

19.3-19.4

19.3 A first look at the theory of interacting electrons in 1D

19.3.1 The "quasiparticles" in 1D

19.3.2 The lifetime of the "quasiparticles" in 1D

19.4 The spinless Luttinger-Tomonaga model

19.4.1 The Luttinger-Tomonaga model Hamiltonian

19.4.2 Inter-branch interaction

19.4.3 Intra-branch interaction and charge conservation

19.4.4 Umklapp processes in the half-filled band case

19.3 A first look at the theory of interacting electrons in 1D

在 RPA 近似处理一维以上体系等离子激元时, Fig. 14.2 中可看到, 在低波数时, 等离子激元的激发与电子-空穴对的激发是分离的, 这使得等离子激元的激发是稳定的, 因为它不会因激发电子-空穴对而衰减。在二维和三维体系中, 等离子激元的色散以下形式: (Exercise 14.3)

$$w_{pl}(q) \propto q^{\frac{3-d}{2}}$$

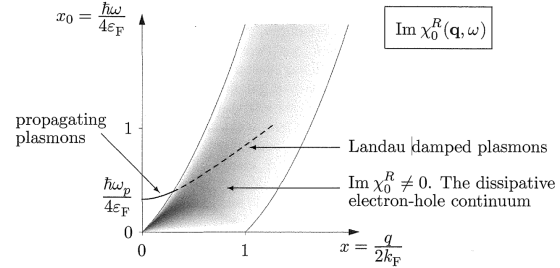


FIG. 14.2. A gray-scale plot of $\text{Im} \chi_0^R(\mathbf{q}, \omega)$. The darker a shade the higher the value. The variables are rescaled according to Eq. (14.27): $x = q/2k_F$ and $x_0 = \omega/4\epsilon_F$. Note that $\text{Im} \chi_0^R(\mathbf{q}, \omega) \neq 0$ only in the gray-scaled area, which is bounded by the constraint functions given in Eq. (14.30). Also shown is the plasmon branch with its propagating and damped parts. The parameters chosen for this branch are those of aluminum, $\epsilon_F = 11.7$ eV and $\omega_p = 15.0$ eV.

经典一维短程相互作用电荷系统的色散关系为: $\omega_{pl} \propto q$, 由于等离子激元色散关系是线性的, 它不像二维与三维那样清楚地区分集体激发与单粒子激发。

(8.79) 式与 Section 14.5 我们已经看到, 电子耗散能量是由极化的虚部引起的。由 (8.79) 式与 (14.66) 式的 RPA 结果可以得到:

$$\text{Re} \sigma(q, \omega) = -\frac{\omega e^2}{q^2} \text{Im} \left[\frac{\chi_0^R(q, \omega)}{1 - V(q) \chi_0^R(q, \omega)} \right] \quad (19.1)$$

$$\text{Re} \sigma(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{\omega e^2}{q^2} \text{Im} \chi^R(\mathbf{q}, \omega). \quad (8.79)$$

$$-\chi^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{diagram} = \frac{\text{diagram}}{1 - \text{diagram}} = \frac{-\chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}{1 - W(\tilde{q}) \chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}. \quad (14.66)$$

$$\epsilon^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = 1 - W(\mathbf{q}) \chi_0(\mathbf{q}, iq_n) = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \chi_0(\mathbf{q}, iq_n). \quad (14.67)$$

其中 $V(q)$ 为 Fourier 变换后的相互作用， $\chi_0^R(q, \omega)$ 为 Lindhard 函数。在一维下，(19.1) 的虚部可写为：

$$\text{Im} \left[\frac{\chi_0^R(q, \omega)}{1 - V(q)\chi_0^R(q, \omega)} \right] = \frac{1}{V(q)} \text{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon^{\text{RPA}}} \right] \equiv -\frac{1}{V(q)} S(q, \omega), \quad (19.2)$$

