

Chapter 11 Spin Wave Theory

在第10章中，我们构造了自旋路径积分，并证明了它的大 S 极限恢复了经典自旋的热力学和动力学。在这里，我们将专门研究量子海森堡模型，并导出低阶（谐波）自旋波理论。这种方法允许对长程有序相进行物理上有吸引力的处理，因为量子效应是以经典基态的（实或虚）时间相关涨落的形式出现的。自旋波模式和色散是从线性化的经典运动方程中获得的。在 l/S 中的最低阶，自旋波是独立的谐振子，可以半经典地量化。这种方法的一个很大的优点是，它可以用于任何具有复杂基态的组错海森堡模型。稍后我们将专门讨论更简单的铁磁和反铁磁情况。

然而，由于动力学项（10.6）中时间导数的连续定义，路径积分在算子排序中存在歧义。我们将使用先前在第11.2节中介绍的Holstein Primakoff玻色子重新推导自旋波理论。这将解决对基态能量的量子校正中的模糊性。

11.2 Spin Waves: Holstein-Primakoff Approach

之前的章节中我们看到low-order自旋波可以写成无相互作用玻色子的形式。对于一个定量的量子理论，哈密顿量中玻色子算符的正确顺序需要被确定。

处于这个原因，我们使用HP玻色子来表示量子模型。在(7.1)中我们使用 z 方向自旋空间来定义HP玻色子，在这里我们将把这个定义推广到最小化 $H[\hat{\Omega}]$ 的任意经典构型 $\hat{\Omega}_i^{cl}$ 。使用 $\hat{\Omega}^{cl}$ 我们可以在每个位置定义基矢 $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \hat{\Omega}^{cl})$

$$\mathbf{e}_i^1 \times \mathbf{e}_i^2 = \hat{\Omega}_i^{cl}. \quad (1)$$

在这个坐标框架下，升降算符的形式是：

$$S^\pm = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^1 \pm \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^2. \quad (2)$$

与(7.1)类似，自旋分量可以写成：

$$\begin{aligned} S^+ &= \left(\sqrt{2S - n_b} \right) b, \\ S^- &= b^\dagger \sqrt{2S - n_b}, \\ \mathbf{S} \cdot \hat{\Omega}^{cl} &= -n_b + S. \end{aligned} \quad (3)$$

这个表示在 $n_b \leq 2S$ 的希尔伯特空间是严格的。然而平方根函数可以表示成数算符和因子 $(1/S)$ 相乘的无穷级数，如果可以证明

$$\langle n_b \rangle \ll 2S, \quad (4)$$

则截断到低阶是合理的，即经典方向上的自旋涨落是个小量。

接下来，用表达式(11.42)代替哈密顿量中的自旋算符，并组合 $1/S$ 中相同阶的项。玻色子中的二次项构成了自旋波哈密顿量。

11.2.1 The Ferromagnet

不失一般性我们把经典方向选取在 z 方向上，并且把HP玻色子代入到哈密顿量中

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -|J| \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \\ &= -S^2 |J| \mathcal{N} z / 2 - 2|J| \sum_{\langle ij \rangle} \left[S b_i^\dagger \sqrt{1 - n_i / 2S} \sqrt{1 - n_j / 2S} b_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} S (n_i + n_j) + \frac{1}{2} n_i \cdot n_j \right].\end{aligned}\quad (5)$$

通过将上式中的平方根展开，并保留到一阶项我们可以得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\approx -S^2 |J| \mathcal{N} z / 2 + H_1 + H_2 + \mathcal{O}(1/S), \\ H_1 &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}, \\ H_2 &= |J| / 4 \sum_{\langle ij \rangle} \left[b_i^\dagger b_j^\dagger (b_i - b_j)^2 + (b_i^\dagger - b_j^\dagger)^2 b_i b_j \right],\end{aligned}\quad (6)$$

