

17.5 The Cooper instability and Feynman diagram

1956年Cooper发现，由于低频有效电子-电子相互作用 $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega)$ 的声子诱导的吸引本质，普通金属的电子气在一个特定的临界温度 T_c 变得不稳定。这个发现引导Bardeen, Cooper, Schrieffer发展了用于解释超导的微观理论

这一节我们会使用Feynman图推导Cooper不稳定性。这个不稳定性是因为，当相干地加入某一类特定的电子-电子散射过程，会产生一个发散的散射振幅。我们首先推导这个发散行为，之后我们会讨论它的物理解释

这个发散是由于占据了时间反演态的电子对 $|\mathbf{k} \uparrow\rangle$ 和 $|\mathbf{k} \downarrow\rangle$ 之间的重复散射。使用4-动量表示

$\tilde{k} = (\mathbf{k}, ik_n)$ ，我们考虑成对散射顶角 $\Lambda(\tilde{k}, \tilde{p}) = \text{[diagram]}$ ，它表示由时间反演电子对之间的散射时间之和组成的无限梯形图

$$\Lambda(\tilde{k}, \tilde{p}) = \text{[diagram]} + \dots \quad (17.40)$$

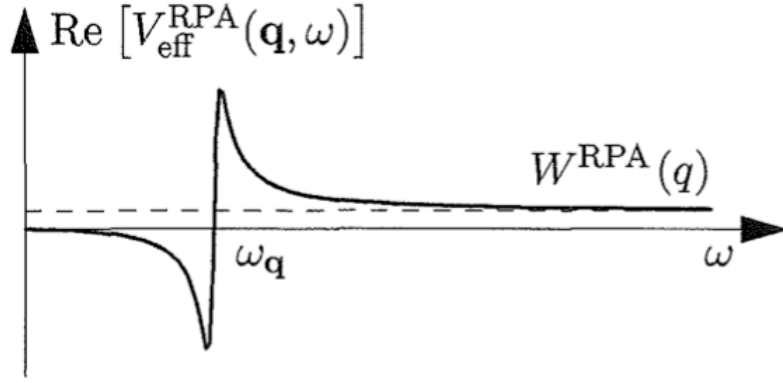
去掉四角上的四个确定的电子外线，我们可以得到成对-散射顶角 Λ 的Dyson方程

$$\Lambda = \text{[diagram]} + \text{[diagram]}, \quad (17.41)$$

写成表达式就是：

$$\Lambda(\tilde{k}, \tilde{p}) = -V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\tilde{k} - \tilde{p}) + \frac{1}{\nu\beta} \sum_{\tilde{q}} \left[-V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\tilde{k} - \tilde{q}) \right] \mathcal{G}_{\uparrow}^0(\tilde{q}) \mathcal{G}_{\downarrow}^0(-\tilde{q}) \Lambda(\tilde{q}, \tilde{p}) \quad (17.42)$$

为了进一步， $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)$ 的函数形式被一个物理假设简化。首先根据我们在14章中关于电子气的分析，单纯的库伦相互作用不会产生不稳定性，因此我们只对 $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)$ 与 $W^{\text{RPA}}(q)$ 的偏差感兴趣。按照式(17.39)和图17.1(b)



$$\begin{aligned}
 -V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) &= -W^{\text{RPA}}(q) + \text{diagram} \\
 &= -W^{\text{RPA}}(q) \frac{(iq_n)^2}{(iq_n)^2 - \omega_q^2}.
 \end{aligned} \tag{17.39}$$

当频率大于声学声子频率 ω_q 时 $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)$ 快速趋向 $W^{\text{RPA}}(q)$ ，而对于低于 ω_q 的频率，它变为吸引力而不是排斥力。更进一步，按照声学声子的Debye模型，当频率低于Debye频率 $\omega_D = v_s k_D$ 声子态密度 $D_{\text{ion}}(\varepsilon)$ 正比于 ε^2 或者 ω_q^2 ，在其他情况下为0 (3.27)。这意味着我们遇到的大多数声子有一个量级为 ω_D 的频率。因此我们可以做一个合理的假设，令声子频率约等于Debye频率 $\omega_q = \omega_D$ 。最后，我们设定相互作用强度为常数。最终我们得到了一个与Cooper和BCS等价的模型，

$$V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) \approx \begin{cases} -V, & |iq_n| < \omega_D \\ 0, & |iq_n| > \omega_D \end{cases} \tag{17.43}$$

