

# 17.3-17.5

## 17.3 Combining Coulomb and electron-phonon interactions

下讨论电子-离子、电子-电子的长程库仑相互作用。简单起见，之后只研究纵波声子，从而可以略去偏振指标 $\lambda$ 。

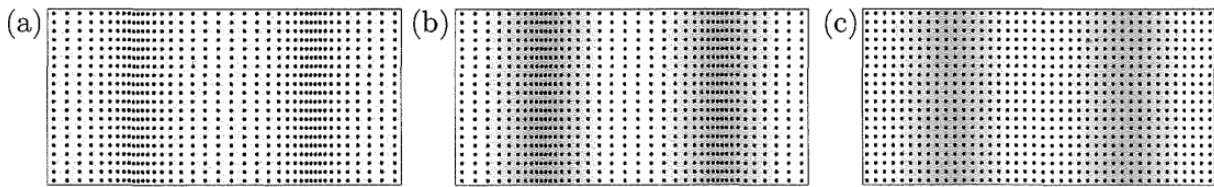


FIG. 3.1. Three types of oscillation in metals. The grayscale represents the electron density and the dots the ions. (a) Slow ionic density oscillations in a static electron gas (ion plasma oscillations). The restoring force is the long range Coulomb interaction. (b) slow ion oscillations followed by the electron gas (sound waves, acoustic phonons). The restoring force is the compressibility of the disturbed electron gas. (c) Fast electronic plasma oscillations in a static ionic lattice (electronic plasma oscillations). The restoring force is the long range Coulomb interaction.

图 3.1 描绘了仅考虑离子与电子气间的相互作用，并假设电子气各向同性和完全惰性（电子不运动，负电背景）下离子等离子体震荡的发生。在 Section 3.1 中研究了离子等离子体在凝胶模型中的振动。在离子密度 $\rho_{ion}^0 = \frac{N}{V}$ 下，非色散凝胶声子模式的长波极限为：

$$\Omega_{\mathbf{q}} = \Omega = \sqrt{\frac{Z^2 e^2 N}{\epsilon_0 M V}} \quad (17.18)$$

由凝胶声子介导的电子-电子耦合常数可由 (3.44)、(17.18) 得到（最后一个等号略去 $\hbar$ ）

$$\frac{1}{V} |g_{\mathbf{q}}|^2 = \frac{1}{V} \left( \frac{Z e^2}{q \epsilon_0} \right)^2 \frac{N \hbar}{2 M \Omega} = \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \frac{\hbar \Omega}{2} = \frac{1}{2} W(q) \Omega \quad (17.19)$$

$$g_{\mathbf{q}}^{\text{jel}} = i \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \frac{1}{q} \sqrt{\frac{N\hbar}{2M\Omega}} \quad (3.44)$$

由此产生电子-电子相互作用：

$$\frac{1}{V} |g_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{D}^0(\mathbf{q}, iq_n) = W(q) \frac{\Omega^2}{(iq_n)^2 - \Omega^2} \quad (17.20)$$

为讨论电子运动的作用，我们加入电子-电子相互作用  $V_{el-el}$ ，研究电子-声子系统的完整哈密顿量：

$$H = H_{\text{el}} + V_{\text{el-el}} + H_{\text{ph}} + H_{\text{el-ph}} \quad (17.21)$$

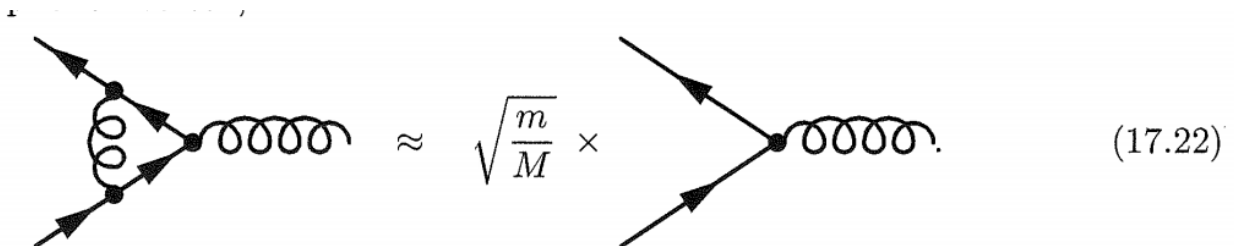
### 17.3.1 Migdal's theorem

当加入电子-声子耦合  $H_{el-ph}$  时，一个问题自然就产生了：

1. 是先研究电子对离子的影响，再研究离子对电子的影响
2. 还是先研究离子对电子的影响，再探究电子对离子的影响。

问题的答案由 Migdal's 定理给出，该定理与Born-Oppenheimer 相似。Born-Oppenheimer 相似指出将运动缓慢、重的离子坐标  $\mathbf{R}_i$  作为快速运动的轻电子 Schrodinger 方程的参数，是一个好的近似。随后， $\mathbf{R}_i$  绝热变化。类似的，通过对相空间的讨论可以证明，电子-声子顶点的重整化至少会被系数  $\sqrt{\frac{m}{M}} \sim 10^{-2}$  所压制（m, M 分别为电子、离子质量）。下面仅通过研究电子-声子顶点的最简单声子修正来概述 migdal's 定理的证明。

