STATISTIKA EKONOMI II

MODUL/BAHAN AJAR

DISUSUN OLEH

TUKIRIN

SEKOLAH TINGGI ILMU EKONOMI TAMANSISWA
JAKARTA
2011

KATA PENGANTAR

Berkat rahmat Allah yang Maha Kuasa Modul/Bahan Ajar kuliah Statistika Ekonomi II ini dapat tersusun dengan baik. Penyusunan Modul/Bahan Ajar ini untuk mempermudah mahasiswa dalam mendapatkan bahan kuliah. Dengan tersusunnya Modul/Bahan Ajar ini diharapkan mahasiswa dapat dengan mudah memahami materi yang akan dipelajari untuk mata kuliah ini selama satu semester. Penggunaan Modul/Bahan Ajar ini hanya berlaku untuk kalangan sendiri. Materi yang digunakan dalam penyusunan Modul/Bahan Ajar ini berasal dari banyak sumber. Penulis hanya melakukan peringkasan dan penyesuaian contoh-contoh agar mudah dipahami oleh mahasiswa. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada para penyusun buku yang menjadi sumber penyusunan Modul/Bahan Ajar ini, dan kalau ada hal-hal yang kurang berkenan dihaturkan maaf yang sebesar-besarnya.

Semoga Modul/Bahan Ajar ini bermanfaat dan membantu dalam memahami mata kuliah Statistika Ekonomi II sehingga dapat menerapkannya sesuai dengan kebutuhan dan persoalan yang dihadapi.

Jakarta, Maret 2011

Penyusun

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Umum

Setelah mempelajari statistik deskriptif langkah selanjutnya adalah mempelajari statistik infrensia. Banyak persoalan di bidang ekonomi yang harus dianalisis dengan menggunakan statistik inferensia. Persoalan-persoalan pengambilan keputusan biasanya dilakukan setelah mempelajari sauatu persoalan dengan menggunakan sampel. Ciri khas statistik inferensia adalah menggunakan data sampel untuk menginterpretasikan suatu peristiwa. Misalnya seorang peneliti ingin mengetahui pengeluaran rata-rata karyawan setiap kali makan siang di Jakarta. Untuk menjawab persoalan ini tentu akan lebih tepat dilakukan dengan menggunakan data yang dikumpulkan dari seluruh karyawan pada saat makan siang di Jakarta. Namun pekerjaan ini kurang praktis karena akan membutuhkan tenaga, bahan, waktu, dan biaya yang sangat besar. Oleh karena itu sangat praktis jika digunakan sampel. Persoalan penggunaan sampel untuk menjelaskan fakta secara keseluruhan ini menjadi bagian dari statistik inferensia yang dibahas dalam diktat ini.

1.2 Ruang Lingkup Modul

Modul/bahan ajar ini membahas topik yang termasuk dalam statistika inferensia antara lain, permutasi/kombinasi, teori probablita, distribusi binomial, distribusi poisson, distribusi normal, distribusi sampel, pendugaan parameter, pengujian hipotesis, analisis varians, dan regresi/korelasi sederhana.

BAB II
PERMUTASI DAN KOMBINASI

2.1 Pengertian

Permutasi dan Kombinasi membahas tentang susunan atau pemilihan suatu obyek namun keduanya memiliki perbedaan yaitu :

Permutasi menganggap urutan penting sedangkan kombinasi menganggap urutan tidak penting.

Contoh : dua buah objek A dan B disusun secara bersama-sama, maka susunannya adakah sebagai berikut :

Menurut Permutasi

AB dan BA → AB ≠ BA (2 susunan)

Menurut Kombinasi

AB dan BA → AB = BA (1 susunan)

2.2 Permutasi

Definisi → Permutasi sejumlah objek adalah penyusunan objek tersebut dalam suatu urutan tertentu.

Contoh : Dua buah objek A dan B dapat disusun sebagai berikut :

AB dan BA → AB ≠ BA (2 susunan)

Sebelum membahas permutasi lebih lanjut, ada dua kaidah penting yang harus dipahami yaitu kaidah penggandaan dan penjumlahan.

1. Kaidah Penggandaan

Jika suatu tindakan/pemilihan dapat dilaksanakan dalam n_1 macam cara setelah itu tindakan atau pemilihan yang lain dapat dilaksanakan n_2 macam cara, dan seterusnya sampai dengan tindakan/pemilihan ke-k dilaksanakan dalam n_k macam cara, maka tindakan/pemilihan tersebut secara keseluruhan secara bersama-sama dapat dilaksanakan dalam n_1 x n_2 x n_3 x ...... x n_k macam cara.

Contoh 1 :

Sebuah provinsi baru ingin membuat plat nomor kendaraan bermotor yang terdiri dari satu huruf tertentu diikuti tiga angka dan diakhiri satu huruf alfabet, Angka 0 tidak digunakan di awal huruf alfabet O dan I juga tak digunakan.

Berapakah jumlah plat nomor yang dapat dibuat?

Jawab :

H	A	A	A	H
1	9	10	10	24

Jumlah plat nomor kendaraan bermotor

= 1 x 9 x 10 x 10 x 24

= 21.600 unit

Contoh 2 :

Seorang wisatawan yang berada di Jakarta merencanakan perjalanan Jakarta –Surabaya–Manado–Jakarta. Perjalanan Jakarta-Surabaya menggunakan transportasi darat, perjalanan Surabaya–Manado dan perjalanan Manado-Jakarta menggunakan transportasi udara. Terdapat 7 perusahaan transportasi darat yang melayani Jakarta – Surabaya dan sebaliknya, 4 perusahaan penerbangan yang melayani Surabaya-Manado dan sebaliknya, 3 perusahaan penerbangan yang melayani Jakarta-Manado dan sebaliknya.. Berapakah susunan perjalanan yang dapat dibuat wisatawan tersebut ?

Jawab :

Jakarta → Surabaya → Manado → Jakarta

7 4 3

Jumlah susunan perjalanan = 7x4x3

= 84 susunan

2. Kaidah Penjumlahan

Jika suatu tindakan/pemilihan dapat dilaksanakan dalam n_1 macam cara setelah itu tindakan/pemilihan yang lain dapat dilaksanakan n_2 macam cara dan seterusnya sampai dengan tindakan/pemilihan ke-k dilaksanakan dalam n_k macam cara, maka pelaksanaan pemilihan pertama atau pemilihan ke-2 dan seterusnya sampai dengan ke berapa saja sampai dengan pemilihan ke-k secara tidak bersama-sama dapat dilaksanakan dalam $n_1+n_2+n_3+.....+n_k$ macam cara berbeda.

Contoh :

Sebuah Restoran Indah menyediakan menu nasi dengan pilihan nasi gudeg, nasi rames, nasi soto & nasi opor serta menu minuman yang terdiri dari teh manis, kopi manis dan kopi susu.

1) Berapakah susunan menu yang dapat dibuat terdiri dari 1 macam nasi dan 1 macam minuman.

2) Berapakah susunan menu yang dapat dibuat terdiri dari 1 macam nasi atau 1 macam minuman.

Jawab :

a. Kaidah Penggandaan

Tabel 1. Hasil Kaidah Penggandaan

Minuman / Makanan	TM	KM	KS
NG	NGTM	NGKM	NGKS
NR	NRTM	NRKM	NRKS
NS	NSTM	NSKM	NSKS
NO	NOTM	NOKM	NOKS

Jumlah susunan menu = 4 x 3 = 12 macam

b. Kaidah Penjumlahan

Makanan
NG
NR
NS
NO

Minuman
TM
KM
KS

Jumlah susunan menu = 4 + 3

= 7 macam

2.2.1 Permutasi dari n Objek Berbeda, Tanpa Pemulihan Objek Terpilih.

1. Permutasi dari n Objek Seluruhnya

Jumlah permutasi dari suatu himpunan yang terdiri dari n objek berbeda adalah sebagai berikut :

nPn = n!

n! = n.(n-1).(n-2) .... (1)

0! = 1

4! = 4x3x2x1

= 24

Contoh : Dalam berapa carakah objek A, B dan C dapat dipermutasikan secara keseluruhan ?

Jawab :

n = 3	ABC	CAB
3P3 = 3!	ACB	CBA
= 3(2) (1)	BAC	
= 6 cara	BCA	

2. Permutasi Sebanyak r dari n Objek Berbeda

Jumlah permutasi dari suatu himpunan yang terdiri dari n objek berbeda yang diambil sekaligus sebanyak r tanpa pemulihan adalah sebagai berikut :

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

contoh :

Dalam berapa carakah objek A, B dan C dapat dipermutasikan yang diambil sekaligus 2 objek ?

Jawab :

A, B dan C → n = 3

r = 2

$$_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$= \frac{3(2)(1!)}{(1!)}$$

= 6 susunan

AB
BA
AC
CA
BC
CB

3. Permutasi Keliling

Sejumlah n objek yang berbeda dapat disusun secara teratur dalam sebuah lingkaran dengan jumlah sebagai berikut :

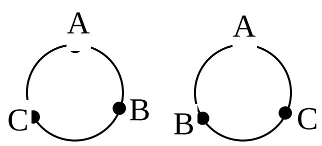
Jumlah permutasi keliling = (n-1)!

Contoh : Dalam berapa carakah objek A, B dan C dapat disusun dalam posisi melingkar ?

Jawab : Jumlah Permutasi Keliling = (3-1)!

= 2!

= 2 susunan



2.2.2 Permutasi Sebanyak r dari n Objek Berbeda dengan Pemulihan Objek Terpilih

Jumlah permutasi dari suatu himpunan yang terdiri dari n objek berbeda dan diambil sekaligus sebanyak r dengan pemulihan objek yang terpilih adalah sebagai berikut :

n P^* r = n^r

r ≤ n merupakan bilangan bulat positif

contoh : Berapakah jumlah permutasi objek A,B dan C yang diambil sekaligus 2 objek dengan pemulihan objek terpilih.

Jawab :

$${}_3P_2^* = 3^2$$
$$= 9 \ \textit{susunan}$$

AB AC
BA CA

BC BB
CC
CB
AA

2.2.3 *Permutasi Sebanyak r dari n Objek yang Tidak Seluruhnya Dapat Dibedakan*

Jika terdapat suatu himpunan yang terdiri dari n objek dimana n_1 merupakan kumpulan objek yang sama, n_2 merupakan kumpulan objek lain yang sama dan seterusnya sampai dengan n_k dan $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, maka jumlah permutasi seluruh objek di atas adalah sebagai berikut :

$$\binom{n}{n_1, n_{2,} ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!, n_2!, ..., n_k!}$$

Contoh :

Dalam berapa carakah ”ANA” dapat dipermutasikan ?

