16.6 Disordered mesoscopic systems

- 本章目前为止，我们研究了**bulk系统**中对杂质构型（impurity configurations）的平均，知道了如何利用费曼图技术对随机杂质散射引起的电导进行计算。
- 这一节中，我们简要介绍如何对**无序介观系统**的平均特性进行研究。
  - 在介观系统（如半导体异质结构中的量子点）实验中，系统的**几何大多数并不是 well-defined** 的, 我们无法精确地决定或者控制 walls 和杂质的位置。电导会展现出有趣的量子现象，如电导平均值的弱局域化和电导分布的普适电导涨落。为了理解这两种现象，我们必须首先学习如何对S矩阵进行平均。
  - S矩阵平均的物理背景: 在第7章中我们了解到, 对给定介观导体，可以通过寻找透射系数或散射矩阵、然后代入到Landauer公式来得到介观系统的电导。介观系统的统计特性可以通过改变栅极势场（进而改变几何）、费米能级或者外加磁场来进行探测。如果透射系数对这些外加参数足够敏感，我们通常会假设**可以有效地对所有可能的构型进行系综平均**。
  - “S矩阵系综”假设: 需要对所有幺正矩阵进行遍历，且如果不考虑更进一步的约束，这些幺正矩阵都是平权的，即散射矩阵$\mathbf{S}$的分布$P(\mathbf{S})$是在 $2N \times 2N$ 的幺正矩阵群 $\mathcal{U}(2N)$中的均匀分布。
    - 对S矩阵的系综平均有悠久的研究历史. 最开始的研究背景是一个包含了大量核子的原子核。基本的假设是，系综中各个系统的哈密顿量是根据某个概率分布来进行随机刻画的，这个概率分布只会收到系统对称性的约束。这一统计方法称为**随机矩阵理论（random matrix theory，RMT）**。
    - 在这一节的简要引论中，我们不会能扩RMT的庞大领域，也不会讨论它对介观物理的应用。更多的内容见参考文献:
      - the book by Mahta (1991) and
      - the reviews by Stone et al. (1991), Beenakker (1997), and Alhassid (2000)

16.6.1 量子电导的统计, 随机矩阵理论 (random matrix theory)

这里, 我们不关心系综平均的微观修正, 只是简单地说对散射矩阵的信息一无所知, 只好假设所有$\mathcal{U}(2N)$群中的幺正矩阵都平权地考虑进来, 只受到对称性的约束.

对于时间反演对称性存在的情形, 我们因此会限制在 $\mathcal{U}(2N)$群中的对称矩阵, 一种方式是将考虑的S矩阵写成两个一般幺正矩阵的乘积 $\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$， $\mathbf{U} \in \mathcal{U}(2N)$. 很明显, 这会给出所有的对称幺正矩阵.

在后面我们要进行的统计分析中, 最高需要计算到关于U矩阵的四阶矩. 先看一个一般的随机矩阵$\mathbf{U}$的函数 $f(\mathbf{U})$, 为了求它关于矩阵$\mathbf{U}$的系综平均, 一种方法是对 $\mathbf{U}$ 乘上某个常数幺正矩阵 $\mathbf{V}$, 但根据群的重排定理以及各个$\mathbf{U}$矩阵的平权性, 平均值应当是不变的, 即 $\langle f(\mathbf{U})\rangle = \langle f(\mathbf{VU})\rangle = \langle f(\mathbf{UV})\rangle$, 其中$\langle\cdot\rangle$表示对$\mathbf{U}$的系综平均.

- 一阶矩 $\langle U_{\alpha\beta}\rangle$: 对于任意 $V \in \mathcal{U}(2N)$, 都满足 $\langle U_{\alpha\beta}\rangle = \sum_\gamma \langle U_{\alpha\gamma}\rangle V_{\gamma\beta} = \sum_\gamma V_{\alpha\gamma}\langle U_{\gamma\beta}\rangle$, 唯一可能的解是 $\langle U_{\alpha\beta}\rangle = 0$.
- 二阶矩:

  $$\langle U^*_{\alpha a}U_{\beta b}\rangle = \sum_{a'b'}\langle U^*_{\alpha a'}U_{\beta b'}\rangle V^*_{a'a}V_{b'b} = \sum_{\alpha'\beta'}\langle U^*_{\alpha' a}U_{\beta' b}\rangle V^*_{\alpha\alpha'}V_{\beta\beta'} \tag{16.91}$$