其中 $b_{\mathbf{k}}$ 是 b_i 的傅立叶变换

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} b_i \quad (7)$$

且

$$\omega_{\mathbf{k}} = S|J|z \left(1 - z^{-1} \sum_{j, \langle ij \rangle} e^{i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{k}} \right) \equiv S|J|z (1 - \gamma_{\mathbf{k}}), \quad (8)$$

这与(11.33)式是吻合的。 H_1 描述了色散为 $\omega_{\mathbf{k}}$ 无相互作用自旋波， H_2 和更高阶的项描述了自旋波之间的相互作用，可以使用微扰论或平均场近似处理。在 $T = 0$ 时，(11.47)中的能量等于经典能量

$$E_0 = -S^2 |J| \mathcal{N} z / 2. \quad (9)$$

这与第五章中的定理5.1也是相符的，证明了量子磁体的基态是经典基态。

长波极限下铁磁自旋波色散为

$$\omega_{\mathbf{k}} \sim S|J||\mathbf{k}|^2. \quad (10)$$

这是无能隙的Goldstone模式，是铁磁体基态对称性被打破的结果。这个Goldstone模型主导了铁磁体低温和长波情况下的关联。在有限温时，基态磁化的最低阶修正为：

$$\Delta m_0 = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle S_{tot}^z \rangle - S \quad (11)$$

$$= -\langle n_i \rangle = -\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \quad (12)$$

其中占据数 $n_{\mathbf{k}}$ 可以通过玻色-爱因斯坦分布得到

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\omega_{\mathbf{k}}/T} - 1}. \quad (13)$$

通过引入一个小的“红外”截断 k_0 ，发现了(11.52)中求和的渐近低T(asymptotic low-T)行为。我们选择另一个额外的小但有限的动量 $\bar{k} > k_0$ ，在这个区间里，自旋波色散 $\omega_{\mathbf{k}} \sim |\mathbf{k}|^2$ 成立，即

$$\omega_{\bar{k}} \ll T \ll |J|S. \quad (14)$$

现在我们把关于 \mathbf{k} 的求和分成两块 $k_0 < |\mathbf{k}| < \bar{k}$ 和 $|\mathbf{k}| \geq \bar{k}$ ，发现

$$\Delta m_0 \approx - \int_{k_0}^{\bar{k}} \frac{dk k^{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{T}{JSk^2} - \mathcal{N}^{-1} \sum_{|\mathbf{k}| \geq \bar{k}} \frac{1}{\exp[\omega_{\mathbf{k}}/T] - 1}. \quad (15)$$

在维度 $d = 1, 2$ 的情况下， $T > 0$ 时，第一项积分在小 k_0 发散

$$\Delta m_0 \propto \begin{cases} -\frac{t}{k_0} + \dots & d = 1 \\ t \log k_0 + \dots & d = 2 \end{cases}, \quad (16)$$

其中 $t = T/(JS)$ 。第二项求和是有限的，并且不影响红外奇异性。

上式最重要的结论是，一维和二维情况下，由于涨落导致的磁化修正会发散，因此我们之前的假设，即 $\langle (S_i^z - S) \rangle$ 是个小量，是错误的。因此HP算符展开的低阶截断是不适用的。自旋波理论在低维情况的失败和Mermin and Wagner定理6.2也是相符的，这确实排除了在所有非零温度下 $d = 1, 2$ 中的有限自发磁化。

在三维情况下没有红外发散， M 的主要温度依赖性可以通过将玻色函数（11.53）写成几何和并在动量上积分到无穷大来计算，如下所示：

$$\begin{aligned} \Delta m_0^{d=3} &= - \int_{k_0}^{\bar{k}} \frac{dk k^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-nk^2/t] [1 + \mathcal{O}(t)] \\ &\approx -\frac{1}{8} \left(\frac{t}{\pi} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} = -\frac{1}{8} \left(\frac{t}{\pi} \right)^{3/2} \zeta(3/2), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 ζ 是Riemann zeta函数。因此三维时，磁化修正的主要温度依赖于 $-T^{3/2}$ 成正比。