Jawab : ANA

Huruf A = 2 → n_1 = 2

Huruf N = 1 → n_2 = 1

$n = n_1 + n_2$

$= 3$

$$\binom{3}{2,1} = \frac{3!}{2!1!}$$

$$= \frac{3(2!)}{2!(1)}$$

= 3 susunan

ANA, AAN, dan NAA

2.3 Kombinasi

Kombinasi dari sejumlah objek merupakan cara pemilihan objek bersangkutan tanpa menghiraukan urutan objek itu sendiri.

Misalnya 2 buah objek A dan B dapat dikombinasikan sebagai berikut :

AB dan BA $\rightarrow$ AB = BA (1 susunan)

Kombinasi sebanyak r dari n objek berbeda

Jumlah kombinasi dari n objek berbeda dan yang dipilih sekaligus sebanyak r adalah sebagai berikut :

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

Contoh : Berapakah jumlah kombinasi A, B dan C yang diambil sekaligus sebanyak 2 objek? Lalu bandingkan dengan permutasi ?

Jawab :

$$ {}_3C_2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} $$

$$ = \frac{3!}{2!1!} $$

$$ = \frac{3(2!)}{2!} $$

= 3 susunan

Untuk permutasi

$$ {}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} $$

$$ = \frac{3!}{1!} $$

= 3(2)(1)

= 6 susunan

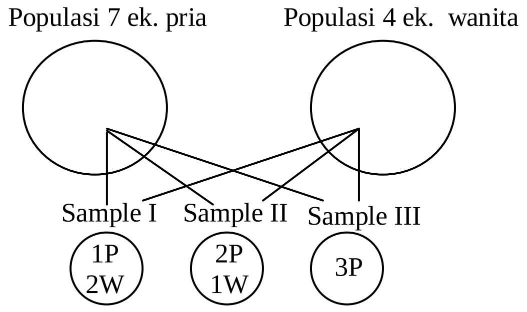
Tabel 2. Perbandingan Permutasi dan Kombinasi

Kombinasi	Permutasi	
AB	AB	BA
AC	AC	CA
BC	BC	CB

Contoh :

Sebuah acara dialog ekonomi di TV swasta terdiri dari 3 orang ekonom setiap kali tayang. Berdasarkan pengamatan produser terdapat 7 ekonom pria dan 4 ekonom wanita yang layak tampil. Kordinator acara membuat ketentuan setiap kali tampil paling sedikit 1 ekonom pria. Dalam berapa carakah acara dialog ekonomi tersebut dapat ditayangkan?

Jawab:



Gambar 1. Diagram Sampel

1. Sampel terdiri 1 pria dan 2 wanita

Pemilihan 1 pria dari 7 pria

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\,6!}$$

$$= \frac{7\,(6!)}{1!(6!)}$$

= 7 cara

Pemilihan 2 wanita dari 4 wanita

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

$$= \frac{4(3)(2!)}{2!2(1)}$$

= 6 cara

Pemilihan 1 pria dari 7 pria dan 2 wanita dari 4 wanita

$$\binom{7}{1}\binom{4}{2} = 7(6) \;=\; 42 \;\text{ cara}$$

2. Sampel terdiri dari 2 pria dan 1 wanita

Pemilihan 2 pria dari 7 pria

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7(6)(5!)}{(2)(1)\,(5!))} = 21 cara$$

Pemilihan 1 wanita dari 4 wanita

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4(3!)}{(1)(3!)} = 4 \; cara$$

Pemilihan 2 pria dari 7 pria dan 1 wanita dari 4 wanita

$$\binom{7}{2}\binom{4}{1} = 21(4) = 84 cara$$

3. Sampel terdiri dari 3 pria dan 0 wanita

Pemilihan 3 pria dari 7 pria

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7(6)(5)\,(4!)}{(3)(2)(1)\,(4!)} = 35 \; cara$$

Pemilihan 1 pria dari 7 pria dan 2 wanita dari 4 wanita atau 2 pria dari 7 pria dan 1 wanita dari 4 wanita atau 3 pria dari 7 pria

$$\binom{7}{1}\binom{4}{2} + \binom{7}{2}\binom{4}{1} + \binom{7}{3} = 42 + 84 + 35 = 161 \; cara$$

Soal

1. Pada sebuah perusahaan terdapat formasi jabatan manager keuangan dan wakilnya. Bagian personalia melakukan seleksi dan ternyata ada 4 karyawan

yang layak menduduki posisi tersebut. Dalam berapa carakah formasi jabatan tersebut dapat diisi?

2. Sebuah negara di Asia Tenggara merencanakan sebuah konferensi yang diikuti oleh 5 kepala pemerintahan untuk membahas dampak krisis keuangan Amerika Serikat terhadap negara mereka. Untuk memperlancar proses komunikasi panitia menetapkan susunan tempat duduk dibuat melingkar. Dalam berapa carakah susunan tempat duduk dapat dibuat?
3. Sebuah kejuaraan renang memperebutkan 3 nomor dan diikuti oleh 5 atlit dalam berapa carakah perolehan medali emas dapat terjadi?
4. Sebuah TV swasta merencanakan acara dialog ekonomi yang akan menampilkan 3 orang ekonom untuk setiap tayangan. Produser mengamati ada 9 ekonom pria dan 7 ekonom wanita yang layak ditampilkan. Dalam berapa carakah acara dapat ditayangkan jika untuk setiap tayangnya paling sedikit 2 ekonom pria.

Jawab:

1. ${}_4P_2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4(3)(2!)}{(2!)} = 12\ \textit{susunan}$

2. Jumlah susunan tempat duduk melingkar = (5-1)! = 4 ! = 24 susunan

Lanjutkan jawaban nomor 3 dan 4.

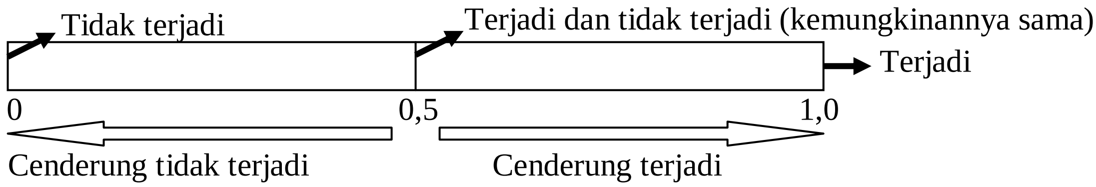
BAB III
TEORI PROBABILITA

3.1 Pengertian

Probabilita awalnya banyak digunakan pada dunia perjudian, namun kemudian digunakan dalam bidang bisnis. Antara judi dan bisnis memiliki persamaan yaitu sama-sama mengejar harapan dan menghadapi resiko. Bisnis yang kasat mata menggunakan probabilita adalah asuransi.

Defenisi: Probabilita adalah suatu **ukuran tentang kemungkinan** bahwa suatu peristiwa (event) di masa akan datang terjadi.

Nilai probabilita antara 0 dan 1



Gambar 2. Diagram Probabilita

Istilah-istilah :

Percobaan : Pengamatan terhadap beberapa aktivitas atau tindakan mengambil beberapa pengukuran.

Hasil : Suatu hasil tertentu dari sebuah percobaan.

Peristiwa : Kumpulan dari satu hasil atau lebih dari sebuah percobaan atau hasil yang sedang menjadi perhatian.

Ruang Sampel : Himpunan seluruh kemungkinan hasil baik konseptual maupun actual dari sebuah percobaan.

Saling lepas (Mutually Exclusive) : yaitu terjadinya suatu peristiwa akan menutup peristiwa lain terjadi pada saat yang sama.

Lengkap terbatas kolektif (Collective exchaustive): Sedikitnya satu dari serangkaian peristiwa harus terjadi pada saat percobaan dilakukan.

Contoh :

Pelemparan sebuah dadu 6 sisi

Percobaan : melempar dadu

Hasil yang mungkin muncul 1 2 3 4 5 6

Peristiwa yang mungkin: muncul sisi genap

Ruang sampel → S = { 1,2,3,4,5,6 }

3.2 Perumusan Probabilita

→ Perumusan Objektif

→ Perumusan Subjektif

→ Perumusan Klasik

→ Perumusan Frekuensi Relatif

1. Perumusan Klasik

   Asumsi : Hasil dari sebuah percobaan akan memiliki kesempatan sama (equally likely)

   $$\text{Probabilita suatu peritiwa} = \frac{\sum kemungkinan\ hasil\ peristiwa\ tertentu}{\sum kemungkinan\ hasil\ keseluruhan}$$

   Contoh : pelemparan sekeping uang logam

   Kemungkinan hasil

   Gambar di atas
   P(G) = 0.5

   Angka di atas
   P(A) = 0.5

2. Perumusan frekuensi relatif

   $$\text{Probabilita peritiwa akan terjadi} = \frac{Jumlah\ peristiwa\ terjadi\ di\ masa\ lalu}{Jumlah\ \ pengama\text{tan}}$$

   Contoh :

   Berdasarkan pengalaman setiap mengikuti 10 kali tender PT. A memenangkan 7 tender. Saat ini PT A mengikuti tender, berapakah probabilita menang?

   Peristiwa PT A memenangkan tender → M

   $P(M) = \frac{7}{10} = 0,7$

3. Perumusan Subjektif = probabilita ditentukan berdasarkan keyakinan seseorang setelah mengamati semua informasi yang tersedia.

   Contoh : 1) Menurut pengamat ekonomi probabilita Dirjen Pajak memenuhi target penerimaan pajak 0,8.

   2) Probabilita Tuan X memenangkan presiden tahun 2014 0,7.

3.3 Beberapa Hukum Dasar Probabilita

1. Hukum Penjumlahan

    1) Hukum Khusus Penjumlahan

        Asumsi : Peristiwa-peristiwa saling lepas (Mutually Exclusive) yaitu terjadinya suatu peristiwa akan menutup peristiwa lain terjadi pada saat yang sama.