  根据$\mathbf{V}$矩阵的幺正性, 可以观察得到上式的一个解是 $\langle U^*_{\alpha a}U_{\beta b}\rangle \propto \delta_{ab}$. 类似地, 还可以通过左乘$\mathbf{V}$得到得到 $\langle U^*_{\alpha a}U_{\beta b}\rangle \propto \delta_{\alpha\beta}$. 因此最终有 $\langle U^*_{\alpha a}U_{\beta b}\rangle \propto C\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}$, 其中 C 是一个归一化因子, 可以用左右两边求迹定下来

  $$2N = \mathrm{Tr}(\mathbf{UU}^\dagger) = \sum_{\alpha a}\langle U^*_{\alpha a}U_{\alpha a}\rangle = \sum_{\alpha a} C\times 1 = C(2N)^2 \tag{16.92}$$

  因此有 $C = 1/2N$.
- 四阶矩: 也可以用相同的方法进行推导, 只不过工作量会比较大. 四个U矩阵相乘, 有八个指标, 因此需要凑四个δ函数, 彼此之间的指标不同, 最终会出来四项, 有点像U^*和U的下标缩并的感觉.

  已知 $\langle U^*_{\alpha a}U_{\beta b}\rangle \propto \delta_{\alpha\beta},\ \delta_{ab}$

  $\delta_{\alpha'\beta},\delta_{a'b}$

  $\delta_{\alpha'\beta'},\delta_{a'b'}$

  $\langle U^*_{\alpha a}U^*_{\alpha' a'}U_{\beta b}U_{\beta' b'}\rangle$

  $\delta_{\alpha\beta},\delta_{ab}$

  $\delta_{\alpha\beta'},\delta_{ab'}$

  α与β、β'中一个配对, a与b、b'中一个配对 $\Rightarrow$ 4种可能.

$$\left\langle U_{\alpha a}^* U_{\alpha' a'}^* U_{\beta b} U_{\beta' b'} \right\rangle = A\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{a'b'} + B\delta_{\alpha\beta'}\delta_{ab'}\delta_{\alpha'\beta}\delta_{a'b} + C\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab'}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{a'b} + D\delta_{\alpha\beta'}\delta_{ab}\delta_{\alpha'\beta}\delta_{a'b'}\,.$$

