SÁCH ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH VĂN PHIÊU — LÊ MẬU HẢI
NGUYỄN THU NGA — NGUYỄN HUY LỢI

BÀI TẬP HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

Nhà xuất bản Giáo dục
1984

CHƯƠNG I

SỐ PHỨC VÀ HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

§ 1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

1. Tính $z = \dfrac{1 - i}{1 + i}$.

Giải : $$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

2. Tính $z = (1 + i\sqrt{3})^3$.

Giải : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$$z = (1 + i\sqrt{3})^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8.$$

3. Tìm môđun và argumen của các số phức :

a) $-1 - i$; b) $-2 + 5i$; c) $-2 - 5i$; d) $a + ib$ $(a \neq 0)$.

Giải : a) $z = -1 - i \Rightarrow r = \sqrt{2},\ \varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

b) $z = -2 + 5i \Rightarrow r = \sqrt{29},\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}$.

c) $z = -2 - 5i \Rightarrow r = \sqrt{29},\ \varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}$.

d) $z = a + ib \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a < 0,\ b > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a < 0,\ b < 0. \end{cases}$$

4. Giải phương trình $z = z^{n-1}$ $(n \geq 3)$.

Giải : $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)$

Biến đổi về dạng :

$$r = r^{n-1}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Từ đó $r = r^{n-1}$. Do đó $r = 1$.

$$n\varphi = 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{n} \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Nghiệm của phương trình là :

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5. Tìm các giá trị của căn những số phức sau :

$$\sqrt[3]{i},\ \sqrt[4]{1},\ \sqrt{1-i},\ \sqrt{3+4i}.$$

Giải : a) $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{i}$ có 3 giá trị là :

$$\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\alpha_1 = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

$$\alpha_2 = -i.$$

b) $1 = \cos 0 + i\sin 0$: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$;

$$\alpha_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 ;$$

$$\alpha_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

c) Đặt $x + iy = \sqrt{1 - i} \Rightarrow (x + iy)^2 = 1 - i$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 1 - i.$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 1 \\ 4x^2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Giải hệ :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{2(1 + \sqrt{2})}{4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}}{2} \\ y^2 = \dfrac{2(\sqrt{2} - 1)}{4} \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}}{2} \end{cases}$$

Do $xy = -\dfrac{1}{2} < 0$ nên x và y trái dấu. Vậy :

$$\alpha_1 = -\frac{\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}}{2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}}{2}$$

Bằng cách tương tự tìm được 2 giá trị α_1 và α_2 của $\sqrt{3 + 4i}$.

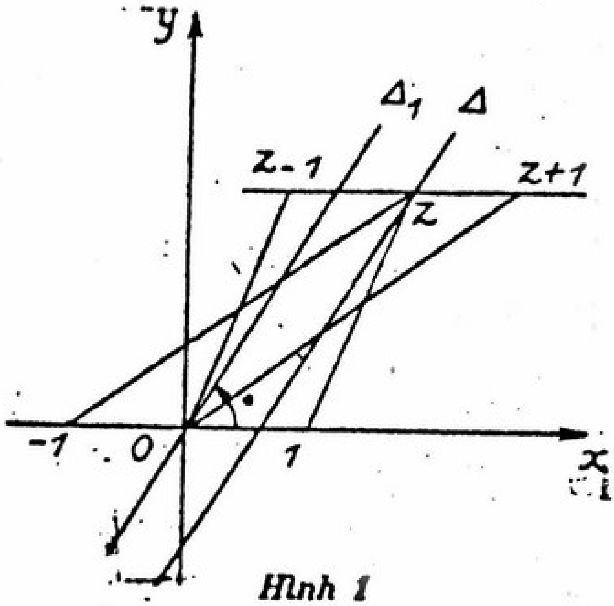
$$\alpha_1 = 2 + i,$$

$$\alpha_2 = -2 - i.$$

6. Chứng minh rằng cả hai giá trị $\sqrt{z^2 - 1}$ nằm trên một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và song song với đường phân giác của góc trong có đỉnh tại z của tam giác có các đỉnh tại các điểm -1, 1 và z.

Giải : Một nhận xét là nếu α_1 và α_2 là 2 giá trị của căn bậc 2 của z thì $\arg\alpha_2 = \arg\alpha_1 \mp \pi$. Bởi vậy α_1 và α_2 luôn nằm trên một đường thẳng qua gốc tọa độ. Do vậy nếu gọi α_1,

α_2 là 2 căn bậc 2 của $\sqrt{z^2-1}$ thì chúng luôn nằm trên 1 đường thẳng qua gốc tọa độ. Chỉ cần chứng minh chúng nằm trên đường thẳng song song với đường phân giác của góc trong có đỉnh tại z của tam giác có đỉnh tại các điểm $-1, 1$ và z.



Hình 1

Dựng tam giác $z-1, 0, z+1$ (h. 1) có các cạnh song song với các cạnh của tam giác $-1, z, 1$. Từ O dựng đường phân giác trong của tam giác $z-1, 0, z+1$ thì đường phân giác đó song song với đường phân giác vẽ từ đỉnh Z của tam giác $-1, 1$ và z.

Gọi φ là góc hợp bởi trục Ox và Δ_1 thì

$$\varphi = \frac{1}{2}(\arg(z-1) - \arg(z+1)) + \arg(z+1)$$

$$= \frac{1}{2}(\arg(z-1) + \arg(z+1))$$

Nếu gọi $\alpha_1 = \sqrt{z^2-1}$ thì

$\alpha_1^2 = z^2 - 1 \Rightarrow 2\arg\alpha_1 = \arg(z-1) + \arg(z+1)$.

Vậy $\arg\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(\arg(z-1) + \arg(z+1))$.

Do đó $\alpha_1 \in \Delta_1$. Tương tự $\alpha_2 \in \Delta_1$.

7. Chứng minh $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ và giải thích xem khi nào có dấu đẳng thức.

Giải : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2 z_1 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\text{Re}\, z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2$.

Nhưng : $\text{Re}\, z_1\bar{z}_2 \leqslant |z_1||z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2 = |z_1|\cdot|z_2| \Rightarrow z_1 . \bar{z}_2$ là số thực dương. Vậy $\mathrm{Im}\, z_1 . \bar{z}_2 = x_2y_1 - x_1y_2 = 0 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} =$

$= \frac{y_2}{y_1} = r$, r : số thực. Vậy $z_2 = rz_1$.

Do : $z_1 . \bar{z}_2 = |z_1|.|z_2| \Rightarrow r|z_1|^2 = |z_1|.|z_2| \Rightarrow r > 0$.

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $z_2 = rz_1$ với $r > 0$.

8. Chứng minh $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant |\arg z|$ và giải thích ý nghĩa hình học.

Giải : Giả thử $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| = |\cos\varphi - 1 + i\sin\varphi| = \sqrt{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{\varphi}{2}\right| =$$

$$= |\varphi| = |\arg z|.$$

Ý nghĩa hình học: Nếu vẽ đường tròn đơn vị và gọi A là điểm biểu diễn cho số 1 và B là điểm biểu diễn cho số $\frac{z}{|z|}$ thì $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right|$ là độ dài của dây AB. Còn $|\arg z|$ là độ dài của cung AB. Hệ thức vừa chứng minh nói lên độ dài của dây AB phải nhỏ hơn hay bằng độ dài cung AB.

9. Chứng minh

$$|1 - \bar{z}_1z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$$

Giải :

$$|1 - \bar{z}_1z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 =$$

$$= (1 - \bar{z}_1z_2)(1 - z_1\bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) =$$

$$= 1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 - |z_2|^2 =$$

$$= 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$$

10. Chứng minh rằng nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ thì những điểm z_1, z_2, z_3 là 3 đỉnh của một tam giác đều nội tiếp trong hình tròn đơn vị.

Giải : Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên z_1, z_2, z_3 thuộc đường tròn đơn vị. Chỉ cần chứng minh $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. Xét hiệu :

$$|z_1 - z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 = \bar{z}_2 z_3 + z_2\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2$$
$$|z_1 - z_3|^2 - |z_2 - z_3|^2 = \bar{z}_2 z_3 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3 - z_1\bar{z}_3$$

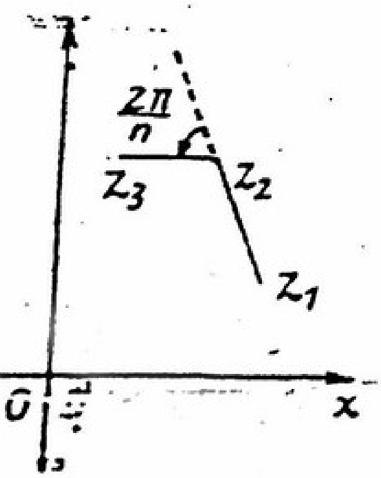
Xét vế phải của 2 đẳng thức này : Ta chứng minh các vế phải của 2 đẳng thức này bằng nhau :

$$\bar{z}_2 z_3 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 = \bar{z}_2 z_3 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3 - z_1\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_2 z_3 - z_2\bar{z}_3 = -\bar{z}_2 z_3 - z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3 - z_1\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z_2(-\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \bar{z}_2(-z_1 - z_3) = z_3(-\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}_3(-z_1 - z_2).$$

Dùng giả thiết $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow -z_1 - z_3 = z_2$ và $-z_1 - z_2 = z_3$ ta thấy vế trái bằng $2|z_2|^2$, còn vế phải bằng $2|z_3|^2$. Do đó vì $|z_2| = |z_3|$ nên hai vế bằng nhau. Bởi vậy :

$$|z_1 - z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_3|^2 - |z_2 - z_3|^2.$$

Do đó : $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$. Tương tự : $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Do đó tam giác $z_1z_2z_3$ là tam giác đều. Kết hợp với điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ thì tam giác đó nội tiếp đường tròn đơn vị.



Hình 2

11. Cho biết 2 đỉnh liên tiếp z_1 và z_2 của đa giác đều n cạnh. Tìm đỉnh z_3 kề với z_2 ($z_3 \neq z_1$).

Giải : $z_3 = z_2 + (z_3 - z_2)$

Chỉ cần xác định $z_3 - z_2$.

Rõ ràng $|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$.

Do hình 2 ta có :

$$z_3 - z_2 = (z_2 - z_1) \,.\, e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Vậy :

$$z_3 = z_2 + (z_2 - z_1) \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

12. Tìm điều kiện cần và đủ để 3 điểm z_1, z_2, z_3 từng đôi một khác nhau cùng nằm trên một đường thẳng.

Giải : Do z_1, z_2, z_3 cùng nằm trên một đường thẳng nên $z_1 - z_3 = k(z_1 - z_2)$ với k là một số thực., Vậy $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = k$.

Do đó $\operatorname{Im} \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0$. Vậy điều kiện cần để 3 điểm z_1, z_2 z_3 khác nhau từng đôi và cùng thuộc một đường thẳng là :

$$\operatorname{Im} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0.$$

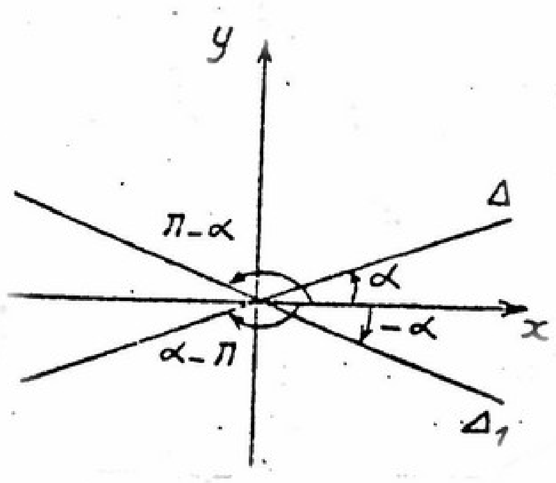
Ta thấy rõ ràng điều kiện đó cũng là điều kiện đủ.

13. Những điểm $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nằm về một phía của một đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{z_1}, \ldots, \dfrac{1}{z_n}$ cùng có tính chất tương tự và $z_1 + \ldots + z_n \neq 0$,

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

Giải : Giả thử đường thẳng Δ có phương trình $y = kx$ lập với chiều dương của trục hoành góc α. Giả thử các điểm $z_t (1 \leqslant t \leqslant n)$ đều nằm về một phía của Δ và để xác định ta giả thiết chúng đều nằm phía dưới của Δ, nghĩa là :

$$\alpha - \pi < \arg z_t \leqslant \alpha$$
$(1 \leqslant t \leqslant n)$.



Hình 3

Khi đó : $\qquad \pi - \alpha > \arg \frac{1}{z_t} = -\arg z_t > -\alpha.$

Vậy các điểm $\frac{1}{z_t}$ $(1 \leqslant t \leqslant n)$ nằm về phía trên của đường Δ_1 có phương trình $y = -kx$. Ta phải chứng minh

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0.$$

Do z_t nằm phía dưới của Δ nên nếu viết $z_t = x_t + iy_t$ $(1 \leqslant t \leqslant n)$ thì $y_t < kx_t$. Do đó $\sum_{t=1}^{n} y_t < k \sum_{t=1}^{n} x_t$ Từ đó $\sum_{t=1}^{n} z_t \neq 0$. Tương tự $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{z_t} \neq 0$.

14. Giải thích ý nghĩa hình học các hệ thức :

$$0 < \operatorname{Re}(iz) < 1, |z| = \operatorname{Re} z + 1, \operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0.$$

Giải : a) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1 \Leftrightarrow 0 < -y < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 0$. Đó là dải kẹp giữa trục Ox và đường thẳng $y = -1$.

b) $|z| = \operatorname{Re} z + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2x + 1$. Đó là parabol trục Ox, cắt Ox tại $(-\frac{1}{2}, 0)$ và cắt Oy tại 2 điểm $(0, -1)$ và $(0, 1)$.

c) $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{z - z_1}{z - z_2} = ib$, b : thực.

Tùy theo dấu của b mà hệ thức cuối cùng cho 1 đường tròn đi qua z_1, không đi qua z_2 khi $b > 0$ và đi qua z_2, không đi qua z_1 khi $b < 0$.

15. Xác định họ đường trong mặt phẳng phức được cho bằng phương trình $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = C \; (-\infty < C < +\infty)$.

Giải : $\text{Re}\,\dfrac{1}{z} = \text{Re}\,\dfrac{1}{x+iy} = \text{Re}\,\dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

Do đó : $\dfrac{x}{x^2+y^2} = C$. Nếu $C = 0$ thì $x = 0$. Đó là trục ảo bỏ đi (0, 1). Nếu $C \neq 0$ thì :

$$\frac{x}{x^2+y^2} = C \Leftrightarrow \frac{x}{C} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4C^2}$$

Đó là họ đường tròn tâm tại $\left(\dfrac{1}{2C}, 0\right)$, bán kính $R = \dfrac{1}{2|C|}$.

16. Thực hiện các phép tính :

1) $\dfrac{1}{i}$; 2) $\dfrac{2}{1-3i}$

17. Tìm môđun và argumen của các số phức :

1) $3i$; 2) -2 ; 3) $1+i$; 4) $2+5i$; 5) $2-5i$; 6) bi $(b \neq 0)$.

18. Tìm các giá trị của các căn dưới đây :

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[6]{-8}$; 4) $\sqrt[8]{1}$; 5) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 6) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

19. Chứng minh bất đẳng thức $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$ và giải thích khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

20. Chứng minh bất đẳng thức :

$$|z - 1| \leqslant \big||z| - 1\big| + |z|\,|\arg z|.$$

21. Chứng minh : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ và giải thích ý nghĩa hình học của nó.

22. Chứng minh : $|z_1 + z_2| \geqslant \dfrac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|} + \dfrac{z_2}{|z_2|}\right|$.

23. Chứng minh rằng nếu $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ thì những điểm z_1, z_2, z_3, z_4 hoặc là các đỉnh của 1 hình chữ nhật hoặc là từng đôi một trùng nhau.

24. Hãy tìm các đỉnh của một đa giác đều n - cạnh nếu tâm của nó ở tại $z = 0$ và z_1 là một trong các đỉnh đã biết.

25. Cho biết 3 đỉnh z_1, z_2, z_3 của một hình bình hành. Tìm đỉnh z_4 đối diện với đỉnh z_2.

26. Với điều kiện nào 4 điểm z_1, z_2, z_3, z_4 từng đôi một không trùng nhau nằm trên một đường tròn hay một đường thẳng ?

27. Chứng minh rằng nếu $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$ thì một đường thẳng bất kì đi qua gốc tọa độ sẽ tách các điểm này nếu chỉ cần không có một điểm nào nằm trên đường thẳng này.

28. Giải thích ý nghĩa hình học các hệ thức :

1) $|z - z_0| < R$; 2) $|z - z_0| > R$;

3) $|z - 2| + |z + 2| = 5$; 4) $|z - 2| - |z + 2| > 3$

5) $|z - z_1| = |z - z_2|$; 6) $\operatorname{Re} z \geqslant C$;

7) $\operatorname{Im} z \leqslant C$; 8) $\alpha < \arg z < \beta$;

9) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta \quad (-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi)$.

29. Xác định họ đường trong mặt phẳng z được cho bằng các phương trình :

1) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = C$; 2) $\operatorname{Re} z^2 = C$; 3) $\operatorname{Im} z^2 = C \quad (-\infty < C < +\infty)$.

30. Xác định họ đường trong mặt phẳng phức được cho bởi phương trình :

1) $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = r$; 2) $\arg \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha \quad (-\pi < \alpha < \pi)$.

§ 2. CHUỖI SỐ PHỨC

31. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ và

$$|\arg C_n| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Giải: Ta phải chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |C_n|$ hội tụ. Vì $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, nên $\cos\alpha > 0$. Theo giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ hội tụ, nên với $\varepsilon \,.\, \cos\alpha > 0$, tồn tại số N để với $n \geqslant N$ và p tự nhiên tùy ý ta có:

$$|C_n + C_{n+1} + \ldots + C_{n+p}| < \varepsilon \,.\, \cos\alpha.$$

Nhưng $\mathrm{Re}\,(C_n + C_{n+1} + \ldots + C_{n+p}) \leqslant |C_n + C_{n+1} + \ldots + C_{n+p}|$ ta suy ra

$$\mathrm{Re}\, C_n + \mathrm{Re}\, C_{n+1} + \ldots + \mathrm{Re}\, C_{n+p} < \varepsilon \,.\, \cos\alpha.$$

Mặt khác $\mathrm{Re}\, C_t = C_t \cos\arg C_t \geqslant |C_t| \cos\alpha$, $n \leqslant t \leqslant n + p$, nên $\cos\alpha(|C_n| + |C_{n+1}| + \ldots + |C_{n+p}|) < \varepsilon \,.\, \cos\alpha$.

Do đó $|C_n| + |C_{n+1}| + \ldots + |C_{n+p}| < \varepsilon$.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối.

32. Chứng minh công thức (phép biến đổi Abel):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n$$

trong đó $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \,(k \geqslant 1)$, $S_0 = 0$.

Giải: Biến đổi vế phải:

$$\sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n = S_m(b_m - b_{m+1}) +$$

$$+ S_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + \ldots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) - S_{m-1}b_m +$$

$$+ S_n b_n = b_m(S_m - S_{m-1}) + b_{m+1}(S_{m+1} - S_m) + \ldots + b_n(S_n - S_{n-1}) =$$

$$= a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \ldots + a_n b_n = \sum_{k=m}^{n} a_k b_k$$

33. Chứng minh rằng để chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, $b_n > 0$ hội tụ thì điều kiện đủ là những tổng riêng $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ bị chặn và dãy $\{b_n\}$ đơn điệu tiến tới 0.

Giải: Giả thử $\forall k$, $|S_k| \leq L$ và giả thử dãy b_n đơn điệu giảm và $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tức là với mọi $\frac{\varepsilon}{2L} > 0$, $\exists N > 0$ $\forall m$, $n \geq N : |b_m| < \frac{\varepsilon}{2L}$

Xét $m, n > N$ ta có :

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq L(2b_m) < 2L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Do đó theo dấu hiệu Cauchy chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ hội tụ.

34. Chứng minh rằng nếu có các điều kiện :

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, b_n = 0,$

2) Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, |b_n - b_{n+1}|$ hội tụ,

3) Dãy $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, bị chặn,

thì chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ hội tụ.

Giải : Theo bài 32 :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) - S_{m-1}b_m + S_n b_n =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{S_k}{\sqrt{k}} \sqrt{k}\,(b_k - b_{k+1}) - \frac{S_{m-1}}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m} \cdot b_m +$$

$$+ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \cdot b_n \ (m \geq 2).$$

Do đó :

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \left|\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right| \sqrt{k}\,|b_k - b_{k+1}| + \frac{|S_{m-1}|}{\sqrt{m}} \sqrt{m}\,|b_m| +$$

$+ \left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \sqrt{n}\,|b_n|$. Do giả thiết với m, n đủ lớn chúng ta có :

$$\sum_{k=m}^{n-1} \sqrt{k}\,|b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3L}; \ \sqrt{m}\,|b_m| < \frac{\varepsilon}{3L}; \ \sqrt{n}\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{3L},$$

trong đó $L > 0$ là hằng số sao cho : $\left|\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right| \leq L, \ \forall k \geq 2.$

Vậy :
$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| < \varepsilon$$

do đó chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ hội tụ.

35. Giả sử $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n} = q$. Chứng minh rằng nếu $q < 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối và nếu $q > 1$ thì chuỗi phân kì.

Giải : 1) Vì $q < 1$ nên chọn được $\varepsilon > 0$ sao cho $q + \varepsilon < 1$. Vì $\overline{\lim} \sqrt[n]{C_n} = q$ nên với $\varepsilon > 0$ vừa chọn với mọi n (có thể trừ một số hữu hạn) xảy ra :

$$\sqrt[n]{C_n} < q + \varepsilon < 1 \Rightarrow |C_n| < (q + \varepsilon)^n.$$

Do đó theo dấu hiệu so sánh thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |C_n|$ hội tụ. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối.

2) Nếu $q > 1$ thì do $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n} = q \Rightarrow$ có một tập vô hạn giá trị n sao cho $\sqrt[n]{C_n} \geqslant 1 \Rightarrow |C_n| \geqslant 1$. Vậy $C_n \not\to 0$. Do đó $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ phân kì.

36. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| = 1$ và $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| - 1\right) = q < -1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối.

Giải : Do $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| - 1\right) = q < -1$, nếu chọn $q < s < r < -1$ thì với mọi n, có thể trừ ra một số hữu hạn, đều xảy ra : $n\left(\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| - 1\right) < s$. Do đó :

$$\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| - 1 < \frac{s}{n} \Rightarrow \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| < 1 + \frac{s}{n}.$$

Nhưng : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^r - 1}{\dfrac{1}{n}} = r \Rightarrow$ do $r > s$ nên với

$n > n_0$:

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^r - 1}{\dfrac{1}{n}} \geqslant s \left(1+\frac{1}{n}\right)^r - 1 > \frac{s}{n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^r > 1 + \frac{s}{n}$$

Vậy : $\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^r = \dfrac{(n+1)^r}{n^r} = \dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^{-r}}}{\dfrac{1}{n^{-r}}}$.

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{-r}}$ hội tụ vì $-r > 1$. Do đó : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối.

37. Chứng minh dấu hiệu Gauss : nếu $\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $a < -1$ và không phụ thuộc vào n thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối.

Giải : $n\left(\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| - 1\right) = a + o\left(\dfrac{1}{n}\right) n$. Do đó :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| - 1\right) \leqslant a < -1.$$

Vậy theo bài 36, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ hội tụ tuyệt đối.

38. Xét tính hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{in}}{n}$.

Giải : $\frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos n}{n} + i\frac{\sin n}{n}$.

Do cả hai chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$ đều hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet (bài tập 33) nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in}}{n}$ hội tụ.

39. Giả sử những chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2$ hội tụ. Chứng minh rằng nếu Re $C_n \geqslant 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$ cũng hội tụ.

40. Nghiên cứu tính hội tụ của các chuỗi :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(2i)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(in)^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$. 5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}$;

6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos in}{2^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$.

§ 3. HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC. TÍNH LIÊN TỤC, TÍNH LIÊN TỤC ĐỀU CÁC HÀM E^z, COS Z, SIN Z, CH Z, SH Z.

41. Cho ánh xạ $w = z^2$. Hãy tìm :

a) Ảnh của các đường $x = C$, $x = y$, $|z| = R$.

b) Tạo ảnh của đường $u = C$.

Giải : $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Do đó $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ (1)

a) Thay $x = C$ vào (1) ta được

$$\begin{cases} u = C^2 - y^2 \\ v = 2Cy \end{cases}$$

Nếu $C \neq 0$ ta có $y = \dfrac{v}{2C}$ và $u = C^2 - \dfrac{v^2}{4C^2}$ hay là $v^2 = 4C^2(C^2 - u)$. Đây là parabol trục Ou.

Nếu $C = 0$ thì $\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0 \end{cases}$

Đây là nửa trục Ou $(-\infty, 0]$.

Ảnh của đường $x = y$ là đường $\begin{cases} u = 0 \\ v = 2x^2 \end{cases}$. Vậy đó là nửa trên của trục Ov. Ảnh của đường $|z| = R$ là đường $|w| = R^2$. Vậy đó là đường tròn $u^2 + v^2 = R^2$.

b) Tìm tạo ảnh của đường $u = C$

Thay $u = C$ vào phương trình $u = x^2 - y^2$ ta có $C = x^2 - y^2$.

Nếu $C > 0$: $\dfrac{x^2}{(\sqrt{C})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1$.

Đó là đường hypebol vuông trục Ox.

Nếu $C < 0$: $\dfrac{y^2}{(\sqrt{C})^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{C})^2} = 1$.

Đó là hypebol vuông trục Oy.

42. Cho ánh xạ $w = \dfrac{1}{z}$. Hãy tìm :

a) Ảnh của đường $x = C$, $|z - 1| = 1$.

b) Tạo ảnh của đường $u = C$.

Giải : a) $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Vậy

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}\ ;\ v = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Để tìm ảnh của đường $x = C$, ta xét 2 trường hợp :

* Nếu $C = 0$. Vậy $\begin{cases} u = 0 \\ v = -\dfrac{1}{y} \end{cases}$

Do $-\infty < y < +\infty$ nên $-\infty < v < +\infty$. Vậy ảnh là trục Ov.

* Nếu $C \neq 0$: $u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$. Nhưng : $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{u}{C}$.

Vậy :

$$u^2 + v^2 = \frac{u}{C} \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2C}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(2C)^2}.$$

Đó là đường tròn tâm $O\left(\frac{1}{2C},\ 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2|C|}$.

Tìm ảnh của $|z-1| = 1$. Biểu diễn $|z-1| = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x$. Thay vào biểu thức u ta có $u = \frac{1}{2}$. Vậy đó là đường thẳng $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$.

b) Tìm tạo ảnh của đường $u = C$.

. Thay $u = C$ vào biểu thức của u : $C = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Nếu $C = 0$ thì $x = 0$. Vậy tạo ảnh của đường $u = 0$ là đường $x = 0$.

Nếu $C \neq 0$ thì $x^2 + y^2 = \frac{x}{C} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(2C)^2}$

Vậy tạo ảnh của $u = C$ là đường tròn tâm $O\left(\frac{1}{2C},\ 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2|C|}$.

