right)$$

- 平衡态的占据概率:

$$\begin{aligned} \langle n_k \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[a_k^\dagger a_k e^{-H/T} \right] = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_k} \\ &= \left(e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta \right)^{-1} \end{aligned}$$

- $\eta = 1$: 玻色爱因斯坦分布
- $\eta = -1$: 费米狄拉克分布

1.5 Exercises

1.5 Exercises

1. Find the total number $N = \partial F / \partial \mu$, entropy $S = -\partial F / \partial T$, and specific heat $C_v = T \partial S / \partial T$ of **free bosons** and **free fermions** using (A.24) of Appendix A.

- 总粒子数

$$N = \frac{\partial F}{\partial \mu} = \eta T \sum_k \frac{-\eta e^{-(\epsilon_k - \mu)/T} \frac{1}{T}}{1 - \eta e^{-(\epsilon_k - \mu)/T}} = \sum_k \frac{-1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta}$$

- 熵

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\eta T \sum_k \frac{-\eta e^{-(\epsilon_k - \mu)/T} \frac{\epsilon_k - \mu}{T^2}}{1 - \eta e^{-(\epsilon_k - \mu)/T}} = \frac{1}{T} \sum_k \frac{(\epsilon_k - \mu)}{e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta}$$

- 比热容:

$$\begin{aligned} C_v &= T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left[\frac{-1}{T^2} \sum_k \frac{(\epsilon_k - \mu)}{e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta} + \frac{1}{T} \sum_k \frac{-(\epsilon_k - \mu) \left(-e^{(\epsilon_k - \mu)/T} \frac{\epsilon_k - \mu}{T^2} \right)}{\left(e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta \right)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{T} \sum_k \frac{\epsilon_k - \mu}{e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta} + \frac{1}{T^2} \sum_k \left(\frac{\epsilon_k - \mu}{e^{(\epsilon_k - \mu)/T} - \eta} \right)^2 e^{(\epsilon_k - \mu)/T} \end{aligned}$$