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\right)_{ab} = U_{\alpha a}^* U_{\alpha b}, \left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\right)_{ba} = U_{\beta b}^* U_{\beta a} \\
&\Rightarrow 2N = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}) = \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{\alpha b} U_{\beta b}^* U_{\beta a} \right\rangle \\
&\qquad \overset{(1)}{=} \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* U_{\alpha b} U_{\beta a} \right\rangle \overset{(2)}{=} \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{b\beta}^* U_{ba} U_{\alpha\beta} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* U_{\alpha b} U_{\beta a} \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha a\beta b} A\delta_{\alpha\alpha}\delta_{ab}\delta_{\beta\beta}\delta_{ba} + B\delta_{\alpha\beta}\delta_{aa}\delta_{\beta\alpha}\delta_{bb} \\
&\quad + C\delta_{\alpha\alpha}\delta_{aa}\delta_{\beta\beta}\delta_{bb} + D\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta_{\beta\alpha}\delta_{ba} \\
&= \sum_{\alpha a\beta b} A\delta_{ab} + \sum_{\alpha a\beta b} B\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha a\beta b} C + \sum_{\alpha a\beta b} D\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab} \\
&= A\left(2N\right)^3 + B\left(2N\right)^3 + C\left(2N\right)^4 + D\left(2N\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{b\beta}^* U_{ba} U_{\alpha\beta} \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha a\beta b} A\delta_{\alpha b}\delta_{aa}\delta_{b\alpha}\delta_{\beta\beta} + B\delta_{\alpha\alpha}\delta_{a\beta}\delta_{bb}\delta_{\beta a} \\
&\quad + C\delta_{\alpha b}\delta_{a\beta}\delta_{b\alpha}\delta_{\beta a} + D\delta_{\alpha\alpha}\delta_{aa}\delta_{bb}\delta_{\beta\beta} \\
&= \sum_{\alpha a\beta} A + \sum_{\alpha\beta ab} B\delta_{a\beta} + \sum_{\alpha\beta} C + \sum_{\alpha a\beta b} D \\
&= A\left(2N\right)^3 + B\left(2N\right)^3 + C\left(2N\right)^2 + D\left(2N\right)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}^\dagger\right)_{a\alpha} = U_{\beta a}^* U_{\alpha\beta}^*, \left(\mathbf{U}\mathbf{U}\right)_{\alpha a} = U_{\alpha b} U_{ba} \\
&\Rightarrow 2N = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{U}) = \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\beta a}^* U_{\alpha\beta}^* U_{\alpha b} U_{ba} \right\rangle \\
&\qquad \overset{(3)}{=} \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{a\beta}^* U_{\alpha b} U_{b\beta} \right\rangle \overset{(4)}{=} \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^* U_{ab}^* U_{\beta b} U_{\alpha\beta} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(3) = & \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^{*} U_{a\beta}^{*} U_{\alpha b} U_{b\beta} \right\rangle \\
= & \sum_{\alpha a\beta b} A\delta_{\alpha\alpha}\delta_{ab}\delta_{ab}\delta_{\beta\beta} + B\delta_{\alpha b}\delta_{a\beta}\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b} \\
& + C\delta_{\alpha\alpha}\delta_{a\beta}\delta_{ab}\delta_{\beta b} + D\delta_{\alpha b}\delta_{ab}\delta_{a\alpha}\delta_{\beta\beta}. \\
= & \sum_{\alpha a\beta b} A\delta_{ab} + \sum_{\alpha\beta} B\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha\beta b} C\delta_{\beta b} + \sum_{\alpha a\beta} D\delta_{a\alpha} \\
= & A\left(2N\right)^{3} + B\left(2N\right) + C\left(2N\right)^{2} + D\left(2N\right)^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) = & \sum_{\alpha a\beta b} \left\langle U_{\alpha a}^{*} U_{ab}^{*} U_{\beta b} U_{\alpha\beta} \right\rangle \\
= & \sum_{\alpha a\beta b} A\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta_{a\alpha}\delta_{b\beta} + B\delta_{\alpha\alpha}\delta_{a\beta}\delta_{a\beta}\delta_{bb} \\
& + C\delta_{\alpha\beta}\delta_{a\beta}\delta_{a\alpha}\delta_{bb} + D\delta_{\alpha\alpha}\delta_{ab}\delta_{a\beta}\delta_{b\beta} \\
= & \sum_{\alpha\beta} A\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha a\beta b} B\delta_{a\beta} + \sum_{\alpha\beta b} C\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha a\beta} D\delta_{a\beta} \\
= & A\left(2N\right) + B\left(2N\right)^{3} + C\left(2N\right)^{2} + D\left(2N\right)^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2N &= A\left(2N\right)^{3} + B\left(2N\right)^{3} + C\left(2N\right)^{2} + D\left(2N\right)^{4} \\
2N &= A\left(2N\right)^{3} + B\left(2N\right)^{3} + C\left(2N\right)^{4} + D\left(2N\right)^{2} \\
2N &= A\left(2N\right)^{3} + B\left(2N\right) + C\left(2N\right)^{2} + D\left(2N\right)^{2} \\
2N &= A\left(2N\right) + B\left(2N\right)^{3} + C\left(2N\right)^{2} + D\left(2N\right)^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= A\left(2N\right)^{2} + B\left(2N\right)^{2} + C\left(2N\right)^{1} + D\left(2N\right)^{3} \\
1 &= A\left(2N\right)^{2} + B\left(2N\right)^{2} + C\left(2N\right)^{3} + D\left(2N\right)^{1} \\
1 &= A\left(2N\right)^{2} + B + C\left(2N\right)^{1} + D\left(2N\right)^{1} \\
1 &= A + B\left(2N\right)^{2} + C\left(2N\right)^{1} + D\left(2N\right)^{1}
\end{aligned}
$$

MATHEMATICA

```mathematica
In[9]:= LinearSolve[{{M^2, M^2, M^1, M^3}, {M^2, M^2, M^3, M}, {M^2,
   M^0, M, M}, {M^0, M^2, M, M}}, {1, 1, 1, 1}]
Out[9]= {1/(-1 + M^2), 1/(-1 + M^2), -(1/(M (-1 + M^2))), -(1/(
  M (-1 + M^2)))}
```