?



$$\approx \sqrt{\frac{m}{M}} \times \quad (17.22)$$

证明基于自洽假设：假设凝胶声子具有高频率  $\Omega$ ，通过电子屏蔽过程，重整化为低频（ $\omega_{\mathbf{q}} = v_s q$ ）声学声子。利用重整化后的声子，可证明 (17.22)（下一节进行）；给出 (17.22) 式，又可以证明声子重整化。

对于声学声子，其重要的频率是那些小于 Debye 频率  $\omega_D$  的频率  $\omega_{\mathbf{q}}$ 。(17.22) 中的左图比右图多一条声子线和两条电子线。根据 (17.37)，典型的低频声子（ $|iq_n| \ll \omega_D$ ）的相互作用，由  $-\frac{W(q)}{\epsilon_{\text{RPA}}}$  给出。进一步，根据四动量守恒，两条电子线被限制在费米面附近  $\omega_D$  范围内。从而相空间因子  $\frac{\omega_D}{\epsilon_F}$  出现在成对气泡线的贡献前。两张图贡献的比值大致由下式给出：

$$\frac{W(q)}{\epsilon_{\text{RPA}}} \times \frac{\hbar\omega_D}{\epsilon_F} \times d(\epsilon_F) = \frac{\hbar\omega_D}{\epsilon_F} = \frac{v_s k_D}{\frac{1}{2}v_F k_F} = 2\sqrt{\frac{Z}{3}} \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{k_D}{k_F} \approx \sqrt{\frac{m}{M}} \quad (17.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}} |g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}|^2 \mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) &= - \text{Diagram} \\ &= \frac{|g_{\mathbf{q}}|^2/\mathcal{V}}{(\epsilon^{\text{RPA}})^2} \frac{2\Omega}{(iq_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} = \frac{W(q)}{\epsilon^{\text{RPA}}} \frac{\omega_{\mathbf{q}}^2}{(iq_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}. \end{aligned} \quad (17.37)$$

$$\begin{aligned} \chi_0^R(\mathbf{q}, 0) &\xrightarrow{q \rightarrow 0} 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}}) \frac{\partial n_F}{\partial \xi_{\mathbf{p}}}}{\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}}} = - \int d\xi_{\mathbf{p}} d(\mu + \xi_{\mathbf{p}}) \left[ -\frac{\partial n_F}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \right] \\ &\simeq -d(\epsilon_F), \quad \text{for } k_B T \ll \epsilon_F. \end{aligned} \quad (14.22)$$

$$W^{\text{RPA}}(q \rightarrow 0, 0) = \frac{1}{d(\epsilon_F)} \quad (14.23)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{Zm}{3M}} v_F \quad (3.5)$$

下面，我们假设可忽略声子诱导的电子-声子顶角重整化，因此我们可以只研究电子自由度对声子自由度的影响。上述分析结果表明，Migdal's 定理的假设满足。

## 17.3.2 Jellium phonons and the effective electron-electron interaction

在对相互作用电子实际的计算中，我们需要考虑电子间的库伦相互作用以及声子介导的相互租用之和。将两者结合，得到有效电子-电子相互作用。

$$\begin{array}{c} -V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, iq_n) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \equiv \begin{array}{c} -W(\mathbf{q}) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} -\frac{1}{V}|g_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{D}^0(\mathbf{q}, iq_n) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (17.24)$$

将 (17.20) 代入 (17.24) 有：

$$V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, iq_n) = W(q) + W(q) \frac{\Omega^2}{(iq_n)^2 - \Omega^2} = W(q) \frac{(iq_n)^2}{(iq_n)^2 - \Omega^2} \quad (17.25)$$

解析延拓  $iq_n \rightarrow \omega + i\eta$ ：

$$V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, \omega) = W(q) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2 + i\tilde{\eta}} \quad (17.25)$$