43. Cho ánh xạ $w = z + \frac{1}{z}$. Tìm ảnh của đường $|z| = R$.

Giải : Do $w = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = x + \frac{x}{x^2 + y^2} = x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

$$v = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Thay $x^2 + y^2 = R^2$: $\begin{cases} u = x\left(1 + \frac{1}{R^2}\right) \\ v = y\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) \end{cases}$

Nếu $R = 1$ thì $\begin{cases} u = 2x. \\ v = 0. \end{cases}$ Do $-1 \leqslant z \leqslant 1$ nên $-2 \leqslant u \leqslant 2$.

Vậy ảnh là $[-2, 2]$ được tính 2 lần.

Nếu $R \neq 1$ thì : $\frac{u}{1 + \frac{1}{R^2}} = x$; $\frac{v}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)} = y$.

Do đó : $$\frac{u^2}{\left(R\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)\right)^2} = 1.$$

Vậy đó là elíp có các bán trục $a = R\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)$; $b = R\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)$.

44. Cho ánh xạ $w = e^z$. Hãy tìm :

a) Ảnh của đường $x = C$.

b) Tạo ảnh của đường $\rho = \theta$: $0 \leqslant \theta \leqslant +\infty$.

Giải : $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Vậy $u = e^x \cos y$; $v = e^x \sin y$.

a) *Ảnh của đường $x = C$.*

Thay $x = C$ vào u, v : $u = e^C.\cos y$, $v = e^C \sin y \Rightarrow u^2 + v^2 = e^{2C}$. Vậy ảnh là đường tròn tâm $(0, 0)$, $R = e^C$.

b) *Tạo ảnh của đường $\rho = \theta$*

Như trên : $\rho = \sqrt{u^2 + v^2} = e^x$; $\theta = \arg w = y + 2k\pi$. Do đó tạo ảnh của đường $\rho = \theta$ là họ : $e^x = y + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

45. Khảo sát tính liên tục của $w = \dfrac{1}{1-z}$ trong $|z| < 1$. Nó có liên tục đều trong $|z| < 1$ hay không ?

Giải : Rõ ràng $w = \dfrac{1}{1-z}$ liên tục trong $|z| < 1$ vì nó là thương của 2 hàm liên tục và $1 - z \neq 0$ khi $|z| < 1$.

Tuy nhiên nó không liên tục đều vì nếu nó liên tục đều thì với

$\varepsilon > 0$, $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, $(\forall z', z'')$ $|z'| < 1$, $|z''| < 1$,

$$|z' - z''| < \delta, \text{ ta có } \left|\frac{1}{1-z'} - \frac{1}{1-z''}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Chọn n đủ lớn và đặt $z' = 1 - \dfrac{1}{n}$, $z'' = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ thì

$$|z' - z''| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta.$$

Nhưng : $$\left|\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\right| = 1 > \varepsilon.$$

46. Hàm $f(z)$ liên tục đều trong $|z| < 1$. Chứng minh rằng đối với một điểm $\xi : |\xi| = 1$ và đối với một dãy $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, $\{z_n\} \longrightarrow \xi$, tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$. Chứng minh rằng giới hạn này không phụ thuộc vào sự lựa chọn dãy $\{z_n\}$ và

hàm số được xác định trên biên của hình tròn đơn vị nhờ phép chuyền qua giới hạn là một hàm liên tục trong $|z| \leqslant 1$.

Giải: Do $f(z)$ liên tục đều trên miền $|z| < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z', z'' : |z'| < 1, |z''| < 1, |z' - z''| < \delta$ thì $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Nếu $z_n \to \xi, \exists N, n \geqslant N \Rightarrow |z_n - \xi| < \frac{\delta}{2}$;
$n, m \geqslant N: |z_n - z_m| < \delta \Rightarrow |f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$ tồn tại.

Bây giờ giả thiết $\lim\limits_{z_n \to \xi} f(z_n) = A$, $\lim\limits_{z'_n \to \xi} f(z'_n) = B$. Vậy có N_1,

$n \geqslant N_1 \Rightarrow |f(z_n) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$; có N_2, $n \geqslant N_2 \Rightarrow |f(z'_n) - B| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Đồng thời có N_3,
$n \geqslant N_3 \Rightarrow |z_n - z'_n| < \delta \Rightarrow n \geqslant N_3 : |f(z_n) - f(z'_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$|A - B| \leqslant |A - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z'_n)| + |f(z'_n) - B|$,
chỉ cần $n \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} \{N_i\}$. Do đó $A = B$.

Bây giờ chỉ còn chứng minh hàm $f(z)$ được xác định trên $|z| = 1$ bằng quá trình chuyển qua giới hạn vừa mô tả là 1 hàm liên tục trong $|z| \leqslant 1$. Chỉ cần chứng minh $f(z)$ liên tục tại các điểm $z : |z| = 1$.

Giả thiết $z_0 : |z_0| \leqslant 1$ và đặt $f(z_0) = \lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n)$. Chỉ cần chứng minh nếu $\{z_n\}$ là một dãy mà $|z_n| \leqslant 1$ và khi $n \to \infty$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$. Do $f(z)$ liên tục đều trong $|z| < 1$ nên với $\varepsilon > 0$ tồn tại δ như đã nói trên. Giả thử $z_n : |z_n| \leqslant$
$z_n \to z_0$; với mỗi n ta chọn một u_n sao cho $|u_n - z_n| < \frac{1}{n}$.

Khi đó $|u_n - z_0| \leqslant |u_n - z_n| + |z_n - z_0| \leqslant \frac{1}{n} + |z_n - z_0| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Do đó $\left\{ \begin{array}{l} u_n \to z_0 \\ |u_n| < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(z_0) \Rightarrow |f(u_n) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

khi $n > N_1$. Mặt khác do $\frac{1}{n} \to 0$ nên có số N_2 sao cho khi $n > N_2$ thì $\frac{1}{n} < \delta$. Bởi vậy theo phép chứng minh trên $|f(u_n) - f(z_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ và với $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ thì

$$|f(z_n) - f(z_0)| \leqslant |f(z_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tức là $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Do đó : $f(z_n) \to f(z_0)$. Vậy f liên tục trong $|z| \leqslant 1$.

47. Biểu diễn dưới dạng mũ các số phức $1 + i$, $-1 + i$.

Giải : $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

48. Tìm môđun và giá trị chính của các argumen của các số phức :

$$e^{3+4i}, \quad -ae^{i\varphi}\ (a > 0, |\varphi| < \pi), \quad e^{2-3i}.$$

Giải : $|e^{3+4i}| = e^3$, $\arg e^{3+4i} = 4 - 2\pi$.

$$|-ae^{i\varphi}| = a\ ; \quad \arg(-a \cdot e^{i\varphi}) = \begin{cases} \varphi + \pi & -\pi \leqslant \varphi < 0 \\ \varphi - \pi & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases}$$

$$e^{2-3i} = e^2, \quad \arg e^{(2-3i)} = -3$$

49. Tìm tổng :

1) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

2) $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$.

Giải : 1) Xét $e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{inx} = e^{ix}\dfrac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} =$

$$= e^{ix}\frac{2\sin^2\frac{n}{2}x - i\sin nx}{2\sin^2\frac{x}{2} - i\sin x} = e^{ix}\frac{2\sin^2\frac{n}{2}x - 2i\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= e^{ix}\frac{2i\sin\frac{n}{2}x\left(\cos\frac{n}{2}x + i\sin\frac{n}{2}x\right)}{i\,2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= e^{ix}\cdot\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n-1}{2}x + i\sin\frac{n-1}{2}x\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right)$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \operatorname{Im}(e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{inx}) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{n+1}{2}x.$$

2) $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$.

Xét $e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+\beta)} + \ldots + e^{i(\alpha+n\beta)} = e^{i\alpha}(1 + e^{i\beta} + \ldots + e^{in\beta}) =$

$$= e^{i\alpha}\frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = e^{i\alpha}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}\beta + i\sin\frac{n}{2}\beta\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\cos\left(\frac{n}{2}\beta + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}\beta + 1\right)\right)$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta) =$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+\beta)} + \ldots + e^{i(\alpha+n\beta)}) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\left(\alpha + \frac{n}{2}\beta\right)$$

50. Tìm phần thực, phần ảo của các hàm : $\cos(2+i)$, $\sin(1+i)$, $\cos 2i$, $\operatorname{tg}(2-i)$.

Giải : $\cos(2+i) = \cos 2 \cos i - \sin 2 \sin i = \cos 2 \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \operatorname{sh} 1$

$\operatorname{Re} \cos(2+i) = \cos 2 \operatorname{ch} 1$; $\operatorname{Im} \cos(2+i) = -\sin 2 \operatorname{sh} 1$

$\sin(1+i) = \sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i = \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i \cos 1 \operatorname{sh} 1$

$\operatorname{Re} \sin(1+i) = \sin 1 \operatorname{ch} 1$, $\operatorname{Im} \sin(1+i) = \cos 1 \operatorname{sh} 1$.

$\cos 2i = \operatorname{ch} 2$

$\operatorname{Re} \cos 2i = \operatorname{ch} 2$; $\operatorname{Im} \cos 2i = 0$

$$\operatorname{tg}(2-i) = \frac{\sin(2-i)}{\cos(2-i)} = \frac{\sin 2 \operatorname{ch} 1 - i \cos 2 \operatorname{sh} 1}{\cos 2 \operatorname{ch} 1 + i \sin 2 \operatorname{sh} 1} =$$

$$= \frac{(\sin 2 \operatorname{ch} 1 - i \cos 2 \operatorname{sh} 1)(\cos 2 \operatorname{ch} 1 + \sin 2 \operatorname{sh} 1)}{\cos^2 2 \operatorname{ch}^2 1 + \sin^2 2 \operatorname{sh}^2 1}.$$

$$\operatorname{Re} \operatorname{tg}(2-i) = \frac{\sin 2 \cos 2 \operatorname{ch}^2 1 + \sin 2 \cos 2 \operatorname{sh}^2 1}{\cos^2 2 \operatorname{ch}^2 1 + \sin^2 2 \operatorname{sh}^2 1} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cos 2(\operatorname{ch}^2 1 + \operatorname{sh}^2 1)}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 2}$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{tg}(2-i) = \frac{\sin^2 2 \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1 - \cos^2 2 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 2} = -\frac{\cos 4 \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 2}.$$

51. Cho ánh xạ $w = z^2$. Tìm :

1) Ảnh của các đường $y = C$, $x = y$, $\arg z = \alpha$ và giải thích xem đường nào trong số các đường này được biến đổi — 1.

2) Tạo ảnh của đường $v = C$.

52. Cho ánh xạ $w = \dfrac{1}{z}$. Tìm :

1) Ảnh của các đường $y = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$.

2) Tạo ảnh của đường $v = C$.

53. Tìm ảnh của đường $|z| = R$ qua ánh xạ $w = z - \dfrac{1}{z}$

54. Tìm ảnh của đường $|z| = 1$ qua ánh xạ $w = \frac{z}{(1-z)^2}$.

55. Cho ánh xạ $w = e^z$. Tìm ảnh của các đường $y = C$, $x = y$.

56. Cho hàm số $w = \frac{1}{1+z^2}$, chứng minh rằng nó liên tục trong $|z| < 1$ nhưng không liên tục đều trong $|z| < 1$.

57. 1) Chứng minh hàm $w = e^{-\frac{1}{z}}$ liên tục đều trong $|z| < R$ bỏ đi điểm $z = 0$.

2) Hàm $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ có liên tục đều trong miền đó không ?

3) Hàm $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ có liên tục đều trong hình quạt :

$$\begin{cases} 0 < |z| \leqslant R \\ \arg z \leqslant \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

không ?

58. Những hàm $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ được xác định với $z \neq 0$. Liệu có thể gán cho nó giá trị tại $z = 0$ để nó trở thành hàm liên tục tại $z = 0$ được không ?

59. Biểu diễn dưới dạng mũ các số phức 1, -1, i, $-i$, $1-i$, $-1-i$.

60. Hãy tính $e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$, $e^{k\pi i}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

61. Tìm môđun và giá trị chính của các argumen của các số phức : e^{2+i}, e^{-3-4i}, $e^{-i\varphi}$, $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

62. Hãy tính các tổng :

1) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n - 1)x$;

3) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n - 1)x$;

4) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1} \sin nx$.

63. Tính tổng $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta)$.

64. Chứng minh rằng nếu $\cos(z + \omega) = \cos z$ với z bất kì thì $\omega = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

65. Biểu diễn qua những hàm lượng giác và các hàm hyperbolic với đối số thực phần thực, phần ảo của các hàm :

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$.

66. Tìm phần thực, phần ảo của các giá trị :

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(2 + i)$; 3) $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$

§4. HÀM GIẢI TÍCH. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA MÔĐUN VÀ ACGUMEN CỦA ĐẠO HÀM

67. Kiểm tra điều kiện (C — R) đối với hàm $w = e^z$ và chứng minh rằng $(e^z)' = e^z$.

Giải : $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ta biết

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

68. Hãy tìm các số thực a, b, c để hàm $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ là hàm giải tích.

Giải : $u = x + ay$; $v = bx + cy$

Ta thấy u, v là các hàm của hai biến số thực x, y và là các hàm khả vi. Muốn cho f(z) giải tích, ta chỉ cần u, v thỏa mãn điều kiện (C — R). Ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = c \quad \Rightarrow \quad c = 1 ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b \quad \Rightarrow \quad a = -b$$

Vậy $f(z) = x + ay + i(y - ax)$, a là số thực tùy ý.

69. Tìm miền trên đó hàm $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ là hàm giải tích.

Giải : $u(x, y) = |x^2 - y^2|$, $v(xy) = 2|xy|$

$$u(xy) = \begin{cases} x^2 - y^2 & -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \\ & -\pi < \arg z < -\dfrac{3\pi}{4} \\ y^2 - x^2 & \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4} ; \\ & -\dfrac{3\pi}{4} < \arg z < -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Tóm lại :

$$u(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & |\arg z| < \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4} < |\arg z| < \pi \\ y^2 - x^2 & \dfrac{\pi}{4} < |\arg z| < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} 2xy & 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} ; -\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{2} \\ -2xy & \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi, -\dfrac{\pi}{2} < \arg z < 0 \end{cases}$$

Rõ ràng u(x, y), v(x, y) là những hàm khả vi khắp nơi trên C. Tuy nhiên :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y,$$

khi : $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ và $-\pi < \arg z < -\frac{3\pi}{4}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

khi : $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$.

Vậy hàm $w = f(z)$ là hàm giải tích khi : $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$; $-\pi < \arg z < -\frac{3\pi}{4}$

70. Giả sử $z = re^{i\varphi}$ và $f(z) = u(r, \varphi) - iv(r, \varphi)$. Viết phương trình (C — R) trong tọa độ cực.

Giải : Ta có $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}.\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}.\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} r\cos\varphi.$$

Do $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ nên :

$$\begin{cases} r \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}. \end{cases}$$

71. Chứng minh rằng hàm $w = z \cdot \mathrm{Re}\, z$ chỉ khả vi tại $z = 0$. Tìm $w'(0)$.

Giải : Xét $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z \cdot \mathrm{Re}\, z}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \mathrm{Re}\, z = 0.$

Vậy $w'(0) = 0$.

Phải chứng minh nếu $z \neq 0$ thì w không khả vi :

$$w = (x + iy)x = x^2 + ixy.$$

Vậy : $u = x^2$, $v = xy$. Do đó $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \;\; ; \;\; \frac{\partial v}{\partial y} = x \; .$$

Nếu $z = x + iy \neq 0$ thì hoặc $x \neq 0$, và $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

hoặc $y \neq 0$ và $\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Do đó tại $z \neq 0$ không thể xảy ra hệ (C — R), hàm $w = z \cdot \mathrm{Re}\, z$ không khả vi.

72. Miền G được ánh xạ một một và bảo giác nhờ hàm $w = f(z)$ lên miền G'. Đưa ra công thức tính diện tích S của miền G' và độ dài L của cung mà cung l thuộc G được ánh xạ lên đó.

Giải :

$$S = \iint\limits_{G'} du\,dv = \iint\limits_{G} \left| \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \right| dx\,dy = \iint\limits_{G} (u'^2_x + v'^2_x)\, dx\,dy =$$

$= \iint_G |f'(z)|^2 dxdy$. Giả sử cung l thuộc G có phương trình là :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$$

Gọi $\mathcal{L}$ là ảnh của l qua $w = f(z) = u(x,y) + iv(x, y)$. Phương trình của $\mathcal{L}$ là :

$$\begin{cases} u = u(t) = u(x(t), y(t)) \\ v = v(t) = v(x(t), y(t)) \end{cases} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$$

Gọi L là độ dài của $\mathcal{L}$ thì :

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{u_t'^2 + v_t'^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{(u_x' \cdot x_t' + u_y' \cdot y_t')^2 + (v_x' \cdot x_t' + v_y' \cdot y_t')^2}\, dt$$

Dùng điều kiện (C — R) : $\begin{cases} u_x' = v_y' \\ u_y' = -v_x' \end{cases}$, ta có :

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{u_x'^2 \cdot x_t'^2 + u_y'^2 \cdot y_t'^2 + v_x'^2 \cdot x_t'^2 + v_y'^2 y_t'^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{u_x'^2 + v_x'^2} \cdot \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt. \text{ Vậy}$$

$$L = \int_0^s |f'(z)|\, ds ; \quad (ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt).$$

73. Kiểm tra điều kiện (C — R) đối với các hàm z^n, $\cos z$. Lnz và chứng minh rằng :

$$(z^n)' = n z^{n-1}, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

74. Hãy xác định các hằng số a, b để hàm $f(z) = u + iv$ giải tích nếu :

$$f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y).$$

75. Giả thử $f(t) = u + iv = \rho e^{i\theta}$ là một hàm giải tích. Chứng minh rằng nếu một trong các hàm u, v, ρ, θ là hằng số thì hàm f(t) là hằng số.

76. Chứng minh rằng nếu $f(z) = u + iv$ là một hàm giải tích và s, n là các véc-tơ vuông góc, thêm vào đó góc quay từ s tới n là một góc vuông ngược chiều kim đồng hồ thì :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right.$ và $\frac{\partial}{\partial n}$ chỉ những đạo hàm của các hàm hai biến thực theo 2 hướng s và n).

77. Chứng minh hàm $w = \bar{z}$ không đâu khả vi trên C.

Chứng minh hàm $f(z) = \sqrt{|xy|}$ tại $z = 0$ thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann nhưng không tồn tại đạo hàm $f'(0)$.

78. Chứng minh các khẳng định sau :

1) Nếu hàm $w = f(z)$ có giới hạn $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$ thì tồn tại u'_x và v'_y và $u'_x = v'_y$.

2) Nếu tại z hàm $w = f(z)$ có giới hạn $\lim\limits_{z \to 0}\left[\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$ thì tồn tại u'_y và v'_x và $u'_y = -v'_x$.

3) Nếu giả thiết trước rằng những hàm u, v khả vi thì sự tồn tại của một trong các giới hạn ở mục 1) hoặc 2) bảo đảm sự tồn tại của giới hạn còn lại và từ đó suy ra hàm khả vi theo nghĩa tồn tại $f'(z)$.

79. Hàm $w = f(z)$ tại điểm z có các tính chất :

1) u, v là các hàm khả vi ;

2) tồn tại $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left[\dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right]$.

Chứng minh rằng hàm $f(z)$ hoặc $\overline{f(z)}$ khả vi tại z.

80. Hàm $w = f(z)$ tại điểm z có các tính chất :

1) các hàm u, v khả vi ;

2) tồn tại $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Chứng minh rằng hàm $f(z)$ khả vi tại z.

81. Cho ánh xạ $w = z^2$. Hãy tìm góc quay θ xuất phát từ z_0 và hệ số co dãn k tại các điểm :

1) $z_0 = 1$; 2) $z_0 = -\dfrac{1}{4}$;

3) $z_0 = 1 + i$; 4) $z_0 = -3 + 4i$.

82. Phần nào của mặt phẳng co lại còn phần nào của mặt phẳng bị dãn ra nếu ánh xạ được thực hiện bởi hàm :

1) $w = z^2$? 2) $w = z^2 + 2z$?

3) $w = \dfrac{1}{z}$? 4) $w = e^z$?

83. Tìm diện tích của miền là ảnh của hình chữ nhật $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ qua ánh xạ $w = e^z$.

CHƯƠNG II

ÁNH XẠ BẢO GIÁC LIÊN QUAN VỚI HÀM SỐ SƠ CẤP

§1. HÀM TUYẾN TÍNH

84. Tìm ánh xạ tuyến tính với điểm bất biến $1 + 2i$ và điểm i biến thành $-i$.

Giải : Ảnh xạ phải tìm có dạng

$$w = az + b$$

Theo các điều kiện của đầu bài ta có :

$$\begin{cases} 1 + 2i = a(1 + 2i) + b \\ -i = ai + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + i \\ b = 1 - 3i \end{cases}$$

Vậy ánh xạ cần tìm là :

$$w = (2 + i)z + 1 - 3i$$

85. Tìm ánh xạ biến hình chữ nhật :

$$-7 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant -3, \quad 2 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 4$$

thành hình chữ nhật :

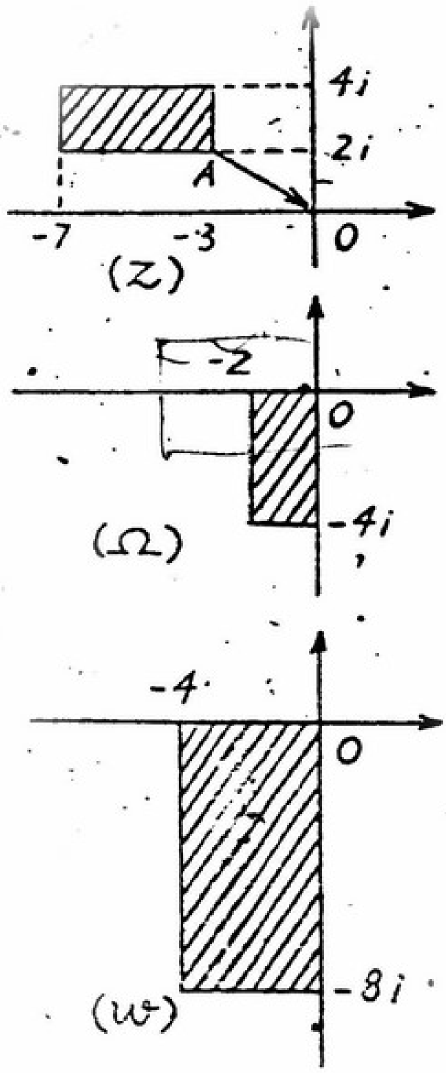
$$-4 \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 0, \quad -8 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant 0.$$

Giải : Ta thấy các hình chữ nhật đồng dạng. Do đó ánh xạ phải tìm có dạng :

$$w = az + b.$$

Trên mặt phẳng phức C_z ta thực hiện phép tịnh tiến song song vectơ AO (h. 4) chuyển điểm A thành điểm gốc O.

$$\xi = z + 3 - 2i$$



Hình 4

Sau đó thực hiện phép quay, $\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}\xi = i\xi$.

Cuối cùng nhờ phép vị tự $w = 2\Omega = 2i\xi$ ta được hình chữ nhật cần tìm và ánh xạ tương ứng là :

$$w = 2iz + 4 + 6i$$

86. Tìm dạng tổng quát của ánh xạ tuyến tính biến

1) Dải $0 < x < 1$ thành chính nó.

2) Dải $-2 < y < 1$ thành chính nó.

3) Dải giới hạn bởi các đường thẳng $y = x$ và $y = x - 1$ thành chính nó.

Hãy giải thích xem với các ánh xạ tìm được các cặp điểm nào tương ứng với nhau và trong trường hợp nào sự tương ứng này xác định ánh xạ đơn trị.

Giải :
$$w = az + b.$$

$$u + iv = (a_1 + ia_2)(x + iy) + b_1 + ib_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = a_1x - a_2y + b_1 \\ v = a_2x + a_1y + b_2 \end{cases}$$

1) Dải $0 < x < 1$ biến thành dải $0 < u < 1$.

a) Trường hợp đường thẳng $x = 0$ biến thành đường thẳng $u = 0$, đường thẳng $x = 1$ biến thành đường thẳng $u = 1$, ta có

$$\begin{cases} 0 = -a_2y + b_1 & (1) \\ 1 = a_1 - a_2y + b_1 & (2) \end{cases}$$

Vì y tùy ý nên từ (1) ta suy ra $a_2 = b_1 = 0$. Thay vào (2) ta được $a_1 = 1$. Ánh xạ cần tìm là : $w = z + ib$, b thực.

b) Trường hợp đường thẳng $x = 0$ biến thành đường thẳng $u = 1$, đường thẳng $x = 1$ biến thành đường thẳng $u = 0$, ta có

$$\begin{cases} 1 = -a_2y + b_1 & (3) \\ 0 = a_1 - a_2y + b_1 & (4) \end{cases}$$

Vì y tùy ý nên từ (3) ta suy ra $a_2 = 0$, $b_1 = 1$. Thay vào (4) ta được $a_1 = -1$. Vậy ánh xạ cần tìm là

$$w = -z + 1 + ib, \text{ b là hằng số thực.}$$

2) Dải $-2 < y < 1$ thành dải $-2 < v < 1$.

Cách giải hoàn toàn tương tự như trường hợp 1) và ánh xạ cần tìm là $w = z + b$, trong đó b là hằng số thực hoặc $w = -z + b - i$, trong đó b là hằng số thực.

3) Dải bị chặn bởi $y = x$ và $y = x - 1$ thành dải bị chặn bởi $v = u$ và $v = u - 1$.

Cách giải hoàn toàn tương tự như trường hợp 1) và ánh xạ cần tìm có dạng : $w = z + b(1 + i)$, trong đó b là hằng số thực hoặc $w = -z + 1 + b(1 + i)$, trong đó b là hằng số thực.

Các điểm hoặc nằm trên các đường thẳng song song với biên của dải, hoặc nằm trên các đường thẳng song song đối xứng với đường trung bình của dải, tương ứng đôi một với nhau. Ánh xạ mất tính đơn trị nếu các điểm tương ứng nằm trên đường trung bình của dải.

87. Cho ánh xạ $w = \frac{1}{z}$. Tìm ảnh của các đường sau :

1) Họ các đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

2) Họ các đường tròn $x^2 + y^2 = by$.

3) Chùm đường thẳng song song $y = x + b$.

4) Chùm đường thẳng $y = kx$.

5) Chùm đường thẳng đi qua điểm $z_0 \neq 0$ cho trước.

6) Parabol $y = x^2$.

Giải : $w = u + iv = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

1) Vì $x^2 + y^2 = ax$ nên $w = \frac{x - iy}{ax} = \frac{1}{a} - i\frac{y}{ax} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ họ các đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ biến thành họ các đường thẳng $u = \frac{1}{a}$.

2) Vì $x^2 + y^2 = by$ nên $w = \frac{x - iy}{by} = \frac{x}{by} - i\frac{1}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ họ các đường tròn $x^2 + y^2 = by$ biến thành họ các đường thẳng $v = -\frac{1}{b}$.