$\Lambda(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{p}})$ 的积分方程因此只包含低于 ω_D 的频率。 Λ 因此与频率无关 $\Lambda(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ ，微分方程的形式为：

$$\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = V + \frac{1}{\beta} \sum_{iq_n}^{\omega_D} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} V \mathcal{G}_{\uparrow}^0(\mathbf{q}, iq_n) \mathcal{G}_{\downarrow}^0(-\mathbf{q}, -iq_n) \Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{17.44}$$

右侧的求和不包含外动量 \mathbf{k} ，因此 $\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \Lambda(\mathbf{p})$ 。进一步结果表明对 \mathbf{p} 的依赖现在只发生在 Λ 函数中，求和中也不包含 \mathbf{p} ，因此可以把 $\Lambda(\mathbf{p})$ 提出求和，最后可以得到 $\Lambda(\mathbf{p})$ 也不依赖于 \mathbf{p} ，是一个常数

$$\Lambda = \frac{V}{1 - \frac{V}{\beta} \sum_{|iq_n| < \omega_D} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{G}_{\uparrow}^0(\mathbf{q}, iq_n) \mathcal{G}_{\downarrow}^0(-\mathbf{q}, -iq_n)}. \tag{17.45}$$

我们看到在高温时，也就是 $\beta \ll 1/\omega_D$ 时，成对相互作用 Λ 等于(17.43)吸引成对相互作用强度 V 。当 T 降低时，上式的分母可以接近于0，这导致了一个任意强或者发散的成对相互作用强度 Λ 。在量子力学中，一个无限的散射振幅代表了一个共振，在本例中，时间反演的电子对形成了束缚态。但在我们的模型中，这将同时发生在费米表面厚度为 ω_D 的壳层内的所有电子对，因为有效的对相互作用仅对小于 ω_D 的能量交换有吸引力。这个结论是清楚的：如果成对相互作用强度 Λ 在一

个特定的临界温度 T_c 发散，整个费米面在那个温度会变得不稳定，并且一个新的包含束缚电子对的基态形成。这个不稳定性被称为Cooper不稳定性，它的形成标志着从一个普通金属态到超导态的转变。

临界温度 $T = T_c$ 或者等价的 $\beta = \beta_c$ 可以令上式的分母为0，并利用 $\mathcal{G}_\sigma^0(\mathbf{q}, iq_n) = 1/(iq_n - \epsilon_{\mathbf{q}})$ 和 $q_n = \frac{2\pi}{\beta_c}(n + \frac{1}{2})$ 得到

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V}{\beta_c} \sum_{|iq_n| < \omega_D} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{iq_n - \epsilon_{\mathbf{q}}} \frac{1}{-iq_n - \epsilon_{\mathbf{q}}} = \frac{V}{\beta_c} \sum_{|iq_n| < \omega_D} \frac{d(\epsilon_F)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{1}{q_n^2 + \epsilon^2} \\ &= \frac{Vd(\epsilon_F)}{2\beta_c} \sum_{|iq_n| < \omega_D} \frac{\pi}{|q_n|} = \frac{1}{2} Vd(\epsilon_F) \left[\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\beta_c\omega_D} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - 2 \right] \\ &\approx \frac{Vd(\epsilon_F)}{2} \ln \left(4 \frac{\beta_c\omega_D}{2\pi} \right), \quad \beta_c\omega_D \gg 1, \end{aligned} \quad (17.46)$$

从这个方程中我们得到临界温度

$$k_B T_c \approx \hbar\omega_D \exp \left[-\frac{2}{Vd(\epsilon_F)} \right]. \quad (17.47)$$

这里可以做两个重要的评论：第一是尽管特征声子能量 $\hbar\omega_D$ 的量级大约为 $100K$ ，Cooper不稳定性的临界温度由于指数因子的存在是低于 $1K$ 的。第二是 T_c 是一个关于成对相互作用强度 V 的非解析函数。因此，不可能通过正常金属费米海的微扰理论达到由库珀不稳定性引起的新基态。

Chapter 18 SUPERCONDUCTIVITY

BCS超导理论是理论物理学的基石。自1957年出现以来，它的影响已经远远超出了最初的范围，即在微观层面上对低温下金属中的一系列复杂而迷人的现象给出了合乎逻辑的解释，这些现象被称为超导性。除了金属超导性之外，类似BCS的理论也被用于解释超流体 ^3He 、核子在原子核中的运动以及高能物理中基本物质场的动力学。