11.2.2 The Antiferromagnet

这里我们选择经典Neel态，A晶格上自旋在z方向上，B晶格上自旋在-z方向上。我们定义B晶格上旋转后的自旋为

$$\begin{aligned} j &\in B, \\ \tilde{S}_j^z &= -S_j^z, \\ \tilde{S}_j^x &= S_j^x, \\ \tilde{S}_j^y &= -S_j^y. \end{aligned} \quad (18)$$

显然 \tilde{S}^α 遵循和 S^α 相同的对易关系，因此可以使用HP玻色子表示。使用子晶格旋转表象，反铁磁海森堡模型可以写成

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -|J| \sum_{\langle ij \rangle} S_i^z \tilde{S}_j^z \\ & + \frac{1}{2} |J| \sum_{\langle ij \rangle} \left(S_i^+ \tilde{S}_j^+ + S_i^- \tilde{S}_j^- \right). \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -S^2 J \mathcal{N} z / 2 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{O}(1/S), \\ \mathcal{H}_1 = & JSz \sum_{\mathbf{k}} \left[b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{2} \left(b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \right) \right], \\ \mathcal{H}_2 = & -\frac{J}{4} \sum_{\langle ij \rangle} \left[b_i^\dagger (b_j^\dagger + b_i)^2 b_j + b_j^\dagger (b_i^\dagger + b_j)^2 b_i \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

\mathcal{H}_1 是一个二次型哈密顿量，包括了正常项和异常项。通过Bogoliubov变换我们可以将 \mathcal{H}_1 对角化。我们定义自旋波算符 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 为

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}} &= \cosh \theta_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \sinh \theta_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^\dagger, \\ a_{\mathbf{k}} &= \cosh \theta_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} + \sinh \theta_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}^\dagger. \end{aligned} \quad (21)$$

参数 $\theta_{\mathbf{k}}$ 是实数，上式是一个正则变换因为

$$\begin{aligned} [\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ [\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}] &= [\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

使用自旋波算符 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 重写 \mathcal{H}_1 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & |J|Sz \sum_{\mathbf{k}} \left[(\cosh 2\theta_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}} \sinh 2\theta_{\mathbf{k}}) \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} \right. \\ & + \frac{1}{2} (\sinh 2\theta_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}} \cosh 2\theta_{\mathbf{k}}) \left(\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{-\mathbf{k}}^\dagger + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}} \right) \\ & \left. + \sinh^2 \theta_{\mathbf{k}} + \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{2} \sinh 2\theta_{\mathbf{k}} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

现在我们选择 $\theta_{\mathbf{k}}$ 来让异常项消失，即满足

$$\tanh 2\theta_{\mathbf{k}} = -\gamma_{\mathbf{k}}, \quad (24)$$

这样我们会得到 \mathcal{H}_1 为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) - \frac{JSz\mathcal{N}}{2}, \\ \omega_{\mathbf{k}} &= |J|Sz\sqrt{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

这与路径积分的结果一致。上式表明，与铁磁情况不同， \mathcal{H}_1 包含了一个量子零点能量

$$E'_0 = E_0 - \left(-\frac{z}{2} \mathcal{N} |J| S^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |J| Sz \left(\sqrt{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2} - 1 \right). \quad (26)$$

注意到 E'_0 是负数，也就是说量子涨落降低了反铁磁系统的能量。我们可以通过最简单的两位点系统来理解这个现象。这个系统经典的基态能量为 $-JS^2$ ，量子能量应该更低为 $-JS(S+1)$ 。

量子反铁磁系统的基态是玻色子的真空。Bogoliubov变换在基态中引入了任意数量的HP玻色子，在自旋的语言中，基态混合了具有相对于Neel态的任意数量的自旋翻转的构型，这减小了 $T = 0$ 时的长程Neel序。