        Jika A dan B peristiwa saling lepas muka

        $P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh :

Mesin pengisi sayuran otomatis memiliki kemampuan mengisi kantong plastik secara tepat, namun karena perbedaan ukuran sayuran menyebabkan beberapa kantong terisi lebih dan sebagian kurang. Berdasarkan pengamatan terhadap pengisian 4000 kantong diperoleh data sebagai berikut :

Tabel 3. Pengisian Kantong

Berat	Peristiwa	Jumlah Kantong	Probabilita
Lebih ringan	A	100	0,025
Tepat	B	3600	0,900
Lebih berat	C	300	0,075

Soal :

Berdasarkan data di atas tentukanlah :

$P(A \cup B)$ $P(A \cup C)$ $P(B \cup C)$

Jawab :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$	$P(B \cup C) = P(B)+P(C)$

$= 0{,}025 + 0{,}900 \qquad = 0{,}025 + 0{,}075 = 0{,}900 + 0{,}075$

$= 0{,}925 \qquad\qquad = 0{,}100 \qquad = 0{,}975$

2) Peristiwa Komplimenter

Jika pada ruang sampel yang sama terdapat peristiwa A dan $\overline{A}$, dan $\overline{A}$ meliputi seluruh ruang sampel selain A, maka $\overline{A}$ dikatakan komplimenter dari A.

$\overline{A}$ = bukan A

$P(\overline{A}) = 1 – P(A)$

$P(A) = 1 – P(\overline{A})$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

3) Hukum Umum Penjumlahan

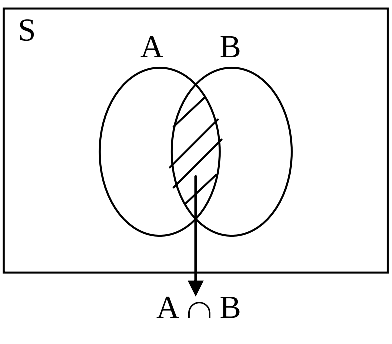
Adakalanya peristiwa-peristiwa dalam sebuah percobaan, terjadi secara bersamaan sehingga probabilitanya juga probabilita bersama (join probability). Jika kita menemukan hal di atas maka harus diselesaikan dengan hukum umum penjumlahan.

$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)}$

Contoh :

Survei terhadap 200 Wisman diperoleh data sebagai berikut :120 orang mengunjungi SUMUT, 100 orang mengunjungi Bali dan 60 orang mengunjungi SUMUT dan Bali. Berapakah probabilitas seorang Wisman mengunjungi SUMUT atau Bali ?

Jawab :



Gambar 3. Peristiwa Bersama

Jawab :

A → peristiwa Wisman mengunjungi SUMUT

B → peristiwa Wisman mengunjungi Bali

$P(A) = \frac{120}{200} = 0,6$

$P(B) = \frac{100}{200} = 0,5$

$P(A \cap B) = \frac{60}{200} = 0,3$

$$P(A \cup B) = (PA) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0,6 + 0,5 - 0,3$$
$$= 0.8$$

Untuk 3 peristiwa $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

2. Hukum Perkalian

1) Hukum Khusus Perkalian

Syarat : - Peristiwa-peristiwa dalam sebuah percobaan independen

- Dua peristiwa dikatakan independen, jika terjadinya suatu peristiwa tidak menghalangi probabilitas terjadinya peristiwa lain.

Jika A dan B independen maka :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Contoh :

Dua uang logam dilempar ke udara, berapakah probabilita kedua uang logam tersebut menghasilkan gambar di atas?

Jawab :

A → peristiwa uang logam 1 gambar di atas

B → peristiwa uang logam 2 gambar di atas

$P(A) = 0{,}5$

$P(B) = 0{,}5$

$P(A \cap B) = P(A) . P(B) = (0{,}5)(0{,}5) = 0{,}25$

Bukti :

Uang logam1	uang logam 2	$\longrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (0{,}5) \cdot (0{,}5) = 0{,}25$
G	G	I
G	A	II
A	A	III
A	G	IV

2) Hukum Umum Perkalian

Adakalanya suatu peristiwa terjadi setelah peristiwa lain terjadi. Probabilita untuk peristiwa seperti ini disebut probabilita bersyarat (conditional probability).

Jika ada 2 peristiwa yaitu A dan B, peristiwa B terjadi setelah A terjadi, maka probabilita peristiwa A dan B terjadi adalah sebagai berikut :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

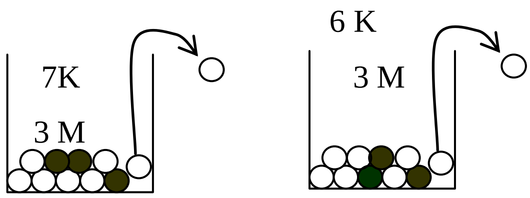
$P(B|A)$ = probabilita B terjadi dengan ketentuan A terjadi

Jika ada tiga peristiwa berlaku $P(A\cap B\cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A\cap B)$

Contoh :

Dalam sebuah kotak terdapat 10 bola pingpong dengan bahan dan ukuran sama, yang berbeda hanya warna, yaitu 7 kuning, dan 3 merah. Jika kita mengambil secara acak sebuah bola kemudian mengambil lagi sebuah bola, berapakah probabilita bola pertama kuning dan kedua kuning ?

Jawab :



Gambar 4. Peristiwa Bersyarat

A → Peristiwa bola 1 kuning

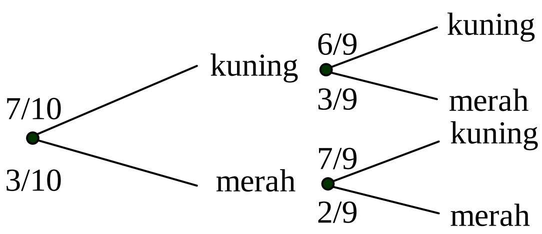
B → Peristiwa bola 2 kuning

$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B|A)$

$$= \left(\frac{7}{10}\right) \cdot \left(\frac{6}{9}\right) = \left(\frac{42}{90}\right)$$

Probabilita bersama dapat ditentukan dengan diagram pohon seperti berikut :

Probabilita Bersyarat



Probabilita Bersama

Kuning dan Kuning = $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

Kuning dan Merah = $\frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$

Merah dan Kuning = $\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$

Merah dan Merah = $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$

Jumlah = 90/90=1,00

Gambar 5. Diagram Pohon

3.4 Distribusi Probabilita Diskrit

Distribusi probabilita adalah daftar semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan yang disertai dengan masing-masing probabilita dari hasil tersebut.

Variabel acak diskrit adalah sebuah variabel yang hanya dapat mempunyai nilai-nilai tertentu yang terpisah secara jelas sebagai hasil dari perhitungan sesuatu yang menjadi perhatian.

Menentukan Rata-rata Hitung, Varians, Standar Deviasi, dan Koefisien Variasi

1. Rata-rata = $\mu_x = X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + \ldots\ldots + X_NP(X_N)$

   $$\mu_x = \sum_{i=1}^{N} XiP(Xi)$$

   Rata-rata hitung biasa disebut ekspektasi (nilai harapan matematis)

   $$E(x) = \sum_{i=1}^{N} XiP(Xi)$$

2. Varians = $\sigma_x^2 = (X_1 - \mu_x)^2 P(X_1) + (X_2 - \mu_x)^2 P(X_2) + \ldots\ldots + (X_N - \mu_x)^2 P(X_N)$

   $$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (Xi - \mu_x)^2 P(Xi)$$

3. Standar Deviasi = $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (Xi - \mu_x)^2 P(Xi)}$

4. Koefisien Variasi = $(\sigma_x / \mu) \times 100\ \%$

Contoh :

Tabel 4. Perkiraan Laba Proyek A Selama 5 tahun

Tahun	1	2	3	4	5
Probabilita	0,2	0,25	0,25	0,2	0,1
Laba (Rp/milyar)	10	20	40	50	20

Tentukan rata-rata hitung, varians, standar deviasi, dan koefisien variasi laba proyek di atas !

Jawab :

Tabel 5. Prosedur Penentuan Rata-rata Hitung Varians, Standar Deviasi, dan Koefisien Variasi

Tahun	Probabilitas P(Xi)	Xi(Rp M)	Xi . P(Xi)	$(Xi - \mu_x)^2 P(Xi)$
1	0,2	10	2	72,2
2	0,25	20	5	20,25
3	0,25	40	10	30,25
4	0,2	50	10	88,2
5	0,1	20	2	8,1
Jumlah	1,0		29	219

$\mu_x = \sum_{i=1}^{N} XiP(Xi) = 29$

Varians = $\sigma_x^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N} (Xi - \mu_x)^2 P(Xi) = 219$

Standar deviasi = $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^{\ 2}}\ \sqrt{219} = 14{,}7986$

Koefisien Variasi = (σ_x / μ) x 100 %

Koefisien Variasi = (14,7986 / 29) x 100 % = 51,03 %.

Contoh penggunaan pada asuransi :

Sebuah perusahaan menjual polis asuransi senilai Rp 100.000.000,- untuk sebuah rumah yang terbakar habis dengan premi Rp 5.000.000,- per tahun. Berdasarkan catatan dari dinas kebakaran kota setiap tahun 4 buah rumah terbakar habis dari 1000 rumah yang ada. Berapakah harapan keuntungan perusahaan asuransi tersebut ?

Jawab :

A adalah peristiwa rumah tidak terbakar P(A) = 0,996 → $\frac{996}{1000}$

uang masuk X_A = Rp 5.000.000,-

B adalah peristiwa rumah terbakar habis P(B) = 0,004 → $\frac{4}{1000}$

uang keluar X_B = Rp 100.000.000 – Rp 5.000.000 = Rp 95.000.000,-

$E(X) = P(X_A)\, X_A + P(X_B)\, X_B$

$= 0,996(5.000.000) + 0,004(-95.000.000) = 4.980.000 – 380.000 =$

4.600.000

Nilai harapan matematis keuntungan perusahaan asuransi tersebut adalah Rp. 4.600.000,-.

BAB IV

DISTRIBUSI BINOMIAL

4.1 Pengertian

Distribusi binomial adalah distribusi yang membagi kejadian di alam/masyarakat ke dalam 2 kategori yaitu : berhasil dan gagal

Meskipun dalam kenyataannya kejadian di alam/masyarakat dapat memiliki lebih dari 2 kemungkinan hasil, namun hal tersebut masih dapat didekati dengan distribusi binomial.

Contoh :

1. Pertandingan sepak bola, hasil yang mungkin
   - Menang → Berhasil
   - Seri
   - Kalah

   Seri, Kalah → Gagal
2. Kegiatan bisnis, hasil yang mungkin
   - Laba → Berhasil
   - BEP
   - Rugi

   BEP, Rugi → Gagal
3. Seleksi Produk
   - Diperoleh produk rusak → Berhasil
   - Diperoleh produk bagus* → Gagal

* Maksudnya jika ketika pemilihan produk yang rusak tapi yang terpilih malah produk yang bagus.