其中， $\varepsilon^{\text{RPA}} = 1 - V(q)\chi_0^R(q, \omega)$ ，动态结构因子(dynamic structure factor) $S(q, \omega) = -\text{Im} \frac{1}{\varepsilon^{\text{RPA}}}$ 。只要 S 不为 0，激发就有可能发生。有两种不同的方式使得 S 不为 0：

1. $\text{Re} \varepsilon = 0, \text{Im} \varepsilon = 0^+$

$$\begin{aligned} S(q, \omega) = 0 &= \lim_{\text{Im}(\varepsilon) \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] = \lim_{\text{Im}(\varepsilon) \rightarrow 0^+} \frac{\text{Im}(\varepsilon)}{\text{Re}^2(\varepsilon) + \text{Im}^2(\varepsilon)} \\ &= \pi \delta(\text{Re}(\varepsilon(q, \omega_q))) \end{aligned} \quad (19.3)$$

2. $\text{Im} \chi_0^R < \infty$

介电常数在 RPA 近似以及长波极限下为：

$$\begin{aligned} \varepsilon(q, \omega) &= 1 - V(q) \frac{2}{L} \sum_k \frac{n_F(\xi_{k+q}) - n_F(\xi_k)}{\xi_{k+q} - \xi_k - \omega} \\ &\approx 1 - V(q) \int \frac{dk}{\pi} \left(-\frac{\partial n_F(\xi_k)}{\partial \xi_k} \right) \frac{kq}{m} \frac{1}{\omega - \frac{kq}{m}} \\ &= 1 - V(q) \int \frac{dk}{\pi} \left(-\delta\left(\frac{k^2 - k_F^2}{2m}\right) \right) \frac{kq}{m} \frac{1}{\omega - \frac{kq}{m}} \\ &\approx 1 - V(q) \int \frac{dk}{\pi} \left(-\delta\left(\frac{k^2}{2m} - \xi_F\right) \right) \frac{kq}{m} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{kq}{m\omega^2} \right) \\ &= 1 - V(q) \left(\frac{qv_F}{\omega} \right)^2 \frac{2}{\pi v_F}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

$$\begin{aligned} \chi_0^R(\mathbf{q}, \omega) &= -i \int_t^\infty dt e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{V} \sum_{k\sigma} [n_F(\xi_k) - n_F(\xi_{k+\bar{\alpha}})] e^{i(\xi_k - \xi_{k+\bar{\alpha}})(t-t')} e^{-\eta(t')} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{k\sigma} \frac{n_F(\xi_{k'}) - n_F(\xi_{k+\bar{\alpha}})}{\xi_k - \xi_{k+\bar{\alpha}} + \omega + i\eta}. \end{aligned} \quad (8.85)$$

一维库伦相互作用的 Fourier 变换：

$$V(q) = e_0^2 \int dx \frac{1}{|x|} e^{-iqx} \quad (19.5)$$

- 在 ∞ 处， $\int dx \frac{\sin x}{x}, \int dx \frac{\cos x}{x}$ 收敛
- 在 0 处， $\int dx \frac{1}{x}$ 发散

其结果发散，但这种发散会被波函数在横向上的有限范围所截断。简单而言，在横向上有一个短程截断 a ：

$$V(q) \approx 2e_0^2 \int_a^\infty dx \frac{1}{x} e^{-iqx} \approx 2e_0^2 \int_a^{\frac{1}{q}} \frac{1}{x} dx = 2e_0^2 \ln \left(\frac{1}{qa} \right) \quad (19.6)$$

令 $\varepsilon(q, \omega) = 0$ ，得到 RPA 近似下一维电子气的色散关系：

$$\omega_{\text{pl}}(q) = qv \quad (19.7a)$$

其中：

$$v \approx v_F \sqrt{\frac{4e_0^2}{\pi v_F} \ln \left(\frac{1}{qa} \right)} \quad (19.7b)$$