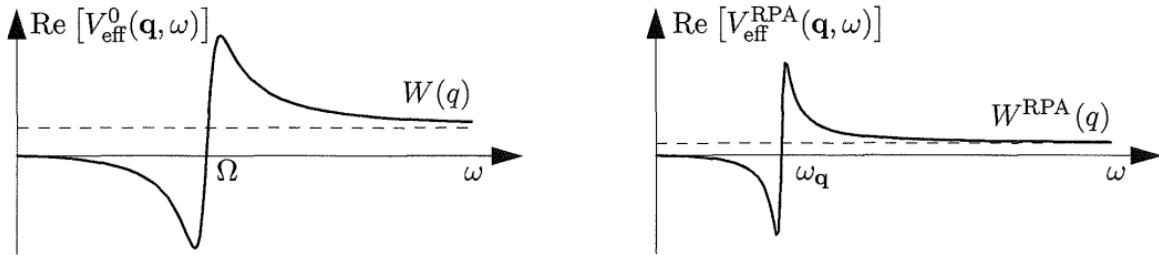


FIG. 17.1. (a) The real part of the bare, effective electron-electron interaction  $V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, \omega)$  as a function of the real frequency  $\omega$  for a given momentum  $\mathbf{q}$ . Note that the interaction is attractive for frequencies  $\omega$  less than the jellium phonon frequency  $\Omega$ , and that  $V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow W(q)$  for  $\omega \rightarrow \infty$ . (b) The same for the RPA renormalized effective electron-electron interaction  $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega)$ , see Section 17.4. Now, the interaction is attractive for frequencies  $\omega$  less than the acoustic phonon frequency  $\omega_q$ , and  $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow W^{\text{RPA}}(q)$  for  $\omega \rightarrow \infty$ .

$\text{Re}(V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, \omega))$  如 Fig17.1 (a) 所示，有效电子-电子相互作用在  $\omega < \Omega$  时小于0。这表明，在低频下，电子-声子相互作用与电子-电子库伦相互作用的总和表现为吸引作用。在高频极限下， $V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow W(\mathbf{q})$

## 17.4 Phonon renormalization by electron screening in RPA

电子库仑相互作用使有效的电子-电子相互作用重整化。Migdal's 定理使我们忽略声子过程引起的重整化，而只考虑最重要的电子过程。 $V_{eff}^0(\mathbf{q}) \propto W(\mathbf{q})$ ，Chapter 14的讨论了高密度极限下，电子过程可取 RPA 近似。

(14.62) - (14.67) 给出了介电函数  $\epsilon^{RPA}$ ，密度-密度关联函数  $-\chi^{RPA}$ ，成对气泡  $-\chi_0$

$$-\chi^{RPA} = \text{Diagram with a shaded box labeled RPA inside a bubble},$$

$$-\chi_0 = \text{Diagram of a simple bubble with two vertices}.$$

$$\epsilon^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n) = 1 - W(q)\chi_0(\mathbf{q}, iq_n)$$

$$\chi^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n) = \frac{\chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}{1 - W(q)\chi_0(\mathbf{q}, iq_n)} = \frac{\chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}{\epsilon^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n)}, \quad (17.27)$$

$$1 + W(q)\chi^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n) = 1 + \frac{W\chi_0}{1 - W\chi_0} = \frac{1}{1 - W\chi_0} = \frac{1}{\epsilon^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n)}.$$

仿照 (14.69)，可得到：

$$-V_{eff}^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{Diagram of a wavy line} = \text{Diagram of a spring} + \text{Diagram of a spring with a bubble} \quad (17.28)$$

$$-W^{RPA}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{Diagram of a wavy line} = \text{Diagram of a spring} + \text{Diagram of a spring with a bubble} + \text{Diagram of a spring with two bubbles} + \dots \quad (14.69)$$

$$-V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{diagram} = \frac{\text{diagram}}{1 - \text{diagram}} = \frac{-V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q})}{1 - V_{\text{eff}}^0(\mathbf{q}) \chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}. \quad (17.29)$$

将 (17.28) 式展开，提出只含有库伦相互作用的项  $W^{\text{RPA}}$ ，剩余库伦相互作用与电子-声子相互作用混合的项为  $-\frac{1}{V} |g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}|^2 \mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)$

$$-V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram}. \quad (17.30)$$

重整化的耦合系数  $g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}} \left[ \{g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}\}^* \right]$  为：

$$g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}} \equiv \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram}, \quad (17.31)$$

即第一条声子线前的所有图求和。

重整化的声子线  $\mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)$  为：

$$-\mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram}, \quad (17.32)$$

- 考虑将第一条声子线与第二条声子线间的区域
- 由于无穷求和，第二条声子线以及其后的项与全部的项  $\mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)$  相同。
- 第一、第二条声子线间求和的部分（圈图）

$$-\mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \frac{\text{diagram}}{1 - \text{diagram}} = \frac{-\mathcal{D}^0(\mathbf{q}, iq_n)}{1 - \chi^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) \frac{1}{V} |g_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{D}^0(\mathbf{q}, iq_n)}. \quad (17.33)$$