在本章中，我们将把讨论局限于金属系统中的常规超导性。1911年，Kamerlingh Onnes发现了超导性，因为在冷却到临界温度 T_c （此处 $T_c=4.2K$ ，见图18.1（a））时，汞的直流电阻消失。1933年，Meissner和Ochsenfeld观察到超导状态下的金属是完美的介质磁体，即它们完全排斥磁场。次年，Gorter和Casimir假设超导性是由于电子处于一种超流体状态。1935年，伦敦和伦敦在其著名的现象学理论中将这一模型扩展到电磁现象。1950年，Frohlich在他的电子声子理论中强调了晶格振动对超导的重要性，这一观点得到了Reynolds等人Maxwell对所谓同位素效应的独立观察的支持，即 T_c 对离子质量的依赖性。1957年的BCS理论是第一个成功的超导微观理论。在下文中，我们简要介绍了该理论。对于更深入的研究，我们向读者介绍了许多关于这一主题的经典教科书，如Schrieffer（1983）、de Gennes（1999）或Tinkham（1996）。

18.1 The Cooper instability

Cooper不稳定性已经在前面的章节中使用费曼图介绍过，这里我们使用更简单的波函数方法来获得更进一步的启示，关于为什么普通金属的电子气在特定的临界温度 T_c 以下会变得不稳定。

库珀从1956年开始分析费米海由于库珀对形成而产生的不稳定性，这是BCS理论的先驱。基本思想是将单个电子态与其时间反转的电子态组合成零动量和自旋的电子对态。考虑以下由下式给出的零动量自旋单态的叠加：

$$\psi_{CP}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\text{FS}\rangle, \quad (18.1)$$

或者引入Cooper对右矢 $|\mathbf{k}\rangle$

$$|\psi_{CP}\rangle = \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle. \quad (18.2)$$

假设成对态被添加到充满费米海的顶部，只有通过泡利不相容原理才能感受到，从而忽略了库仑相互作用。设该对的哈密顿量为

$$H_{CP} = H_0 + V_{\text{eff}}, \quad (18.3)$$

H_0 是成对态的动能 $H_0|\mathbf{k}\rangle = 2(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)|\mathbf{k}\rangle = 2\xi_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}\rangle$ ， V_{eff} 是有效声子介导相互作用(17.43)

$$\langle \mathbf{k}' | V_{\text{eff}} | \mathbf{k} \rangle = -V w_{\mathbf{k}'}^* w_{\mathbf{k}}, \quad w_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1, & \text{for } |\xi_{\mathbf{k}}| < \omega_D \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (18.4)$$

其中 ω_D 是声子的Debye频率，上式表明 V_{eff} 只对费米面附近 ω_D 范围内的电子起作用。薛定谔方程 $H_{CP}|\psi_{CP}\rangle = E_{CP}|\psi_{CP}\rangle$ 的本征能量为：

$$E_{CP} = -2\omega_D \left(\exp \left[\frac{2}{Vd(\varepsilon_F)} \right] - 1 \right)^{-1}, \quad (18.5)$$

$d(\varepsilon_F)$ 是费米面处的态密度。

一个结论是不管吸引相互作用有多弱，一对费米面附近的电子可以通过形成库珀对减少能量，这种机制会影响费米面的稳定性。对库珀对形成的物理机制的直观解释如下：当电子穿过晶体传播时，它会吸引正离子，从而有效地在其背后产生正离子轨迹，即声子。这种痕迹被其他电子感觉到是一种吸引的相互作用。事实证明，这种有效的相互作用对于占据时间反转态并形成库珀对的电子最为重要，因为在这种情况下，它们可以相互利用彼此的正轨迹。

在弱耦合极限 $Vd(\varepsilon_F) \ll 1$ 下，束缚态减少的能量 Δ_{CP} 为：

$$\Delta_{CP} = |E_{CP}| \approx 2\omega_D \exp \left[-\frac{2}{Vd(\varepsilon_F)} \right]. \quad (18.6)$$

库珀模型的另一个结果与方程(17.47)一致，特征能标似乎不是人们可能预期的 ω_D （30meV或400K），而是被指数因子 $\exp[-2/Vd(\varepsilon_F)]$ 抑制的 ω_D 。这最终解释了为什么常规超导体的临界温度通常低于10K，而不是几百开尔文的数量级。