这与先前讨论的色散关系只相差一个对数因子。

19.3.1 The “quasiparticles” in 1D

下面，我们讨论第二种情况： $\text{Im}(\chi_0^R) < \infty$ 的激发，电子-空穴激发。动态结构因子可由极化函数表示：

$$\begin{aligned} S(q, \omega) &= -V(q) \text{Im} \left[\frac{\chi_0^R(q, \omega)}{1 - V(q)\chi_0^R(q, \omega)} \right] \\ &= -\frac{V(q)}{|\varepsilon(q, \omega)|^2} \text{Im}[\chi_0^R(q, \omega)(1 - V(q)(\chi_0^R(q, \omega))^*)] \\ &= -\frac{V(q)}{|\varepsilon(q, \omega)|^2} \text{Im}[\chi_0^R(q, \omega)] \end{aligned} \quad (19.8)$$

在低频 $\omega \ll \varepsilon_F$ ，低温 $T \ll \varepsilon_F$ 时， χ_0^R 的虚部为：

$$\begin{aligned} -\text{Im}[\chi_0(q, \omega)] &= -\frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_k [n_F(\xi_{k+q}) - n_F(\xi_k)] \delta(\xi_{k+q} - \xi_k - \omega) \\ &\approx -\frac{2\pi}{\mathcal{L}} \sum_k \frac{\partial n_F}{\partial \xi_k} (\xi_{k+q} - \xi_k) \delta(\xi_{k+q} - \xi_k - \omega) \\ &= 2\pi\omega \int \frac{dk}{2\pi} \delta(\xi_k) \delta\left(\frac{qk}{m} + \frac{q^2}{2m} - \omega\right) \\ &= \frac{\omega}{v_F} \left[\delta\left(\frac{q^2}{2m} - \omega - qv_F\right) + \delta\left(\frac{q^2}{2m} - \omega + qv_F\right) \right] \end{aligned} \quad (19.9)$$

首先，我们注意到对小量 q ，激发只能出现在 $q - \omega$ 空间中的直线 $|\omega| = v_F q$ 上。这与 $2D$ ， $3D$ 情形有显著不同 (Fig 19.1)。更重要的是，Eq.(19.9) 中单粒子激发的权重与频率成正比。因此低能下的行为不能由单粒子图像所描述。从存在从集体模式中分离出的良好准粒子的讨论是不正确的。实际上，剩下的低能激发是等离子激元，它可由基础玻色化的精确解得到 (section 19.5)。因此，在这一方面，对于描述 1D 低能激发，RPA 近似是准确的。

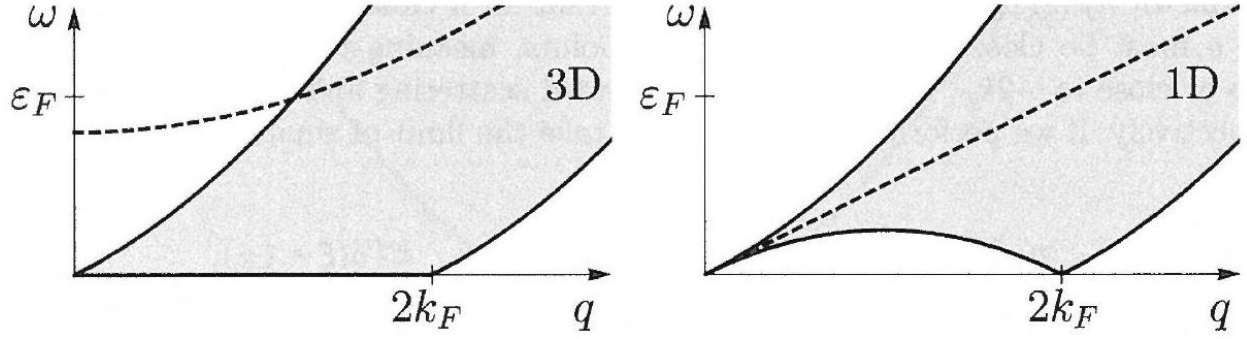


Fig.19.1. 3D 与 1D 的激发的色散关系。灰色区域是 $q - \omega$ 空间中，单粒子激发可能的区域。

虚线是等离子激元的色散关系。在 3D 中，它们是分离的，在 1D 中却不是。在 1D 低频下，只有在 $q = 0$ (向前散射), $q = 2k_F$ (向后散射) 附近才有一个窄带。