接近 $\mathbf{k} = 0$ 和接近 $\mathbf{k} = \vec{\pi} = (\pi, \pi, \dots)$ ，自旋波谱为

$$\omega_{\mathbf{k}} \sim \begin{cases} JS\sqrt{2z}|\mathbf{k}| & |\mathbf{k}| \approx 0 \\ JS\sqrt{2z}|\mathbf{k} - (\pi, \pi, \dots)| & \mathbf{k} \approx (\pi, \pi, \dots) \end{cases} \quad (27)$$

序参量是交错磁化。其低阶修正可以通过 \mathcal{H}_1 得到：

$$\begin{aligned} \Delta m_0^s &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left\langle \sum_i e^{i\vec{\pi} \cdot \mathbf{x}_i} S_i^z \right\rangle - S \\ &= -\frac{1}{\mathcal{N}} \left\langle \sum_i a_i^\dagger a_i \right\rangle \\ &= +\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

就如之前铁磁的例子，HP展开到二次项的截断需要满足 $\Delta m_0^s \ll S$

低温时 Δm_0^s 的主要红外奇异性可以通过在 $\omega_{\mathbf{k}} \approx 0$ 附近展开玻色方程来评估。使用 k_0 来截断 $\mathbf{k} \approx 0$ 和 $\mathbf{k} \approx \vec{\pi}$ 附近的动量求和可以得到

$$\Delta m_0 \sim \begin{cases} \frac{c_1}{k_0} & d = 1 \\ -c_2 + t \log k_0 & d = 2 \\ -c_3 + c'_3 t^2 & d = 3 \end{cases} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} c_d &= \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2}} - 1, \quad d = 2, 3, \\ c'_3 &= 6^{-5/2}/2, \\ t &= \frac{T}{|J|S\sqrt{d}}. \end{aligned} \quad (30)$$

11.1 Spin Waves: Path Integral Approach

考虑量子海森堡模型

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (31)$$

使用(7.34)式，相干态 $|\hat{\Omega}\rangle$ 的能量期望值为

$$H[\hat{\Omega}] = \langle \hat{\Omega} | \mathcal{H} | \hat{\Omega} \rangle = \frac{S^2}{2} \sum_{i,j} J_{i,j} \hat{\Omega}_i \cdot \hat{\Omega}_j. \quad (32)$$

H 的经典基态能量取决于耦合常数 J_{ij} 。由于模型的 $O(3)$ 对称性，全局自旋旋转生成简并基态的连续流形。特定的模型会由于阻挫有额外的基态简并度。简并发生在当没有构型可以同时最小化所有独立的键相互作用的情况下。与 \mathcal{H} 的对称性无关的简并通常会因为热力学或量子涨落被抬升。这里我们先不讨论阻挫的例子。

自旋波理论的基本假设是我们可以选择经典基态流形的一个成员 $\hat{\Omega}^{cl}$ ，将配分函数和格林函数在其附近使用鞍点展开

如图所示我们在每个位置选择两个横向单位向量 $\hat{\phi}_i$ 和 $\hat{\theta}_i$

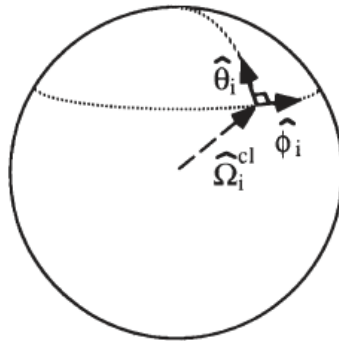


FIGURE 11.1. Parametrization of spin fluctuations about $\hat{\Omega}^{cl}$.