3) Vì $y = x + b$ nên $w = \dfrac{x - (x + b)i}{x^2 + (x+b)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{1}{x^2 + (x + b)^2} \\ u + v = -\dfrac{b}{x^2 + (x + b)^2} \end{cases} \Rightarrow b(u^2 + v^2) + (u + v) = ($$

Đây là phương trình của họ các đường tròn tiếp xúc nhau t gốc tọa độ. Vậy chùm đường thẳng song song $y = x + b$ biế thành họ đường tròn tiếp xúc nhau tại gốc tọa độ :

$$b(u^2 + v^2) + (u + v) = 0$$

4) Vì $y = kx$ nên $w = \dfrac{x - kxi}{x^2 + k^2x^2} = \dfrac{1 - ki}{x(1 + k^2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{x(1 + k^2)} \\ v = \dfrac{-k}{x(1 + k^2)} \end{cases} \Rightarrow v = -ku.$$

Vậy chùm đường thẳng $y = kx$ biến thành chùm đườn thẳng $v = -ku$.

5) Vì $z_0 \neq 0$ biến thành $w_0 = \dfrac{1}{z_0} \neq \infty$ và ∞ biế thành 0 nên chùm đường thẳng đi qua $z_0 \neq 0$ biến thành chùı đường tròn đi qua $\dfrac{1}{z_0}$ và 0 $\left(\text{bao gồm cả đường thẳng đi qu}\right.$ $\left.0 \text{ và } \dfrac{1}{z_0}\right)$.

6) Vì $y = x^2$ nên $w = \dfrac{x - ix^2}{x^2 + x^4} = \dfrac{1 - ix}{x + x^3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{x + x^3} \\ v = \dfrac{-x}{x + x^3} \end{cases} \Rightarrow u^2 = -\dfrac{v^3}{v + 1}$$

Đây là phương trình đường xixôit. Vậy parabol $y = x^2$ biến thành đường xixôit $u^2 = -\dfrac{v^3}{v+1}$

88. Cho ánh xạ $w = \dfrac{z-i}{z+i}$. Tìm ảnh của miền $x > 0, y > 0$.

Giải : Ta có $w(0) = -1$

$$w(i) = 0$$

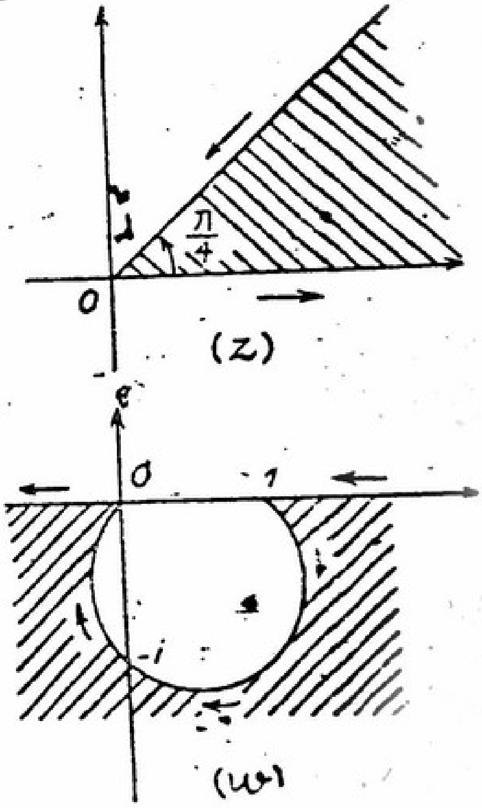
$$w(\infty) = 1$$

Vậy nửa trục ảo $y \geqslant 0$ biến thành đoạn $[-1, 1]$. Vì $Ox \perp Oy$ và do tính bảo giác, bảo toàn đường tròn của ánh xạ phân tuyến tính nên ảnh của nửa trục thực $x \geqslant 0$ phải là nửa đường tròn đơn vị.

Áp dụng nguyên lí biên tương ứng ta được ảnh là nửa dưới đường tròn đơn vị (hình 5).

Vậy ảnh của miền $x > 0, y > 0$ qua ánh xạ $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ là miền

$$\begin{cases} |w| < 1 \\ \operatorname{Im} w < 0 \end{cases}$$



Hình 5

89. Cho ánh xạ $w = \dfrac{z}{z-1}$. Tìm ảnh của miền $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$

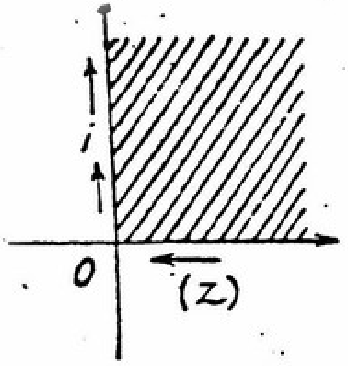
Giải : Ta có $w(0) = 0,$

$$w(1) = \infty,$$

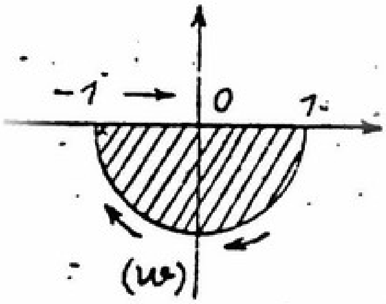
$$w(\infty) = 1.$$

Vậy với ánh xạ đã cho, đoạn thẳng $[0, 1]$ biến thành tia $[0, +\infty)$, tia $[1, +\infty)$, biến thành $(+\infty, 1]$.

Vì tia $\arg z = \frac{\pi}{4}$ hợp với Ox một góc $\frac{\pi}{4}$, nên ảnh của nó hợp với ảnh của đoạn $[0, 1]$ một góc $\frac{\pi}{4}$. Ta lại có $w(1 + i) = 1 - i$.



Do đó ảnh của tia $\arg z = \frac{\pi}{4}$ phải là cung tròn đi qua gốc O và hợp với nửa trục thực, âm một góc $\frac{\pi}{4}$ nằm ở phía dưới O (hình 6).



Hình 6

Vậy qua ánh xạ $w = \frac{z}{z-1}$ miền $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ biến thành $\operatorname{Im} w < 0$ bỏ đi phần trong hình tròn

$$\left|w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

90. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến các điểm -1, i, $1 + i$ tương ứng thành:

1) 0, $2i$, $1 - i$.

2) i, ∞, 1.

Giải: Ánh xạ phân tuyến tính biến ba điểm z_1, z_2, z_3 thành ba điểm w_1, w_2, w_3 được xác định theo công thức:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \qquad (1)$$

1) Thế vào công thức (1) ta có:

$$\frac{w - 0}{w - 1 + i} : \frac{2i - 0}{2i - 1 + i} = \frac{z + 1}{z - 1 - i} : \frac{i + 1}{i - 1 - i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w(-1+3i)}{(w-1+i)2i} = -\frac{z+1}{(z-1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{-2i(z+1)(-1+i)}{(-1+3i)(iz+z-2i)+2i(z+1)} = \frac{-2i(z+1)}{4z-1-5i}.$$

2) Ở đây có sự tham gia của ∞, nếu thừa số của (1) có chứa ∞ thì ta thay bằng 1 ; ta có :

$$\frac{w-i}{w-1} : \frac{1}{1} = \frac{z+1}{z-1-i} : \frac{i+1}{i-1-i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w-i}{w-1} = -\frac{z+1}{(z-1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{3+iz}{(z-i)(2+i)} = \frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$$

91. Tìm điểm đối xứng với điểm $2+i$ đối với các đường tròn :

1) $|z| = 1$;

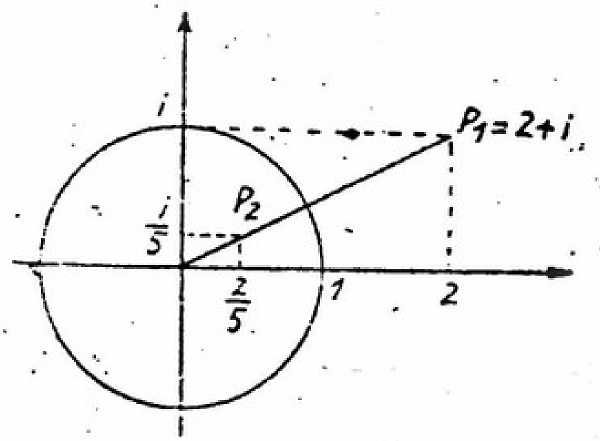
2) $|z-i| = 3$.

Giải : 1) Hai điểm P_1, P_2 được gọi là đối xứng với nhau đối với đường tròn tâm O bán kính R nếu nó nằm trên cùng một tia xuất phát từ O và $OP_1 . OP_2 = R^2$;

$OP_1 . OP_2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} . OP_2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow OP_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_{P_2}^2 + y_{P_2}^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

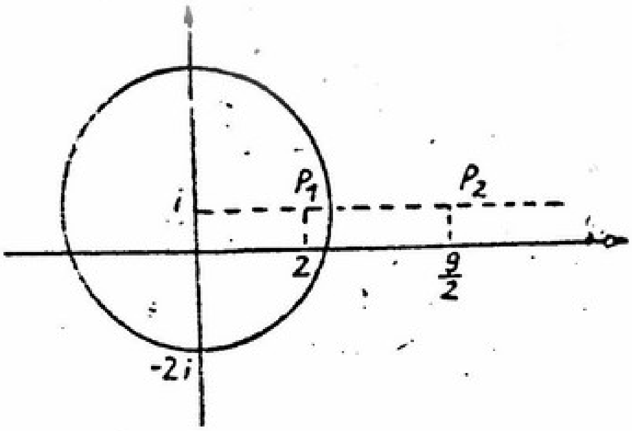


Hình 7

Vì P_1 và P_2 trên cùng một tia từ O nên suy ra $x_{P_2} = 2y_{P_2}$ (2). (tam giác đồng dạng). Thay (2) vào (1) ta được :

$$\sqrt{4y_{P_2}^2 + y_{P_2}^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow y_{P_2} = \frac{1}{5} \Rightarrow x_{P_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow P_2 = \frac{2+i}{5}$$

(hình 7).



Hình 8

2) P_1 và P_2 nằm trên tia xuất phát từ i ; $P_1 = 2 + i$, ta suy ra $P_2 = x_{P_2} + i$. Để xác định P_2 ta chỉ cần tính x_{P_2}.

Ký hiệu $\rho(i, P_k)$ là khoảng cách từ i đến P_k $(k = 1, 2)$, ta có :

$$\rho(i, P_1) \cdot \rho(i, P_2) = 9 ;$$

$$2 \cdot x_{P_2} = 9 \Leftrightarrow x_{P_2} = \frac{9}{2}. \text{ Vậy } P_2 = \frac{9}{2} + i \text{ (hình 8).}$$

92. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ thành hình tròn đơn vị $|w| < 1$ sao cho :

1) $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

2) $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.

3) $w(a + ib) = 0$, $\arg w'(a + ib) = 0$, $b > 0$.

Giải : Ánh xạ biến nửa mặt phẳng trên thành phần trong hình tròn đơn vị được xác định theo công thức :

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

trong đó α thực, $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

1) Ta có : $$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - i}{z + i}$$

$$w' = e^{i\alpha} \frac{(z + i) - (z - i)}{(z + i)^2} = e^{i\alpha} \frac{2i}{(z + i)^2}$$

$$w'(i) = e^{i\alpha} \frac{1}{2i}.$$

$$\arg w'(i) = \alpha - \arg 2i = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Ánh xạ phải tìm là :

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

2) Ta có :

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - 2i}{z + 2i}$$

$$w' = e^{i\alpha}\frac{z + 2i - (z - 2i)}{(z + 2i)^2} = e^{i\alpha}\frac{4i}{(z + 2i)^2}$$

$$w'(2i) = e^{i\alpha}\frac{1}{4i}$$

$$\arg w'(2i) = \alpha - \arg 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \alpha - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ánh xạ phải tìm có dạng

$$w = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z - 2i}{z + 2i} = \frac{2 + iz}{iz - 2}$$

3) Ta có :

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - (a + ib)}{z - (a - ib)} \qquad (b > 0)$$

$$w' = e^{i\alpha}\frac{z - a + ib - (z - a - ib)}{(z - a + ib)^2} = e^{i\alpha}\frac{2ib}{[z - (a - ib)]^2}$$

$$w'(a + ib) = e^{i\alpha}\frac{1}{2ib}$$

$$\arg w'(a + ib) = \alpha - \arg 2ib = \theta \qquad (b > 0)$$

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \theta \Leftrightarrow \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Ánh xạ phải tìm có dạng

$$w = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \frac{z-(a+ib)}{z-(a-ib)}$$

93. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\text{Im}\, z > 0$ thành hình tròn $|w - w_0| < R$ sao cho điểm i chuyển thành tâm hình tròn và đạo hàm tại điểm ấy dương.

Giải : Trước hết tìm ánh xạ phân tuyến tính biến $\text{Im}\, z > 0$ thành $|w| < 1$ sao cho $w(i) = 0$ và $w'(i) > 0$:

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-i}{z+i}$$

$$w' = e^{i\alpha} \frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} = e^{i\alpha} \frac{2i}{(z+i)^2}$$

$$w'(i) = e^{i\alpha} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Muốn $w'(i) > 0$ ta cần $\alpha - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Do đó $w = i \frac{z-i}{z+i}$ biến $\text{Im}\, z > 0$ thành $|w| < 1$ sao cho $w(i) = 0$ và $w'(i) > 0$.

Thực hiện tiếp phép vị tự tâm O hệ số R và sau cùng thực hiện phép tịnh tiến theo w_0 ta được ánh xạ cần tìm :

$$w = Ri \frac{z-i}{z+i} + w_0.$$

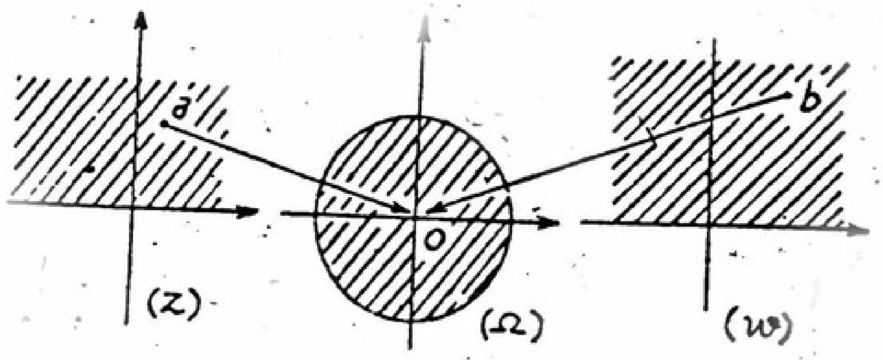
94. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên thành chính nó sao cho $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$. ($\text{Im}\, a > 0$, $\text{Im}\, b > 0$).

Giải : Ánh xạ biến $\text{Im}\, z > 0$ thành $|\Omega| < 1$ sao cho $\Omega(a) = 0$, $\arg \Omega'(a) = \alpha_0$ có dạng :

$$\Omega = e^{i\alpha_0} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

Ánh xạ biến $\operatorname{Im} w > 0$ thành $|\Omega| < 1$ sao cho $\Omega(b) = 0$, $\arg \Omega'(b) = \alpha_1$ có dạng :

$$\Omega = e^{i\alpha_1} \frac{w - b}{w - \bar{b}}.$$



Hình 9

Ánh xạ $\operatorname{Im} z > 0$ thành $\operatorname{Im} w > 0$ sao cho $w(a) = b$ có dạng :

$$\frac{w - b}{w - \bar{b}} = e^{i\alpha'} \frac{z - a}{z - \bar{a}}; \quad \alpha' = \alpha_0 - \alpha_1.$$

Muốn cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện $\arg w'(a) = \alpha$ ta buộc $\alpha' = \alpha$. Thật vậy, lấy đạo hàm hai vế theo z ta có :

$$\frac{(w - \bar{b})\, w' - (w - b)\, w'}{(w - \bar{b})^2} = e^{i\alpha'} \frac{z - a - (z - \bar{a})}{(z - \bar{a})^2}$$

$$\Leftrightarrow w' \frac{2i \operatorname{Im} b}{(w - \bar{b})^2} = e^{i\alpha'} \frac{2i \operatorname{Im} a}{(z - \bar{a})^2}$$

$$\Rightarrow w'(a) \quad = e^{i\alpha'}$$

$$\Rightarrow \arg w'(a) = \alpha' = \alpha.$$

Vậy ánh xạ cần tìm có dạng :

$$\frac{w - b}{w - \bar{b}} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}.$$

95. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn $|z| < 1$ thành hình tròn $|w| < 1$ sao cho :

1) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$ $\qquad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

2) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0,$ $\qquad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

3) $w(0) = 0,$ $\qquad \arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$

4) $w(a) = a,$ $\qquad \arg w'(a) = \alpha.$

Giải: 1) $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - \dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{2}z} = e^{i\alpha}\dfrac{2z - 1}{2 - z}$

$$w' = e^{i}\frac{2(2 - z) + 2z - 1}{(2 - z)^2} = e^{i\alpha}\frac{3}{(2 - z)^2}$$

$$w'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\alpha}\frac{4}{3}$$

$$\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \alpha = 0.$$

Vậy $\qquad w = \dfrac{2z - 1}{2 - z}.$

2) Giải tương tự như 1) ta có kết quả :

$$w = \frac{2iz + 1}{iz + 2}.$$

3) Giải tương tự như 1) ta có kết quả:

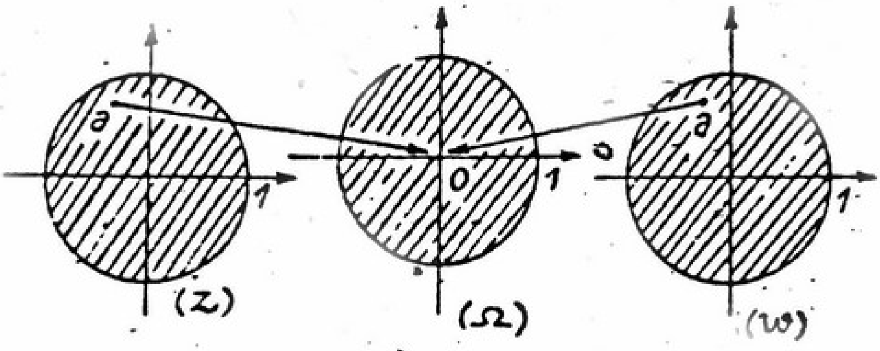
$$w = -iz$$

4) Ánh xạ biến $|z| < 1$ thành $|\Omega| < 1$ sao cho $\Omega(a) =$ $\arg \Omega'(a) = \alpha_0$ có dạng :

$$\Omega = e^{i\alpha_0}\frac{z - a}{1 - az}.$$

Ánh xạ biến $|w| < 1$ thành $|\Omega| < 1$ sao cho $\Omega(a) = 0$, $\arg \Omega'(a) = \alpha_1$ có dạng:

$$\Omega = e^{i\alpha_1} \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$$



Hình 10

Ánh xạ phân tuyến tính biến $|z| < 1$ thành $|w| < 1$ sao cho $w(a) = a$ có dạng:

$$\frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = e^{i\alpha'} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}; \quad \alpha' = \alpha_0 - \alpha_1$$

Muốn cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện $\arg w'(a) = \alpha$ ta buộc $\alpha' = \alpha$. Thật vậy, lấy đạo hàm hai vế theo z ta được:

$$w' \frac{1 - a\bar{a}}{(1 - \bar{a}w)^2} = e^{i\alpha'} \frac{1 - a\bar{a}}{(1 - \bar{a}z)^2}$$

$$\Rightarrow \quad w'(a) = e^{i\alpha'}$$

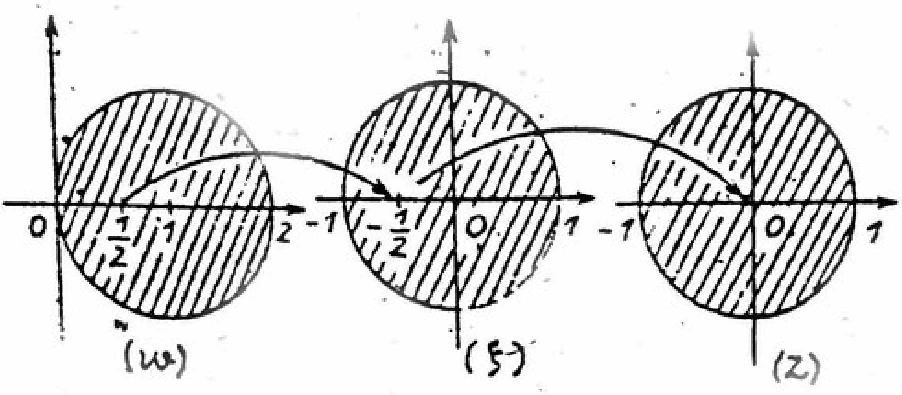
$$\Rightarrow \arg w'(a) = \alpha = \alpha'.$$

Vậy ánh xạ cần tìm có dạng:

$$\frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

96. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn $|z| < 1$ thành hình tròn $|w - 1| < 1$ sao cho $w(0) = \frac{1}{2}$ và $w(1) = 0$.

Giải: Trước hết, ta thực hiện ánh xạ $\xi = w - 1$, khi đó $\xi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $\xi(0) = -1$, ánh xạ này biến hình tròn



Hình 11

$|w-1|<1$ thành hình tròn $|\xi|<1$. Tiếp theo ta ánh xạ hình tròn $|\xi|<1$ thành hình tròn $|z|<1$ sao cho điểm $-\frac{1}{2}$ biến thành 0 và -1 biến thành 1, ta có:

$$z = e^{i\alpha}\frac{\xi+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\xi} = e^{i\alpha}\frac{2\xi+1}{2+\xi}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = e^{i\alpha}\frac{-2+1}{2-1} = -e^{i\alpha}.$$

$$\Rightarrow \quad \arg 1 = \arg(-1) + \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\pi$$

Do đó $z = e^{-i\pi}\frac{2\xi+1}{2+\xi} = -\frac{2\xi+1}{2+\xi} = -\frac{2(w-1)+1}{2+w-1}$

$$\Rightarrow z = -\frac{2w-1}{w+1}$$

$$\Rightarrow w = \frac{1-z}{z+2}$$

Đó là ánh xạ cần tìm.

97. Tìm hàm tuyến tính nguyên ánh xạ tam giác có đỉnh 0, 1, i thành tam giác đỉnh 0, 2, 1 + i.

98. Với các phép biến đổi sau đây, hãy tìm điểm bất động z_0 ($z_0 \neq \infty$), góc quay θ và hệ số co dãn k. Hãy viết dưới dạng chính tắc $w - w_0 = \lambda(z - z_0)$.

1) $w = 2z + 1 - 3i$;

2) $w = iz + 4$;

3) $w = z + 1 - 2i$;

4) $w - w_1 = a(z - z_1)$, $a \neq 0$;

5) $w = az + b$.

99. Tìm dạng tổng quát của hàm tuyến tính nguyên biến :

1) nửa mặt phẳng trên thành chính nó ;

2) nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng dưới ;

3) nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng phải ;

4) nửa mặt phẳng phải thành chính nó.

100. Tìm hàm tuyến tính nguyên ánh xạ dải bao gồm giữa các đường đã cho với các điều kiện chuẩn đã cho thành dải $0 < u < 1$:

1) $x = a$, $x = a + h$, $w(a) = 0$;

2) $x = a$, $x = a + h$,

$$w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}i, \qquad \operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1;$$

3) $y = kx$, $y = kx + b$, $w(0) = 0$;

4) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, $w(ib_1) = 0$.

101. Tìm hàm tuyến tính nguyên ánh xạ hình tròn $|z| < 1$ thành hình tròn $|w - w_0| < R$ sao cho tâm của các hình tròn tương ứng nhau và đường kính nằm ngang chuyển thành đường kính lập với hướng trục thực một góc α.

102. Tìm ảnh của dải $0 < x < 1$ qua các ánh xạ sau :

1) $w = \dfrac{z - 1}{z}$;

2) $w = \dfrac{z - 1}{z - 2}$.

103. Cho ánh xạ $w = \dfrac{z}{z - 1}$, tìm ảnh của vành tròn $1 < |z| < 2$.

104. Tìm hàm phân tuyến tính biến các điểm $-1, \infty, i$, tương ứng thành

1) $i, 1, 1 + i$;

2) $\infty, i, 1$;

3) $0, \infty, 1$.

105. Tìm hàm phân tuyến tính sao cho :

1) Các điểm 1 và i bất biến, còn 0 biến thành -1.

2) Các điểm $\dfrac{1}{2}$ và 2 bất biến, còn $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$ biến thành ∞.

3) Điểm i là bất biến kép, còn 1 biến thành ∞.

106. Tìm hàm phân tuyến tính biến $|z| < 2$ thành $\operatorname{Re} w > 0$ sao cho $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

107. Tìm ánh xạ bảo giác biến hình tròn $|z| < R_1$ thành hình tròn $|w| < R_2$ sao cho $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ ($|a| < R_1$, $|b| < R_2$).

108. Tìm ánh xạ bảo giác biến $|z - 2| < 1$ thành $|w - 2i| < 2$ sao cho $w(2) = i$ và $\arg w'(2) = 0$.

109. Tìm ảnh đối xứng đối với đường tròn đơn vị các đường sau :

1) $|z| = \frac{1}{2}$;

2) $|z - 1| = 1$;

3) $y = 2$;

4) hypebol $x^2 - y^2 = 1$.

110. Tìm dạng tổng quát của hàm phân tuyến tính ánh xạ hình tròn $|z| < 1$ thành nửa mặt phẳng phải $\operatorname{Re} w > 0$ sao cho $w(Z_1) = 0$, $w(Z_2) = \infty$, trong đó z_1, z_2 là các điểm trên đường tròn $|z_1| = 1$ sao cho $\arg z_1 < \arg z_2$.

111. Tìm ánh xạ bảo giác biến nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng dưới sao cho

$$w(a) = \bar{a}, \quad \arg w'(a) = -\frac{\pi}{2} \quad (\operatorname{Im} a > 0)$$

112. Cho $w = e^{i\alpha} \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z} \qquad (|a| < 1)$.

1) Tìm $\arg w(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi)$.

2) Tìm $w'(0)$ và $w'(a)$.

3) Giải thích xem phần nào của hình tròn đơn vị co lại, phần nào dãn ra.

4) Tìm $\max \left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ và $\min \left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ đối với $|z| \leqslant 1$.

113. Tìm dạng tổng quát của hàm phân tuyến tính $w(z)$ ánh xạ hình tròn $|z| < R$ thành chính nó với các điều kiện sau :

1) $w(a) = 0 \qquad (|a| < R)$

2) $w(a) = b \qquad (|a| < R, \quad |b| < R)$.

3) $w(\pm R) = \pm R$.

§ 2. HÀM LŨY THỪA, HÀM MŨ, HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ HÀM NGƯỢC CỦA CHÚNG

114. Cho hàm số $w = z^2$ và hàm ngược của nó. Tìm ả xạ bảo giác biến :

1) Phần bên trong nhánh phải của hypebol $x^2 - y^2 =$ thành nửa mặt phẳng trên.