利用 (17.7)、(17.20)、(17.27c) 得到

$$\mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \frac{2\Omega}{\left[(iq_n)^2 - \Omega^2\right] - \Omega^2 W(q) \chi^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)} = \frac{2\Omega}{(iq_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \quad (17.34)$$

$$\omega_{\mathbf{q}} \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)}} = \sqrt{\frac{Z^2 e^2 \rho_{\text{ion}}^0}{\varepsilon^{\text{RPA}} \epsilon_0 M}} = \sqrt{\frac{Z e^2 \rho_{\text{el}}^0}{\varepsilon^{\text{RPA}} \epsilon_0 M}}, \quad (17.35)$$

$$\mathcal{D}_{\lambda}^0(\mathbf{q}, iq_n) = \frac{1}{iq_n - \Omega_{\mathbf{q}\lambda}} - \frac{1}{iq_n + \Omega_{\mathbf{q}\lambda}} = \frac{2\Omega_{\mathbf{q}\lambda}}{(iq_n)^2 - (\Omega_{\mathbf{q}\lambda})^2} \quad (17.7)$$

$$-\chi^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{diagram} = \frac{\text{diagram}}{1 - \text{diagram}} = \frac{-\chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}{1 - W(\tilde{q}) \chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}. \quad (14.66)$$

$\omega_{\mathbf{q}}$  为电子 RPA-屏蔽重整化的声子频率。

$g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}$  的值为

$$g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}} \equiv \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} = (1 + W \chi^{\text{RPA}}) g_{\mathbf{q}} = \frac{g_{\mathbf{q}}}{\varepsilon^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n)}. \quad (17.36)$$

结合 (17.34)、(17.36) 可得声子介导的电子-电子相互作用强度：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}} |g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}|^2 \mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) &= - \text{Diagram} \\ &= \frac{|g_{\mathbf{q}}|^2/\mathcal{V}}{(\varepsilon^{\text{RPA}})^2} \frac{2\Omega}{(iq_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} = \frac{W(q)}{\varepsilon^{\text{RPA}}} \frac{\omega_{\mathbf{q}}^2}{(iq_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}. \end{aligned} \quad (17.37)$$

可以看到重整化的传播子与声子传播子相似，其中为屏蔽的声子频率  $\Omega$  与未屏蔽的库伦相互作用  $W(q)$  由对应的 RPA-屏蔽项  $\omega_{\mathbf{q}} \cdot \frac{W(q)}{\varepsilon^{\text{RPA}}}$  取代。

下估计  $\omega_{\mathbf{q}}$  在静态、长波极限下的值。利用  $\varepsilon^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) \rightarrow k_s^2/q^2 = (4k_F/\pi a_0)/q^2$ ， $k_F^3 = 3\pi^2 \rho_{\text{el}}^0$  可得

$$\omega_{\mathbf{q}}(q \rightarrow 0, 0) = \sqrt{\frac{Ze^2 \rho_{\text{el}}^0}{k_s^2 \varepsilon_0 M}} q = \sqrt{\frac{Zm}{3M}} v_F q \quad (17.38)$$

$$k_s^2 = -4\pi e_0^2 \chi_0^R(0, 0) = 4\pi e_0^2 d(\varepsilon_F) = \frac{4}{\pi} \frac{k_F}{a_0} \quad (14.24)$$

$$k_s^2 \equiv -4\pi e_0^2 \chi_0(0, 0) \quad (14.19)$$

$$\chi_0(\mathbf{q}, iq_n) = 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})}{iq_n + \xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \quad (14.21)$$

这可认为是凝胶模型中声学声子色散关系的 Bohm-staver 公式。这一结果的意义在于从耦合电子、声子问题的微观哈密顿量(17.21)出发，利用费曼图技术展示了声子谱如何通过电子气相互作用而重整化。非相互作用问题的长程库仑力产生了高频率的光凝胶声子。通过引入电子-电子相互作用，库仑力得到了屏蔽，声子色散关系重整化为通常的低频声色散  $\omega_{\mathbf{q}} = v_s q$ 。在更基本的处理中，该谱是通过遵循胡克定律短距离力的假设得到的，但现在我们已经从第一原理证明了它。

综合以上分析，本节最主要的结论为：



$$\begin{aligned}
-V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) &= -W^{\text{RPA}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{V} |g_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}|^2 \mathcal{D}^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) \\
&= -W^{\text{RPA}}(q) \frac{(iq_n)^2}{(iq_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}.
\end{aligned} \tag{17.39}$$

$$-W^{\text{RPA}}(\mathbf{q}, iq_n) = \text{wavy line} = \frac{\text{wavy line}}{1 - \text{bubble diagram}} = \frac{-W(\mathbf{q})}{1 - W(\mathbf{q}) \chi_0(\mathbf{q}, iq_n)}. \tag{14.16}$$