自旋涨落 $\delta\hat{\Omega} = \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^{cl}$ 可以通过投影出的两组变量参数化

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \{q_i\}_1^{\mathcal{N}} \equiv \{\delta\hat{\Omega}_i \cdot \hat{\phi}_i\}_1^{\mathcal{N}}, \\ \mathbf{p} &= \{p_i\}_1^{\mathcal{N}} \equiv \{S\delta\hat{\Omega}_i \cdot \hat{\theta}_i\}_1^{\mathcal{N}}.\end{aligned}\quad (33)$$

我们假设路径积分是由小涨落 $|\delta\hat{\Omega}| \ll 1$ 主导的，因此我们把自旋涨落的测量替换为相空间的测量

$$\mathcal{D}\delta\hat{\Omega} \rightarrow \nu \mathcal{D}\mathbf{q} \mathcal{D}\mathbf{p}, \quad \nu = \left(\frac{2S+1}{4\pi S} \right)^{N_\epsilon \mathcal{N}}. \quad (34)$$

N_ϵ 是时间的步数，因此 ν 是一个无限的重整化常数。 p 和 q 的积分区间可以被拓展到 $\int_{-\infty}^{\infty}$ ，我们得到了相空间路径积分

$$G \propto e^{iS[\hat{\Omega}^{cl}]} \int \mathcal{D}\mathbf{q} \mathcal{D}\mathbf{p} \exp \left[\frac{iS}{2} \int_0^t dt' (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mathcal{L}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \right] [1 + \mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{q})^3], \quad (35)$$

$\mathcal{L}^{(2)}$ 是自旋波拉格朗日方程，从一个固定的基态构型 $\hat{\Omega}^{cl}$ 而来。三次及更高阶的涨落引入比 S^{-1} 更高阶的修正。因为 $\frac{d}{dt} \hat{\Omega}^{cl} = 0$ ，对Berry相的最低阶贡献为

$$\begin{aligned}S \sum_i \omega_i &\approx \frac{1}{2} S \sum_i \int_0^t dt' \left(\hat{\Omega}^{cl} \cdot \delta\dot{\hat{\Omega}} \times \delta\hat{\Omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t dt' (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}),\end{aligned}\quad (36)$$

这里我们使用了(10.34)。上式中的动能项表明 \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 分别扮演了坐标和正则动量的角色。

哈密顿量的二阶展开产生了自旋波哈密顿量矩阵

$$\begin{aligned}H - H[\hat{\Omega}^{cl}] &\approx \frac{1}{2} (\mathbf{q}, \mathbf{p}) H^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \\ H^{(2)} &= \begin{pmatrix} K & P \\ P^T & M^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (37)$$

$H^{(2)}$ 是耦合谐振子的动力学矩阵，其中 M 和 K 分别是质量和力常数矩阵

$$\begin{aligned}K &= \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}=0}, \\ M^{-1} &= \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}=0}.\end{aligned}\quad (38)$$

P 耦合了坐标与动量

$$P = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}=0}. \quad (39)$$

结合(11.7)和(11.8)，我们得到了小振荡贡献

$$\mathcal{S}^{(2)} \approx \mathcal{S}_0 + \int_0^t dt' (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mathcal{L}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

其中

$$\mathcal{L}^{(2)} = - \begin{pmatrix} K & \partial_t + P \\ -\partial_t + P^T & M^{-1} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

自旋波模式($q_{\mathbf{k},\alpha}, p_{\mathbf{k},\alpha}$)可以通过解小振动的经典运动方程来得到

$$\frac{\delta S^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\delta \hat{\Omega}} = \mathcal{L}^{(2)} \begin{pmatrix} q_{\mathbf{k},\alpha} \\ p_{\mathbf{k},\alpha} \end{pmatrix} \exp(i\omega_{\mathbf{k},\alpha} t) = 0. \quad (42)$$

如果 $\hat{\Omega}^{cl}$ 在晶格上是周期性的，自旋波可以通过动量 \mathbf{k} 和能带下标 α 来标记。自旋波的频率可以通过特征方程给出

$$\det \begin{pmatrix} K & i\omega + P \\ -i\omega + P^T & M^{-1} \end{pmatrix}_{\omega=\omega_{\mathbf{k},\alpha}} = 0. \quad (43)$$