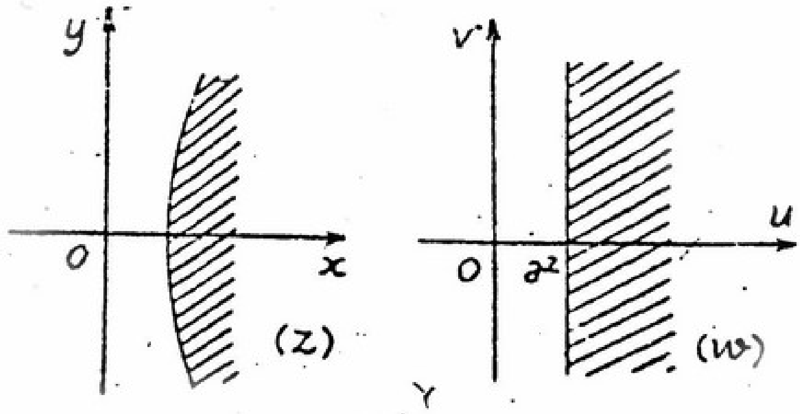
2) Phần bên ngoài của parabol $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ thành nử mặt phẳng trên.

Giải : Đặt $w = u + iv$, $z = x + iy$, ta có :

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 & (1) \\ v = 2xy & (2) \end{cases}$$

1) Từ (1) ta suy ra rằng : với ánh xạ $w = z^2$ hypeb $x^2 - y^2 = a^2$ biến thành đường thẳng $u = a^2$ và phần tron của nhánh phải biến thành nửa mặt phẳng (hình 12).



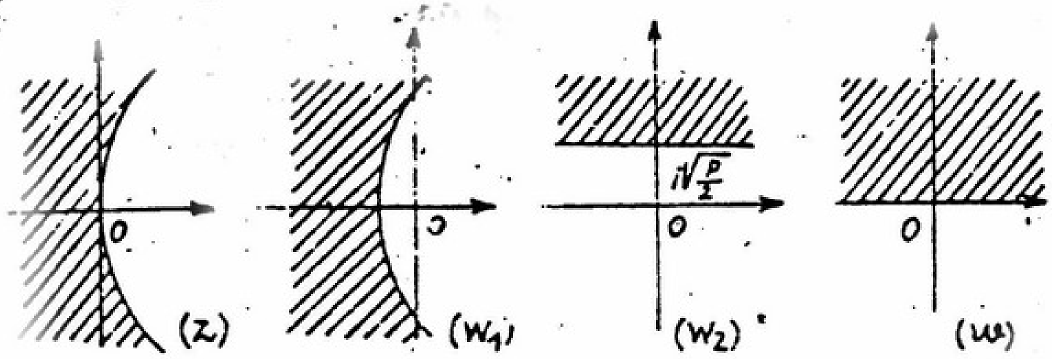
Hình 12

Từ đây ta suy ra ánh xạ phải tìm có dạng

$$w = e^{i\frac{\pi}{2}}(z^2 - a^2) = i(z^2 - a^2).$$

2) Khi cho $y = C \neq 0$, từ (2) ta có $x = \dfrac{v}{2C}$. Th vào (1) ta được : $u = \dfrac{v^2}{4C^2} - C^2 \Leftrightarrow v^2 = 4C^2(u + C^2)$. Đây l

phương trình parabol trục Ou, đỉnh $(-C^2, 0)$. Vì miền ngoài của parabol không chứa điểm gốc O, nên hàm $z = \sqrt{w}$ sẽ biến phần ngoài của parabol thành nửa mặt phẳng không chứa điểm O giới hạn bởi đường thẳng $y = C$. Bây giờ ta áp dụng kết quả này vào miền ánh xạ (hình 13).



Hình 13

Thực hiện ánh xạ $w_1 = z - \frac{p}{2}$ đường $y^2 = 2px$ biến thành đường

$$Y^2 = 2p\left(X + \frac{p}{2}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2\left[X + \left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2\right] \qquad (3)$$

Thực hiện ánh xạ $w_2 = \sqrt{w_1}$ biến phần ngoài của parabol (3) thành nửa mặt phẳng không chứa điểm O và giới hạn bởi đường thẳng $v_2 = \sqrt{\frac{p}{2}}$.

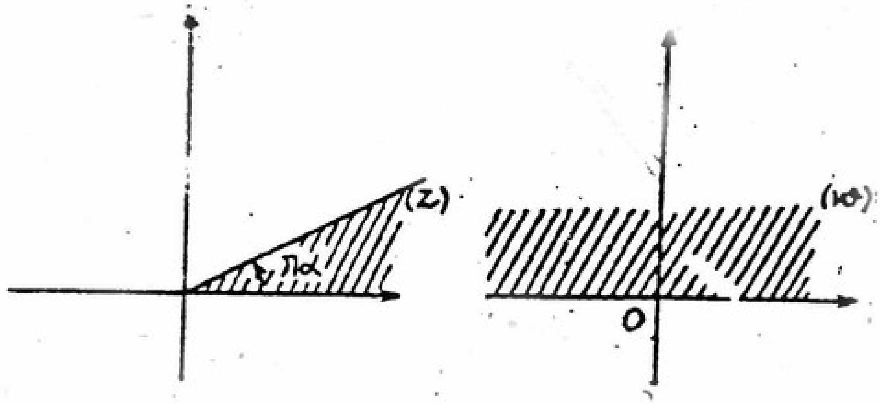
Cuối cùng thực hiện ánh xạ $w = w_2 - i\sqrt{\frac{p}{2}}$, ta được ánh xạ cần tìm :

$$w = \sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}}.$$

115. Tìm ánh xạ bảo giác $w(z)$ ánh xạ góc $0 < \arg z < \pi\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ lên nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} w > 0$.

Giải : Hàm $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$ ánh xạ tia $\arg z = 0$ thành tia $\arg w = 0$, còn tia $\arg z = \pi\alpha$ thành tia $\arg w = \pi$ (hình 14).

Vậy $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$ là ánh xạ cần tìm.



Hình 14

116. Tìm ánh xạ bảo giác $w(z)$ biến nửa hình tròn $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ lên nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} w > 0$ với các điều kiện:

1) $w(-1) = 0$, $w(0) = 1$, $w(1) = \infty$.

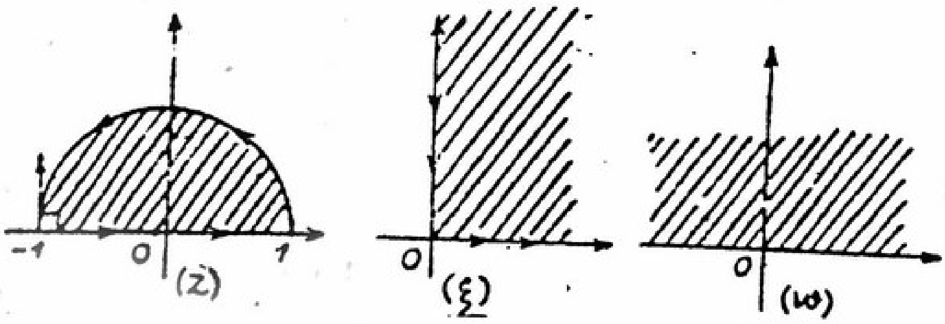
2) $w(\pm 1) = \mp 1$, $w(0) = \infty$.

3) $w\left(\frac{i}{2}\right) = i$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Giải: 1) Ánh xạ phân tuyến tính biến ba điểm $-1, 0, 1$ thành ba điểm $0, 1, \infty$ được tính theo công thức:

$$\frac{\xi - 0}{\xi - 1} : \frac{1}{1} = \frac{z+1}{z-0} : \frac{1+1}{1-0} \Leftrightarrow \xi = \frac{1+z}{1-z}; \quad (1)$$

do tính bảo giác nên ánh xạ (1) biến nửa hình tròn $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ thành góc phần tư thứ nhất. Do đó ánh xạ phải tìm có dạng $w = \xi^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ (hình 15).



Hình 15

2) Theo câu 1) ảnh xạ biến $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ thành $\mathrm{Im}\,\Omega > 0$ có dạng :

$$\Omega = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

nhưng ánh xạ này chưa thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta tìm ánh xạ thỏa mãn điều kiện sau :

$$\begin{aligned}
\Omega(1) &= \infty \quad \Rightarrow \quad -1 \\
\Omega(-1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \\
\Omega(0) &= 1 \quad \Rightarrow \quad \infty
\end{aligned}$$

Ta có :

$$\frac{w+1}{w-1} : \frac{1}{1} = \frac{1}{\Omega - 0} : \frac{1}{1-0}$$

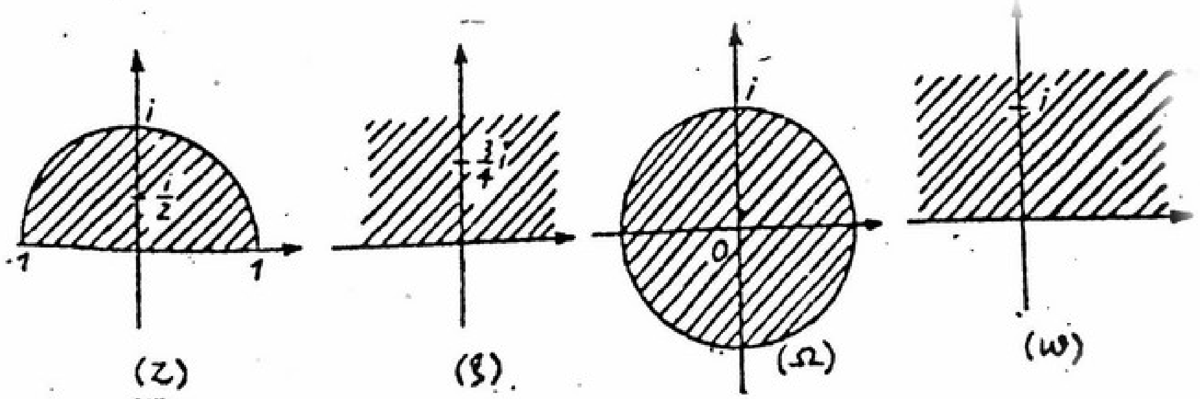
$$\Rightarrow \qquad \Omega = \frac{w-1}{w+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{w-1}{w+1}$$

$$\Rightarrow \qquad w = -\frac{z^2+1}{2z}$$

Đây là ánh xạ cần tìm.

3) Để cho gọn ta chỉ ra trên hình 16 các ánh xạ liên tiếp cần thực hiện.



Hình 16

Tương tự như câu 1) ta có được ánh xạ biến $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ thành $\operatorname{Im} \xi > 0$. Nhưng ở đây ta sử dụng hàm Jukovski

$$\xi = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

biến $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ thành $\operatorname{Im} \xi > 0$, khi đó $\xi\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{3}{4} i$.

Thực hiện tiếp ánh xạ biến $\operatorname{Im} \xi > 0$ thành $|\Omega| < 1$ sao cho $\Omega\left(\frac{3}{4} i\right) = 0$, khi đó :

$$\Omega = e^{i\alpha} \frac{\xi - \frac{3}{4} i}{\xi + \frac{3}{4} i} = e^{i\alpha} \frac{-\frac{z^2+1}{2z} - \frac{3}{4} i}{-\frac{z^2+1}{2z} + \frac{3}{4} i}.$$

$$\Omega = -e^{i\alpha} \frac{2z^2 + 2 + 3iz}{-2z^2 - 2 + 3iz}$$

Ánh xạ tiếp biến $|\Omega| < 1$ thành $\operatorname{Im} w > 0$ sao cho $w(0) = i$, khi đó ta có :

$$\Omega = e^{i\theta} \cdot \frac{w - i}{w + i}.$$

Từ đây ta suy ra ánh xạ cần tìm được tính theo hệ thức :

$$e^{i\theta} \frac{w - i}{w + i} = -e^{i\alpha} \frac{2z^2 + 2 + 3iz}{-2z^2 - 2 + 3iz}$$

Đạo hàm hai vế theo z, sau đó tính toán ta được :

$$w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{10}{3} e^{i\beta}.$$

$$\arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \beta = -\frac{\pi}{2}.$$

Cuối cùng ánh xạ cần tìm có dạng :

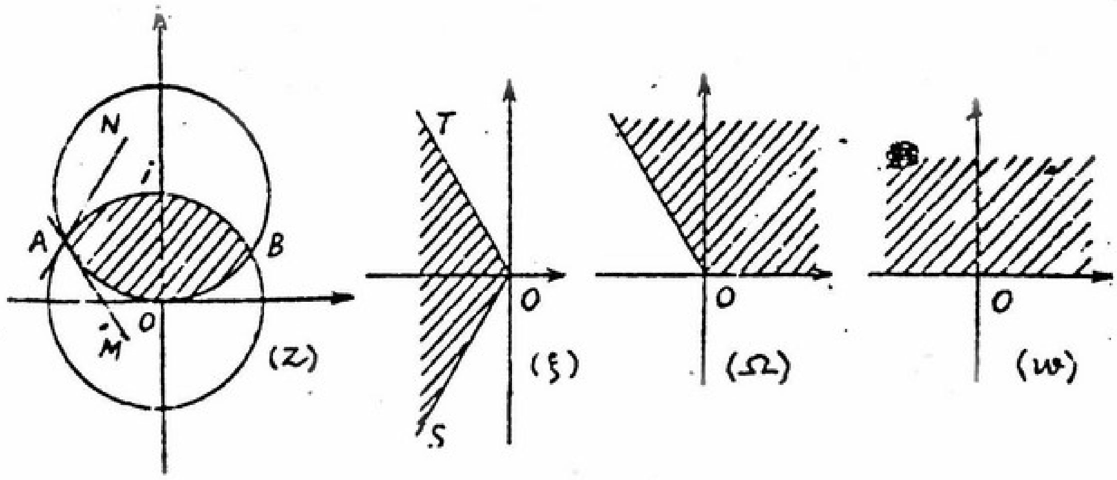
$$\frac{w-i}{w+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{2z^2+3iz+2}{-2z^2+3iz-2}$$

hay
$$w = \frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}.$$

117. Tìm hàm số w(z) ánh xạ bảo giác lên nửa mặt phẳng trên Im w > 0 hình nhị giác $|z| < 1$, $|z-i| < 1$.

Giải : Ta xác định số đo góc của nhị giác, tức là góc tại A hoặc B của hai đường tròn $|z| = 1$ và $|z-i| = 1$ (hình 17).

Dễ dàng thấy A $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, B $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ và góc $\widehat{MAN} = 120°$



Hình 17

Ánh xạ A → 0, B → ∞ có dạng :

$$\xi = \frac{z-A}{z-B} = \frac{2z+3-i}{2z-3-i}$$

Khí đó
$$\xi(i) = \frac{2i+\sqrt{3}-i}{2i-\sqrt{3}-i} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\xi(0) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

Như vậy $\xi(z)$ biến nhị giác $|z| < 1$, $|z - i| < 1$ thành góc $\widehat{IOD}$ có độ lớn $\dfrac{2\pi}{3}$.

Thực hiện ánh xạ $\Omega = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\xi$ ta được góc có độ mở $\dfrac{2\pi}{3}$ và một cạnh trùng với trục thực.

Cuối cùng thực hiện ánh xạ $w = \Omega^{3/2}$

hay $$w = \left[e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right]^{3/2} = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^{3/2}$$

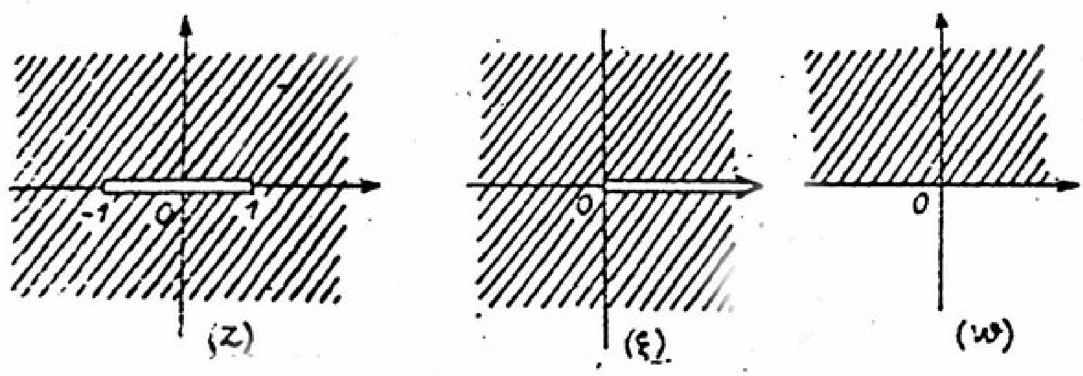
Đây là ánh xạ cần tìm.

118. Tìm hàm $w(z)$ ánh xạ bảo giác lên nửa mặt phẳng trên mặt phẳng bỏ đi đoạn $[-1, 1]$.

Giải: Ánh xạ $[-1, 1]$ thành $[0, +\infty)$ sao cho $-1 \to 0$; $0 \to 1$, $1 \to \infty$, có dạng

$$\xi = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Với ánh xạ này mặt phẳng bỏ đi $[-1, 1]$ biến thành mặt phẳng bỏ đi nửa trục thực dương (hình 18).



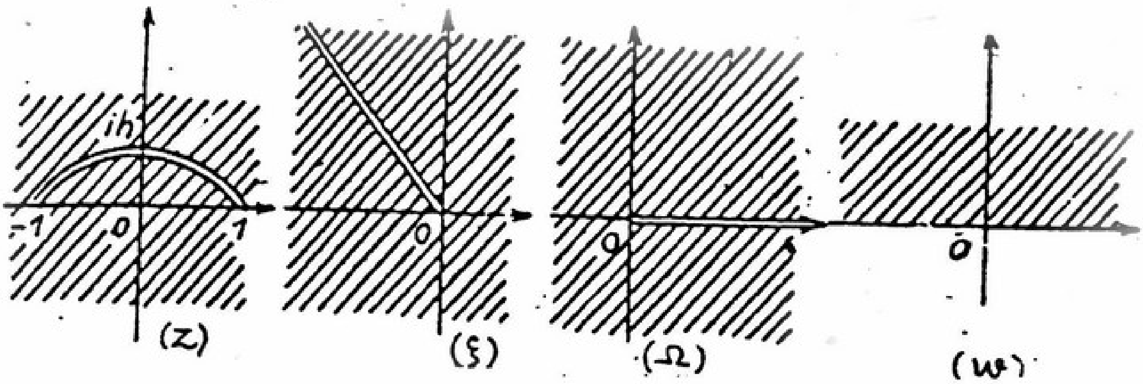
Hình 18

Cuối cùng $$w = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{1 + z}{1 - z}}$$

là ánh xạ cần tìm.

119. Tìm ánh xạ bảo giác biến mặt phẳng bỏ đi cung nối các điểm $-1, 1$ và đi qua ih $(0 < h < 1)$ thành nửa mặt phẳng trên.

Giải :



Hình 19

Ta có $\xi = \dfrac{1+z}{1-z}$ biến $-1 \to 0$, $1 \to \infty$ và $\xi(ih) = \dfrac{1+ih}{1-ih} =$

$= -\dfrac{1-h^2}{1+h^2} + i\dfrac{2h}{1+h^2}$; hàm $\xi(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ biến miền đã cho thành mặt phẳng bỏ đi tia đi từ 0 đến ∞, đi qua $-\dfrac{1-h^2}{1+h^2} + i\dfrac{2h}{1+h^2}$. Thực hiện phép quay :

$$\Omega = e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{2h}{1-h^2}}$$

ta chuyền thành mặt phẳng bỏ đi $[0, +\infty)$. Cuối cùng thực hiện phép khai căn ta được ánh xạ cần tìm :

$$w = e^{\frac{i}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2h}{1-h^2}} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

120. Tìm ánh xạ bảo giác biến nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ bỏ đi đoạn $[0, ih]$, $h > 0$, thành nửa mặt phẳng trên.

Giải : Ánh xạ $\xi = z^2$ biến miền đã cho thành mặt phẳng bỏ đi $[-h^2, +\infty)$ (hình 20).

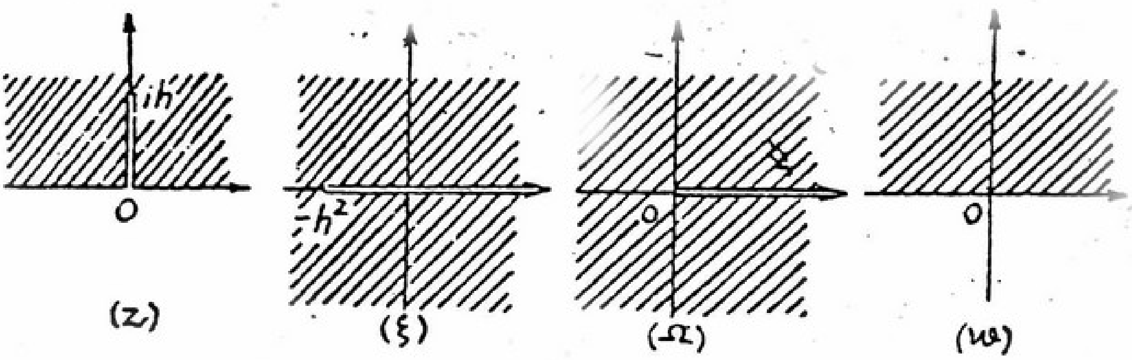
Tiếp theo thực hiện phép tịnh tiến

$$\Omega = \xi + h^2.$$

Cuối cùng thực hiện phép khai căn

$$w = \sqrt{\Omega} = \sqrt{z^2 + h^2},$$

ta được ánh xạ cần tìm.



Hình 20

121. Cho ánh xạ $w = e^z$. Hãy giải thích các đường và miền sau đây biến thành gì?

1) Lưới trực giao $x = c$, $y = c$.

2) Dải $\alpha < y < \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$.

3) Nửa dải $x < 0$, $0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

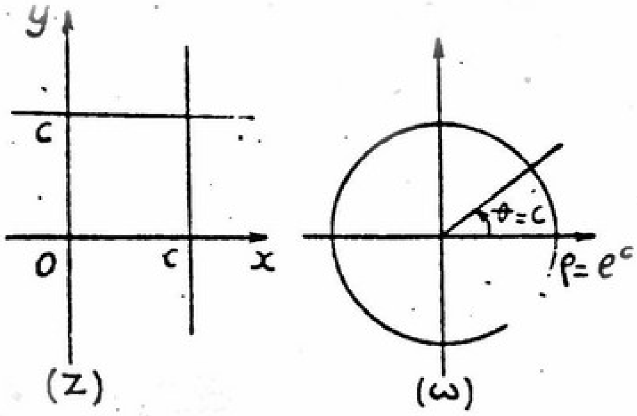
4) Nửa dải $x > 0$, $0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

5) Hình chữ nhật $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ $(\delta - \gamma \leqslant 2\pi)$.

Giải: Giả sử $w = \rho e^{i\theta}$, $z = x + iy$.

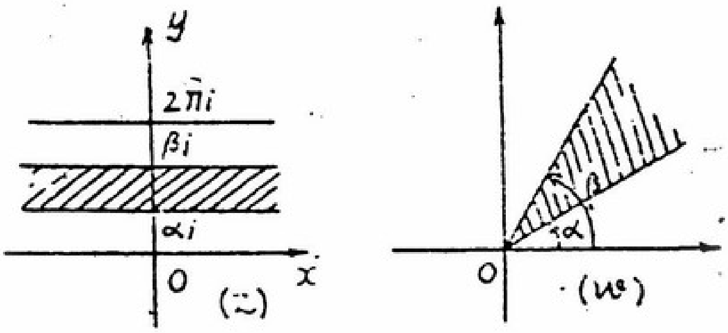
Khi đó $\quad w = e^z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \theta = y \end{cases} \quad (1)$

1) Từ (1) ta suy ra lưới vuông góc $x = c$, $y = c$ chuyển thành lưới cực $\rho = e^c$, $\theta = c$ (hình 21).



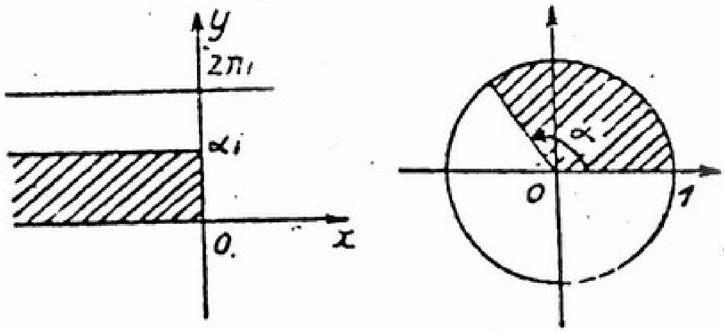
Hình 21

2) Từ (1) ta suy ra dải $\alpha < y < \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$ biến thành góc $\alpha < \theta < \beta$. Đặc biệt $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ thì dải $0 < y < 2\pi$ biến thành mặt phẳng bỏ đi nửa trục thực dương $[0, +\infty)$ (hình 22).



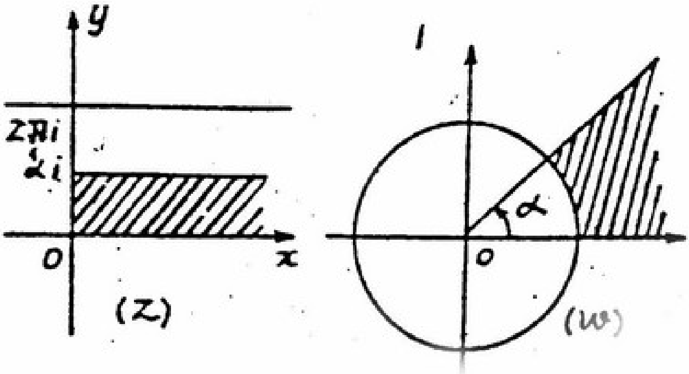
Hình 22

3) Tương tự, nửa dải $x < 0$, $0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$ biến thành $|w| < 1$, $0 < \arg w < \alpha \leqslant 2\pi$ (hình 23).



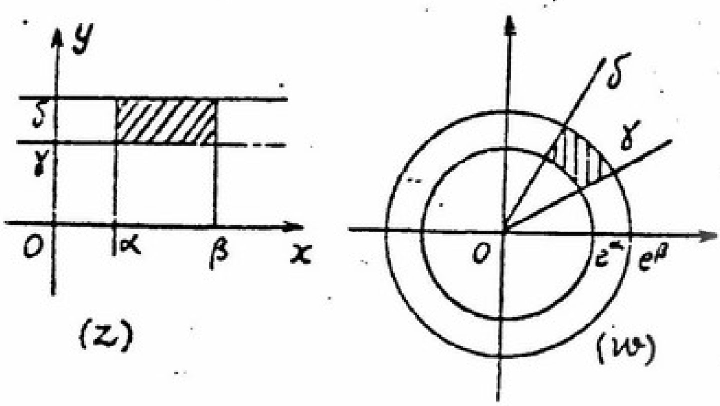
Hình 23

4) Tương tự, nửa dải $x > 0$, $0 < y < \alpha \leq 2\pi$ biến thành $|w| > 1$, $0 < \arg w < \alpha \leq 2\pi$ (hình 24).



Hình 24

5) Tương tự hình chữ nhật $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$, biến thành $e^{\alpha} < x < e^{\beta}$, $\gamma < \theta < \delta$ (hình 25).



Hình 25

122. Cho ánh xạ $w = \cos z$. Hãy giải thích các đường và miền sau biến thành gì?

1) Lưới vuông góc $x = c$, $y = c$.

2) Nửa dải $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $y > 0$.