Distribusi Binomial Memiliki Ciri-ciri sebagai Berikut :

1. Tiap percobaan dirumuskan dengan ruang sample

   S = {B,G}
2. Probabilitas sukses pada tiap-tiap percobaan haruslah sama dinyatakan dalam p demikian juga probabilita gagal dari tiap-tiap percobaan haruslah sama dan dinyatakan dalam q maka :

$p + q = 1$

$p = 1 - q$

$q = 1 - p$

3. Setiap percobaan harus independent (bebas / berdiri sendiri)
4. Jumlah percobaan yang merupakan komponen eksperimen harus tertentu.

4.2 **Penentuan Probabilita pada Distribusi Binomial**

Bila sebuah eksperimen terdiri dari n percobaan binomial dengan probabilita p bagi sukses dan q bagi gagal pada tiap-tiap percobaan, maka fungsi frekuensi variabel random X dapat dinyatakan sebagai berikut ;

$$B(x/n,p) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; x = 0,1,2,3,...,n$$

X → menyatakan variabel

x → menyatakan jumlah

Contoh :

Setelah diadakan penyelidikan bertahun-tahun terhadap hasil foto copy mesin merk y maka diketahui bahwa pada tiap mengkopi kertas HVS A4 1.500 lembar akan terjadi kerusakan sebanyak 150 lembar. Dalam mengkopi 4 lembar kertas HVS A4 di atas, berapakah probabilita untuk menemukan 0,1,2,3,4 helai kerusakan.

Jawab :

Peristiwa kertas rusak disebut peristiwa sukses dengan probabilita p.

$$p = \frac{150}{1500} = 0,1$$

Peristiwa kertas tidak rusak disebut peristiwa gagal dengan probabilita q

q = 1 – p

= 1 – 0,1

= 0,9

n = 4

x = 0

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X=0) = \binom{4}{0}(0,1)^0 (0,9)^4 = \frac{4!}{0!4!}(1)(0,6561) = 0,6561$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1}(0,1)(0,9)^3 = \frac{4!}{1!3!}(0,1)(0,9)^3 = 0,2916$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2}(0,1)^2 (0,9)^2 = \frac{4!}{2!2!}(0,01)(0,81) = \frac{4(3)(2!)}{2!2X1}(0,01)(0,81) = 6(8,1X10^{-3})$$

$$= 0,0486$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3}(0,1)^3 (0,9)^1 = \frac{4!}{3!1!}(0,001)(0,9) = \frac{4(3!)}{3!(1)}(0,0009) = 0,0036$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4}(0,1)^4 (0,9)^0 = \frac{4!}{4!0!}(0,0001)(1) = 0,0001$$

4.3 Distribusi Binomial Kumulatif

Distribusi Binomial dapat ditentukan dengan distribusi kumulatif untuk memahaminya lihat contoh berikut :

Contoh :

Bila sekeping uang logam yang setimbang dilempar sebanyak 5 kali

a. Berapakah probabilita memperoleh 4 sisi gambar garuda di atas.

b. Berapakah probabilita memperoleh paling sedikit 4 sisi gambar garuda di atas.

Jawab :

a. Peristiwa sisi gambar garuda di atas disebut peristiwa sukses dengan probabilita p = 0,5

   Peristiwa bukan sisi gambar garuda di atas disebut peristiwa gagal dengan probabilita q = 0,5

   P(X=4) = $\binom{5}{4}(0{,}5)^4\,(0{,}5)^1 = \frac{5!}{4!1!}(0{,}5)^5 = \frac{5(4!)}{4!(1)}(0{,}03125) = 0{,}15625$

   (Distribusi Binomial)

b. P(X $\geq$ 4) = P(X=4) + P(X=5) = 0,15625 + $\binom{5}{5}(0{,}5)^5\,(0{,}5)^0$

   $= 0{,}15625 + \frac{5!}{5!0!}(0{,}5)^5(1)$ = 0,15625 + 0,03125 = 0,1875

(Distribusi Binomial Kumulatif)

4.4 Rata-rata, Varians, dan Deviasi Standar pada Distribusi Binomial

Rata-rata → $\mu x =$ np

Varians → σ^2_x = npq

Deviasi Standar → σx = $\sqrt{\sigma x^2} = \sqrt{npq}$

Sekeping uang logam yang setimbang dilempar 6 kali, berapakah rata-rata, varians, dan deviasi standar munculnya sisi gambar di atas.

Jawab :

Peristiwa sisi gambar di atas → peristiwa sukses → p = 0,5

Peristiwa bukan gambar di atas → peristiwa gagal → q = 0,5

n=6

Rata-rata → $\mu x =$ np = 6 (0,5) = 3

Varians $\rightarrow$ σx^2 = npq = 6 (0,5) (0,5) = 1,5

Deviasi Standar $\rightarrow$ $\sigma x = \sqrt{\sigma x^2} = \sqrt{npq} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225$

4.5 Penyelarasan Distribusi Binomial pada Distribusi Frekuensi Penarikan Sampel

Selama ini penentuan probabilita sukses pada distribusi binomial dilakukan secara matematis, teoritis, atau apriori. Sebenarnya penentuan p dapat dilakukan melalui eksperimen. Untuk memahami hal ini lihat contoh berikut.

Contoh :

Sebuah observasi sampel terhadap 100 keluarga yang memiliki 4 anak telah memberikan data mengenai jumlah keluarga yang memiliki 0,1,2,3,4 anak perempuan sebagai berikut :

Tabel 6. Jumlah Anak Perempuan dan Jumlah Keluarga

Xi	0	1	2	3	4
fi	3	31	35	25	6

Bila probabilita untuk melahirkan seorang anak perempuan adalah konstan maka gunakan data aktual di atas untuk menentukan probabilita tersebut.

Jawab :

Peristiwa melahirkan anak perempuan $\rightarrow$ peristiwa sukses (probabilita p)

Rata-rata distribusi binomial $\rightarrow$

μx = np
μx = 4p

Rata-rata sampel → $\bar{x} = \frac{\sum fi.xi}{\sum fi}$

$$\bar{x} = \frac{3(0)+31(1)+(35)2+25(3)+6(4)}{3+31+35+25+6}$$

$$= \frac{0+31+70+75+24}{100} = \frac{200}{100} = 2$$

Rata-rata distribusi binomial = rata-rata distribusi frekuensi penarikan sampel.

$\mu_x = \bar{x}$

4p = 2

p = 0,5

4.6 Distribusi Hipergeometris

Bila sebuah populasi N memiliki sejumlah K unsur yang sama dan N-K unsur lain yang sama, dan bila sejumlah n unsur dipilih secara random tanpa pemulihan, maka probabilita unsur yang terpilih akan terdapat sejumlah k unsur K sebagai berikut :

$$f(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Contoh :

Sebuah peti terisi dengan 50 helai kain batik dan di antara 50 helai kain tersebut terdapat 5 helai kain yang rusak. Bila dipilih secara random 4 helai kain dari peti tersebut, maka berapakah probabilita untuk memilih 0,1,2,3, dan 4 kain yang rusak.

Jawab :

N = 50 K = 5

k = 0,1,2,3,4 n = 4

$$k = 0 \rightarrow f(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{45}{4}}{\binom{50}{4}}$$

$$= \frac{\left(\frac{5!}{0!5!}\right)\left(\frac{45!}{4!41!}\right)}{\left(\frac{50!}{4!46!}\right)}$$

$$= \frac{(1)\left\{\frac{45x44x43x42x41!}{4x3x2x1x41!}\right\}}{\left\{\frac{50x49x48x47x46!}{4x3x2x1x46!}\right\}} = \frac{\frac{3.575.880}{24}}{\frac{5.527.200}{24}} = \frac{148.995}{230.300} = 0,64696$$

$$k=1 \rightarrow f(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{45}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{4!1!}\right)\left(\frac{45!}{3!42!}\right)}{\left(\frac{50!}{4!46!}\right)} = \frac{(5)\left(\frac{45(44)(43)(42!)}{3(2)(1)(42!)}\right)}{\left(\frac{50(49)(48)(47)(46!)}{4(3)(2)(1)(46!)}\right)} = \frac{70950}{230.300} = 0,3081$$

$$k=2 \rightarrow f(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{45}{2}}{\binom{50}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{2!3!}\right)\left(\frac{45!}{2!43!}\right)}{230.300} = \frac{\left(\frac{5(4)(3!)}{2(1)(3!)}\right)\left(\frac{45(44)(43!)}{2(1)(43!)}\right)}{230.300} = \frac{10(990)}{230.300} = \frac{9900}{230.300} = 0,04299$$

$$k=3 \rightarrow f(3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{45}{1}}{\binom{50}{4}}$$

$$k=4 \rightarrow f(4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{45}{0}}{\binom{50}{4}}$$

BAB V
DISTRIBUSI POISSON

5.1 Pengertian

Penentuan probabilita pada distribusi binomial relatif lebih sulit apabila *p* < 0,1 dan n>50 untuk mengatasinya digunakan distribusi poison. Distribusi Poison memiliki fungsi frekuensi f(x) = $\frac{\mu_x^{\,x}\, e^{-\mu_{x_x}}}{x!}$, μ_x = np

5.2 Penentuan Probabilita pada Distribusi Poison

Penentuan probabilita pada distribusi poison menggunakan fungsi frekuensi di atas. Untuk memahaminya lihat contoh :

Contoh : Menurut pengalaman manajemen lembaga penerbit FE UI, rata-rata seorang dari 100 orang sarjana ekonomi yang berdiam di kota Indonesia tertentu akan mengirim wesel untuk berlangganan majalah "EKONOMIKA" . Bila lembaga penerbit melakukan promosi keniagaan dengan jalan mengirim masing-masing 50 surat untuk berlangganan yang telah dibubuhi perangko kepada sarjana-sarjana yang berdiam di kota-kota bersangkutan, maka berapakah probabilita lembaga badan penerbit akan menerima kembali permintaan untuk berlangganan sebanyak 0,1,2,3,4,5 dari masing-masing kota bersangkutan ?