19.3.2 The lifetime of the "quasiparticles" in 1D

Fermi 液体理论在 1D 的适用性将被下面的讨论所否定。在 Chapter 15 关于 Fermi 液体的讨论中，我们发现准粒子的衰减率正比于能量的平方。在 1D 下，Eq.(15.65)为：

$$\frac{1}{\tau_k} = -\frac{4\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k',q} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right|^2 \delta(\xi_{k'} - \xi_{k'-q} - \xi_{k+q} + \xi_k) \times [n_B(\xi_{k+q} - \xi_k) + n_F(\xi_{k+q})] [n_F(\xi_{k'}) - n_F(\xi_{k'-q})] \quad (19.10)$$

我们将 $q = 0$ 从求和中剔除（与正电荷背景抵消）。对 k' 求和转化为积分计算的过程中需要用到 δ 函数的性质：

$$\delta\left[\frac{q}{m}(q+k-k')\right] = \frac{m}{|q|} \delta(q+k-k') + \frac{m}{|k-k'|} \delta(q) \quad (19.11)$$

从表达式中看到具有动量 k 的粒子的终态携带动量 k' ，因此，动量与能量守恒要求 1D 中两粒子散射只能是两粒子交换动量。1D 散射的相空间是非常受限的，不像 3D 时，在可能初态与终态的积分给出关系： $\frac{1}{\tau_k} \propto \xi_k^2$ (Eq.15.68)。在 1D，寿命将与能量无关，这使得通常的 Fermi 液体的讨论失效。

$$\frac{1}{\tau_k} = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{128} \omega_p \left(\frac{\xi_k}{\varepsilon_F} \right)^2 \quad (15.68)$$

对应于 $q = 0$ 的项对 Eq.(19.10) 没有贡献。利用 Eq.(10.19a) 可计算其他项：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_k} &= -\frac{4\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k',q} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right|^2 \delta(\xi_{k'} - \xi_{k'-q} - \xi_{k+q} + \xi_k) \\
&\quad \times [n_B(\xi_{k+q} - \xi_k) + n_F(\xi_{k+q})] [n_F(\xi_{k'}) - n_F(\xi_{k'-q})] \\
&= -\frac{4\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k',q} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right|^2 \frac{m}{|q|} \delta(q + k - k') \\
&\quad [n_B(\xi_{k+q} - \xi_k) + n_F(\xi_{k+q})] [n_F(\xi_{k'}) - n_F(\xi_{k'-q})] \\
&= -\frac{4\pi}{\mathcal{L}} \sum_{k',q} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right|^2 \frac{m}{|q|} [n_B(\xi_{k+q} - \xi_k) + n_F(\xi_{k+q})] [n_F(\xi_{k+q}) - n_F(\xi_k)] \\
&=
\end{aligned} \tag{19.12}$$

$$n_F(\varepsilon_1) [1 - n_F(\varepsilon_2)] = n_B(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) [n_F(\varepsilon_2) - n_F(\varepsilon_1)] \tag{10.19}$$

因子 $n_F(\xi_{k+q}) [1 - n_F(\xi_{k+q})]$ 要求 k 接近 Fermi 面, 同时 $k + q$ 也接近费米面, 这意味着 q 接近 0 或 $-2k_F$, 分别对应于向前散射与向后散射。考虑低温极限, 有:

$$n_F(\xi) [1 - n_F(\xi)] = -k_B T \frac{\partial n_F(\xi)}{\partial \xi} \rightarrow k_B T \delta(\xi - \xi_F) \tag{19.13}$$