最后，使用海森堡不确定性关系和 $\Delta E \approx (\partial E / \partial p) \Delta p$ ，我们在练习18.2中估计了形成单个库珀对的电子之间相对较大的平均距离，

$$\xi \approx \frac{v_F}{\Delta_{CP}} \approx \frac{v_F}{k_B T_c}, \quad (18.7)$$

其中我们已经预测了BCS结果，即单个库珀对的能量增益设置了超导体的相变温度 T_c 的大小， $\Delta_{CP} \approx k_B T_c$ 。库珀对大小 ξ 在超导理论中起着重要作用。它通常被称为超导体的相干长度。

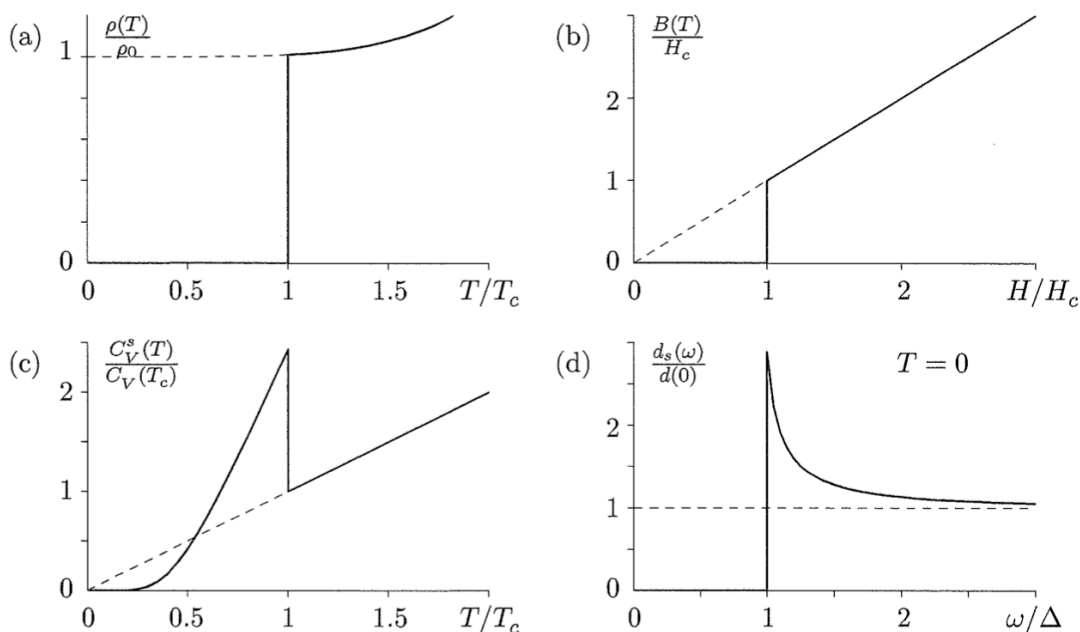


FIG. 18.1. Sketches of some key experiments with superconductors. (a) The transition to zero resistivity ρ below the critical temperature T_c . (b) The Meissner effect: the exclusion of magnetic induction B from a superconductor below the critical external magnetic field H_c . (c) The specific heat of electrons C_V^s in a superconductor compared to that of a normal metal. (d) The energy gap Δ in the density of states $d_s(\omega)$ of a superconductor.

18.2 The BCS groundstate

两个物理事实是微观BCS超导理论的关键输入：(i) 有效声子介导的电子-电子相互作用方程 (17.43) 适用于费米表面附近的能量 $\xi_{\mathbf{k}}$ ($|\xi_{\mathbf{k}}| < \omega_D \ll \varepsilon_F$)，以及 (ii) 这种有效相互作用使费米表面在库珀对的形成下不稳定，第17.5和18.1节。这使得BCS提出了以下超导基态的变分波函数，

$$|\psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle, \quad (18.8)$$

其中 $u_{\mathbf{k}}$ 和 $v_{\mathbf{k}}$ 是复展开系数。该波函数是状态的叠加，每个状态都包含整数个库珀对。 $|\psi_{\text{BCS}}\rangle$ 中库珀对的数量是不确定的，我们认为超导体与允许粒子数波动的电子库接触。库珀对和BCS基态的概念如图18.2所示。