Jawab :

n = 50 p = $\frac{1}{100}$ μ_x = np = 50 $\left(\frac{1}{100}\right)$ = 0,5

x = 0

f(x) = $\frac{\mu_x^{\,x}\, e^{-\mu_x}}{x!}$

$$f(0) = \frac{0{,}5^0 \; e^{-0{,}5}}{0!} = \frac{1\left(e^{-0{,}5}\right)}{1} = \frac{1}{e^{0{,}5}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}71828}} = 0{,}60653$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{0{,}5^1\left(e^{-0{,}5}\right)}{1!} = \frac{0{,}5(0{,}60653)}{1} = 0{,}303265$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{0{,}5^2\left(e^{-0{,}5}\right)}{2!} = \frac{0{,}25(0{,}60653)}{2(1)} = 0{,}075816$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = \frac{0{,}5^3\left(e^{-0{,}5}\right)}{3!} = \frac{0{,}125(0{,}60653)}{3(2)(1)} = 0{,}012636$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{0{,}5^4\left(e^{-0{,}5}\right)}{4!} = \frac{0{,}0625(0{,}60653)}{4(3)(2)(1)} = 0{,}0015795$$

$$x = 5 \rightarrow f(5) = \frac{0{,}5^5\left(e^{-0{,}5}\right)}{5!} = \frac{0{,}03125(0{,}60653)}{5(4)(3)(2)(1)} = 0{,}00015795$$

5.3 Rata-rata Varians dan Deviasi Standar

Rata-rata → $\mu_x = np$

Varians → $\sigma x^2 = np$

Deviasi Standar → $\sigma x = \sqrt{\sigma x^2} = \sqrt{np}$

BAB VI
DISTRIBUSI NORMAL

6.1 Pengertian

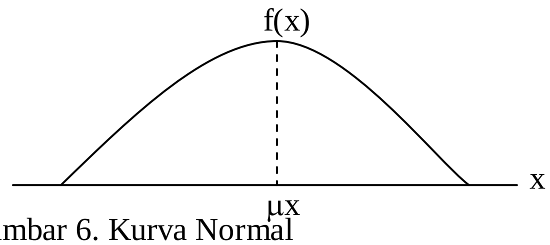
Merupakan distribusi teoritis dari variabel random yang continue.

Distribusi ini dapat diterapkan pada berbagai bidang aplikasi.

Fungsi frekuensinya sebagai berikut :

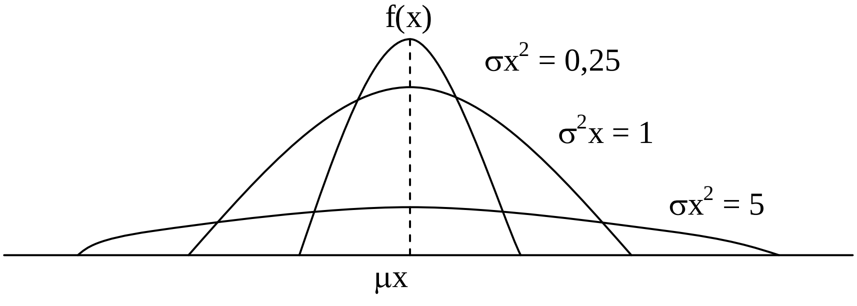
$$F(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\,\ell^{-\left(\frac{1}{2}\sigma x^2\right)(x-\mu_X)^2}$$

Kurva distribusi normal berbentuk lonceng (genta) yang simetris

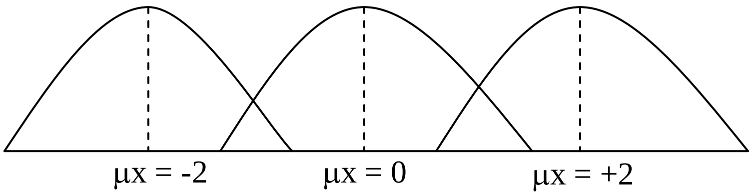


Gambar 6. Kurva Normal

Bentuk kurva normal dipengaruhi oleh μx dan σx^2 untuk memahami liat gambar



Gambar 7. Kurva Normal dengan μx sama dan σx^2 Berbeda



Gambar 8. Kurva normal dengan σx^2 sama dan μx berbeda

6.2 Penentuan Probabilita pada Distribusi Normal

Distribusi normal merupakan distribusi variabel random yang continue oleh karena itu penentuan probabilita dilakukan dengan cara mencari luas di bawah kurva normal di atas sumbu horizontal pada interval tertentu. Luas tersebut dapat ditentukan dengan integral tertentu. Namun mengingat fungsi frekuensi distribusi normal sangat rumit, maka penentuan integralnya juga sangat sulit. Untuk mengatasi hal ini digunakan distribusi normal standar dengan variabel random normal standar yang memiliki $\mu_z = 0$ dan $\sigma_z = 1$.

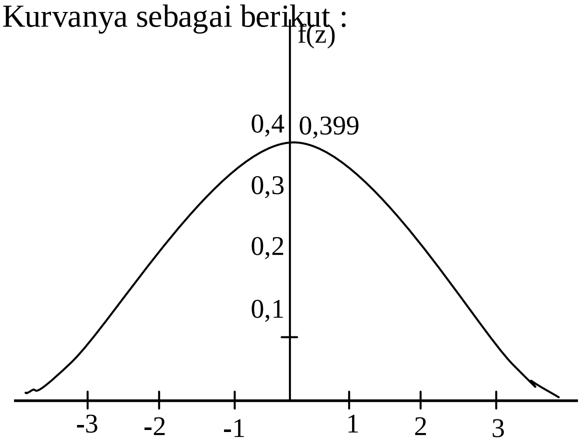
Variabel random normal yang continue dapat diubah menjadi variabel normal yang standar dengan rumus sebagai berikut :

$$Z = \frac{X - \mu x}{\sigma x}$$

Fungsi frekuensi distribusi normal standar adalah :

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)z^2}$$

Kurvanya sebagai berikut :



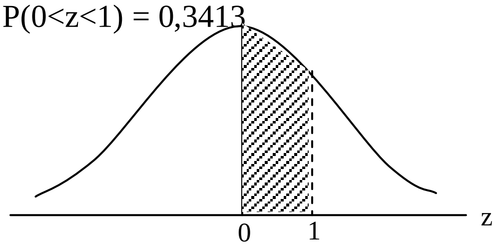
Gambar 9. Kurva Normal Standar

Penentuan probabilita dilanjutkan dengan menggunakan tabel luas kurva normal standar.

Contoh :

1. Berapakah probabilita variabel random normal yang standar merupakan nilai antara 0 dan 1

   P(0<z<1) = 0,3413



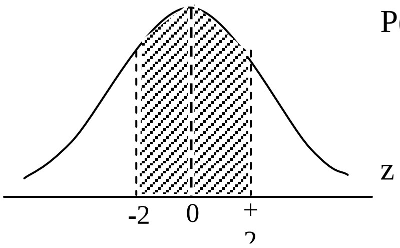
   <u>Catatan :</u>

   Luas di bawah kurva normal standar di atas sumbu horizontal adalah 1

   Luas separuh area di bawah kurva normal standar di atas sumbu horizontal adalah 0,5

2. Berapakah probabilita variabel random normal yang standar merupakan nilai antara -2 dan 2

   <u>Jawab :</u>

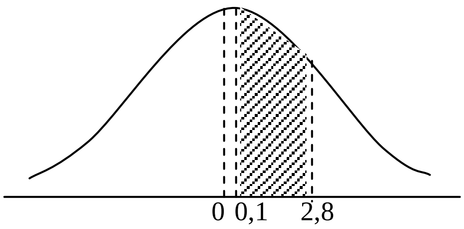


$P(-2<z<2) = P(-2<z<0) + P(0<z<2)$

$= 0{,}4772 + 0{,}4772$

$= 0{,}9544$

3. Berapakah probabilita variabel random yang standar merupakan nilai antara 0,1 dan 2,8

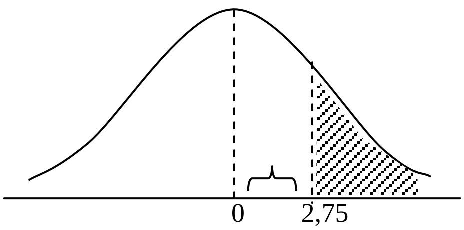


$P(0{,}1<z<2{,}8) = P(0<z<2{,}8) - P(0<z<0{,}1)$

$= 0{,}4974 - 0{,}0398$

$= 0{,}4576$

4. Berapakah probabilita variabel random yang standar merupakan nilai > 2,75

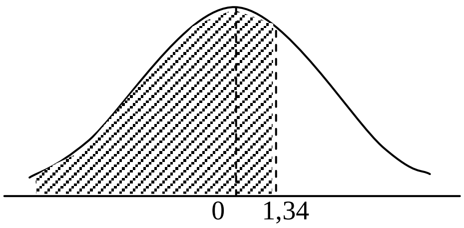


$P(z>2{,}75) = 0{,}5 - P(0<z<2{,}75)$

$= 0{,}5 - 0{,}4970$

$= 0{,}0030$

5. Berapakah probabilita variabel random normal yang standar merupakan nilai < 1,34

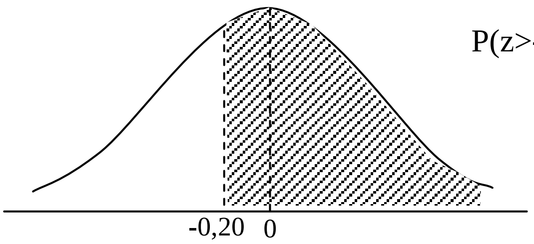


$P(z<1{,}34) = 0{,}5 + P(0<z<1{,}34)$

$= 0{,}5 + 0{,}4099$

$= 0{,}9099$

6. Berapakah probabilita variabel random normal yang standar merupakan nilai > -0,20

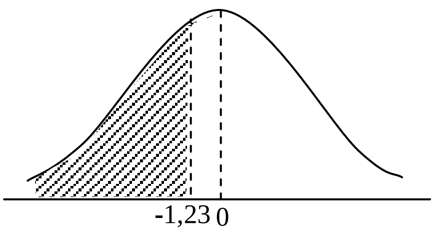


$P(z>-0{,}20) = P(-0{,}20<z<0) + 0{,}5$

$= 0{,}0793 + 0{,}5$

$= 0{,}5793$

7. Berapakah probabilita variabel random normal standar merupakan nilai < -1,23



$P(z<-1{,}23) = 0{,}5 - P(-1{,}23<z<0)$

$= 0{,}5 - 0{,}3907$

$= 0{,}1093$

8. Dari pengiriman sebanyak 1.000 ream kertas HVS 80 gram diketahui bahwa rata-rata tiap reamnya terisi dengan 450 lembar dengan deviasi standar sebesar 10 lembar. Jika distribusi jumlah kertas per ream tersebut dapat didekati dengan kurva normal, maka berapa % dari ream kertas di atas yang terisi dengan 455 lembar atau lebih.