从而:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_k} &= \frac{4\pi}{\mathcal{L}} \sum_q' \frac{m}{|q|} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right|^2 n_F(\xi_{k+q}) [1 - n_F(\xi_{k+q})] \\
&= \frac{4\pi}{\mathcal{L}} \sum_q' \frac{m}{|q|} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right|^2 k_B T \frac{m}{k_F} [\delta(k + q - k_F) - \delta(k + q + k_F)] \\
&= 2 \int \frac{m^2 k_B T}{k_F} \left| \frac{V(q)}{\varepsilon(q)} \right| \frac{1}{|q|} [\delta(k + q - k_F) - \delta(k + q + k_F)] \\
&\propto \frac{T}{\xi}
\end{aligned}$$

我们得到 $\tau^{-1} \propto T/\xi$, 对于典型的能量值: $\xi \sim k_B T$, 得到寿命为常数。因此, 与高维的情况相反, 1D 不存在能量窗口 $\xi_k \gg \tau_k^{-1}$ 。

从上面对寿命以及激发谱考虑, 我们得出 Fermi 液体理论在 1D 不成立, 需要抛弃准粒子的概念。在下文中我们将看到, 这种有趣的情况揭露出一种新的量子液体, 我们将以一种不同的方式处理相互作用的多体系统。

19.4 The spinless Luttinger-Tomonaga model

本节中

1. 我们的出发点是不考虑自旋的相互作用电子气。考虑自旋的情况将会在 Section 19.9 节中简要给出。我们将通过左移与右移粒子密度算符的相互作用, 将 1D 系统映射到所谓的 Tomonaga-Luttinger 模型。在能量远低于 Fermi 能量时 (因此只包含小动量交换), 这种重整化是可能的。

2. 下一步我们将展示左移与右移粒子的密度算符服从类似玻色子的代数，即所谓 Kac-Moody 代数。为了实现 Kac-Moody 代数，我们必须假设与具有与 Fermi 能量同阶能量电子的占据数不受相互作用的影响。因此，在该理论中，相互作用强度与 Fermi 能的比值为小参量。但这并不意味着我们对这个小参数做了微扰，最终得到的结论实际上在相互作用强度上是非微扰的。
3. 下一个要点是认识到通常的自由电子动能能被写成密度算符的双线性形式，从而，整个哈密顿量关于密度算符是二次的。
4. 最后一步，通过额外的假设实现：在感兴趣的能量尺度，线性化 Fermi 能量附近的色散关系就足够了。

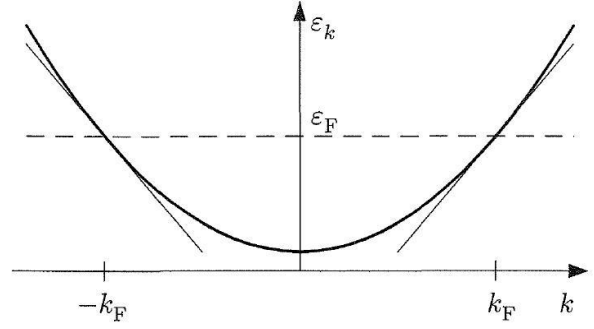


FIG. 19.2. 1D 电子气的色散关系表明：线性色散关系近似是抛物线形的自由电子色散关系在两个 Fermi 波矢处的切线。

通过简单的转化为具有正则对易关系的玻色算符，我们将得到玻色化的模型。

19.4.1 The Luttinger-Tomonaga model Hamiltonian

考虑一个 1D 无自旋的相互作用电子，系统的哈密顿量为：

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_{\text{int}} \\
 H_0 &= \sum_k \xi_k c_k^\dagger c_k \\
 H_{\text{int}} &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{kk'q} V(q) c_k^\dagger c_{k'}^\dagger c_{k'-q} c_{k+q}
 \end{aligned} \tag{19.14}$$