3) Nửa dải $0 < x < \pi$, $y > 0$.

4) Dải $0 < x < \pi$.

5) Hình chữ nhật $0 < x < \pi$, $-h < y < h$, $h > 0$.

Giải : Bằng cách tính toán trực tiếp ta sẽ tìm ra được các kết quả (phần các bạn đọc). Ở đây ta không làm như thế, mà dựa vào mối liên quan giữa hàm lượng giác và hàm mũ :

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}\right),$$

ta thực hiện liên tiếp ba ánh xạ sau :

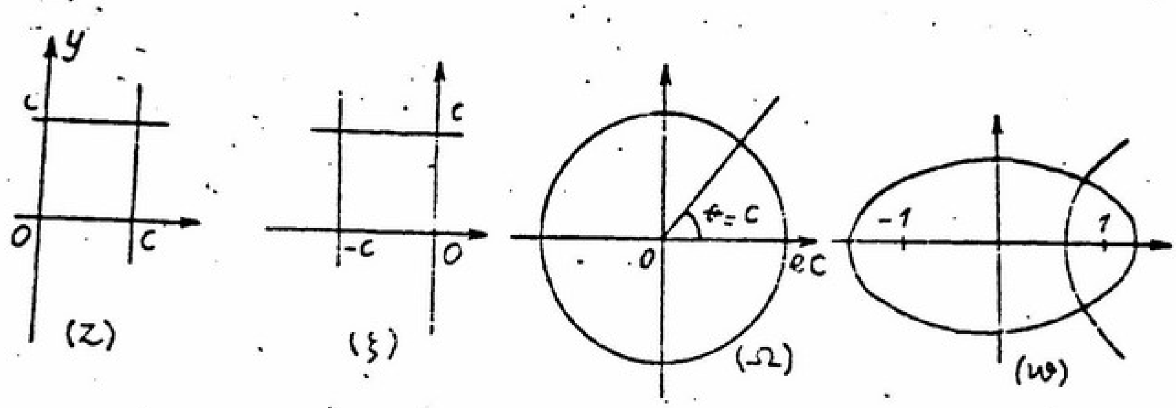
$$\xi = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} z \quad \text{(phép quay)}$$

$$\Omega = e^{\xi} \quad \text{(hàm số mũ)}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{1}{\Omega}\right) \quad \text{(hàm Jukovski)}$$

Kết quả thu được biểu diễn theo các hình vẽ dưới đây :

1)

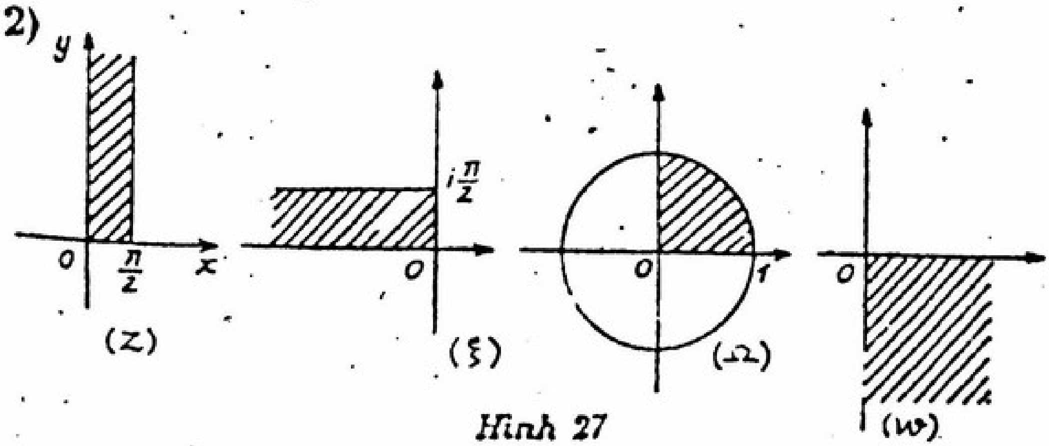


Hình 26

Đường $y = c$ biến thành elip $\dfrac{u^2}{\cos^2 c} + \dfrac{v^2}{\sin^2 c} = 1.$

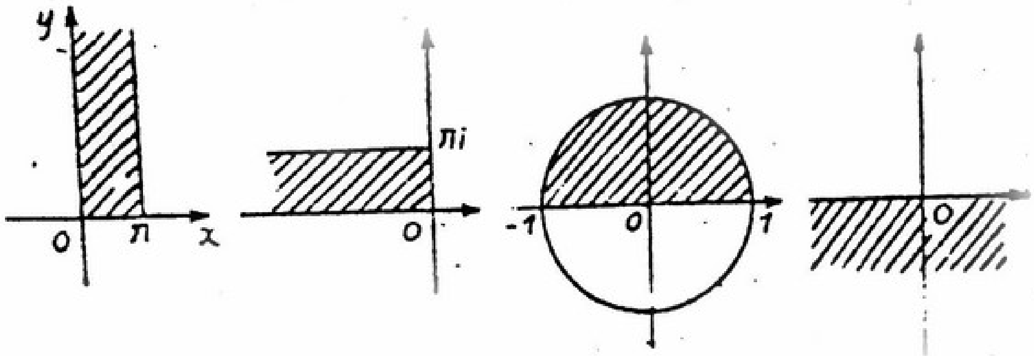
$x = c$ biến thành hypebol $\dfrac{u^2}{\cos^2 c} - \dfrac{v^2}{\sin^2 c} = 1.$

2)



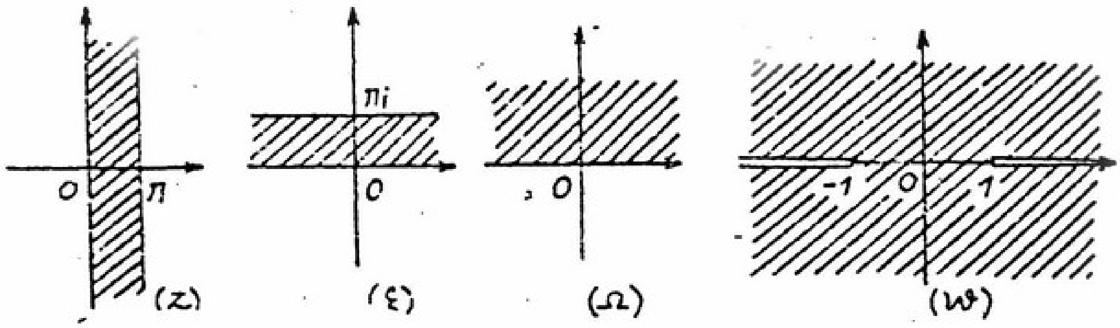
Hình 27

3)



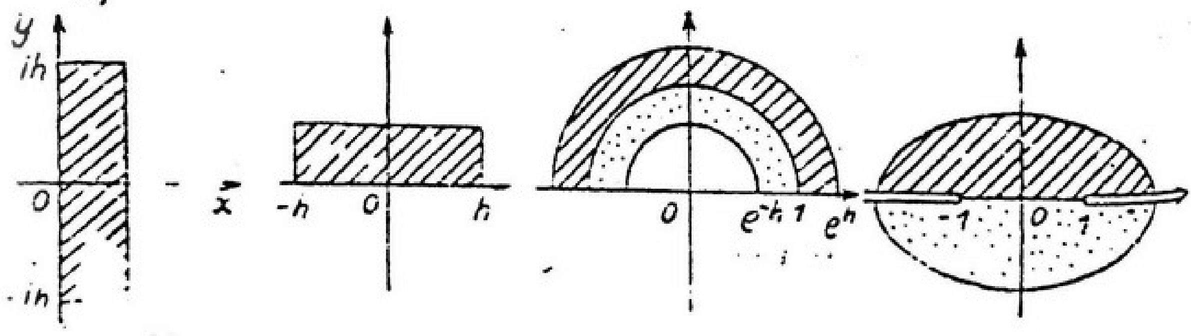
Hình 28

4)



Hình 29

5)



Hình 30

123. Cho hàm Jukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, các đường miền đã cho biến thành gì?

1) Lưới cực $|z| = R$, $\arg z = \alpha$?

2) Hình tròn $|z| < R < 1$?

3) Hình tròn $|z| < 1$?

4) Miền $|z| > 1$?

Giải : Giả sử $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$

Khi đó $u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) =$

$$= \frac{1}{2} r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{2}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

1) Từ (1) ta suy ra đường tròn $|z| = R$ thành elip :

$$\frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1.$$

Đặc biệt $|z| = 1$ biến thành $v = 0$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

Từ (1) suy ra tia $\arg_{\iota} = \alpha$ biến thành hypebol ;

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

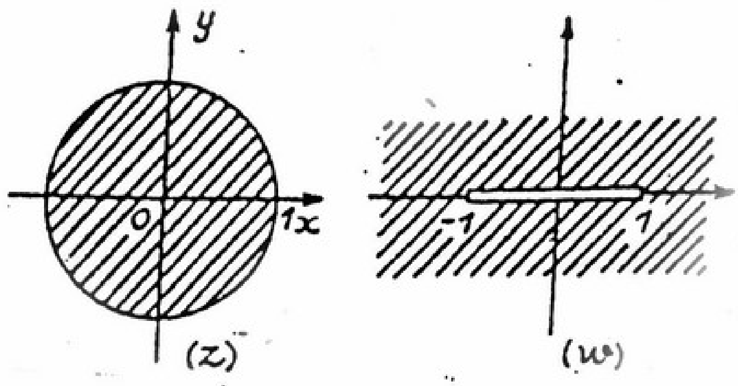
Đặc biệt, tia $\arg z = 0$ biến thành $v = 0$, $u \geqslant 1$;

tia $\arg z = \pi$ biến thành $v = 0$, $u \leqslant -1$:

tia $\arg z = \pm\ \pi/2$ biến thành trục $u = 0$.

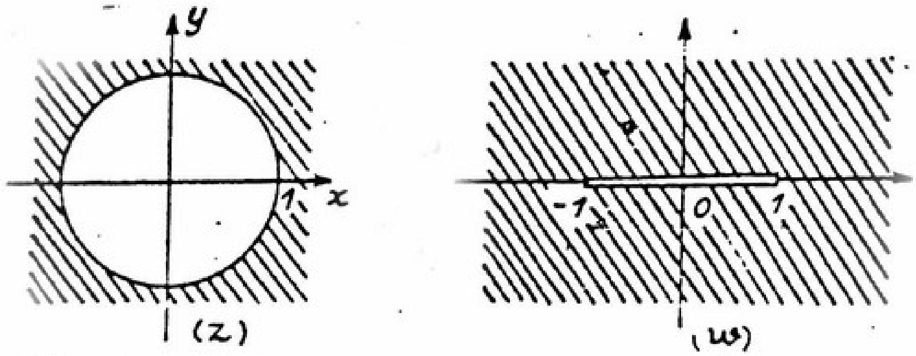
2) Theo lập luận trên thì $|z| < R < 1$ biến thành miền ngoài elip có bán trục $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$

3) Tương tự, hình tròn $|z| < 1$ biến thành cả mặt phẳng bỏ đi đoạn $[-1, 1]$ (hình 31).



Hình 31

4) Tương tự, miền $|z| > 1$ biến thành cả mặt phẳng bỏ đi $[-1, 1]$ (hình 32).



Hình 32

124. Cho hàm số $w = z^2$ và hàm ngược của nó. Tìm ánh xạ bảo giác :

1) Biến phần trong đường tròn $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$ thành phần trong đường cacđioit $\rho = \dfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)$.

2) Biến phần trong đường tròn $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$ thành phần trong đường lemnicat $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$.

125. 1) Hàm $w = R\left(z + \dfrac{z^n}{n}\right)$, $R > 0$, $n > 1$, ánh xạ $|z| < 1$ thành miền nào?

2) Hàm $w = R\left(z + \dfrac{1}{nz^n}\right)$, $R > 0$, $n > 1$, ánh xạ $|z| > 1$ thành miền nào?

126. Tìm ánh xạ bảo giác biến góc $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ thành nửa mặt phẳng trên sao cho $w(1-i) = 2$, $w(i) = -1$, $w(0) = 0$.

127. Tìm ánh xạ bảo giác biến $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ thành $|w| < 1$ sao cho :

1) $w(\pm 1) = \pm 1$, $\quad w(0) = -i$;

2) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0$, $\quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

128. Tìm ánh xạ bảo giác biến hình nhị giác $|z| > 1$, $|z - i| < 1$ thành nửa mặt phẳng trên.

129. Tìm ánh xạ bảo giác biến hình nhị giác $|z| > 2$, $|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}$ thành nửa mặt phẳng trên.

130. Tìm ánh xạ bảo giác biến mặt phẳng bỏ đi đoạn $[-i, i]$ thành nửa mặt phẳng trên.

131. Tìm ánh xạ bảo giác biến mặt phẳng khía theo tia nằm trong góc phần tư thứ nhất xuất phát từ điểm i song song với đường thẳng $y = x$.

132. Tìm ánh xạ bảo giác biến nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ khía theo cung tròn $|z| = 1$ từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$ thành nửa mặt phẳng trên.

133. Tìm ánh xạ bảo giác biến nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$, khía từ ih đến ∞ dọc theo nửa trục ảo dương ($h > 0$) thành nửa mặt phẳng trên.

134. Tìm ánh xạ bảo giác biến hình tròn $|z| < 1$ khía theo đoạn $[0, 1]$ thành nửa mặt phẳng trên.

135. Qua ánh xạ Jukovski hình tròn $|z| < 1$ khía theo đoạn $[a, 1]$, $-1 < a < 1$, được biến thành miền nào? Xét các trường hợp $a > 0$, $a < 0$.

136. Tìm ánh xạ bảo giác biến hình tròn $|z| < 1$ khía theo đoạn $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ thành nửa mặt phẳng trên.

137. Tìm ánh xạ bảo giác biến hình tròn $|z| < 1$ khía theo bán kính $[-1, 0]$ và đoạn $[a, 1]$, $0 < a < 1$, thành nửa mặt phẳng trên.

138. Tìm hàm $w(z)$ ánh xạ bảo giác nửa hình tròn $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, thành hình tròn $|w| < 1$ sao cho:

1) $w(\pm 1) = \pm 1, \quad w(0) = -i$;

2) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

139. Ánh xạ thành nửa mặt phẳng trên

1) hình quạt $|z| < R,\ 0 < \arg z < \pi\alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 2)$;

2) miền $|z| > R,\ 0 < \arg z < \pi\alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 2)$.

140. Ánh xạ thành nửa mặt phẳng trên các hình nhị giác sau:

1) $|z| < 1,\ |z - i| > 1$.

2) $|z| > 1,\ |z - i| > 1$.

141. Ánh xạ miền ngoài nửa trên của hình tròn đơn vị thành nửa mặt phẳng trên.

142. Ánh xạ mặt phẳng khía theo đoạn $[z_1, z_2]$ thành nửa mặt phẳng trên.

143. Ánh xạ miền ngoài hình tròn đơn vị khía theo tia $[1, +\infty)$ thành nửa mặt phẳng trên.

144. Ánh xạ dải bị chặn bởi $y = x$, $y = x + h$ thành nửa mặt phẳng trên.

145. Cho ánh xạ $w = \ln z$. Hãy giải thích các đường và miền sau đây thành miền gì?

1) Lưới cực $|z| = R$, $\arg z = \theta$?

2) Góc $0 < \arg z < \alpha \leqslant 2\pi$?

3) Hình quạt $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha \leqslant 2\pi$?

4) Vành tròn $r_1 < |z| < r_2$ khía theo đoạn $[r_1, r_2]$?

146. Cho hàm Jukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Tìm ảnh của các miền sau đây :

1) $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

2) $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$.

3) $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

4) $1 < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

5) $R < |z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

147. Ánh xạ $w = \arcsin z$ biến thành gì ?

1) Nửa mặt phẳng trên ?

2) Mặt phẳng khía theo trục thực dọc theo các tia $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$?

3) Góc phần tư thứ nhất ?

4) Nửa mặt phẳng $x < 0$ khía theo tia $(-\infty, -1]$?

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN

§1. TÍCH PHÂN PHỨC

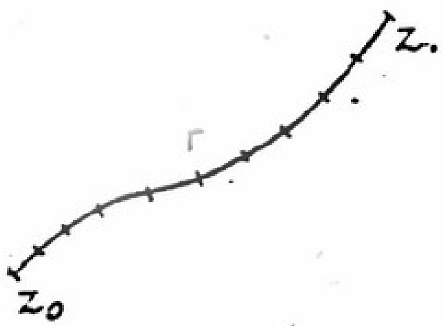
148. Bằng cách tính tổng trực tiếp, hãy chứng minh các đẳng thức :

1) $\int_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_2.$

2) $\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2)$

Giải :

1) $\int_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_0.$



Hình 33

Gọi Γ là đường nối z_0 và z_1 (hình 33). Chia Γ thành n phần bởi các điểm chia

$$\xi_0 = z_0, \xi_1, \ldots, \xi_n = z_1.$$

Gọi $\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k.$

Lấy $n_k \in \xi_k \xi_{k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, và $f(\xi_k) = 1$.

Lập tổng : $\sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k) \Delta \xi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \xi_k = z_1 - z_0.$

Chuyển qua giới hạn khi $\max |\Delta \xi_k| \to 0$, ta có :

$$\int_{z_0}^{z_n} dz = z_1 - z_0.$$

2) $\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$

Chia Γ thành n phần bởi các điểm chia

$$\xi_0 = z_0, \xi_1, \ldots, \xi_n = z_1$$

Gọi $\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k$. Lấy $\eta_k = \xi_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Vậy
$$s^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k (\xi_{k+1} - \xi_k).$$

Lấy $\eta_k = \xi_{k+1}$
$$s^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{k+1} (\xi_{k+1} - \xi_k).$$

Ta có :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\max|\Delta \xi_k| \to 0} s^1 &= \int_{z_0}^{z_1} z dz \\ \lim_{\max|\Delta \xi_k| \to 0} s^2 &= \int_{z_0}^{z_1} z dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{\max|\Delta \xi_k| \to 0} (s^1 + s^2) = 2 \int_{z_0}^{z_1} z dz$$

$$s^1 + s^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k + \xi_{k+1})(\xi_{k+1} - \xi_k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2) = z_1^2 - z_0^2$$

$$\Rightarrow \lim_{\max|\Delta \xi_k| \to 0} (s^1 + s^2) = z_1^2 - z_0^2 = 2 \int_{z_0}^{z_1} z dz$$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2} (z_1^2 - z_0^2).$$

149. Tính tích phân $I = \int x\, dz$ theo các tia

1) $z = 2 + i$;

2) $\frac{1}{2}$ đường tròn $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (gốc tại điểm $z = 1$)

3) đường tròn $|z - a| = R$.

Giải: 1) $z(t) = t + i\frac{1}{2}t$ với $t \in [0, 2]$, vậy:

$$I = \int_{OA} x\,dz = \int_0^2 t\left(1 + i\frac{1}{2}\right)dt = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2 + i,$$

hoặc:

$$I = \int_{OA} x\,dz = \int_{OA} x\,dx + i\int_{OA} x\,dy =$$

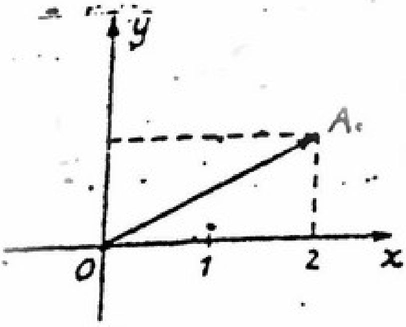
$$= \int_0^2 x\,dx + i\int_0^1 2y\,dy = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + iy^2\Big|_0^1 = 2 + i.$$

2) $z(t) = \cos t + i\sin t$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

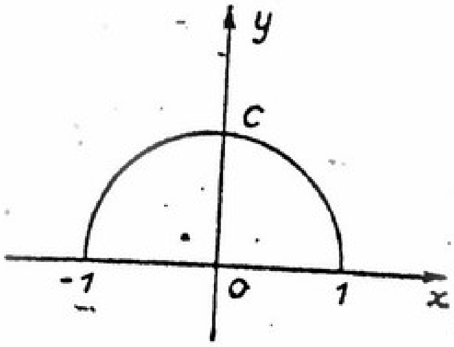
$$I = \int_0^\pi \cos t(-\sin t + i\cos t)\,dt = -\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt +$$

$$+ i\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2t\,dt + i\int_0^\pi \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^\pi + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\,i.$$



Hình 34



Hình 35

3) Theo đường tròn $|z - a| = R$:

$$z(t) = a + Re^{i} = a + R(\cos t + i\sin t) \quad \text{với } t \in [0, 2]$$
$$= a_1 + R\cos t + i(a_2 + R\sin t) \quad (a = a_1 + ia_2).$$

Vậy :

$$I = \int_0^{2\pi} (a_1 + R\cos t)[-R\sin t + iR\cos t]\,dt =$$

$$= R\int_0^{2\pi} (a_1 + R\cos t)[-\sin t + i\cos t]\,dt =$$

$$= R\int_0^{2\pi} (a_1 + R\cos t)\sin t\,dt + iR\int_0^{2\pi} (a_1 + R\cos t)\cos t\,dt =$$

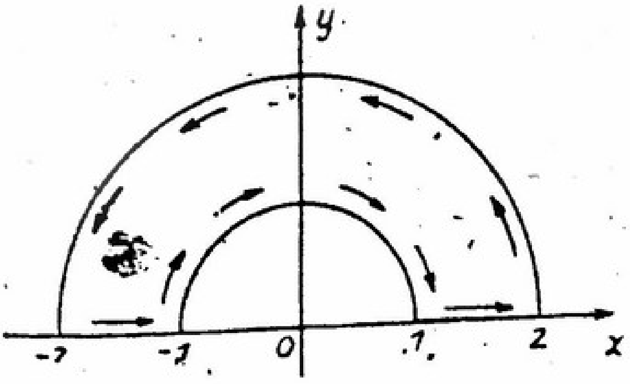
$$= \frac{iR^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = i\pi R^2.$$

150. Tính tích phân $\int_C \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, trong đó C là biên của hình 36.

Giải :

$$I = \int_1^2 \frac{z\,dz}{\bar{z}} + \int_{\substack{|z|=2\\ y\geqslant 0}} \frac{z\,dz}{\bar{z}} + \int_{-2}^{-1} \frac{z\,dz}{\bar{z}} - \int_{\substack{|z|=1\\ y\geqslant 0}} \frac{z\,dz}{\bar{z}} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 - I_4.$$



Hình 36

$$I_1 = \int_1^2 \frac{z\,dz}{\bar{z}} = \int_1^2 dx = 1;$$

$$I_3 = \int_{-2}^{-1} \frac{z\,dz}{\bar{z}} = \int_{-2}^{-1} dx = 1;$$

$$I_2 = \int_{\substack{|z|=2\\ y\geq 0}} \frac{z\,dz}{\bar{z}} = \int_0^{\pi} \frac{2e^{i\varphi}2ie^{i\varphi}}{2e^{-i\varphi}}\,d\varphi = 2i\int_0^{\pi} e^{i3\varphi}d\varphi = -\frac{4}{3}$$

$$I_4 = \int_{\substack{|z|=1\\ y\geq 0}} \frac{zdz}{\bar{z}} = -\frac{2}{3}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 1 - \frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

151. Tính tích phân $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$

1) Theo chu vi $|z| = 1$, $y \geq 0$ $\sqrt{1} = 1$;

2) theo chu vi $|z| = 1$, $y \geq 0$. $\sqrt{1} = -1$;

3) theo chu vi $|z| = 1$, $y \leq 0$ $\sqrt{1} = 1$;

4) theo chu vi $|z| = 1$, $\sqrt{1} = 1$.

Giải :

$$1)\ \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = i\int_0^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi = -2(1-i).$$

$$2)\ \int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i(\varphi/2+\pi)}} = i\int\limits_0^{\pi} e^{i(\varphi/2-\pi)}\,d\varphi = 2(-i+1).$$

$$3)\ \int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi/2}} = 2e^{i\varphi/2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = -2(1+i).$$

$$4)\ \int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi/2}} = 2e^{i\varphi/2}\Big|_0^{2\pi} = -4.$$

152. Hàm $f(z)$ liên tục trên miền $|z - z_0| > r_0$. Ta kí hiệu $M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r>r_0} f(z)$ và giả sử rằng $rM(r) \to 0$. Chứng minh rằng

$\int\limits_{k_r} f(z)\,dz \to 0$ khi $r \to \infty$ nếu k_r là vòng tròn : $|z - z_0| = r$.

Giải : Cho $\varepsilon > 0$. Xét :

$$\left|\int\limits_{k_r} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{k_r} |f(z)||dz| \leqslant \int\limits_{k_r} M(r)\,|dz| = M(r)r\ .\ 2\pi.$$

Vì $M(r)r \to 0$ khi $r \to \infty$, cho nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, $\exists R > 0$ sao cho với $\forall r > R$ ta có $r\,M(r) > \frac{\varepsilon}{2\pi}$. Do đó với $r > R$, ta có :

$$\left|\int\limits_{k_r} f(z)\,dz\right| \leqslant M(r)\ .\ 2\pi < \varepsilon$$

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{k_r} f(z)\,dz = 0.$$

153. Chứng minh rằng nếu $f(z)$ liên tục với $x \geqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant h$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x + iy) = A$ không phụ thuộc vào y và đều theo y thì :

$\lim\limits_{x \to \infty} \int\limits_{\beta_x} f(z)\,dz = iAh$. (Ở đây β_x là đoạn của đường thẳng đứng $0 \leqslant y \leqslant h$ chạy từ dưới lên trên).

Giải : Vì $\lim\limits_{x \to \infty} f(x + iy) = A$ đều theo y nên với $\frac{\varepsilon}{h} > 0$ nhỏ tùy ý, tồn tại $\Delta > 0$ sao cho với $x > \Delta$, $\forall y : 0 \leqslant y \leqslant h$, ta có : $|f(x + iy) - A| < \frac{\varepsilon}{h}$. Xét

$$\left| \int\limits_{\beta_x} f(x + iy)\,dz - iAh \right| = \left| \int\limits_{\beta_x} f(x + iy)\,dz - \int\limits_{\beta_x} iA\,dz \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\beta_x} (f(x + iy) - iA)\,dz \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{h} \cdot h = \varepsilon.$$

Vậy :
$$\lim_{x \to \infty} \int\limits_{\beta_x} f(z)\,dz = iAh.$$

154. Chứng minh rằng :

1) Nếu $f(z)$ liên tục tại lân cận của điểm gốc thì

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi f(0).$$

2) Nếu $f(z)$ liên tục tại lân cận của điểm $z = a$ thì

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z - a| = r} \frac{f(z)\,dz}{z - a} = 2\pi i f(a).$$

Giải : 1) Vì $f(z)$ liên tục tại lân cận gốc tọa độ tức là nó liên tục theo cả hai biến a và φ nên

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0} f(re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Lại vì f(z) liên tục tại lân cận gốc tọa độ nên

$$\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0} f(re^{i\varphi})\,d\varphi = \int_0^{2\pi} f(0)\,d\varphi = f(0)\cdot 2\pi.$$

2) Ta có : $|z-a| = r \Rightarrow z-a = re^{i\varphi} \Rightarrow z = a + re^{i\varphi}$, nên

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\varphi})\,rie^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0} i\,f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(a)\,i\,d\varphi = i2\pi\, f(a).$$

155. Tính tích phân $\int_C \ln z\,dz$, với

1) C là đường tròn đơn vị và $\ln 1 = 0$.