<u>Jawab :</u>

N = 1.000

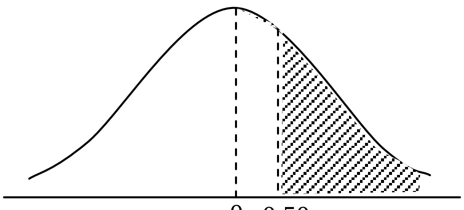
$\mu_x = 450,\ \sigma_x = 10$

$P(x \geq 455)$ $= P(z \geq 0{,}50)$

$= 0{,}5 - P\ (0 < z < 0{,}50)$

$= 0{,}5 - 0{,}1915$

$= 0{,}3085$

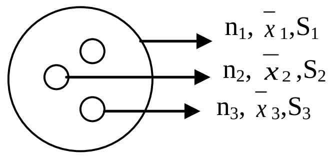


$$z = \frac{x - \mu x}{\sigma x} = \frac{455 - 450}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}50$$

BAB VII

DISTRIBUSI SAMPEL

7.1 Pengertian



Gambar 10. Distribusi Sampel

Rata-rata dari rata-rata sampel → $\mu_{\bar{x}} = \mu x$

Deviasi standar dari rata-rata sampel → $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma x}{\sqrt{n}}$ untuk populasi tidak terbatas.

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma x}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

$\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ faktor koreksi deviasi standar populasi terbatas tanpa pemulihan.

Jika N sangat besar, maka $\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = 1$

Contoh :

N = 10.000.000

n = 50

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{9.999.950}{9.999.999}} = 0{,}99999755$$

7.2 Penentuan Probabilita Distribusi Pemilihan Sampel dengan Luas Kurva Normal

Untuk penentuan probabilita harus ditentukan terlebih dahulu nilai z-nya dengan cara sebagai berikut :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu x}{\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}}$$ → untuk populasi tidak terbatas

$$z = \frac{\bar{x} - \mu x}{\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$ → untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

<u>Contoh :</u>

Telah diketahui bahwa distribusi kecepatan maksimal dari 1.000 mobil sedan merek tertentu memiliki rata-rata 148,2 km/jam dengan deviasi standar 5,4 km/jam jika sebuah sampel yang terdiri dari 100 mobil tersebut dipilih secara random tanpa pemulihan, maka berapakah probabilita kecepatan rata-rata dari 100 mobil tersebut > 149 km/jam?

<u>Jawab :</u>

N = 1.000 μ_x = 148,2 km/jam

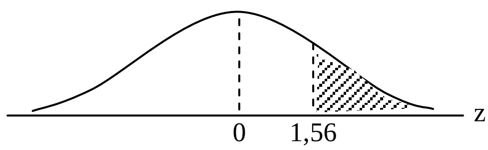
n = 100 σ_x = 5,4 km/jam

$P(\bar{x} > 149) = P(z > 1{,}56)$

$= 0{,}5 - P\,(0<z<1{,}56)$

$= 0{,}5 - 0{,}4406$

$= 0{,}0594$



$$z = \frac{\bar{x} - \mu x}{\frac{\sigma x}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{149 - 148{,}2}{\frac{5{,}4}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{900}{999}}} = \frac{0{,}8}{0{,}54\,(0{,}9492)} = 1{,}56$$

1. Kantong-kantong semen yang diisi secara otomatis memiliki berat dengan distribusi normal yang rata-rata 50 kg dan deviasi standar 3,2 kg. Jika kita memilih secara random dari populasi kantong semen tersebut, maka berapakah probabilita rata-rata kantong tersebut <48 kg, jika n = 4 kantong, n = 16 kantong, n = 64 kantong?

2. Rantai sepeda memiliki panjang yang didistribusikan secara normal dengan rata-rata 50 cm dan deviasi standar 4 cm. Panjang yang ditetapkan sesuai dengan kualitas pabrik adalah antara 49 cm dan 51 cm. Jika pabrik di atas memproduksi 100 rantai maka berapakah persentasi yang dapat memenuhi kualitas pabrik tersebut?

BAB VIII
PENDUGAAN PARAMETER

8.1 Pengertian

	Sampel		Populasi	
Statistik Sampel	$\bar{x}$ = Rata-rata hitung sampel	→	μ = Rata-rata hitung populasi	Parameter Populasi
	s^2 = Varian sampel	→	σ^2 = Varians populasi	
	s = Deviasi standar sampel	→	σ = Deviasi standar populasi	
	$\breve{P}$ = Proporsi sampel	→	p = Proporsi populasi	

Gambar 11. Diagram Hubungan antara Statistik Sampel dan Parameter Populasi

Secara statistik pendugaan dilakukan dengan 2 cara yaitu :

1. Pendugaan titik → Tingkat keyakinan **tidak** dapat ditentukan
2. Pendugaan interval → Tingkat keyakinan **dapat** ditentukan

8.2 Pendugaan Parameter dengan Sampel Besar (n≥ 30)

Pendugaan parameter dengan sampel besar dilakukan dengan menggunakan distribusi z.

1. Pendugaan parameter μx dengan σx diketahui dan populasi tidak terbatas

   Proses pendugaan sebagai berikut :

$$P\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} < \mu x < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\right) = \overbrace{1-\alpha}^{\text{Koefisien Keyakinan (confidence)}}$$

   untuk populasi tidak terbatas

Contoh :

Sebuah biro pariwisata dijakarta ingin mengetahui rata-rata pengeluaran wisatawan asing per kunjungannya di Indonesia. Untuk itu dipilih secara random 100 wisman dari populasinya dan diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan rata-rata pengeluaran sebesar U$ 800 per wisman per kunjungan di Indonesia. Jika dianggap deviasi standar dari pengeluaran semua wisman kurang lebih konstan yaitu U$ 120, maka buatlah interval keyakinan sebesar 95% guna menduga rata-rata pengeluaran seluruh wisman per kunjungannya di Indonesia.?

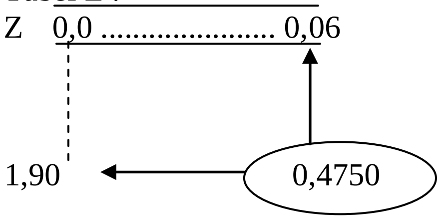
Jawab :

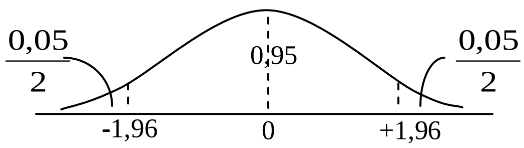
Populasi tidak terbatas

n = 100 $\bar{x}$ = U$ 800 σx = U$ 120

1-∝ = 0,95 ∝ = 0,05 $Z_{\frac{0,05}{2}} = 1,96$

Tabel Z :





$$P\left(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma x}{\sqrt{n}} < \mu x < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left[800 - 1,96\left(\frac{120}{\sqrt{100}}\right) < \mu x < 800 + 1,96\left(\frac{120}{\sqrt{100}}\right)\right] = 0,95$$

P(800-23,52 < μx < 800 + 23,52) = 0,95

P(776,48 < μx < 823,52) = 0,95

P(776,48 < μx < 823,52 = 0,95

Jadi pada keyakinan 95% rata-rata pengeluaran wisman setiap kunjungannya di Indonesia antara US $ 776,48 /wisman/kunjungan dan US $ 823,52 per kunjungan/wisman.

2. Pendugaan Parameter μx dengan σx diketahui dan populasi terbatas.

   Proses pendugaan sebagai berikut :

$$P\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu x < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$$

Populasi terbatas tanpa pemulihan

<u>Contoh :</u>

Bagian akademik sebuah universitas terkenal ingin mengetahui rata-rata IQ mahasiswa baru yang diterima pada semester ganjil tahun akademik 2008-2009 yang berjumlah 5.000 orang. Untuk itu dipilih secara random 121 mahasiswa dan dilakukan tes IQ. Hasil tes menunjukkan rata-rata IQ sebesar 128. Bagian Akademik yakin bahwa deviasi standar IQ mahasiswa baru masih sama dengan tahun sebelumnya yaitu sebesar 22. Buatlah interval keyakinan 99% guna menduga rata-rata IQ seluruh mahasiswa baru perguruan tinggi tersebut yang diterima pada semester ganjil tahun akademik 2008-2009.

<u>Jawab :</u>

N = 5.000	$\bar{x}$ = 128	1-∝ = 0,99	$Z_{\frac{0,01}{2}} = 2,575^{*}$
n = 121	σx = 22	∝ = 0,01	

$^{*} = 2,575 = \dfrac{2,575 + 2,58}{2}$

Tabel Z :

Z 0,0 .... 0,07 0,08

2,5 0,4949 0,4951

$$P\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu x < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left[128 - 2{,}575\left(\frac{22}{\sqrt{121}}\right)\sqrt{\frac{4879}{4999}} < \mu x < 128 + 2{,}575\left(\frac{22}{\sqrt{121}}\right)\sqrt{\frac{4879}{4999}}\right] = 0{,}99$$

P{128-2,575 (2) (0,9879) < μx < 128 + 2,575 (2) (0,9879)] = 0,99

P(128-5,0877 < μx < 128 + 5,0877) = 0,99

P(122,91 < μx < 133,09) = 0,99

Pada keyakinan 99% rata-rata IQ mahasiswa baru universitas tersebut yang diterima pada semester ganjil Tahun Akademik 2008-2009 yang berjumlah 5000 orang antara **122,91 dan 133,09**

3. Pendugaan Parameter μx dengan σx tidak diketahui

   Jika deviasi standar populasi (σx) tidak diketahui, maka digunakan deviasi standar sampel (s). Proses pendugaannya sebagai berikut :

$$P\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu x < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Untuk populasi tidak terbatas

untuk populasi terbatas tanpa pemulihan dianjurkan menggunakan distribusi t (t student).

Contoh :

Sebuah lembaga riset ingin mengetahui rata-rata pengeluaran setiap karyawan setiap kali makan siang di Jakarta. Untuk itu dipilih secara random 144 karyawan dari seluruh karyawan di DKI dan diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan rata-rata pengeluaran sebesar Rp 10.000/makan siang/orang dengan deviasi standar yang dihitung dari sampel tersebut sebesar Rp 6.000,-. Buatlah interval keyakinan 95% guna menduga rata-rata pengeluaran seluruh karyawan setiap kali makan siang di Jakarta.

Jawab :

Populasi tidak terbatas

n = 144 $\bar{x}$ = Rp 10.000,-/orang/makan siang 1-$\propto$ = 0,95

$Z_{\frac{0,05}{2}} = 1,96$ $\propto$ = 0,05

$$P\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu x < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left[10.000 - 1,96\left(\frac{6.000}{\sqrt{144}}\right) < \mu x < 10.000 + 1,96\left(\frac{6.000}{\sqrt{144}}\right)\right] = 0,95$$

$$P[10.000 - 1,96(500) < \mu x < 10.000 + 1,96(500)] = 0,95$$

$$P(10.000 - 980 < \mu x < 10.000 + 980) = 0,95$$

$$P(9.020 < \mu x < 10.980) = 0,95$$

Pada keyakinan 95% rata-rata pengeluaran setiap karyawan setiap kali makan siang di Jakarta antara Rp 9.020,-/orang/makan siang dan Rp 10.980,-/orang/makan siang.