综上, 对于一个随机的$M = 2N$维幺正矩阵U, 有如下的平均值

(16.93a)

$$\langle U_{\alpha\beta}\rangle = 0,$$

Ⓝ(16.93b)

$$\langle U^*_{\alpha a}U_{\beta b}\rangle = \frac{1}{M}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab},$$

Ⓝ(16.93c)

$$\begin{aligned}\langle U^*_{\alpha a}U^*_{\alpha' a'}U_{\beta b}U_{\beta' b'}\rangle =& \frac{1}{M^2-1}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{a'b'}+\delta_{\alpha\beta'}\delta_{ab'}\delta_{\alpha'\beta}\delta_{a'b}\right)\\ &-\frac{1}{M\left(M^2-1\right)}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab'}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{a'b}+\delta_{\alpha\beta'}\delta_{ab}\delta_{\alpha'\beta}\delta_{a'b'}\right).\end{aligned}$$

式(16.93c)的第一项等价于假设$U_{\alpha a}$的实部和虚部是独立的, 而后面一项正确是因为幺正性条件给出了对$\mathbf{U}$元素的约束. 这些关联(correlation)在M很大的时候变得不再那么重要.

16.6.2 介观系统中的弱局域化

前面几节中, 讨论了自平均宏观样品的弱局域化. 其源头在于时间反演路径对之间的相干相涨. 弱局域化修是在杂质平均下存留的领头阶量子修正.

而对于介观系统, 我们也发现了在系综平均之下的量子修正. 这可以利用S矩阵的随机矩阵理论来计算, 根据第七章导出的 Landauer 公式, 平均电导为:

Ⓝ(16.94)

$$\langle G\rangle = \frac{2e^2}{h}\left\langle \mathrm{Tr}\left[\mathbf{t}^\dagger\mathbf{t}\right]\right\rangle = \frac{2e^2}{h}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=N+1}^{2N}\left\langle S^*_{mn}S_{mn}\right\rangle.$$

其中利用了散射矩阵表达式(7.8). 这一结果依赖于系统是否存在时间反演对称性, 一个磁场的加入就会打破它.

有磁场

首先考虑有磁场的情形 $\mathbf{B}\neq 0$, 此时时间反演对称性破缺. 在这种情况下, 没有任何对$\mathbf{S}$的对称性约束, 可以直接应用(16.93b)计算平均值

Ⓝ(16.95)

$$\langle G\rangle_{\mathbf{B}\neq 0} = \frac{2e^2}{h}N^2\frac{1}{2N} = \frac{2e^2}{h}\frac{N}{2}.$$

无磁场

当没有磁场时 $\mathbf{B}=0$, 系统具有时间反演对称性, S矩阵是对称的. 将 S 表示为 $\mathbf{S}=\mathbf{U}\mathbf{U}^T$, 进而有

Ⓝ(16.96)

$$\langle G\rangle_{\mathbf{B}=0}=\frac{2e^2}{h}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=N+1}^{2N}\sum_{i=1}^{2N}\sum_{j=1}^{2N}\langle U_{mi}^*U_{ni}^*U_{mj}U_{nj}\rangle .$$

应用四阶矩公式(16.93c), 得到

Ⓝ(16.97)(16.98)

$$\begin{aligned}\langle G\rangle_{\mathbf{B}=0}&=\frac{2e^2}{h}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=N+1}^{2N}\sum_{i=1}^{2N}\sum_{j=1}^{2N}(\delta_{ij}+\delta_{mn}\delta_{ij})\left(1-\frac{1}{2N}\right)\frac{1}{4N^2-1}\\&=\frac{2e^2}{h}\frac{1}{4N^2-1}(2N^3)\left(1-\frac{1}{2N}\right)=\frac{2e^2}{h}\frac{N^2}{2N+1},\end{aligned}$$

相比有磁场 $\mathbf{B}\neq 0$ 时要小.

与经典电导对比

经典电导(classical conductance)是之间有$2N$个通道的两个触点之间的电导(the conductance of two contacts each with 2N channels in series)(为何与量子化电导之比是$N/2$?),

Ⓝ(16.99)

$$\frac{\langle\delta G\rangle}{2e^2/h}=\frac{\langle G\rangle}{2e^2/h}-\frac{N}{2}=\begin{cases}-\frac{N}{2(2N+1)}, & \text{for } B=0\\ 0, & \text{for } B\neq 0\end{cases}$$

这一结果清晰展示了量子修正导致的约化电导, 源于式(16.93c)的最后一项, 且这一量子相干性会被磁场的加入而破坏. 当然, 在现实中, 从 $\mathbf{B}=0$ 到有限磁场的过渡是光滑的. 这一转变会在一个典型轨迹围住的磁通量是磁通量子的量级时发生, 这一点我们也在带来式(7.64)的论据中看到了.