相互作用 $V(q)$ 取决于物理情况，但是我们假设它对向前散射 ($|q| \ll 1$) 和背散射 ($q \approx \pm 2k_F$) 有良好的值。此外，如 Eq.(2.34) 那样，用在对 q 的求和中 \prime 表示我们将对应 $q = 0$ Hartree 项提出。

Tomonaga 模型的基本思想是线性化色散关系 ε_k 。线性化的色散关系为：(Fig. 19.2)

$$\xi_k = \varepsilon_k - \mu \approx (|k| - k_F) v_F \tag{19.15}$$

$$V'_{\text{el-el}} = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{q}} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{4\pi e_0^2}{q^2} c_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q} \sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q} \sigma_2}^\dagger c_{\mathbf{k}_2 \sigma_2} c_{\mathbf{k}_1 \sigma_1} \tag{2.34}$$

因此 Tomonaga 模型存在由线性色散关系适用范围给出的有限能量（或动量）截断。另一个模型是 Luttinger 模型，它假设对所有实数 k 线性色散都成立，左移与右移分支表示两种不同的电子。尽管如此这种模型还是相当有用的，因此它能精确求解，在 Section 19.5 中将介绍这个解将通过玻色表示获得。这里我们将选择包含能量截断，得到 Tomonaga-Luttinger 模型的低能哈密顿量。但是，从真实相互作用电子气推导 Tomonaga-Luttinger 液体时，我们必须采用一系列近似，以及一种巧妙地方式取参数化相互作用。

下一步是将电子分成两类：

1. $k > 0$ 向右移动的电子

2. $k < 0$ 向左移动的电子

电子算符可写为：

$$c_k = c_{kR} \Theta(k) + c_{kL} \Theta(-k) \quad (19.16)$$

电子哈密顿量变为（全局线性色散关系）：

$$H_0 = v_F \sum_{k>0} \left(c_{kR}^\dagger k c_{kR} - (+) c_{kL}^\dagger k c_{kL} \right) - (N_R + N_L) k_F v_F \quad (19.17)$$

其中, N_L , N_R 为两支的粒子数算符。

根据 Eq.(19.16) 给出的分解, 哈密顿量相互作用部分有 2^4 项, 但其中只有 6 项保持左右移动的粒子数守恒, 非守恒项在 Fermi 点附近的散射中是不可能发生的, 在能量很小（相对于 Fermi 能）时可以忽略。六个守恒项不同的分组方式将在以下三小节介绍。

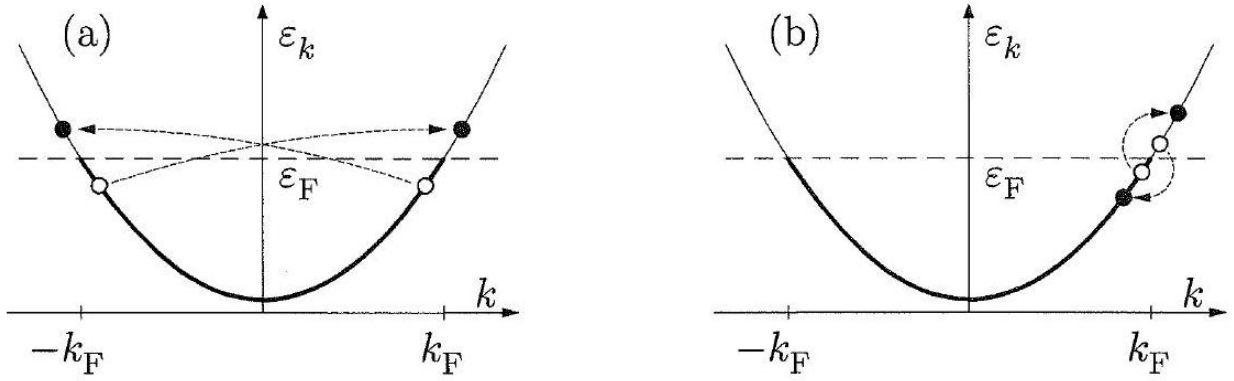


Fig. 19.3. 在费米面附近, 两种可能的散射过程: (a) 分支间散射 (b) 分支内散射

19.4.2 Inter-branch interaction

第一组我们考虑描述分支间相互作用 (Fig.19.3)