谐波自旋波是没有相互作用的玻色子。它们的本征模式和能量允许我们计算所有的热力学平均和动力学响应函数。特别的，对于自由能的自旋波修正为

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= \frac{T}{2} \ln \det \mathcal{L}^{(2)} \\ &= T \sum_{\mathbf{k},\alpha} \ln \sinh \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2T} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

我们可以通过Appendix C的内容将自旋波转化为玻色相干态

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_i(\tau) \\ \mathbf{z}_i(\tau)^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i(\tau) \\ \mathbf{p}_i(\tau) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

变量 z 将相空间路径积分转化为了玻色相干态路径积分

$$\mathcal{D}\mathbf{p}\mathcal{D}\mathbf{q} = \mathcal{D}^2\mathbf{z} \quad (46)$$

动能项为

$$\frac{i}{2} \int_0^t dt' (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_0^t dt' (\mathbf{z}^* \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^* \mathbf{z}). \quad (47)$$

因此格林函数为

$$G = \int \mathcal{D}^2\mathbf{z} \exp \left[i \frac{1}{2} \int_0^t dt' (\mathbf{z}^* \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^* \mathbf{z}) - H[\mathbf{z}^*, \mathbf{z}] \right], \quad (48)$$

这里谐波玻色哈密顿量为

$$H[\mathbf{z}^*, \mathbf{z}] \approx \frac{1}{2}(\mathbf{z}^*, \mathbf{z})\tilde{H}^{(2)}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{pmatrix},$$

$$\tilde{H}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K + M^{-1}) & \frac{1}{2}(K - M^{-1} + iP) \\ \frac{1}{2}(K - M^{-1}) - iP & \frac{1}{2}(K + M^{-1}) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

其中包含了正常项和反常项(z^*z^*, zz)

使用实时到虚时的变换

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -i\tau, \\ t &\rightarrow -i\beta. \end{aligned} \quad (50)$$

路径积分就可以转化为配分函数。自旋波对于配分函数的贡献为

$$Z' \approx \oint \mathcal{D}^2 z_\omega \exp \left\{ -\beta \sum_{\omega_n} \left[i\omega_n \mathbf{z}^* \mathbf{z} - \frac{1}{2}(\mathbf{z}^*, \mathbf{z})\tilde{H}^{(2)}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{pmatrix} \right] \right\} \quad (51)$$

$$= \prod_n \det \left[\begin{pmatrix} i\omega_n & 0 \\ 0 & -i\omega_n \end{pmatrix} - \tilde{H}^{(2)} \right]^{-1}$$

$$\omega_n = 2n\pi/\beta. \quad (52)$$

ω_n 是玻色松原频率， \sum_ω 是Appendix D中定义的离散松原频率求和。

从相干态哈密顿量向后推到二次量子化玻色哈密顿量，我们得到

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2}(b^\dagger, b)H \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K + M^{-1}) & \frac{1}{2}(K - M^{-1}) + iP \\ \frac{1}{2}(K - M^{-1}) - iP & \frac{1}{2}(K + M^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix} + E'_0, \quad (53)$$

其中包含了正常项和反常项。 E'_0 是一个未知的常数。在 Z' 的表达式中没有关于算符 b 、 b^\dagger 顺序的正确信息，因此常数是模糊的。下面我们将使用HP玻色子来解决这个模糊性。

只要 $\hat{\Omega}^{cl}$ 定义好，我们就可以确定任意海森堡模型的自旋波模式。下面我们主要讨论一二三维方格子上的最简单的海森堡铁磁和反铁磁模型

$$\begin{aligned} H &= \pm |J|S^2 \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\Omega}_i \cdot \hat{\Omega}_j \\ &= JS^2 \sum_{\langle ij \rangle} [\cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\phi_i - \phi_j)], \end{aligned} \quad (54)$$