4. Pendugaan Parameter Proporsi Populasi (p)

Parameter proporsi populasi binomial (p) dapat diduga dengan menggunakan proporsi sampel $\left(\breve{p}=\frac{x}{n}\right)$ dengan cara sebagai berikut :

$$P\left[\frac{x}{n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}<p<\frac{x}{n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}\right]=1-\alpha$$

Untuk populasi tidak terbatas

$$P\left[\frac{x}{n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}<p<\frac{x}{n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]=1-\alpha$$

Untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

Contoh:

Dinas kesehatan kota ingin mengetahui persentasi penduduk kota dewasa yang merokok paling sedikit 1 bungkus per hari. Sebuah sampel random sebesar 300 telah dipilih dari populasi penduduk kota dewasa dan diwawancarai, hasil wawancara menunjukkan 36 orang merokok paling sedikit 1 bungkus /hari. Buatlah interval keyakinan 95% guna menduga proporsi penduduk kota dewasa yang merokok paling sedikit 1 bungkus per hari.

Jawab :

Populasi tidak terbatas

$n=300$ x = 36 $\breve{P}=\frac{x}{n}=\frac{36}{300}=012$

1-∝ = 0,95 ∝ = 0,05 $Z_{\frac{0,05}{2}}=1,96$

$$P\left[\frac{x}{n} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}} < p < \frac{x}{n} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[0{,}12 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}12(0{,}88)}{300}} < p < 0{,}12 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}12(0{,}88)}{300}}\right] = 0{,}95$$

$$P[0{,}12 - 1{,}96(0{,}018762) < p < 0{,}12 + 1{,}96(0{,}018762)] = 0{,}95$$

$$P(0{,}12 - 0{,}0368 < p < 0{,}12 + 0{,}0368) = 0{,}95$$

P(0,0832 < p < 0,1568) = 0,95

Pada keyakinan 95% persentasi penduduk kota dewasa yang merokok paling sedikit 1 bungkus per hari antara 8,32% dan 15,68%.

8.3 Pendugaan Parameter dengan Sampel Kecil (n<30)

Pendugaan parameter dengan sampel kecil dilakukan dengan menggunakan distribusi t (t student)

1. Pendugaan parameter μx dengan σx tidak diketahui dan populasi tidak terbatas.

   Prosedur pendugaannya sebagai berikut :

   $$P\left[\bar{x} - t\left(\frac{\alpha}{2}; df\right)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu x < \bar{x} + t\left(\frac{\alpha}{2}; df\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$ Untuk populasi tidak terbatas

   $\boxed{df\ =\ \mathrm{n} - 1}$

Contoh :

Sebuah lembaga riset ingin mengetahui rata-rata omzet penjualan pedagang kaki lima garmen di Jakarta. Untuk itu dipilih secara random 25 pedagang kaki lima garmen dari populasinya dan diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan rata-rata omzet penjualan sebesar Rp 72 juta/PKL/tahun dengan deviasi standar Rp 40 juta. Buatlah interval keyakinan 95% guna menduga rata-rata omzet penjualan seluruh PKL garmen di Jakarta.

Jawab :

Populasi tidak terbatas

n = 25 $\bar{x}$ = Rp 72 juta/PKL/thn s = Rp 40 juta

1-$\propto$ = 0,95 df = n-1

$\propto$ = 0,05 = 25-1 = 24

$$t\left(\frac{0{,}05}{2};24\right) = 2{,}064$$

Tabel t

df \ $\propto$	0,25	0,025	0,0005
⋮		↓	
24 →		2,064	

$$\mathrm{P}\left[\bar{x} - t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu x < \bar{x} + t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\mathrm{P}\left[72 - 2{,}064\left(\frac{40}{\sqrt{25}}\right) < \mu x < 72 + 2{,}064\left(\frac{40}{\sqrt{25}}\right)\right] = 0{,}95$$

$P(72-16{,}512 < \mu x < 72 + 16{,}512) = 0{,}95$

$P(55{,}488 < \mu x < 88{,}512) = 0{,}95$

Pada keyakinan 95% rata-rata omzet penjualan PKL garmen di Jakarta antara Rp 55,488 juta/PKL/thn dan Rp 88,512 juta/PKL/thn.

2. Pendugaan parameter μx dengan σx tidak diketahui dan populasi terbatas

$$P\left[\bar{x} - t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu x < \bar{x} + t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right] = 1-\alpha$$

Untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

Contoh :

Panitia pameran produk tertentu ingin mengetahui pengeluaran setiap pengunjung pada pameran bulan Oktober 2008 yang berjumlah 1.000 orang. Untuk itu dipilih secara random 25 orang pengunjung dan diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan rata-rata pengeluaran sebesar Rp 5.000.000,- dengan deviasi standar Rp 3.000.000,-. Buatlah interval keyakinan 95% guna menduga rata-rata pengeluaran seluruh pengunjung yang berjumlah 1.000 orang.

Jawab :

N = 1.000 $\bar{x}$ = Rp 5 juta $1-\propto = 0{,}95$

n = 25 s = Rp 3 juta $\propto = 0{,}05$

df = n-1 = 25-1 = 24

$$t\left(\frac{0{,}05}{2};24\right) = 2{,}064$$

$$P\left[5-2{,}064\left(\frac{3}{\sqrt{25}}\right)\sqrt{\frac{975}{999}} < \mu x < 5+2{,}064\left(\frac{3}{\sqrt{25}}\right)\sqrt{\frac{975}{999}}\right]=0{,}95$$

P(5-1,22 < μx < 5 + 1,22) = 0,95

P(3,78 < μx<6,22) = 0,95

Pada keyakinan 95 % rata-rata pengeluaran 1000 pengunjung pameran antara Rp 3,78 juta/orang dan Rp 6,22 juta/orang.

3. Pendugaan parameter proporsi populasi (p)

Dengan sampel sedang 50<n<100 pendugaan parameter proporsi populasi (p) dapat dilakukan menggunakan distribusi t. Proses pendugaanya sebagai berikut :

$$P\left[\frac{x}{n}-t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}} < p < \frac{x}{n}+t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}\right]=1-\alpha$$

untuk populasi tidak terbatas

Contoh :

Bagian riset sebuah perusahaan bioskop tertentu ingin mengetahui presentasi remaja yang menonton film di bioskop paling sedikit 1 kali dalam seminggu. Untuk itu dipilih secara random 61 orang remaja dari populasinya untuk diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan 25 orang remaja menonton di bioskop paling sedikit sekali dalam seminggu. Buatlah interval keyakinan 95% guna menduga proporsi seluruh remaja yang menonton paling sedikit 1 kali dalam seminggu.

Jawab :

Populasi tidak terbatas

n = 61 df = n-1 $\breve{P} = \frac{x}{n}$ 1-∝ = 0,95

x = 25 = 60 $= \frac{25}{61} = 0{,}4098$ ∝ = 0,05

$$t\left(\frac{0{,}05}{2};60\right) = 2{,}000$$

$$\mathrm{P}\left[0{,}4098 - 2{,}000\sqrt{\frac{0{,}4098(0{,}5902)}{61}} < p < 0{,}4098 + 2{,}000\sqrt{\frac{0{,}4098(0{,}5902)}{61}}\right] = 0{,}95$$

P[0,4098-0,1259 < p < 0,4098 + 0,1259] = 0,95

P(0,2839 < p < 0,5357) = 0,95

Pada keyakinan 95% persentasi remaja yang menonton di bioskop paling sedikit sekali dalam seminggu antara 28,39% s/d 53,57%

BAB IX
PENGUJIAN HIPOTESIS

9.1 Pengertian

Hipotesis
- Hypo = sebelum
- Thesis = Dalil

Dalil yang belum sepenuhnya menjadi dalil

Hipotesis → Jawaban sementara suatu penelitian/masalah yang kebenarannya harus dapat diuji secara empiris

Dalam pengujian hipotesis hasil yang diperoleh tidak harus sesuai dengan keinginan kita. Dalam kegiatan ekonomi kita selalu dihadapkan pada pengujian hipotesis.

Contoh :

Sebuah pabrik bola lampu neon telah menetapkan spesifikasi umur teknis rata-rata 1.000 jam. Dengan berjalannya waktu, mesin dan peralatan yang digunakan untuk memproduksi bola lampu neon tersebut mengalami keausan sehingga mungkin saja menyebabkan rata-rata umur teknis produk yang dibuat tidak sesuai lagi dengan spesifikasi yang telah ditetapkan. Untuk membuktikan hal ini harus dipilih secara random sejumlah produksi sebagai sampel dan dilakukan pengukuran. Setelah dilakukan pengukuran ternyata rata-rata umur teknis 900 jam. Apakah angka 900 jam tersebut masih dapat ditoleransi/dapat menjadi perhatian serius.

9.2 Prosedur Dasar tentang Pengujian Hipotesis

Pengujian Hipotesis membutuhkan langkah-langkah dasar sebagai berikut:

1. Nyatakan Hipotesis 0 (H_0) dan Hipotesis Alternatifnya (H_1)
2. Pilih taraf nyata Alfa ($\propto$) tertentu dan tentukan besaran sampel n
3. Pilih statistik uji yang sesuai sebagai dasar bagi prosedur pengujian, hal ini tergantung pada asumsi tentang distribusi dan hipotesisnya.
4. Tentukan daerah kritis, hal tersebut tergantung pada hipotesis alternatif
5. Kumpulkan data sampel dan hitung statistik sampel serta ubah ke dalam variabel standar z atau t.
6. Bandingkan nilai z hitung atau t hitung dengan daerah kritis dan bila z hitung/ t hitung tersebut terletak pada daerah kritis, maka H_0 ditolak dan H1 diterima, berbeda nyata (significant) pada taraf nyata $\propto$ = 0,05 atau berbeda sangat nyata (very significant) pada taraf nyata $\propto$ = 0,01.