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}^{(1)} &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{\substack{k>0, q \\ k'<0}} V(q) \left(c_{kR}^\dagger c_{k'L}^\dagger c_{k'-qL} c_{k+qR} + c_{kR}^\dagger c_{k'L}^\dagger c_{k'-qR} c_{k+qL} \right) + (R \leftrightarrow L), \\ &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{\substack{k>0, q \\ k'<0}} V(q) \left(c_{kR}^\dagger c_{k+qR} c_{k'L}^\dagger c_{k'-qL} - c_{kR}^\dagger c_{k'-qR} c_{k'L}^\dagger c_{k+qL} \right) + (R \leftrightarrow L). \end{aligned}$$

在最后一项中, 有: $k \sim k_F$, $k' \sim -k_F$, 因此 q 必须接近 $-2k_F$ 。通过变量代换 $q \rightarrow -q - k + k'$, 上式化为:

$$H_{\text{int}}^{(1)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{\substack{k>0, q \\ k'<0}}' \left[V(q) c_{kR}^\dagger c_{k+qR} c_{k'L}^\dagger c_{k'-qL} - V(-q+k'-k) c_{kR}^\dagger c_{k+qR} c_{k'L}^\dagger c_{k'-qL} \right] \quad (19.19)$$

$$+(R \leftrightarrow L).$$

对于 $q \neq 0$ ，引入左右移动粒子密度算符：

$$\begin{aligned} \rho_R(q) &= \sum_{k>0} c_k^\dagger c_{k+q} \approx \sum_{k>0} c_{kR}^\dagger c_{k+qR}, \\ \rho_L(q) &= \sum_{k<0} c_k^\dagger c_{k+q} \approx \sum_{k<0} c_{kL}^\dagger c_{k+qL} \end{aligned} \quad (19.20)$$

Eq. (19.19) 重写为：

$$H_{\text{int}}^{(1)} \approx \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_q' [V(0) - V(2k_F)] \rho_R(q) \rho_L(-q) + (R \leftrightarrow L) \quad (19.21)$$

最后一步假设在感兴趣的能量范围内相互作用是光滑的。注意到交换项倾向于减少相互作用，对于理想的点状相互作用，则没有相互作用的影响，这与 Pauli 不相容原理一致。

值得强调的是 Eq. (19.20) 左右移动电荷密度定义中费米子算符 c , c^\dagger 没有脚标 L, R。这两种定义的区别在于是否将向左运动与向右运动的粒子视为两种不同的粒子。这种区别只在 $k+q \sim 0$ 时才重要，但因为重要的 k 在 Fermi 面附近，我们又假设 $q \ll k_F$ ，因此两种记号都可以使用。

19.4.3 Intra-branch interaction and charge conservation

第二种可能的分组包含分支内的相互作用，即所有算符定义在同一支内。

$$H_{\text{int}}^{(2)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{\substack{k>0, q \\ k'>0}}' V(q) c_{kR}^\dagger c_{k'R}^\dagger c_{k'-qR} c_{k+qR} + (R \rightarrow L) \quad (19.22)$$

在处理分支间相互作用的过程中，我们用两个参数 $V(0), V(2k_F)$ 取代了相互作用函数，在对分支内相互作用的处理中我们希望采用相同手法。首先注意到若 $V(q)$ 由常数 V_0 取代，分支内相互作用将产生矛盾。为了看到这一点，我们以两种不同的方式整理 Eq. (19.22) 中的项。首先根据对 k, k' 的求和将其分成两个密度算符：

$$H_{\text{int}}^{(2)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_q' V_0 \rho_R(q) \rho_R(-q) + (R \rightarrow L) \quad (19.23)$$