这些哈密顿量的自旋波展开特别简单，因为它们的经典基态要么是均匀铁磁体，要么是Neel反铁磁体。

11.1.1 The Ferromagnetic

假设路径积分的自旋波展开对于有序经典基态是有效的，我们可以使自旋极化到 x 方向（使用一个小的磁场或边界条件），即

$$\hat{\Omega}^{cl} = (\theta^{cl}, \phi^{cl}) = (\pi/2, 0). \quad (55)$$

涨落的参数化为

$$\begin{aligned} q_i &= \phi_i, \\ p_i &= S \cos \theta_i. \end{aligned} \quad (56)$$

对于小的

$$|\cos \theta| \ll 1, \quad |\phi_i| \ll \pi \quad (57)$$

我们将铁磁哈密顿量（ $-|J|$ ）展开到二阶得到

$$H \approx -\frac{\mathcal{N}z}{2}|J|S^2 + \frac{1}{2}|J|S^2 \sum_{\langle ij \rangle} \left[\frac{(p_i - p_j)^2}{S^2} + (q_i - q_j)^2 \right] + \dots, \quad (58)$$

其中 \mathcal{N} 是格点的数量 $z = 2d$ 是 d 维时的配位数。我们发现 $P = 0$ 因此

$$\begin{aligned} M_{ij}^{-1} &= -z|J|\nabla_{ij}^2, \\ K_{ij} &= -z|J|S^2\nabla_{ij}^2, \end{aligned} \quad (59)$$

晶格拉普拉斯算子的定义为

$$\nabla_{ij}^2 = z^{-1} \sum_{\eta} (\delta_{i+\eta, j} - \delta_{i, j}). \quad (60)$$

η 时最近邻矢量。 ∇^2 的本征值为

$$\nabla_{\mathbf{k}}^2 = \mathcal{N}^{-1} \sum_{ij} e^{-\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \nabla_{ij}^2 \quad (61)$$

$$= z^{-1} \sum_{\eta} (e^{i\mathbf{k}\eta} - 1) \equiv \gamma_{\mathbf{k}} - 1, \quad (62)$$

这里定义了“紧束缚”方程 $\gamma_{\mathbf{k}}$ 。代入到行列式我们可以得到

$$\det \begin{pmatrix} -z|J|S^2(\gamma_{\mathbf{k}} - 1) & i\omega_{\mathbf{k}} \\ -i\omega_{\mathbf{k}} & -z|J|(\gamma_{\mathbf{k}} - 1) \end{pmatrix} = 0, \quad (73)$$

可以解出

$$\omega_{\mathbf{k}} \equiv z|J|S(1 - \gamma_{\mathbf{k}}). \quad (74)$$

此时自旋波可以描述为所有自旋关于 x 轴的角频率为 $\omega_{\mathbf{k}}$ 的进动。

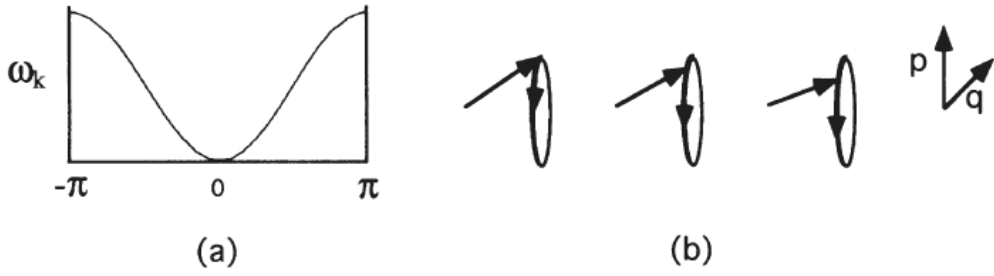


FIGURE 11.2. Ferromagnetic spin waves. (a) Dispersion in $d = 1$. (b) Polarization for $k \approx 0$.