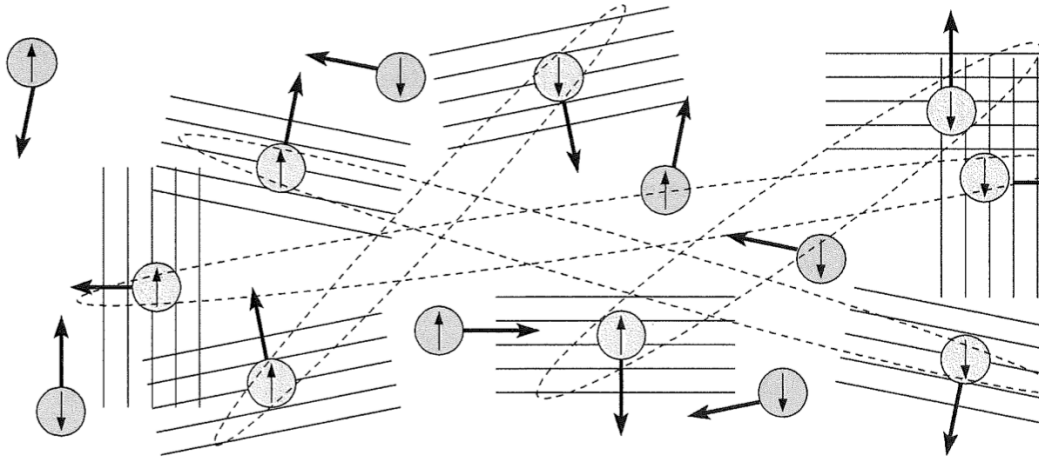


FIG. 18.2. A sketch in real space of the zero momentum spin-singlet Cooper pairs $|\mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow\rangle - |\mathbf{k}\downarrow, -\mathbf{k}\uparrow\rangle$ forming the BCS pair condensate. Although each electron is marked as a disk with a spin vector inside and a \mathbf{k} vector just outside, they are in fact all moving in homogeneous plane-wave states spreading all over space. Each wave is indicated by five parallel lines. Pairs of counter-propagating electrons bound in Cooper pairs are marked with dark gray disks that are connected by a dashed ellipse. These ellipses are only serving as guides to the eye. The average size of each Cooper pair, the correlation length ξ , is much longer than the average distance \bar{d} between the electrons. Some single electrons (light gray disks, without plane wave lines) that have been excited out of the condensate are also shown.

人们怎么猜到像 $|\psi_{\text{BCS}}\rangle$ 这样奇怪的波函数呢？如图18.1所示的实验数据是电子系统中相变的明显特征。电子热容曲线的积分图18(c)导致了一个令人惊讶的结果，即通过经历这种相变，每个电子获得的凝聚能量是一个微弱的 10^{-8}eV （参见练习18.7）。该值应与费米液体中约 1eV 的电子结合能进行比较，方程式（2.44）。实际上，起作用的最大能量是德拜能量 $\omega_D \approx 30\text{meV} \ll \varepsilon_F$ ，但这种能量的微小性允许我们使用费米液体理论。

考虑均匀的非相互作用电子气体。根据第15章，当在没有声子介导的对相互作用的情况下开启电子-电子相互作用时，具有动量 \mathbf{k} 的低能电子激发 $\mathbf{k}^2/2m - \mu$ 发展为能量 $\xi_{\mathbf{k}}$ 的well-defined准粒子激发，同时保持动量 \mathbf{k} ，其仅耦合库珀配对准粒子。这个BCS哈密顿量是

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}, \quad (18.9)$$

对于能量 $|\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| < \omega_D$ 的态耦合强度 $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V < 0$ ，对于其他态为0。描述库珀对之间相互作用的有效哈密顿量是形成一种新基态的原因，这种新基态在质量上不同于费米液体。有效的对相互作用使费米液体不稳定。库珀对在费米能级附近形成，这些类玻色子准粒子，每个都具有零动量和零自旋，形成了BCS基态 $|\psi_{\text{BCS}}\rangle$ 所描述的类玻色-爱因斯坦凝聚体。

18.3 Microscopic BCS theory

BCS做出的平均场假设是，由于基态 $|\psi_{\text{BCS}}\rangle$ 中存在许多不同的库珀对，所以成对算符 $c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$ 有一个有限的基态期望值 $\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle \neq 0$ ，并且它关于平均值的涨落也很小。这个图象被推广到有限温度，因为随着温度的升高，越来越多的库珀对被分裂，并将库珀对凝聚物作为普通电子离开。临界温度是凝聚物完全消失的温度。在临界温度以下 $c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$ 的热平均因此不为0