其中，略去了由于交换 $c_{k+q,R}, c_{k',R}^\dagger$ 产生的常数项。第二种方式是将 $c_{k+q,R}, c_{k',R}^\dagger$ 分成一组：

$$H_{\text{int}}^{(2)} = -\frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{\substack{k>0, q \\ k'>0}}' V_0 c_{kR}^\dagger c_{k'-qR} c_{k'R}^\dagger c_{k+qR} + (R \rightarrow L) \quad (19.24)$$

若我们仍做变换 $q \rightarrow -q - k + k'$ ，我们将回到 Eq. (19.23)，但会多一个负号。上述矛盾产生的原因在于人为线性化色散关系以及将粒子分成左移右移两种。因此我们需要一种物理原则来确定参数 V_0 的值。在上一节，我们发现对应于 Pauli 不相容原理，对于短程相互作用，分支间相互作用的效果消失。因为分支内相互作用必须也有这个性质，因此可以假设 V_0 与 $V_0 - V_{2k_F}$ 成正比 (Starykh et al. (1999))。这与电荷守恒条件是相容的，即连续性方程 $\partial_t \rho + \partial_x J = 0$ ，并没有改变形式。这能被下式保证：

$$[H_{\text{int}}, \rho(q)] = 0 \quad (19.25)$$

其中 $\rho(q)$ 是密度算符。对于长波激发，密度算符是左移粒子与右移粒子激发直之和 ($T = 0$)：

$$\rho(q) = \rho_L(q) + \rho_R(q), \quad \text{for } q \approx 0 \quad (19.26)$$

我们看到如果 $V_0 = V(0) - V(2k_F)$ ，分支内与分支间相互作用将变为：

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{q \neq 0} [V(0) - V(2k_F)] [\rho_L(q) + \rho_R(q)] [\rho_L(-q) + \rho_R(-q)] \quad (19.27)$$

这确实与 Eq. (19.26) 中的密度算符对易。要证明这一点，我们必须首先确定 $\rho_L(q), \rho_L(-q); \rho_R(q), \rho_R(-q)$ 间的对易关系。这将在 Section 19.5 中进行。利用这些结论 Eq. (19.25) 确实为 0，Eq. (19.27) 的相互作用形式也是我们接下来要使用的。

19.4.4 Umklapp processes in the half-filled band case

我们注意到，还有一项对于半填充 Bloch 带的电子来说是重要的，即所谓倒逆过程。这个过程产生的原因是处于 k_F 态的电子等价于处于 $k_F + G$ 态的电子，其中 G 为倒格矢。对于半填充带 $k_F = \frac{\pi}{2a}$ ，因此散射过程 $k_F \rightarrow k_F + 2k_F$ 与 $k_F \rightarrow -k_F$ 是等价的。因此存在另一种分组方式：

$$H_{\text{int}}^{(3)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{kk'q} V(q) c_{kR}^\dagger c_{k'R}^\dagger c_{k'-qL} c_{k+qL} + (R \leftrightarrow L) \quad (19.28)$$

为了使 k' 向右运动， $k' - q$ 向左运动， q 必须在 $2k_F$ 附近。由于 k 在 k_F 附近，最后一个算符接近 $3k_F$ 。对于半填充的周期能带， $3k_F$ 等价于 $-k_F$

，如果做变换 $q \rightarrow 2k_F + q$ ，并插入倒格矢 G ，则有：

$$H_{\text{int}}^{(3)} \approx \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{kk'q} V(2k_F) c_{kR}^\dagger c_{k'R}^\dagger c_{k'-2k_F-qL} c_{k+2k_F+q-GL} + (R \leftrightarrow L) \quad (19.29)$$

其中，现在的 q 是小量， G 要接近 $3k_F$ 。这一项尽在接近半满带是存在，我们将不再考虑它。但当它出现时，这一项将是重要的，并且会改变系统的基态。