2) C là đường tròn đơn vị và $\ln i = \frac{\pi i}{2}$.

Giải :

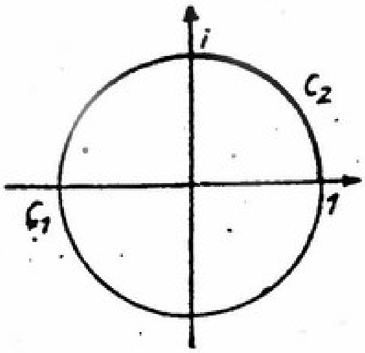
1) $$\int_C \ln z\,dz = \int_0^{2\pi}[\ln r + i(\varphi + 0)]rie^{i\varphi}d\varphi,\ (r = 1)$$

$$= -x\int_0^{2\pi}\varphi e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= -\left[\frac{\varphi e^{i\varphi}}{i} - \int\frac{1}{i}e^{i\varphi}d\varphi\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

2) $\int\limits_C \ln z\,dz = \int\limits_{C_1} \ln z\,dz + \int\limits_{C_2} \ln z\,dz = \int\limits_{\pi/2}^{2\pi} i(\varphi+0)\,rie^{i\varphi}d\varphi$

$$+\int\limits_{2\pi}^{5\pi/2} i(\varphi-2\pi)\,rie^{i\varphi}d\varphi = -2\pi i.$$



Hình 37

156. Giả sử C là 1 chu tuyến đóng đơn giản giới hạn diện tích. S. Chứng minh các đẳng thức sau :

1) $\int\limits_C x\,dz = iS$; 2) $\int\limits_C y\,dz = -S$; 3) $\int\limits_C \bar{z}\,dz = 2iS$.

157. Tính tích phân $I = \int y dz$ theo các tia sau :

1) Bán kính vectơ của điểm $z = 2 + i$.

2) Nửa đường tròn $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (gốc : điểm $z = 1$).

3) Đường tròn $|z - a| = R$.

158. Tính tích phân $I = \int |z|\,dz$ theo các tia sau :

1) Theo bán kính vectơ điểm $z = 2 - i$.

2) Theo nửa đường tròn $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

3) Theo nửa đường tròn $|z| = 1$.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ (gốc điểm } -i).$$

4) Theo đường tròn $|z| = R$ (lấy gốc tại $z = R$).

159. Tính tích phân $\int\limits_C |z|\bar{z}\,dz$; trong đó C là chu tuyến đóng bao gồm nửa đường tròn trên $|z| = 1$ và đoạn $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$.

160. Tính $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$ trong đó C là :

1) đoạn thẳng nối điểm O với điểm $1 + i$;

2) đường gấp khúc tạo bởi nối điểm O với 1 và điểm 1 với $1 + i$.

161. Tính các tích phân dọc theo đường cong L là nửa đường tròn $|z| = 2$, $\pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ (gốc của đường tại điểm $z = -2$).

1) $\int\limits_L |z|\, z\, dz$; 2) $\int\limits_L (2x - 3iy)\, dz$.

162. Tính các tích phân

1) $\oint\limits_{|z|=1} z\,\bar{z}\, dz$; 2) $\oint\limits_{|z|=2} z \,.\, \operatorname{Im} z^2\, dz$;

3) $\oint\limits_{|z-1|=1} \operatorname{Re} z\, dz$.

163. Tính tích phân $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\, dz$ ở đó

1) C là đường tròn $|z| = R$ và $\operatorname{Ln} R = \ln R$.

2) C là đường tròn $|z| = R$ và $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$.

164. Tính $\int\limits_\Gamma (z - a)^n\, dz$ (n là số nguyên dương) :

1) Theo nửa đường tròn $|z - a| = R$, $0 \leqslant \arg(z - a) \leqslant \pi$ (gốc các đường tại điểm $z = a + R$).

2) Theo đường tròn $|z - a| = R$.

165. Chứng minh rằng nếu $|a| \neq R$ thì

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a|\,|z+a|} \leqslant \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$$

166. Chứng minh rằng :

a) Nếu $f(z)$ liên tục trong quạt $0 < |z - a| < r$, $0 \leqslant \arg(z - a) \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{z \to a} [(z-a) f(z)] = A$ thì :

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{\gamma_r} f(z)\, dz = A$$

trong đó γ_r là cung của hình tròn $|z - a| < r$ được lấy theo quạt đã cho, chạy theo hướng dương.

b) Nếu $f(z)$ liên tục trong miền $|z| \geqslant R_0$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ và $\lim\limits_{z \to \infty} z f(z) = A$ thì

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = iA\alpha,$$

ở đây Γ_R là cung của đường tròn $|z| = R$ nằm trong miền đã cho chạy theo hướng dương đối với góc tọa độ.

§ 2. TÍCH PHÂN CAUCHY VÀ TÍCH PHÂN LOẠI CAUCHY

167. Chứng minh rằng $\int\limits_{|z|=1} a^z dz = 0$.

Giải : a) Nếu $a = 0$ thì $0^z = 0$ $(z \neq 0$ vì $|z| = 1)$, nên theo định nghĩa tích phân ta có :

$$\int\limits_{|z|=1} 0\, dz = 0.$$

b) Nếu $a \neq 0$, vì a^z giải tích trong toàn mặt phẳng phức nên theo định lí Cauchy ta có

$$\int_{|z|=1} a^z dz = 0.$$

168. Chứng minh rằng nếu f(z) giải tích trong hình tròn $|z - a| < R$ và thỏa mãn điều kiện $|f(z)| \leqslant M \quad (|z-a| < R)$, thì với hai điểm z_1, z_2 bất kì thuộc hình tròn này, ta có bất đẳng thức :

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\xi) d\xi \right| \leqslant M |z_2 - z_1|.$$

Giải : Vì $|z - a| < R$ là miền lồi nên với hai điểm bất kì thuộc miền thì đoạn thẳng nối chúng sẽ nằm hoàn toàn trong miền đó. Vì f(z) giải tích trong $|z - a| < R$ nên theo định lí Cauchy tích phân $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi) d\xi$ sẽ không phụ thuộc đường đi, mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối, vậy ta có :

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leqslant \int_{z_1}^{z_2} |f(z)| |dz| \leqslant M |z_2 - z_1|.$$

169. Giả sử f(z) giải tích trong vành $r < |z - a| < R$. Chứng minh rằng tích phân $\int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$ $(r < \rho < R)$ không phụ thuộc vào ρ (đường tròn quay ngược chiều kim đồng hồ).

Giải : Ta vẽ một đường tròn $|z - a| = \rho_1$ sao cho $r < \rho_1 < \rho$. Ta xét hàm f(z) trên $\rho_1 \leqslant |z - a| \leqslant \rho$.

Theo định lí Cauchy mở rộng ta có :

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz = \int_{|z-a|=\rho_1} f(z)\,dz$$

Vì ρ_1 là bất kì nên $\displaystyle\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz$ không phụ thuộc vào ρ.

170. Chứng minh rằng nếu C là một chu vi đóng đơn giản bất kì, không đi qua điểm a và n là số nguyên thì :

$$\int_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{với } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{với } n = -1\text{, a là điểm trong C} \\ 0 & \text{với } n = -1\text{, a là điểm ngoài C} \end{cases}$$

Giải : a) Theo định lí Cauchy mở rộng :

$$\left.\begin{array}{l} \text{a ở ngoài C và n tùy ý} \\ \text{a ở trong C và } n \neq -1 \end{array}\right\}$$

thì $$\int_C (z-a)^n\,dz = 0.$$

b) Nếu a ở trong C và $n = -1$ thì với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $\{z : |z-a| \leqslant \varepsilon\} \subset D$ (D là miền hữu hạn được bao bởi C), $\Gamma = C \cup \gamma$, với γ là biên của $|z-a| < \varepsilon$, theo định lí Cauchy mở rộng ta có :

$$\oint_\Gamma (z-a)^{-1}\,dz = \oint_C (z-a)^{-1}\,dz - \oint_\gamma (z-a)^{-1}\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma (z-a)^{-1}\,dz = \oint_C (z-a)^{-1}\,dz.$$

Ta tính $\oint\limits_{\gamma} (z-a)^{-1}dz = \oint\limits_{|\xi|=\varepsilon} \varepsilon^n d\xi =$

$$= i\int_0^{2\pi} \xi^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= i\varepsilon^{n+1}\int_0^{2\pi} \cos(n+1)\varphi\, d\varphi - \varepsilon^{n+1}\int_0^{2\pi} \sin(n+1)\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\pi i.$$

Vậy
$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

171. Chứng minh rằng nếu đường cong Γ không đi qua điểm $\pm i$ thì :

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{k là số nguyên.}$$

Giải : a) Nếu đường cong nối điểm 0 và 1 và không bao quanh các điểm $\pm i$:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) + Nếu đường cong bao quanh điểm i bên trong

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{\frac{d\xi}{1+\xi}}{1-\xi} = 2\pi i\,\frac{1}{2i} = \pi.$$

+ Nếu đường cong bao quanh điểm i k_1 lần

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = k_1\pi.$$

+ Từ đó suy ra, nếu đường cong nối điểm 0 với 1 và b điểm i k_1 lần thì

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + k_1\pi.$$

c) + Nếu đường cong bao quanh điểm $-i$ bên trong :

$$\int_{T_2} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_{T_3} \frac{\frac{d\xi}{1-\xi}}{1+\xi} = 2\pi i \frac{1}{-2i} = -\pi.$$

+ Nếu đường cong bao quanh điểm $-i$ k_2 lần và nối điểm 0 với điểm 1 thì

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + k_2\pi$$

Vậy tổng quát ta có : $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

172. Bằng cách đổi biến số, chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{e^z}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d\theta$$

với Γ là đường cong kín tùy ý chứa 0.

Giải : Ta bao điểm 0 bằng đường tròn $|z| = \varepsilon$ nằm hoàn toàn trong miền giới hạn bởi Γ (có chứa điểm 0) (không ảnh hưởng tính tổng quát ta có thể chọn $\varepsilon = 1$). Khi đó áp dụng định lí Cauchy và :

$$z = \varepsilon e^{i\theta},\ dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \text{ cho nên :}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{(\cos\theta + i\sin\theta)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos\sin\theta + i\sin\sin\theta]d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$$

(vì hàm $\varphi(\theta) = e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π ; nhưng

$\varphi(\theta)$ là hàm lẻ nên $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)d\theta = 0$).

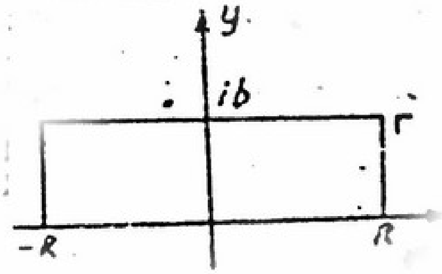
173. Chứng minh rằng :

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-b^2}.$$

Theo định lí Cauchy : $\int_{\Gamma}e^{-z^2}dz = 0 \Rightarrow \int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx +$

$$+\int_0^b e^{-(R+iy)^2}dy + \int_{-R}^{R}e^{-(x+ib)^2}dx + \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2}dy = 0.$$

Bây giờ ta xét giới hạn của chúng khi $R\to\infty$. Ta thấy



$$\lim_{R\to\infty}\int_0^b e^{-(R+iy)^2}dy = 0.$$

Hình 58

Thật vậy, vì :

$0 < \left| e^{-(R+iy)^2} \right| \leq \dfrac{e^{b^2}}{e^{R^2}}$ nên khi $R \to \infty$ thì $\lim\limits_{R\to\infty} e^{-(R+iy)^2} = 0$

Lý luận tương tự ta cũng chứng minh được

$$\lim_{R\to\infty} \int_b^0 e^{-(R+iy)^2}\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-(x+ib)^2}\, dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2 - 2ixb + b^2}\, dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2 + b^2} (\cos 2bx - i \sin 2bx)\, dx.$$

Vì vế trái là số thực ($\sqrt{\pi}$) nên

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2 + b^2}\, i \sin 2bx\, dx = 0.$$

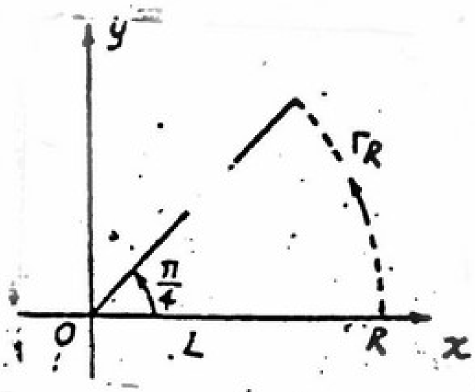
$$\text{Vậy} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + b^2} \cos 2bx\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}.$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

174. Chứng minh đẳng thức :

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\,dx = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$



Hình 39

Giải : Ta tính :

$\int_L e^{iz^2}\,dz$, ở đó L như hình 39 :

$$\int_L e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz + \int_R^0 e^{i\pi/4} e^{i(re^{i\pi/4})^2}\,dr =$$

$$= \int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz + \int_R^0 e^{i\pi/4} e^{-r^2}\,dr = 0 \text{ (theo định lí Cauchy).}$$

Cho qua giới hạn khi $R \to \infty$. Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0.$$

Thật vậy : vì $\int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2i\varphi}} Rie^{i\varphi}\,d\varphi$,

$$0 < \left| e^{iR^2 e^{2i\varphi}} Rie^{i\varphi} \right| = R \left| e^{-R^2 \sin 2\varphi} \right| < \frac{R}{e^{\frac{4\varphi}{\pi} R^2}}$$

(sử dụng bất đẳng thức $\sin\varphi > \frac{2\varphi}{\pi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

Cho $R \to \infty$: $\left|e^{iR^2 e^{2i\varphi}} Rie^{i\varphi}\right| \to 0$, và do đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0.$$

Vậy $\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx - \int_0^\infty e^{i\pi/4} e^{-r^2}\,dr = 0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \int_0^\infty e^{i\pi/4} e^{-r^2}\,dr = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\pi} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

175. Tính $\oint_C \frac{dz}{z^2+9}$ nếu :

1) điểm 3i nằm trong chu vi C, —3i nằm ngoài chu vi C;
2) điểm —3i nằm trong chu vi C, 3i nằm ngoài chu vi C;
3) điểm ± 3i nằm trong chu vi C.

Giải: 1) $\oint_C \frac{dz}{z^2+9} = \int_C \frac{f_1(z)\,dz}{z-3i} = 2i\,f_1(3i) = \frac{\pi}{3}$ (theo công thức tích phân Cauchy), $f_1(z) = \frac{1}{z+3i}$

$$2)\ \oint_C \frac{dz}{z^2+9} = \int_C \frac{f_2(z)\,dz}{z+3i} = 2\pi i f_2(-3i) = -\frac{\pi}{3}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z-3i}$$

$$3)\ \oint_C \frac{dz}{z^2+9} = \frac{1}{6i}\left[\oint_C \frac{dz}{z-3i} + \oint_C \frac{dz}{z+3i}\right] = 0.$$

176. Tích phân $\int_C \frac{dz}{\omega_n(z)}$, $\omega_n(z) = (z-z_1)\ldots(z-z_n)$,

$z_i \neq z_j$ có thể nhận được số giá trị khác nhau như thế nào, (chu vi C không đi qua một điểm z_i nào cả)?

Giải: $n = 1$:

z_1 trong C : $\int_C \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i$;

z_1 ngoài C : $\int_C \frac{dz}{z-z_1} = 0$.

Như vậy nếu $n = 1$ tích phân nhận 2 giá trị khác nhau.

Nếu $n > 1$ ta sẽ chứng minh nó nhận $2^n - 1$ giá trị.

$n = 2$, $\int_C \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$ sẽ nhận 3 giá trị

(z_1 trong C, z_2 ngoài C ; z_1 ngoài C, z_2 trong C ; z_1, z_2 ngoài C; z_1, z_2 trong C).

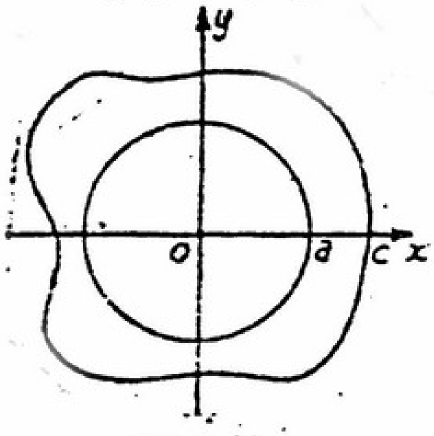
Với n bất kì tích phân sẽ nhận những giá trị sau :

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n - 1$$
$$= (1+1)^n - 1$$
$$= 2^n - 1$$

177. Tính $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, nếu chu tuyến C chứa trong nó $|z| \leqslant a$.

Giải : Xét hàm $f(z) = \frac{e^z}{z^2+a^2} = \frac{e^z}{(z-ai)(z+ai)}$.

Ta vẽ đường cong kín đơn Γ_1, $\Gamma_1 \cap C = \varnothing$, Γ_1 nằm trong miền giới hạn bởi C, ai trong Γ_1. Vẽ đường cong kín đơn Γ_2, $\Gamma_2 \cap C = \varnothing$, Γ_2 nằm trong miền giới hạn bởi C, $-ai$ nằm trong Γ_2, D_1 là miền bị chặn bởi Γ_1, D_2 là miền bị chặn bởi Γ_2, và $D^* = D \setminus D_1 \cup D_2$. Do đó f(z) giải tích trên D^* và liên tục trên $\bar{D}^*$. Vậy :



Hình 40

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} =$$

$$= \frac{e^{ai}}{2ai} - \frac{e^{-ai}}{2ai} = \frac{1}{a}\sin a.$$

178. Tính tích phân $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$

Nếu a nằm trong C xét hàm số $f(z) = ze^z$. Hàm f(z) giải tích trong D bị chặn bởi C. Vậy theo công thức đạo hàm của tích phân loại Cauchy ta có :

$$f(a) = F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{z-a},$$

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \frac{f''(a)}{2!} = \frac{1}{2}e^a(a+2).$$

179. Tính tích phân $I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$, nếu :

1) điểm 0 nằm trong và 1 ngoài C

2) điểm 1 nằm trong và 0 ngoài C;

3) điểm 0 và 1 nằm trong C.

Giải : 1) Xét hàm $f_1(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$, hàm $f_1(z)$ giải tích trong D bị chặn bởi C và liên tục trên $\overline{D}$. Vậy :

$$f_1(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} = 1.$$

2) Xét hàm $f_2(z) = \frac{e^z}{z}$. Áp dụng công thức đạo hàm của tích phân loại Cauchy :

$$f_2''(1) = \frac{2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(z-1)^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} = -\frac{f''(1)}{2} = -\frac{e}{2}$$

3) Bao quanh 0 và 1 bằng những đường cong đóng Γ_1 và Γ_2, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ và $\Gamma_t \cap C = \varnothing$, $t = 1, 2$. Kí hiệu D_1 là miền bị chặn bởi Γ_1, D_2 là miền bị chặn bởi Γ_2. $D^* = D \setminus (D_1 \cup D_2)$.

Vậy hàm $g(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$ giải tích trên D^* và liên tục trên $\overline{D^*}$. Vậy :

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} =$$

$$= 1 - \frac{e}{2}.$$

180. Giả sử hàm số $f(z)$ và $g(z)$ giải tích trong $|z| < 1$ và liên tục trên $|z| \leqslant 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\left[\frac{f(\xi)}{\xi - z} + \frac{z\,g(\xi)}{z\xi - 1}\right]d\xi = \begin{cases} f(z) & |z| \leqslant 1, \\ g\left(\dfrac{1}{z}\right) & |z| > 1. \end{cases}$$

Giải : Theo công thức tích phân Cauchy :

Vì $f(z)$ giải tích trên $|z| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\xi|=1}\dfrac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = f(z)$.

Vì $g(z)$ giải tích trên $|z| < 1$:

$$\begin{cases} \text{với } z \neq 0 : \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\xi|=1}\dfrac{g(\xi)\,d\xi}{\xi - \dfrac{1}{z}} = 0; \\ \text{với } z = 0 : \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\xi|=1} 0\,d\xi = 0. \end{cases}$$

Vậy : $|z| < 1 : \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\xi|=1}\left[\dfrac{f(\xi)}{\xi - z} + \dfrac{zg(\xi)}{z\xi - 1}\right]d\xi = f(z)$.

Với $\begin{cases} |z| > 1 : \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\xi|=1}\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 0 \\ z \neq \infty : \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\xi|=1}\dfrac{g(\xi)}{\xi - \dfrac{1}{z}}\,d\xi = g\left(\dfrac{1}{z}\right). \end{cases}$

181. Chứng minh rằng nếu $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z| < 1$ và $f(\alpha) = 0$ ($|\alpha| < 1$) và $|f(z)| \leqslant 1$, thì với $|z| \leqslant 1$ ta có :

$$|f(z)| \leqslant \left|\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}\right|.$$

Giải : Đặt $\xi = \dfrac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, ta có :

$$\xi - \xi\bar{\alpha}z = z - \alpha \Rightarrow \xi + \alpha = z(1 + \bar{\alpha}\xi) \Rightarrow z = \frac{\xi + \alpha}{1 + \bar{\alpha}\xi}$$

Khi $z = \alpha$ thì $\xi = 0$.

Lại đặt :

$$f(z) = f\left(\frac{\xi + \alpha}{1 + \bar{\alpha}\xi}\right) = \varphi(\xi),$$

ta thấy :

1) $\left|\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}\right| = |\xi| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1.$

2) $f(\alpha) = \varphi(0) = 0.$

3) $\varphi(\xi)$ giải tích đối với ξ trong $|\xi| < 1$ vì :

$$\varphi'(\xi) = f'_z\left(\frac{\xi + \alpha}{1 + \bar{\alpha}\xi}\right)'_\xi \text{ với } |\xi| < 1.$$

4) $|\xi| < 1 \Rightarrow |z| < 1 \Rightarrow |f(z)| = |\varphi(\xi)| < 1.$

Vậy $\varphi(\xi)$ thỏa mãn mọi giả thiết của bổ đề Schwarz, do đó

$$|\varphi(\xi)| \leqslant |\xi| \quad \text{trong} \quad |\xi| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leqslant \left|\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}\right|.$$

182. Chứng minh rằng nếu $f(z)$ giải tích trong một miền lồi hữu hạn và thỏa mãn điều kiện $|f(z)| \leqslant M$ thì với 2 điểm z_1, z_2 bất kì thuộc miền này, ta có bất đẳng thức :

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f'(\xi)\, d\xi\right| \leqslant M|z_2 - z_1|.$$

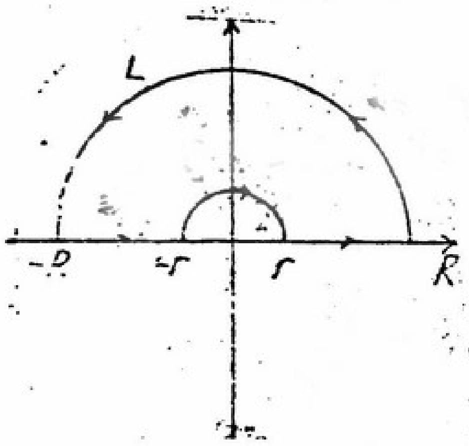
183. Chứng minh rằng :

a) Nếu $f(z)$ giải tích : $0 \leqslant y \leqslant h$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x + iy) = 0$ và tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ tồn tại thì $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx$ cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

b) Nếu $f(z)$ giải tích ở $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$, $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 0$ và $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ tồn tại thì $\int f(z)\,dz$ dọc theo tia $z = re^{i\alpha}$, $0 \leqslant r < \infty$ cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

184. Chứng minh rằng $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn: Xét $f(z)\,dz$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ L, và L là chu tuyến trên hình 41.



Hình 41

185. Tính tất cả những giá trị có thể có được của tích phân $\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ với những chu vi C khác nhau. Giả thiết rằng chu vi C không đi qua các điểm 0, 1 và -1.

186. Tính $\oint_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$ $a > 1$

187. Tính $\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ $(|a| < R < |b|,\ n = 1, 2, \ldots)$

188. Tính $\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z}\,dz$.

189. Tính $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z\,dz}{z^2-1}$.

190. Tính $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$ $\quad C = \left\{ z : |z-2| = \frac{1}{2} \right\}$.

191. Chứng minh rằng nếu f(z) khác hằng số, giải tích trên miền G và không triệt tiêu thì |f(z)| không đạt được cực tiểu ở trong miền G.

§ 3. HÀM ĐIỀU HÒA.
TÌM HÀM GIẢI TÍCH THEO PHẦN THỰC HOẶC PHẦN ẢO

192. Cho biết một hàm giải tích khả vi vô hạn. Chứng minh :

1) Phần thực u, phần ảo v là những hàm liên hợp điều hòa.

2) Đạo hàm (mọi cấp) của một hàm điều hòa là một hàm điều hòa.

Giải : 1) $f(z) = u + iv$. Do f(z) giải tích nên $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Mặt khác $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} =$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Từ đó do tồn tại f'' nên các hàm u, v có các đạo hàm riêng đến cấp 2 và do f'' liên tục nên u, v có mọi đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục. Mặt khác xuất phát từ hệ (C—R) vừa viết suy ra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Vậy u, v là các hàm liên hợp điều hòa.

2) Đạo hàm (mọi cấp) của một hàm điều hòa là một hàm điều hòa. Giả thiết u là một hàm điều hòa trong D đơn liên. Xây dựng hàm v liên hợp điều hòa với u và lập $f(z) = u + iv$. Khi đó f(z) là hàm giải tích nhận u là phần thực. Nhưng từ đó ta thấy được đạo hàm cấp k bất kì của u thì hoặc là phần thực, hoặc là phần ảo của đạo hàm cấp k của f(z). Nhưng $f^k(z)$ vẫn là một hàm giải tích. Vậy đạo hàm của một hàm điều hòa (với cấp bất kì) là một hàm điều hòa.

193. Giả thử u là một hàm điều hòa. u^2 có phải là hàm điều hòa không ?

Giải : Xét $u = x^2 - y^2$. Dễ thấy u là một hàm điều hòa. Tuy nhiên $u^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$ lại không phải là một hàm điều hòa.

194. Cho hàm số :

1) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$;

2) $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

Hãy tìm hàm giải tích $w = f(z) = u + iv$ nhận u hoặc v là phần thực hoặc phần ảo.

Giải : 1) Xét $D = C \setminus (-\infty, 0]$. Tìm hàm giải tích $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ nhận u là phần thực trên D.

Xét $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \dfrac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 - \dfrac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$

Vậy $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$ u là hàm điều hòa trên D.

Tìm $v(x,y) = \int\limits_{(1,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C =$

$$= \int\limits_1^x \left(-1+\frac{1}{x^2}\right)dx + \int\limits_0^y \left(2x+5+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dy + C$$

$$v(x,y) = 1 - x - \frac{1}{x} + 1 + 2xy + 5y - \frac{x}{(x^2+y^2)}\Bigg|_0^y + C =$$

$$= -x - \frac{1}{x} + 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x} + C$$

$$v(x,y) = -x + 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + C.$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + 5iy + 2ixy - ix - \frac{ix}{x^2+y^2} + iC,$$

$$f(z) = z^2 + (5-i)z - \frac{i}{z} + iC$$

2) Xét $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Tìm hàm $f(z) = u + iv$ giải tích nhận v làm phần ảo.