16.6.3 普适电导涨落

电导的涨落包含了一些关于混沌系统本征态的有趣信息。在历史上，这些涨落的研究是首先在介观输运的领域进行的。实验上在1980年左右观察到了这一涨落现象，在5年之后得到了理论上的解释。

实验上发现，涨落是与电导的尺度无关的，因此称为普适电导涨落（universal conductance fluctuations，UCF). 直接根据统计物理的知识，我们会期望，如果平均电导是$\langle G\rangle=N_0\left(2e^2/h\right)$, 这对应有$N_0$ 个开放通道（open channels），那么开放通道的数量涨落应该是 $\sqrt{N_0}$, 因此有 $\langle\delta G\rangle=\left(2e^2/h\right)\sqrt{N_0}$. 但这一结论在实验上并没有观察到，背后的原因是透射概率并不是独立的。在给定能量窗口内的导电通道数量并不服从Poisson分布。

对于一个不具有任何对称性的完全随机系统，我们不期望会有简并度发生。事实上，可以根据RMT证明统计测量值会在两个本征值一样时变为零。而在具有时间反演对称性的情形，给定一个

$x=0$处的本征值, 下一个本征值依然处于x处的概率可以证明为

Ⓝ(16.100)

$$P(x)=\frac{\pi}{2}x\exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right),$$

这一现象被称为 Wigner surmise. 给定区间中的本征值数量的涨落因此会远离 Poisson 分布 （$P(x)\propto\exp(-x)$）. 这一本征值之间的"排斥"是普适电导涨落普适行为的物理原因。

有磁场

下面, 我们使用S矩阵的统计RMT来计算G的涨落. 在没有时间反演对称性的情形下, 电导二阶矩涉及到S矩阵的四阶矩(16.93c)

Ⓝ(16.101)

$$\begin{aligned}\left\langle G^2\right\rangle_{\mathbf{B}\neq 0}&=\left(\frac{2e^2}{h}\right)^2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=N+1}^{2N}\sum_{n'=1}^{N}\sum_{m'=N+1}^{2N}\left\langle S_{mn}^{*}S_{mn}S_{m'n'}^{*}S_{m'n'}\right\rangle\\&=\left(\frac{2e^2}{h}\right)^2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=N+1}^{2N}\sum_{n'=1}^{N}\sum_{m'=N+1}^{2N}\frac{1}{4N^2-1}\\&\quad\times\left(1+\delta_{mm'}\delta_{nn'}-\frac{1}{2N}\left(\delta_{nn'}+\delta_{mm'}\right)\right),\\&=\left(\frac{2e^2}{h}\right)^2\frac{N^4}{4N^2-1}\approx\left(\frac{2e^2}{h}\right)^2\left(\frac{N}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{4N^2}\right),\qquad\text{for } N\gg 1\end{aligned}$$

电导涨落为二阶矩减去一阶矩平方, $\left\langle\delta G^2\right\rangle=\left\langle G^2\right\rangle-\langle G\rangle^2$, 结果为:

Ⓝ(16.102)

$$\frac{\left\langle\delta G^2\right\rangle_{\mathbf{B}\neq 0}}{\left(2e^2/h\right)^2}\approx\frac{1}{16},\qquad\text{for } N\gg 1.$$

无磁场

类似地, 可以计算无磁场 $\mathbf{B}=0$ 的情形, 此时系统存在时间反演对称性, 电导的二阶矩涉及到U矩阵的8阶矩, 会更加复杂. 这里直接给出结果

Ⓝ(16.103)

$$\frac{\left\langle\delta G^2\right\rangle_{\mathbf{B}=0}}{\left(2e^2/h\right)^2}\approx\frac{1}{8},\qquad\text{for } N\gg 1.$$

即涨落是与G的平均值无关的, 且它是有磁场情形的两倍. 这一现象已经在实验上得到了观察, 实验研究见 Chan et al. (1995).