基于这个假设，BCS平均场哈密顿量可以类比Hartree-Fock平均场理论从 H_{BCS} 得到

$$H_{\text{BCS}}^{\text{MF}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}, \quad (18.10)$$

其中

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle, \quad (18.11)$$

常数项 $\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle \langle c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$ 被吸收进了化学势。这个哈密顿量是二次的，应该是容易解的。然而，像 $c^\dagger c^\dagger$ 和 cc 这样的术语似乎有些不同寻常。解决它的方法是通过所谓的Bogoliubov变换，该变换由 c 和 c^\dagger 算子的么正变换定义，

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}^* & v_{\mathbf{k}} \\ -v_{\mathbf{k}}^* & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (18.12a)$$

以及相应的逆变换

$$\begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}}^* & u_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (18.12b)$$

在0温时 $u_{\mathbf{k}}$ 和 $v_{\mathbf{k}}$ 是相同的， $H_{\text{BCS}}^{\text{MF}}$ 按照以下的 $u_{\mathbf{k}}$ 和 $v_{\mathbf{k}}$ 是可以对角化的

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad \text{and} \quad |v_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (18.13)$$

其中

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2} \quad (18.14)$$

因此我们得到

$$H_{\text{BCS}}^{\text{MF}} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \left(\gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + \gamma_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\downarrow} \right) + \text{constant}. \quad (18.15)$$

$\gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}$ 描述的准粒子被称为bogoliubons。新哈密顿量及其能量告诉我们，没有费米激发的能量小于 $|\Delta_{\mathbf{k}}|$ 。平均场参数 $\Delta_{\mathbf{k}}$ 因此产生了一个能隙表示超导能隙。这个能隙的存在有许多重要的结果

$\Delta_{\mathbf{k}}$ 的自洽解可以从(18.11)得到，也就是所谓的能隙方程，通过使用对角化后的哈密顿量来计算等式右边

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}} &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle \\ &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left\langle \left(u_{\mathbf{k}'}^* \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} - v_{\mathbf{k}'} \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \right) \left(u_{\mathbf{k}'}^* \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow} + v_{\mathbf{k}'} \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \right) \right\rangle \\ &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left(u_{\mathbf{k}'}^* v_{\mathbf{k}'} \left\langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \right\rangle - v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}^* \left\langle \gamma_{\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\downarrow} \right\rangle \right) \\ &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}^* v_{\mathbf{k}'} [1 - 2n_{\text{F}}(E_{\mathbf{k}'})], \end{aligned} \quad (18.16)$$

最后一步用到了，bogoliubons是自由费米子，因此它们满足Fermi-Dirac分布，也就是 $\langle \gamma_{\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\downarrow} \rangle = n_F(E_{\mathbf{k}'})$

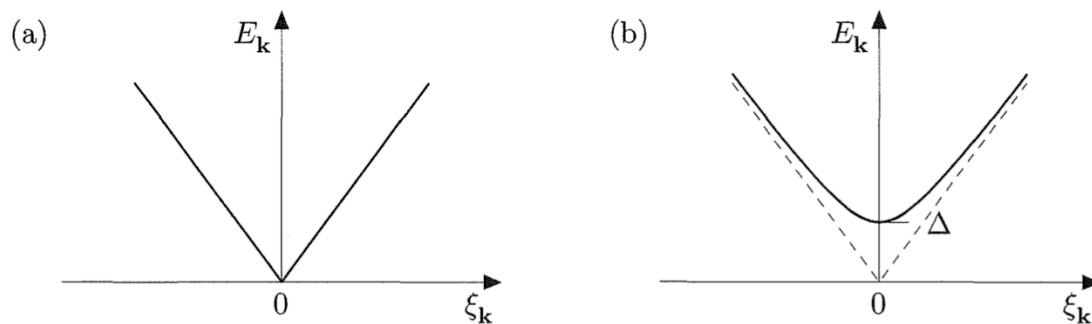


FIG. 18.3. (a) The electronic quasiparticle excitation spectrum $\xi_{\mathbf{k}}$ near k_F for a normal metal. (b) The quasiparticle excitation spectrum $E_{\mathbf{k}}$ for a BCS superconductor near k_F . Note that $E_{\mathbf{k}} \rightarrow \xi_{\mathbf{k}}$ for $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$.