Hàm $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2};\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 + \frac{y^3-3x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2};\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 - \frac{y^3-3x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

Do đó $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v$ là hàm điều hòa.

$$u(x,y) = \int\limits_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + C = \int\limits_1^x \frac{\partial v}{\partial y}dx - \int\limits_0^y \frac{\partial v}{\partial x}dy + C.$$

$$u(x,y)=\int_1^x -\frac{dx}{2x^2}-\int_0^y\left(2x+\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dy+C=$$

$$=\frac{1}{2x}\Big|_1^x-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}\Big|_0^y+C$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{2x}+C=$$

$$=-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+C.$$

$$f(z)=2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+C+i\left(3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}\right)=$$

$$=iz^2+\frac{1}{2z}+C+3i.$$

$$f(z)=iz^2+\frac{1}{2z}+C+3i.$$

195. Tìm hàm giải tích $f(z)=\rho e^{i\theta}$ nếu cho $\rho=(x^2+y^2)e^x$.

Giải : $f(z)=u+iv=\rho e^{i\theta}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$u=\rho\cos\theta\ ;\ v=\rho\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\cos\theta-\rho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\rho}{\partial y}\cos\theta-\rho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\sin\theta+\rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\rho}{\partial y}\sin\theta+\rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Do hệ thức Cauchy — Riemann, ta có :

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\cos\theta-\rho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial y}\sin\theta+\rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial\rho}{\partial x}\sin\theta-\rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial y}\cos\theta-\rho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Từ đó :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \\ -\rho\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = -\rho\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\end{array}\right.$$

Nếu cho $\rho = (x^2 + y^2)e^x \Rightarrow \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = 2xe^x + e^x(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = 2ye^x$$

thì $\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \dfrac{1}{e^x(x^2+y^2)}e^x(2x+(x^2+y^2)) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} + 1$

$$\theta = y + 2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 2\cdot\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \varphi'(x) = -\frac{1}{(x^2+y^2)e^x}\cdot 2ye^x =$$

$$= -\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$$

$$\theta = y + 2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} + C.$$

Do đó : $f(z) = (x^2 + y^2)e^x \cdot e^{iy} \cdot e^{2i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} + ic} = z^2 \cdot e^z \cdot e^{ic}$

$f(z) = e^{ic} \cdot z^2 \cdot e^z.$

196. Cho $u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)$ là các hàm điều hòa. Chứng minh :

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x, y)$$

trong đó c_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, là các hằng số phức, cũng là hàm điều hòa.

197. Giả sử u là một hàm điều hòa. Đối với hàm f nào thì hàm f(u) cũng là một hàm điều hòa ?

198. Tìm hàm liên hợp điều hòa với các hàm đã cho trong các miền đã cho

a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $\quad 0 \leqslant |z| < +\infty$

b) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $\quad 0 \leqslant |z| < +\infty$

c) $u(x, y) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$ trong mặt phẳng phức có khía theo phần âm của trục thực.

199. Tìm hàm giải tích f(z) nếu :

a) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$.

b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

c) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

d) $v(x, y) = x + y - 3$.

e) $v(x, y) = \cos \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} x \sin y$.

f) $v(x, y) = h(x^2 + y^2) + x - 2y$.

200. Chứng minh sự tồn tại và tìm hàm giải tích f(z) nếu cho $\theta = xy$ $\quad (f(z) = \rho e^{i\theta})$.

CHƯƠNG 4

CHUỖI VÀ THẶNG DƯ

§1. CHUỖI LŨY THỪA

201. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi sau :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Giải :

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = 1.$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \Rightarrow R = \infty.$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty \Rightarrow R = 0.$

4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 \Rightarrow R = 2.$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \Rightarrow R = e.$

202. Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ bằng $R (0 < R < \infty)$. Xác định bán kính hội tụ của các chuỗi sau :

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$.

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{k/n}\sqrt[n]{c_n}} = R.$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi 1) bằng R.

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \infty.$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi 2) bằng ∞.

3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^{n+1}-1} \cdot \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \dfrac{R}{2}.$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi 3) bằng $\dfrac{R}{2}$

203. Tìm tổng của các chuỗi sau trong $|z| < 1$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

Giải :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n = z \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z^n)'\right).$

Vì $|z| < 1$ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z^n)' = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n\right)' = \left(\dfrac{1}{1-z}\right)' = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ với $|z| < 1$

2) Với $|z| < 1$ ta có.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

Do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \int_0^z \frac{dz}{1-z} = -\ln(1-z)$.

204. Chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ các số thực dương đơn điệu tiến tới 0 và bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ bằng 1, thì chuỗi này hội tụ khắp nơi trên đường tròn $|z| = 1$ (có thể trừ điểm $z = 1$).

Giải : Chọn $z \neq 1$, $|z| = 1$, khi đó $z = e^{i\theta}$ $(\theta \neq 0)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta + i \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\theta$$

Theo dấu hiệu Dirichlet, các chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$, và $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\theta$ hội tụ. Vậy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hội tụ.

205. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa và tìm bán kính hội tụ của chuỗi :

1) $\sin^2 z$; 2) $\frac{z}{z^2 - 4z + 13}$;

3) $\ln\frac{1+z}{1-z}$; 4) $\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$; 5) $\frac{z^2}{(1+z)^2}$

Giải :

1) Từ $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$, ta suy ra :

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2z)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}z^{2k}}{(2k)!}$$

và bán kính hội tụ $R = \infty$.

2) Ta có $\dfrac{z}{z^2 - 4z + 13} = \dfrac{z}{6i}\left[\dfrac{1}{z-2-3i} - \dfrac{1}{z-2+3i}\right]$

$$\frac{1}{z-2-3i} = -\frac{1}{2+3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2+3i}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+3i)^{n+1}}$$

với điều kiện là $|z| < |2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

$$\frac{-1}{z-2+3i} = \frac{1}{2-3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2-3i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2-3i)^{n+1}}$$

khi $|z| < |2-3i| = \sqrt{13}$.

$$\text{Vậy } f(z) = \frac{z}{6i}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+3i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2-3i)^{n+1}}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6i}\left[\frac{1}{(2-3i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+3i)^{n+1}}\right]z^{n+1}$$

và bán kính hội tụ $R = \sqrt{13}$.

3) $\ln\dfrac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z)$.

Vì chuỗi $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hội tụ đều trong $|z| < 1$, nên

$$\int_0^z \frac{dz}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z z^n \, dz$$

$$\Rightarrow \quad -\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \ |z| < 1.$$

Tương tự $\quad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \ |z| < 1.$

Vậy $\quad \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} + 1\right] \frac{z^n}{n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

và bán kính hội tụ $R = 1$.

4) Ta có $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ với $R = \infty$

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Vì $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, nên $f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} \, dz$, nên đặt $f(0) = 1$

và ta có :

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)},$$

bán kính hội tụ $R = \infty$.

5) Ta có : $\dfrac{1}{(1+z)^2} = -\left(\dfrac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)' =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, \text{ với } |z| < 1.$$

Vậy $\dfrac{z^2}{(1+z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{n+2}$,

bán kính hội tụ $R = 1$.

206. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi sau :

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$.

207. Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ bằng R $(0 < R < \infty)$.

Xác định bán kính hội tụ của các chuỗi sau :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 + z_0^n) c_n z^n$.

208. Tìm tổng của các chuỗi sau trong $|z| < 1$:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n}$.

209. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa

1) $w = \operatorname{ch} z$; 2) $w = \operatorname{sh} z$;

3) $w = \dfrac{1}{az + b}$ $(a \neq 0)$; 4) $\displaystyle\int_0^z e^{z^2}\,dz$.

§2. CHUỖI TAYLOR

210. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z_0 = 1$ và tìm bán kính hội tụ :

1) $\dfrac{z}{z+2}$; 2) $\ln z$; 3) $\dfrac{z}{z^2 - 2z + 5}$

Giải : 1) $\dfrac{z}{z+2} = 1 - \dfrac{2}{3 + z - 1} = 1 - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{z-1}{3}} =$

$$= 1 - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n \text{ với } |z-1| < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z+2} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n \text{ với } R = 3.$$

$$2)\ \ln z = \ln[1 + (z-1)] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$$

với $|z-1| < 1 = R$.

$$3)\ \frac{z}{z^2 - 2z + 5} = \frac{z}{(z-1-2i)(z-1+2i)}$$

$$= \frac{z-1}{(z-1-2i)(z-1+2i)} + \frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}$$

Ta có:

$$\frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\frac{1}{4i}\left[\frac{1}{z-1-2i}-\frac{1}{z-1+2i}\right]$$

và $$\frac{1}{z-1-2i}=-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2i}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(2i)^{n+1}}$$

với $|z-1|<2$.

$$\frac{1}{z-1+2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(2i)^{n+1}}$$

với $|z-1|<2$.

Vậy:

$$\frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\frac{1}{4i}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(2i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(2i)^{n+1}}\right]=$$

$$=\frac{i}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\right)(z-1)^n\right]=$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k}}{2^{2k+1}i^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k}}{2^{2k+2}}.$$

Do đó:

$$\frac{z}{z^2-2z+5}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k+1}}{2^{2k+2}}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k}}{2^{2k+2}},$$

và bán kính hội tụ $R=2$.

211. Có tồn tại hàm số giải tích tại $z=0$ và tại các điểm $z=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ nhận các giá trị:

1) $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$?

2) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \ldots, 0, \frac{1}{2k}, \ldots$?

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \ldots$?

4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$?

Giải : 1) Giả sử tại $z_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$, ta có $f(z_{2k+1}) = 0$. Ta có $z_{2k+1} \to 0$ khi $k \to \infty$, theo định lí duy nhất thì $f(z) = 0$. Mặt khác tại $z_{2k} = \frac{1}{2k}$ ta có $f(z_{2k}) = 1$. Như vậy không tồn tại hàm giải tích tại $z = 0$.

2) Lập luận tương tự như bài 1) ta kết luận không tồn tại hàm số giải tích tại $z = 0$.

3) Theo giả thiết ta có $f(z_{2k}) = z_{2k} = \frac{1}{2k}$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_{2k} = 0$; theo định lí duy nhất thì $f(z) = z$ tại lân cận $z_0 = 0$, điều này trái với $f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Vậy không tồn tại hàm số giải tích tại $z = 0$.

4) Theo giả thiết $f(z_n) = \frac{z_n}{z_n + 1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, theo định lí duy nhất thì $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Vậy tồn tại hàm $f(z) = \frac{z}{z+1}$ giải tích tại $z = 0$.

212. Chứng minh rằng điểm z_0 là 0 - điểm cấp m của hàm số giải tích $f(z)$ khi và chỉ khi trong một lân cận nào đó của z_0 ta có đẳng thức $f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z)$; trong đó $\varphi(z)$ giải tích tại z_0 và $\varphi(z_0) \neq 0$.

Giải : Nếu z_0 là 0 - điểm cấp m, thì

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = (z - z_0)^m \left[(a_m + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z - z_0)^k \right]$$

Đặt $\varphi(z) = a_m + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+m}(z - z_0)^k$, rõ ràng $\varphi(z)$ giải tích và $\varphi(z_0) \neq 0$.

Ngược lại, nếu $f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z)$, trong đó $\varphi(z)$ giải tích tại z_0 và $\varphi(z_0) \neq 0$, thì theo định lí Taylor, tại lân cận z_0 ta có

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (z - z_0)^k.$$

Do đó :

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=m}^{\infty} b_k(z - z_0)^k.$$

213. Tìm cấp 0 - điểm của điểm $z = 0$ đối với các hàm số sau :

1) $z^2(e^{z^2} - 1)$; 2) $6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

Giải : 1) $z^2(e^{z^2} - 1) = z^2 \left[\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \ldots\right) - 1 \right] =$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{2k+2}}{k!}.$$

Vậy $z = 0$ là 0 - điểm cấp 4.

2) Vì $\sin z^3 = z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \ldots$

nên $6\sin z^3 + z^3(z^6-6) = z^9 - 6z^3 + 6z^3 - 6.\dfrac{z^9}{3!} + 6.\dfrac{z^{15}}{5!}\cdots$

$$= \frac{6z^{15}}{5!} - \frac{6z^{21}}{7!} + \cdots$$

Vậy $z = 0$ là 0 - điểm cấp 15.

214. Điểm z_0 là 0 - điểm cấp k đối với hàm $f(z)$ và là 0 - điểm cấp l đối với hàm $\varphi(z)$. Điểm z_0 là điểm gì đối với các hàm số sau :

1) $f(z).\varphi(z)$? 2) $f(z) + \varphi(z)$? 3) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$?

Giải : Theo giả thiết $f(z) = (z - z_0)^k . \varphi_1(z)$, trong đó $\varphi_1(z)$ giải tích tại z_0 và $\varphi_1(z_0) \neq 0$; $\varphi(z) = (z - z_0)^l . \varphi_2(z)$, trong đó $\varphi_2(z)$ giải tích tại z_0, $\varphi_2(z_0) \neq 0$.

1) $f(z) . \varphi(z) = (z - z_0)^{k+l} . \varphi_1(z) . \varphi_2(z)$.

Từ đây suy ra z_0 là 0 - điểm cấp $k + l$ của hàm $f(z) . \varphi(z)$.

2) Tương tự, z_0 là 0 - điểm cấp không bé hơn $\min(k, l)$.

3) Nếu $k > l$ thì z_0 là 0 - điểm cấp $k - l$;

$k = l$ thì z_0 là điểm thường ;

$k < l$ thì z_0 là điểm kì dị.

215. Khai triển các hàm số sau tại lân cận $z = 0$ và $z = \infty$:

1) $w = \dfrac{1}{z-2}$; 2) $w = \dfrac{1}{(z-a)^k}$, $a \neq 0$, k tự nhiên,

Giải : 1) Tại lân cận $z = 0$:

$$w = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

với điều kiện $|z| < 2$.

Tại lân cận $z = \infty$:

$$w = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \text{ với } |z| > 2.$$

2) Tại lân cận $z = 0$:

Đặt $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ ta có:

$$f(z) = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}, \text{ với } |z| < a$$

và $f^{(k-1)}(z) = (-1)^{k-2} \dfrac{(k-1)!}{(z-a)^k} \Rightarrow \dfrac{1}{(z-a)^k} = \dfrac{f^{(k-1)}(z)}{(-1)^{k-2}(k-1)!}$

Do đó:

$$w = \frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n, \text{ với } |z| < |a|.$$

Tại lân cận $z = \infty$: Tương tự như trên:

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{1}{z^k} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n, \text{ với } |z| > |a|.$$

216. Khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận z_0 và tìm bán kính hội tụ:

1) $\sin(2z - z^2)$ tại $z_0 = 1$; 2) $\cos^2 z$ tại $z_0 = \pi$;

3) $\dfrac{z}{z^2+4}$ tại $z_0 = i$.

217. Tìm tất cả các 0 - điểm và chỉ ra cấp của chúng đối với các hàm số sau:

1) $\dfrac{z^2+9}{z^4}$; 2) $z^2 \sin z$;

3) $\dfrac{\sin^3 z}{z}$; 4) $(1-e^z)(z^2-4)^3$.

218. Tồn tại hay không hàm giải tích tại $z = 0$ thỏa mãn điều kiện :

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$?

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3}$?

219. Tìm hàm giải tích $f(z)$ (nếu nó tồn tại) trong hình tròn $|z-1| < 2$ đối với mỗi trường hợp sau :

1) $f\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = f\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$.

2) $f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = f\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

220. Hàm số $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ có một dãy vô hạn các 0 - điểm $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$, hội tụ về 0 khi $k \to \infty$, nhưng $f(z) \neq 0$. Điều đó có mâu thuẫn với định lí duy nhất không ?

§ 3. CHUỖI LAURENT

221. Khai triển hàm số $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ tại lân cận điểm $z = 2$ và trong vành tròn $1 < |z| < 2$.

Giải : a) Tại lân cận $z = 2$:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] = \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{(z-2)+(2-i)} - \frac{1}{(z-2)+(2+i)}\right] =$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{(2-i)}\,\frac{1}{1-\frac{z-2}{i-2}} - \frac{1}{2+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-2}{2+i}}\right] =$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(i-2)^n} - \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(2+i)^n}(-1)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{z-2} - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(i-2)^{n+1}} - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(2+i)^{n+1}}(-1)^n$$

b). Trên vành : $1 < |z| < 2$:

$$\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - 2\,\frac{1}{1+z^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}$$

222. Khai triển hàm số $w = z^2e^{1/z}$ tại lân cận các điểm $z = 0$ và $z = \infty$.

Giải : $z^2e^{\frac{1}{z}} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n} = \frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!\,z^n}$

Miền hội tụ $0 < |z| < \infty$.

223. Khai triển $w = \sin z \sin\frac{1}{z}$ trong $0 < |z| < \infty$.

Giải : $u = \sin z$; khai triển trên $0 < |z| < \infty$

$$u = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots\ldots$$

$$v = \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!} +$$

$$w = \sin z \,\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-2n} z^{-2n}$$

ở đó $c_{2n} = c_{-2n} = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2n+2k+1)!}$

224. Khai triển hàm số $z^2 \sin\dfrac{1}{z-1}$ tại lân cận $z = 1$.

Giải : Đặt $z - 1 = t \Rightarrow z = t + 1$; khai triển trong lân cận $t = 0$: $w = (t+1)^2 \sin\dfrac{1}{t} = (t^2 + 2t + 1)\sin\dfrac{1}{t} =$

$$= (t^2 + 2t + 1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}\right)$$

$$= t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{t^{2n-1}(2n+1)!} + 2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{t^{2n}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{t^{2n+1}(2n+1)!}$$

Vậy $z = 1$ là kì dị cốt yếu.

Tại $z = \infty$:

$$\lim_{z \to \infty} e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1} \neq 0$$

Vậy $z = \infty$ là kì dị bỏ được.

226. Khai triển thành chuỗi Taylor hoặc chuỗi Laurent theo lũy thừa $(z - z_0)$ các hàm số sau và xác định miền trong đó có sự khai triển :

a) $\dfrac{1}{z(1-z)}$ tại lân cận $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$.

b) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, $(0 < |a| < |b|)$, tại lân cận $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$ và trong vành $|a| < |z| < |b|$.

c) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, tại lân cận điểm $z = i$ và $z = \infty$.

d) $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$ tại lân cận điểm $z = \infty$.

227. Tìm các điểm kì dị của các hàm số sau, giải thích đặc tính của chúng và nghiên cứu tính cách của các hàm số đó ở điểm xa vô cùng :

a) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$; b) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$; c) ze^{-z};

d) $\dfrac{1}{\sin z}$; e) $\dfrac{1}{\sin z - \sin a}$.

228. Tìm dạng tổng quát của hàm số chỉ có trong mặt phẳng phức mở rộng các điểm kì dị sau :

a) Một cực điểm đơn.

b) Một cực điểm cấp n.

c) Cực điểm cấp hai tại $z = 0$ với phần chính của khai triển là $\frac{1}{z^2}$

d) Cực điểm cấp n tại $z = 0$ và cực điểm cấp m tại điểm $z = \infty$.

§ 4. TÍNH THẶNG DƯ

229. Tìm thặng dư của các hàm số sau đây tại tất cả các điểm-kì dị cô lập :

1) $\frac{z^2}{z-2}$; 2) $\frac{1}{\sin z}$; 3) $\operatorname{cotg} z$;

4) $\sin\frac{1}{z}$; 5) $\cos\frac{1}{z-1}$; 6) $\frac{\cos(z-1)}{z^3}$

Giải : 1) $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ có $z = 2$ là cực điểm đơn, nên

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\cdot\frac{z^2}{z-2}\right] = 4.$$

2) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $z_k = k\pi$ là 0 - điểm đơn của $\sin z$, nên $z_k = k\pi$ là cực điểm đơn của $f(z)$, do đó

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z) = \lim_{z\to k\pi}\left[\frac{1}{(\sin z)'}\right] = (-1)^k, \ (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

3) $f(z) = \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $z_k = k\pi$ là 0 - điểm đơn của $\sin z$, nên $z_k = k\pi$ là cực điểm đơn của $f(z)$, do đó

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z) = \lim_{z\to k\pi}\frac{\cos z}{(\sin z)'} = -1, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

4) Khai triển thành chuỗi Laurent tại lân cận $z = 0$, ta có:

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,z^{2n-1}} \text{ với } |z| > 0.$$

Từ đây ta suy ra: $\operatorname*{Res}_{z=0} \sin\frac{1}{z} = a_{-1} = 1.$

5) Khai triển thành chuỗi Laurent hàm $\cos\frac{1}{z-1}$ tại lân cận điểm $z = 1$, ta có:

$$\cos\frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-1)^2} + \frac{1}{4!\,(z-1)^4} + \ldots \text{ với } |z-1| > 0.$$

Do đó $\operatorname*{Res}_{z=0} \cos\frac{1}{z-1} = a_{-1} = 0.$

6) Hàm số $\frac{\cos(z-1)}{z^3}$ có điểm $z = 0$ là cực điểm cấp 3 nên:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos(z-1)}{z^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \frac{\cos(z-1)}{z^3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(-1) = -\frac{\cos 1}{2}.$$

230. Tìm thặng dư của các hàm số sau tại điểm xa vô cùng.

1) $e^{\frac{1}{z}}$; 2) $\frac{1}{1+z}$

Giải: 1) Tại lân cận điểm 0 và tại lân cận điểm ∞, hàm $e^{1/z}$ có khai triển sau:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n} + \ldots$$

Do đó :

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} e^{1/z} = -a_{-1} = -1.$$

2) Với $|z| > 1$, hàm $\frac{1}{1-z}$ được khai triển thành chuỗi Laurent :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^n}\right).$$

Do đó $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{1}{1-z} = -a_{-1} = 1.$$

231. Tính thặng dư hàm số $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ tại $z = \pm i$.

Giải : Ta dễ dàng thấy $z = \pm i$ là cực điểm cấp $(n+1)$. Do đó :

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\lim_{z\to -i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{(z+i)^{n+1}}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}(-1)^n.(n+1)(n+2)\ldots(2n).\frac{1}{(-2i)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{n!}.\frac{n!(n+1)\ldots(2n).(-1)^n}{n!\,2^{2n+1}.(-i).(-1)^n} =$$

$$= \frac{(2n)!\,i}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

Tương tự :

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} = -\frac{(2n)!\,i}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

232. Tìm thặng dư của các hàm số sau :

1) $f(z) = e^{z+1/z}$ tại điểm $z = 0$.

2) $f(z) = \dfrac{z^n e^{1/z}}{1-z}$ tại các điểm $z = 0$ và $z = 1$.

Giải : 1) $e^{z+1/z} = \left(1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots\right) \times$

$$\times \left(1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots\right)$$

Tách các hệ số với z^{-1} ta được :

$$a_{-1} = \left(1 + \frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{3!\,4!} + \ldots\right)$$

Vậy $$\operatorname*{Res}_{z=0} e^{z+1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+1)!}$$

2) Tại lân cận $z = 0$ ta có :

$$e^{1/z} \cdot \frac{z^n}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots\right) \cdot z^n \cdot (1 + z + z^2 + \ldots)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots$$

Do đó :

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{z^n e^{1/z}}{1-z}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!}$$

Xét tại $z = 1$, hàm $f(z) = \dfrac{z^n e^{1/z}}{1-z} = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, trong đó $\varphi(1) = e \neq 0$, $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) = -1 \neq 0$, cho nên

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^n e^{1/z}}{1-z} = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \frac{e}{-1} = -e.$$

233. Tìm thặng dư các hàm số sau tại tất cả các điểm kì dị cô lập :

1) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$; 2) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$; 3) $\dfrac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$; 4) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

234. Tìm thặng dư của các hàm số sau :

1) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$; tại $z = 1$, $z = 2$.

2) $\dfrac{1}{1-e^z}$, tại $z = 0$, $z = 2k\pi i$.

3) $\dfrac{1}{\cos z - 1}$, tại $z = 2k\pi$.

235. Giả sử ∞ là cực điểm cấp k của hàm số $f(z)$. Chứng minh rằng :

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty}\left[z^{k+2}\cdot f^{(k+1)}(z)\right]$$

236. Tìm thặng dư hàm số $[\varphi(z)\,.\,f(z)]$ tại điểm $z = a$, nếu hàm $\varphi(z)$ giải tích tại $z = a$, còn hàm $f(z)$ có tại $z = a$:

1) cực điểm đơn với thặng dư A ;

2) cực điểm cấp k với phần chính

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \ldots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} \ldots$$

§ 5. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG THẶNG DƯ

237. Tính $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z\,dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = I.$

Giải : $\frac{1}{2} - \sin^2 z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z\right)$.

Trong hình tròn $|z| < 2$ có $z_1 = \frac{\pi}{4}$ và $z_2 = -\frac{\pi}{4}$ là cực điểm đơn, nên ta có :

$$I = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} \right]$$

Vì
$$\left(\frac{1}{2} - \sin^2 z\right)' = - \sin 2z$$

nên
$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{4}$$

Do đó :

$$I = 2\pi i \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right] = -\pi^2 . i.$$

238. Tính các tích phân bằng thặng dư :

1) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^3} dz$; 2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz$;

3) $\displaystyle\int_{|z+1|=2} z^3 e^{1/z} dz$; 4) $\displaystyle\int_{|z+2|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$.

Giải : 1) Hàm $\dfrac{\cos z}{z^3}$ có $z = 0$ là cực điểm cấp 3 trong hình tròn $|z - 1| < 2$, nên

$$I = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \cdot \frac{\cos z}{z^3}\right] = \frac{-1}{2}.$$

Vậy
$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

2) Tương tự :

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2} = 2\pi i \lim_{z\to 0}\left[z^2 \frac{\sin z}{z^2}\right]' = 2\pi i.$$

3) Hàm số $z^3 e^{1/z}$ có điểm $z = 0$ là kì dị cốt yếu, khai triển Laurent tại lân cận $z = 0$ ta có :

$$z^3 e^{1/z} = z^3\left[1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \ldots\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^3 e^{1/z} = a_{-1} = \frac{1}{4!}.$$

Do đó :

$$\int\limits_{|z+1|=2} z^3 e^{1/z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} z^3 e^{1/z} = \frac{2\pi i}{4!} = \frac{\pi i}{12}.$$

4) Hàm $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$ giải tích trong hình tròn $|z + 2| < 1$, nên

$$\int\limits_{|z+2|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz = 0.$$

239. Dùng thặng dư tại ∞, tính các tích phân sau :

1) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^{15}+1}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1,1} \frac{z^5+z^3}{z^4+1}\,dz$;

3) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}\,dz$; 4) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\,dz$.