11.1.2 The Antiferromagnet

我们假设路径积分可以从经典Neel态展开。不失一般性，我们选择Neel态指向在A子格上指向x方向，在B子格上指向-x方向。

$$(\theta_i^{cl}, \phi_i^{cl}) = \begin{cases} (\pi/2, 0) & i \in A \\ (\pi/2, -\pi) & i \in B \end{cases} \quad (75)$$

(这里，可以方便地将矢量势的奇异性定义为远离x和-x，即使用规范势 (10.18)，其仅在南极具有奇异性。) 小涨落定义为

$$q_i = \begin{cases} \phi_i & i \in A \\ \phi_i + \pi & i \in B \end{cases} \quad (76)$$

$$p_i = S \cos \theta_i.$$

反铁磁哈密顿量 ($+|J|$) 的二阶展开为

$$H \approx -\frac{\mathcal{N}z}{2}|J|S^2 + \frac{1}{2}|J|S^2 \sum_{\langle ij \rangle} \left[\frac{(p_i + p_j)^2}{S^2} + (q_i - q_j)^2 \right] + \dots \quad (77)$$

质量和力常数矩阵为

$$M_{ij}^{-1} = zJ(\nabla_{ij}^2 + \frac{2}{z}\delta_{ij}), \quad (78)$$

$$K_{ij} = -zJS^2\nabla_{ij}^2,$$

它们可以同时傅立叶空间对角化

$$M_{\mathbf{k}}^{-1} = zJ(1 + \gamma_{\mathbf{k}}), \quad (79)$$

$$K_{\mathbf{k}} = zJS^2(1 - \gamma_{\mathbf{k}}).$$

自旋波谱可以通过解决行列式得到

$$\det \begin{pmatrix} -z|J|S^2(\gamma_{\mathbf{k}} - 1) & i\omega_{\mathbf{k}} \\ -i\omega_{\mathbf{k}} & z|J|(\gamma_{\mathbf{k}} - 1) \end{pmatrix} = 0, \quad (80)$$

得到

$$\omega_{\mathbf{k}} \equiv zJS^2 \sqrt{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2} \sim c|\mathbf{k} - \mathbf{k}_c|, \quad (81)$$

其中 $\mathbf{k}_c = 0, \vec{\pi}$, $\vec{\pi} = (\pi, \pi, \dots)$, 自旋波速为

$$c = 2\sqrt{d}JS. \quad (82)$$

反铁磁自旋波是围绕经典方向 $\pm\hat{x}$ 进动的单位向量，在两个子晶格上方向相反。有两个简并的反铁磁自旋波模式，频率分别在 $\mathbf{k} \rightarrow 0$ 和 $\mathbf{k} \rightarrow \vec{\pi}$ 消失

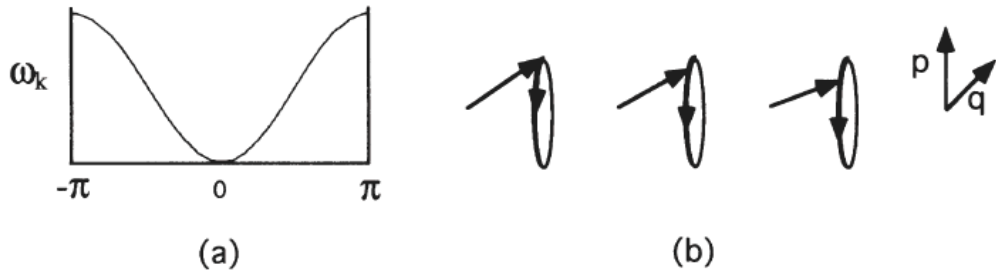


FIGURE 11.2. Ferromagnetic spin waves. (a) Dispersion in $d = 1$. (b) Polarization for $k \approx 0$.