Giải : 1) Phương trình $z^{15}+1=0$ có 15 nghiệm nằm trên đường tròn $|z|=1$. Theo định lí về thặng dư ta có :

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^{15}+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z_k} \frac{1}{z^{15}+1} = 0,\ |z_k| = 1.$$

Do đó :

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^{15}+1} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^{15}+1} = 0.$$

2) Tương tự :

$$\int\limits_{|z|=1,1} \frac{z^5+z^3}{z^4+1}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^5+z^3}{z^4+1}.$$

Ta có :

$$\frac{z^5+z^3}{z^4+1} = z + \frac{z^3-z}{z^4+1}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^5+z^3}{z^4+1} = \operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^3-z}{z^3+1}.$$

Vì ∞ là 0 - điểm đơn của $\dfrac{z^3-z}{z^4+1}$, nên

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^3-z}{z^4+1} = -\lim_{z\to\infty} z\,\frac{z^3-z}{z^4+1} = -1.$$

Do đó :

$$\int\limits_{|z|=1,1} \frac{z^5 + z^3}{z^4 + 1}\, dz = 2\pi i.$$

3) Tương tự :

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}\, dz = -2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=-4} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\right]$$

Vì $z = \infty$ là 0 - điểm cấp 6 của hàm $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}$ cho nên

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)} = 0$$

Vậy
$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}\, dz = \frac{\sin\frac{1}{4}}{36}\pi i.$$

4) Tương tự :

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3 e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\, dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^3 e^{1/z}}{(z^2+4)^2} =$$

$$= -2\pi i\left[-\lim_{z\to\infty} \frac{z \cdot z^3 e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\right] = 2\pi i.$$

240. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}, \; a \neq \pm 1, \text{ a là hằng số phức.}$$

Giải: Đặt $z = e^{i\theta}$, $dz = iz\,d\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Khi θ chạy từ 0 đến 2π thì z chạy khắp đường tròn đơn vị, do đó:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left[1 - 2a\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2\right]} = \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{az^2 - (a^2+1)z + a}$$

$$az^2 - (a^2+1)z + a = 0 \Rightarrow z_1 = a,\ z_2 = \frac{1}{a}$$

1) Nếu $|a| < 1$, thì z_1 nằm trong $|z| = 1$, z_2 nằm ngoài $|z| = 1$. Khi đó

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}$$

2) Nếu $|a| > 1$, thì z_2 nằm trong $|z| = 1$, z_1 nằm ngoài $z| = 1$. Khi đó

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{a}} \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + u^2} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}$$

241. Tính tích phân $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, n tự nhiên.

Giải: Hàm $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên, kể cả trục thực, trừ điểm i ; ∞ là 0 - điểm cấp lớn hơn 2 cho nên

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

Theo kết quả bài 231 ta có :

$$I = 2\pi i \cdot \frac{(2n)!}{i(n!)^2 2^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}\pi.$$

242. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx, \ a > 0.$

Giải : Hàm $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên, kể cả trục thực, trừ điểm ia và $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0, \operatorname{Im} z \geqslant 0.$ Cho nên

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = ia} f(z) \cdot e^{iz},$$

$$\operatorname*{Res}_{z = ia} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} = \lim_{z \to ia} \frac{e^{iz}}{z + ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}.$$

Vậy $$I = \frac{\pi}{ae^a}.$$

243. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$

Giải : Hàm $f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên kể cả trục thực, trừ ra tại 2 điểm i và $3i$ (giải phương trình $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$ ta được 4 nghiệm $z = \pm i$ và $z = \pm 3i$). Hàm $f(z)$ có ∞ là 0 - điểm cấp 2. Cho nên

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx =$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} + \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} \right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \left[\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right]_{z=i} = -\frac{(1+i)}{16}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \left[\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right]_{z=3i} = \frac{3 - 7i}{48}$$

Vậy $$I = 2\pi i \left[-\frac{(1+i)}{16} + \frac{3-7i}{48} \right] = -\frac{5\pi}{12}$$

244. Tính tích phân $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx.$

Giải : Ta có :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Hàm $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên kể cả trục thực, trừ ra điểm $1 + i$ và $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2x + 2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$$

và $$I = \operatorname{Im} \left[2\pi I \operatorname*{Res}_{z=1+i} \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} \right] = e^{-1} . \pi . \sin 1.$$

Trong các bài tập 245 — 252 tính tích phân, ta coi các chu tuyến đóng đi theo hướng dương. Áp dụng thặng dư tính các tích phân phức sau :

245. $\int\limits_{C} \frac{dz}{z^4 + 1}$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

246. $\int\limits_{|z-2|=1/2} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$.

247. $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$

248. $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$.

249. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$.

250. $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\,dz$.

251. $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \sin^2\frac{1}{z}\,dz$.

252. $\int\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\sin z\,(1-\cos z)}$

Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực sau :

253. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$, $a > 1$.

254. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.

255. $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}$, $(a > b > 0)$.

256. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

257. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

258. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$

259. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^2}$, $(a > 0)$.

260. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x\,dx}{x^2 + 1}$.

261. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2 - 2x + 10}$.

262. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2 - 2x + 10}$

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP TỰ GIẢI

CHƯƠNG I

SỐ PHỨC VÀ HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

§ 1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

16. 1) $-i$.

2) $\dfrac{1+3i}{5}$

17. 1) $3, \dfrac{\pi}{2}$

2) $2, \pi$.

3) $\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}$

4) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{5}{2}$.

5) $\sqrt{29}$, $-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{5}{2}$.

6) $|b|, \dfrac{\pi}{2}\operatorname{syn} b$, $\operatorname{syn} b = \begin{cases} 1 & \text{với } b > 0 \\ -1 & \text{với } b < 0 \end{cases}$

18. 1) $1, -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i), \pm\sqrt{2}\,i$.

4) $\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

5) $2\left[\cos\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3} + i\sin\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}\right] (k=0, 1, 2)$.

6) $\sqrt[5]{5}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}}{5}\right]$

$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

24. $z_k = z_1\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

25. $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$.

26. Tỉ số $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ phải là một số thực.

28. 1) Phần trong của hình tròn có tâm tại z_0 bán kính R.

2) Phần ngoài của hình tròn có tâm tại z_0 bán kính R.

3) Elip có tiêu cự tại ± 2 và có bán trục bằng $\frac{5}{2}$

4) Phần trong của nhánh bên trái của hypebol có tiêu cự tại các điểm ± 2 và có bán trục bằng $\frac{3}{2}$.

5) Đường trung trực của đoạn thẳng nối z_1z_2.

6) Đường thẳng $x = c$ và nửa mặt phẳng nằm bên phải nó

7) Đường thẳng $y = c$ và nửa mặt phẳng nằm bên dưới nó.

8) Phần trong của góc có đỉnh tại gốc tọa độ và có các cạnh tạo với phần dương của trục thực các góc lần lượt bằng α và β.

9) Phần trong của góc như 8) nhưng đỉnh tại z_0.

29. 1) Họ đường tròn tiếp xúc với trục thực tại gốc tọa độ và trục thực.

2) Họ hypebol $x^2 - y^2 = C$.

3) Họ hypebol $xy = \dfrac{C}{2}$.

30. 1) Đường tròn Appolonius.

2) Họ cung chứa góc nhìn đoạn z_1z_2 dưới góc α.

§ 2. CHUỖI SỐ PHỨC

39. Đặt $C_n = \alpha_n + i\beta_n$.

Do $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ cũng hội tụ.

Vì $\alpha_n \geqslant 0$ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ hội tụ.

Nhưng vì $\beta_n^2 = \alpha_n^2 + 2i\alpha_n\beta_n - C_n^2$ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ cũng hội tụ.

Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2$ hội tụ.

40. 1) Hội tụ tuyệt đối.

2) Hội tụ tuyệt đối.

3) Hội tụ với $\varphi \neq 0$. Phân kì với $\varphi = 0$.

4) Hội tụ tuyệt đối.

5) Phân kì.

6) Phân kì.

7) Hội tụ tuyệt đối.

§ 3. HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

51. 1) Ảnh của $y = c$ là parabol $4c^2(u + c^2) = v^2$ với $c \neq 0$, là nửa trục $u \geqslant 0$ khi $c = 0$.

Ảnh của $x = y$ là đường $\begin{cases} u = 0 \\ v = 2x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

Ảnh của đường $\arg z = \alpha$ là $\arg w = 2\alpha$.

Những đường $y = c$ (với $c \neq 0$) và $\arg z = \alpha$ được biến đổi $1 - 1$.

2) Là hypebol $xy = \dfrac{c}{2}$ với $c \neq 0$. Là $x = 0$ hoặc $y = 0$ với $c = 0$.

52. 1) Nếu $c \neq 0$ là đường tròn $u^2 + \left(v + \dfrac{1}{2c}\right)^2 = \dfrac{1}{4c^2}$.

Nếu $c = 0$ là trục Ou.

Ảnh của $|z| = R$ là $|w| = \dfrac{1}{R}$.

Ảnh của $\arg z = \alpha$ là $\arg w = -\alpha$.

2) $c = 0$: là $y = 0$.

$$c \neq 0 \text{ . là } x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}.$$

53. $R = 1$: là trục ảo.

$R \neq 1$: ảnh là elip : $\dfrac{u^2}{R\left(1-\dfrac{1}{R^2}\right)^2}+\dfrac{v^2}{R\left(1+\dfrac{1}{R^2}\right)^2}=1.$

54. Là đoạn $\begin{cases} v = 0 \\ u \leqslant -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

55. $\arg w = c$

$\rho = e^{\theta}$

56. Xét dãy $z_n = i\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$, $n \geqslant 2$ và dùng mệnh đề phủ định định nghĩa liên tục đều.

58. Xác định giới hạn của các hàm đó khi cho $z \to 0$. Nếu hàm nào có giới hạn khi $z \to 0$ thì giá trị giới hạn đó chính là giá trị của hàm tại $z = 0$.

59. $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

$-1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

60. $\pm i$, $(-1)^k$.

61. e^2, 1, e^{-2}, $2\pi - 4$; 1, $-\pi$ nếu $\varphi = \pi$, $-\varphi$ nếu $-\pi < \varphi < \pi$, bằng π nếu $\varphi = -\pi$.

62. 1) $\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ 3) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

3) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$; 4) $\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cos\dfrac{nx}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$

63. $\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\beta}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left(\alpha+\dfrac{n\beta}{2}\right)$.

65. 1) $\sin z=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$; $|\sin z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2y+\sin^2x}$.

2) $\cos z=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y$; $|\cos z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2y+\cos^2x}$.

3) $\mathrm{tg}\,z=\dfrac{\sin 2x+i\,\mathrm{sh}\,2y}{\cos 2x+\mathrm{ch}\,2y}$, $|\mathrm{tg}\,z|=\dfrac{\sqrt{\sin^2 2x+\mathrm{sh}^2 2y}}{\cos 2x+\mathrm{ch}\,2y}$.

4) $\mathrm{sh}\,z=\mathrm{sh}\,x\cos y+i\,\mathrm{ch}\,x\sin y$, $|\mathrm{sh}\,z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2x+\sin^2y}$.

5) $\mathrm{ch}\,z=\mathrm{ch}\,x\cos y+i\,\mathrm{sh}\,x\sin y$, $|\mathrm{ch}\,z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2x+\cos^2y}$.

66. 1) $\dfrac{8+15i}{17}$.

2) $\dfrac{\mathrm{sh}\,4-i\sin 2}{\mathrm{ch}\,4-\cos 2}$

3) $\dfrac{40+9i}{41}$.

§ 4. HÀM GIẢI TÍCH. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA MÔĐUN VÀ ACGUMEN CỦA ĐẠO HÀM

74. $a=b=-1$; $f(z)=e^{iz}$.

75. Dùng điều kiện Cauchy — Riemann.

76. Dùng định nghĩa đạo hàm của hàm phức và định nghĩa đạo hàm theo hướng của hàm 2 biến.

77. 1) Chứng tỏ hàm $f(z)$ không thỏa mãn điều kiện Cauchy — Riemann.

2) Dùng định nghĩa đạo hàm riêng để chứng minh $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0)$ và $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0$. Tuy nhiên hãy chứng minh giới hạn của biểu thức $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ phụ thuộc vào cách cho $\Delta z \to 0$.

78. 1) Cho $\Delta z = \Delta x$ và $\Delta z = i\Delta y$.

2) Cho $\Delta z = \Delta x$ và $\Delta z = i\Delta y$.

3) Dùng định nghĩa vi phân của hàm 2 biến và dùng một trong hai điều kiện ở mục 1) hàm 2) để chứng minh.

81. 1) $\theta = 0$, $k = 2$.

2) $\theta = \pi$, $k = \frac{1}{2}$.

3) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $k = 2\sqrt{2}$.

4) $\theta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $k = 10$.

82. 1) Co lại khi $|z| < \frac{1}{2}$, dãn ra khi $|z| > \frac{1}{2}$.

2) Co lại khi $|z + 1| < \frac{1}{2}$, dãn ra khi $|z + 1| > \frac{1}{2}$.

3) Co lại khi $|z| < 1$, dãn ra khi $|z| > 1$.

4) Co lại khi $\operatorname{Re} z < 0$, dãn ra khi $\operatorname{Re} z > 0$.

83. $2e^2(e^2 - 1)$.

CHƯƠNG 2

§ 1

97. $w = -(1+i)z + (1+i)$.

98. 1) $z_0 = -1 + 3i,\ \theta = 0,\ k = 2,\ w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$.

2) $z_0 = 2 + 2i,\ \theta = \dfrac{\pi}{2},\ k = 1,\ w - 2 - 2i = i(z - 2 - 2i)$.

3) Không có điểm bất động hữu hạn.

4) Nếu $a = 1$, thì không có điểm bất động hữu hạn, nếu $a \neq 1$ thì $z_0 = \dfrac{w_1 - az_1}{1 - a}$, $\theta = \arg a$, $k = |a|$,

$$w - \frac{w_1 - az_1}{1 - a} = a\left(z - \frac{w_1 - az_1}{1 - a}\right).$$

5) Nếu $a = 1$, thì không có điểm bất động hữu hạn, nếu $a \neq 1$, thì $z_0 = \dfrac{b}{1 - a}$, $\theta = \arg a$, $k = a$,

$$w - \frac{b}{1 - a} = a\left(z - \frac{b}{1 - a}\right).$$

99. 1) $w = az - b$; a, b thực, $a > 0$.

2) $w = -az + b$; a, b thực, $a > 0$.

3) $w = -i(az + b)$; a, b thực, $a > 0$.

4) $w = az + ib$; a, b thực, $a > 0$.

100. 1) $w = \dfrac{z - a}{h}$.

2) $w = \dfrac{-z + a + h}{h} + i$.

3) $w = \dfrac{1+k^2}{b} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} k\right)} z.$

4) $w = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{b_2 - b_1} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} k\right)} (z - ib_1).$

101. $w = e^{i\alpha} Rz + w_0.$

102. 1) Biến thành miền giới hạn bởi đường thẳng $\operatorname{Re} w = 1$ và đường tròn tiếp xúc với nó $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.

2) Biến thành miền giới hạn bởi hai đường tròn tiếp xúc nhau $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ và $\left|w - \dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$

103. Biến thành miền nhị liên với biên là đường thẳng $\operatorname{Re} w = \dfrac{1}{2}$ và đường tròn $\left|w - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$.

104. 1) $w = \dfrac{iz - 1 + 2i}{iz + 1 + 2i}$

2) $w = \dfrac{iz + 2 + i}{z + 1}.$

3) $w = \dfrac{1-i}{2}(z + 1).$

105. 1) $w = \dfrac{2iz + z - i}{z + i}.$

2) $w = \dfrac{-3iz + 5z - 4}{4z - 5 - 3i}.$

3) $w = \dfrac{z(3 - i)(1 + i)}{(1 + i)(1 - z)}.$

106. $w = -\dfrac{z - 2i}{z + 2i}.$

107. $R_2 \dfrac{w-b}{R_2^2-\bar{b}w} = R_1 e^{i\alpha} \dfrac{z-a}{R_1^2-\bar{a}z}$.

108. $w = 2\dfrac{z-2+i}{iz+2-2i}$

109. 1) $|z| = 2$.

2) Đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$.

3) $\left|z - \dfrac{i}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$

4) Lemnitcat $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$.

110. $w = ke^{1/2(\pi + \arg z_2/z_1)} \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, $k > 0$.

111. $\dfrac{w-\bar{a}}{w-a} = i\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$.

112. 1) $\theta(\varphi) = \alpha - \varphi + 2\arg(e^{i\varphi} - a) =$

$$= \alpha - \varphi + 2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sin\varphi - r\sin\theta}{\cos\varphi - r\cos\theta};$$

trong đó $a = re^{i\theta}$.

2) $w'(0) = (1-|a|^2)e^{i\alpha}$, $w'(a) = \dfrac{e^{i\alpha}}{1-|a|^2}$.

3) Nếu $a \neq 0$ thì miền được dãn ra nằm trong hình tròn $\left|z - \dfrac{1}{a}\right| < \sqrt{\dfrac{1}{|a|^2} - 1}$, còn miền co lại nằm ngoài hình tròn đó. Nếu $a = 0$, thì $|w'(z)| = 1$.

4) $\max\left|\dfrac{dw}{dz}\right| = \dfrac{1+|a|}{1-|a|}$, $\min\left|\dfrac{dw}{dz}\right| = \dfrac{1-|a|}{1+|a|}$.

113. 1) $w = R^2e^{i\alpha} \dfrac{z - a}{R^2 - \bar{a}z}$

2) $\dfrac{w - b}{R^2 - \bar{b}w} = e^{i} \dfrac{z - a}{R^2 - \bar{a}z}$.

3) $w = R^2 \dfrac{z - a}{R^2 - az}$, a thực, $|a| < R$.

§ 2.

114. 1) $w = \dfrac{z^2}{a^2}$.

2) $w = \sqrt{\dfrac{z}{a}}$.

125. 1) Miền bị chặn bởi epixiclôit : $u = R\left(\cos\varphi + \dfrac{\cos n\varphi}{n}\right)$,

$v = R\left(\sin\varphi + \dfrac{\sin n\varphi}{n}\right)$

2) Miền là phần ngoài của epixiclôit :

$u = R\left(\cos\varphi + \dfrac{\cos n\varphi}{n}\right)$, $v = R\left(\sin\varphi + \dfrac{\sin n\varphi}{n}\right)$.

126. $w = \dfrac{2(\sqrt[3]{4} + 1)e^{i\pi/3} z^{4/3}}{(\sqrt[3]{4} - 2)e^{i\pi/3} z^{4/3} + 3\sqrt[3]{4}}$

127. 1) $w = \dfrac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}$

2) $w = \dfrac{2z^2 + 3iz + 2}{2z^2 - 3iz + 2}$.

128. $w = \left(\dfrac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^3$

129. $w = \left[\dfrac{z - \sqrt{2}(1-i)}{z - \sqrt{2}(1+i)}\right]^4$

130. $w = \sqrt{\dfrac{i+z}{i-z}}$.

131. $w = e^{-i\pi/8}\sqrt{z-i}$.

132. $w = \sqrt{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

133. $w = \dfrac{\sqrt{z^2+h^2}}{z}$.

134. $w = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

135. Toàn bộ mặt phẳng khía theo đoạn $\left[-1, \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)\right]$ nếu $a > 0$. Toàn bộ mặt phẳng khía đi các tia $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)\right]$ và $[-1, +\infty)$ nếu $a < 0$.

136. $w = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)}}$

137. $w = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left[\left(a + \dfrac{1}{a}\right) - \left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right]}$.

138. 1) $w = \dfrac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}$.

2) $w = \dfrac{2z^2 + 3iz + 2}{2z^2 - 3iz + 2}$.

139. 1) $w = \left(\dfrac{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} - R^{1/\alpha}}\right)^2$

2) $w = \left(\dfrac{z^{1/\alpha} - R^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}}\right)^2$.

140. 1) $w = -\left(\dfrac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^3$.

2) $w = i\left(\dfrac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^{3/2}$

141. $w = e^{\pi i/3}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{3/2}$

142. $w = \sqrt{\dfrac{z - z_1}{z_2 - z}}$.

143. $w = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

144. $w = e^{\frac{\sqrt{2}\pi}{2h}(1-i)z}$

145. 1) Thành lưới vuông góc $u = \ln R$, $v = \theta$.

2) Thành dải $0 < v < \alpha \leqslant 2\pi$.

3) Thành nửa dải $u < 0$, $0 < v < \alpha$.

4) Thành hình chữ nhật $\ln r_1 < u < \ln r_2$, $0 < v < 2\pi$.

146. 1) Nửa mặt phẳng dưới.

2) Nửa mặt phẳng trên.

3) Nửa mặt phẳng trên.

4) Phần trong nửa trên elip $\dfrac{4u^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{4v^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} = 1$.

5) Phần trong nửa dưới elip $\dfrac{4u^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{4v^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} = 1$.

156. 1) Thành nửa dải $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$.

2) Thành dải $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

3) Thành nửa dải $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$.

4) Thành dải $-\frac{\pi}{2} < u < 0$.

CHƯƠNG 3

§ 1.

157. 1) $1 + \frac{i}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) $-\pi R^2$.

158. 1) $\sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right)$; 2) 2; 3) $2i$; 4) 0.

159. πi.

160. 1) $\frac{1+i}{2}$; 2) $\frac{1}{2} + i$.

161. 1) 0; 2) $10\pi i$.

162. 1) 0; 2) -16π; 3) πi.

163. 1) $2\pi Ri$; 2) $2\pi Ri$.

164. 1) $\frac{R^{n+1}}{n+1}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]$ nếu $n \neq -1$; πi nếu $n = -1$.

2) 0 nếu $n \neq -1$; $2\pi i$ nếu $n = -1$.

§ 2.

185. Nếu chu tuyến C chứa trong nó điểm 0 và không chứa ± 1, thì giá trị của tích phân là $-2\pi i$. Nếu chỉ chứa hoặc -1, hoặc 1 và không chứa 0 thì giá trị tích phân là πi. Từ đó suy ra tích phân có thể nhận năm giá trị khác nhau: $-2\pi i$, $-\pi i$, 0, πi, $2\pi i$.

186. $\dfrac{\pi i}{2}$.

187. $\dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 2\pi i}{(a-b)^n}$.

188. 0.

189. πi.

190. $-2\pi i$.

§ 3.

197. $f(u) = au + b$.

198. a) $v(x, y) = 2xy + y + c$.

b) $v(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} + C$.

c) $v(x, y) = \arg z + C$.

199. a) $f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz + iC$.

b) $f(z) = z^2 + 2 + iC$.

c) $f(z) = ze^z - \dfrac{i}{z} + iC$,

d) $f(z) = (1 + i)z - 3i + C$.

e) $f(z) = \sin z - \operatorname{ch} z + C$.

200. $f(z) = Ae^{z^2/2}$.

CHƯƠNG 4

§ 1.

206. 1) $R = 1$; 2) $R = 1$; 3) $R = 1$.

207. 1) 0

2) R, nếu $|z_0| < 1$ và $\dfrac{R}{|z_0|}$ nếu $|z_0| > 1$.

208 1) $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+z}{1-z}$;

2) $\ln(1+z)$.

209. 1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R = \left|\frac{b}{a}\right|$.

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$, $R = \infty$.

§ 2.

215. 1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} (z-1)^{2n}$, $R = \infty$.

2) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n}$, $R=\infty$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2i^{n+1}}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}-1\right](z-i)^n$, $R=1$.

217. 1) $z=\pm 3i$ là 0 - điểm đơn; ∞ là 0 - điểm cấp 2.

2) $z=0$ là 0 - điểm cấp 3; $z=k\pi$ $(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$ là 0 - điểm đơn.

3) $z=0$ là 0 - điểm cấp 2, $z=k\pi$ $(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$ là 0 - điểm cấp 3.

4) $z=\pm 2$ là 0 - điểm cấp 3, $z=2k\pi i$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ là 0 - điểm đơn.

218. 1) Tồn tại, $f(z)=z^2$.

2) Không tồn tại.

219. 1) Không tồn tại

2) $f(z)=(z-1)^2$.

220. Trong trường hợp hàm $\sin\frac{1}{z}$ có $z_0=0$ là điểm giới hạn của các 0 - điểm $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k=1,2,\ldots$ mà tại $z_0=0$ hàm không giải tích. Điều kiện của định lí duy nhất không được thực hiện.

§ 3.

226. 1) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ với $|z|<1$;

$$-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \text{ với } 0<|z-1|<1,$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n} \text{ với } |z|>1.$$

b) $\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{a^{n+1}\,b^{n+1}}z^n$ với $|z|<|a|$;

$$\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right] \text{ với } 0<|z-a|<|b-a|;$$

$$\frac{1}{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n} \text{ với } |z|>|b|;$$

$$\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{b^{n+1}}+\frac{a^n}{z^{n+1}}\right) \text{ với } |a|<|z|<|b|.$$

c) $-\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n}{2^{n+4}}(z-i)^n$ với

$0<|z-i|<2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$ với $|z|>1$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{nz^n}$ với $|z|>\max(|a|,|b|)$.

227. a) $z = \frac{1 \pm i}{2}$, $z = \frac{-1 \pm i}{2}$ là các cực điểm đơn, là điểm chính qui.

b) $z = 1$ là cực điểm cấp 2, ∞ là cực điểm cấp 3.

c) $z = \infty$ là kì dị cốt yếu.

d) $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ là cực điểm đơn, $z = \infty$ là điểm giới hạn của các cực.

e) Nếu $a \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ thì $z = 2k\pi + a$ và $z = (2k + 1)\pi - a$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ là các cực điểm đơn nếu $a = m\pi + \frac{\pi}{2}$ thì khi m chẵn $z = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ và khi m lẻ $z = (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}$ đều là cực điểm cấp 2; trong các trường hợp $z = \infty$ là điểm giới hạn của các cực điểm.

228. a) $\frac{a}{z - \alpha}$ $(a \neq 0)$ hoặc $az + b$ $(a \neq 0)$.

b) $\frac{a}{(z - \alpha)^n}$ $(a \neq 0)$ hoặc $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$.

c) $\frac{1}{z^2} + C$.

d) $\frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n+m} z^{n+m}}{z^n}$ $(a_0 \neq 0,\ a_{n+m} \neq 0)$.

§ 4.

233. 1) $\operatorname*{res}_{z=\pm 1} f(z) = -\frac{1}{2}$; $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

2) $\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = -\frac{i}{4}$; $\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{i}{4}$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

3) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$; $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 1$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

4) $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 2\sin 2$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -2\sin 2$.

234. 1) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 1$; $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -1$.

2) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -1$; $\operatorname*{res}_{z=2k\pi i} f(z) = -1$.

3) $\operatorname*{res}_{z=2k\pi} f(z) = 0$.

236. 1) $A \cdot \varphi(a)$.

2) $C_{-1}\varphi(a) + \dfrac{C_{-2}\varphi'(a)}{1!} + \ldots + \dfrac{C_{-k}\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$

§ 5.

245. $-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

246. $-2\pi i$.

247. $-\dfrac{\pi i}{121}$.

248. πi.

249. $-\dfrac{2\pi i}{9}$.

250. 1.

251. 0.

252. 0.

253. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

254. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

255. $\frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$

256. $\frac{\pi}{6}$.

257. $\frac{\pi}{2}$.

258. $-\frac{\pi}{27}$.

259. $\frac{\pi}{4a}$.

260. $\frac{\pi}{2}(1 + e^{-2})$.

261. $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)$.

262. $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)$.

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG 1
SỐ PHỨC VÀ HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

CHƯƠNG 2
ÁNH XẠ BẢO GIÁC LIÊN QUAN VỚI HÀM SỐ SƠ CẤP

CHƯƠNG 3
TÍCH PHÂN

CHƯƠNG 4
CHUỖI VÀ THẶNG DƯ