Catatan :

1. $\propto$ = 0,05, dikatakan uji lemah
   $\downarrow$
   Merupakan taraf nyata yang digunakan
2. $\propto$ = 0,01, dikatakan uji kuat
3. Daerah kritis uji 2 arah adalah sebagai berikut :

$$Z_{hitung} > Z_{\frac{\alpha}{2}} \; dan \; Z_{hitung} < -Z_{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow Sampel\ Besar\ (n \geq 30)$$

$t_{hit} > t\left(\frac{\alpha}{2};df\right)$ dan $t_{hit} < -t\left(\frac{\alpha}{2};df\right) \rightarrow Sampel\ Kecil\ (n < 30)$

4. Daerah kritis uji 1 arah

$$Z_{hitung} > Z_{\alpha} \text{ atau } Z_{hitung} < -Z_{\alpha} \quad Sampel\ Besar\ (n \geq 30)$$

$$t_{hitung} > t_{(\alpha;df)} \ atau \ t_{hitung} < -t(\alpha;df) \rightarrow Sampel\ Kecil\ (n < 30)$$

9.3 Beberapa Contoh Pengujian Hipotesis dengan Sampel Besar (n ≥ 30)

Pengujian hipotesis dengan sampel besar menggunakan distribusi Z

1. Pengujian parameter rata-rata, $H_0 : \mu x = \mu_0$ dengan σ_x^2 diketahui

Penentuan nilai Z hitung sebagai berikut:

$$Z_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}}$$ untuk populasi tidak terbatas

$$Z_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$ untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

Uji 2 arah

$H_0 : \mu x = \mu_0$

$H_1 : \mu x \neq \mu_0$

Daerah kritis

$$Z_{hitung} > Z_{\frac{\alpha}{2}} \ dan \ Z_{hitung} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Tentukan Z_{hitung} seperti rumus di atas :

Jika Z_{hitung} terletak pada daerah kritis, maka H_0 ditolak dan H_1 diterima berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α

Uji 1 arah	Uji 1 arah
$H0 : \mu x = \mu o$	$H0 : \mu x = \mu o$
$H1 : \mu x > \mu o$	$H1 : \mu x < \mu 0$

Daerah Kritis Daerah Kritis

$Z_{hitung} > Z_{\alpha}$ $Z_{hitung} < -Z_{\alpha}$

Tentukanlah Z_{hitung} seperti rumus di atas :

Jika Z_{hitung} terletak pada daerah kritis, maka H_0 ditolak dan H_1 diterima berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α.

Contoh uji 2 arah:

Secara teknis populasi plat baja yang dihasilkan sebuah perusahaan tertentu memiliki rata-rata panjang 80 cm dengan deviasi standar 7 cm. Setelah selang 3 tahun teknisi perusahaan meragukan data di atas. Untuk itu dipilih secara random 100 unit plat baja dan dilakukan pengukuran. Hasil pengukuran menunjukkan rata-rata panjang sebesar 83 cm. Teknisi yakin bahwa deviasi standar tidak berubah yaitu 7 cm. Apakah ada alasan guna meragukan bahwa rata-rata panjang plat baja yang dihasilkan perusahaan tersebut ≠ 80 cm?

Jawab :

Populasi tidak terbatas

μ_0 = 80 cm	σ_x = 7 cm	α = 0,05
Rata-rata	deviasi standar	
n = 100 unit	$\bar{x}$ = 83 cm	
sampel	rata-rata (hasil pengukuran sampel)	

Langkah-langkah pengujian

$H_0 : \mu_x = 80$

$H1 : \mu_x \neq 80$

α= 0,05; $Z_{\frac{0,05}{2}} = 1,96$

Daerah kritis :

$Z_{hitung} > 1,96$ dan $Z_{hitung} < -1,96$

$$Z_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu o}{\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}} = \frac{3}{\frac{7}{10}} = 3\,X\,\frac{10}{7} = \frac{30}{7} = 4,286$$

$$Z_{hitung} = 4,286 > Z_{\frac{0,05}{2}} = 1,96$$

Terletak pada daerah kritis tolak Ho terima H1 berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α = 0,05 artinya secara bermakna rata-rata panjang plat baja tidak sama dengan 80 cm.

Contoh uji 1 arah :

Gunakan data pada contoh di atas, dan misalnya teknisi berkeyakinan bahwa rata-rata panjang plat baja telah melampaui 80 cm. Lakukanlah uji hipotesis dengan taraf nyata α = 0,05

Jawab :

Populasi tidak terbatas

μ_0 = 80 cm σ_x = 7 cm α = 0,05

n = 100 unit $\bar{x}$ = 83 cm

langkah-langkah pengujian

$H_0 : \mu_x = 80$

$H_1 : \mu_x > 80$

$\alpha = 0{,}05 \quad Z_{0,05} = 1{,}645$

Daerah Kritis :

$Z_{hitung} > 1{,}645$

Zhitung = $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma x}{\sqrt{n}}} = \dfrac{83 - 80}{\dfrac{7}{\sqrt{100}}} = \dfrac{3}{\dfrac{7}{10}} = 4{,}286$

Zhitung = 4,286 > 1,645

Terletak pada daerah kritis tolak Ho terima H1 berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α = 0,05 artinya secara bermakna rata-rata panjang plat baja lebih dari 80 cm.

2. Pengujian Parameter rata-rata $H_0 : \mu_x = \mu_0$ dengan σx^2 tidak diketahui

Jika σx^2 tidak diketahui, maka gunakan s^2.

$$Z_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu o}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \qquad\qquad Z_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu o}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}}$$

Untuk populasi tidak terbatas untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

3. Pengujian Parameter Proporsi Populasi $H_0 : p = p_0$

Pengertian sampel besar untuk pengujian parameter proporsi populasi adalah n>100 untuk pengujian digunakan proporsi sampel $\breve{P} = \dfrac{x}{n}$

Penentuan Z_{hitung} sebagai berikut :

$$Z_{hitung} = \frac{\frac{x}{n} - po}{\sqrt{\frac{po(1-po)}{n}}} \qquad\qquad Z_{hitung} = \frac{\frac{x}{n} - po}{\sqrt{\frac{po(1-po)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Untuk populasi tidak terbatas untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

Contoh :

Sebuah sampel random yang terdiri dari 400 unit komponen tertentu pesawat TV telah dipilih dari populasinya yang besar sekali. Setelah diteliti secara seksama ternyata 12 unit komponen di atas dinyatakan rusak/tidak memenuhi kualitas standar. Apakah hasil sampel di atas merupakan bukti yang cukup untuk menyatakan persentasi komponen rusak yang terdapat dalam populasi > 2%? Jika persentasi kerusakan > 2% maka proses produksi harus diperbaiki sebaliknya **jika persentasi kerusakan hanya 2 % atau kurang dari 2%** maka proses produksi tidak perlu diperbaiki. Lakukan uji hipotesis dengan taraf nyata α = 0,05.

Jawab :

Populasi tidak terbatas

po = 2% = 0,02 n = 400 $\breve{P} = \frac{x}{n} = \frac{12}{400} = 0{,}03$

α = 0,05 x = 12

Langkah-langkah pengujian

$H_0 : p \leq 0{,}02$

$H_1 : p > 0{,}02$

$Z_{0,05} = 1{,}645$

Daerah kritis:

$Z_{hitung} > 1,645$

$$Z_{hitung} = \frac{0,03 - 0,02}{\sqrt{\frac{0,02\,(0,98)}{400}}} = \frac{0,01}{0,007} = 1,4286$$

$Z_{hitung} = 1,4286 < Z_{0,05} = 1,645$ tidak terletak pada daerah kritis terima H_0 tolak H_1, tidak berbeda nyata (tidak signifikan) pada taraf nyata α = 0,05. Artinya persentasi kerusakan masih dapat ditoleransi sehingga proses produksi tidak perlu diperbaiki.

4. Pengujian $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $\mu_1 - \mu_2 = 0$ dengan σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui

   Populasi I   Populasi II

Gambar 12. Diagram Sampel dari Dua populasi

Dari diagram di atas kita ingin mengetahui ada atau tidak perbedaan rata-rata kedua populasi.

Penentuan Z_{hitung}

$$Z_{hitung} = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$ untuk populasi tidak terbatas

$$Z_{hitung} = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}}$$ populasi terbatas tanpa pemulihan

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

Contoh :

Seorang importir mengimpor 2 jenis merek lampu neon yaitu Everlight dan Everbright yang dilakukan terus-menerus. Importir tersebut ingin mengetahui ada atau tidak perbedaan rata-rata usia teknis kedua merek lampu tersebut. Untuk itu dipilih secara random masing-masing 50 buah lampu dan dilakukan percobaan serta pengukuran. Berdasarkan hasil pengukuran diketahui rata-rata usia teknis Everlight 1.282 jam dan Everbright 1.208 jam. Bersandarkan pengalaman ia menduga deviasi standar Everlight 80 jam dan deviasi standar Everbright 94 jam. Yakinkah importir di atas bahwa rata-rata usia teknis kedua merek lampu tidak berbeda? Lakukan uji hipotesis dengan taraf nyata $\alpha = 0{,}05$.

Jawab :

Populasi tidak terbatas

Everlight → $n_1 = 50$ $\bar{x}_1 = 1.282$ jam ; $\sigma_1 = 80$ jam

Everbright → $n_2 = 50$ $\bar{x}_2 = 1.208$ jam ; $\sigma_2 = 94$ jam

Langkah-langkah pengujian

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 0{,}05$ $Z_{\frac{0,05}{2}} = 1{,}96$

Daerah Kritis

$Z_{hitung} > 1{,}96$ dan $Z_{hitung} < -1{,}96$

$$Z_{hitung} = \frac{(\overline{x} - \overline{x}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}} = \frac{(1282 - 1208) - (0)}{\sqrt{\frac{(80)^2}{50} + \frac{(94)^2}{50}}} = \frac{74}{\sqrt{\frac{6400 + 8836}{50}}} = \frac{74}{17{,}4562} = 4{,}24$$

Zhitung = 4,24 > $Z_{\frac{0,05}{2}} = 1{,}96$

Terletak pada daerah kritis tolak Ho terima H1 berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α = 0,05, artinya perbedaan rata-rata usia teknis lampu neon merek everlight dan everbright bermakna.

5. Pengujian $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $\mu_1 - \mu_2 = 0$ dengan σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui

Jika varians populasi tidak diketahui, maka digunakan s_1^2 dan s_2^2

$$Z_{hitung} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}}}$$

Untuk populasi tidak terbatas

$$Z_{hitung} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}}\sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}}$$

Untuk populasi terbatas tanpa pemulihan.

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

6. Pengujian parameter beda proporsi Ho : $p_1 = p_2$

Pengujian beda proporsi populasi dapat dilakukan dengan proporsi sampel.

$$\breve{P}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \textit{proporsi sampel dari populasi } 1$$

$\breve{P}_2 = \frac{x_2}{n_2} = proporsi\ sampel\ dari\ populasi\ 2$

$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}\quad p\ penduga\ p_1\ dan\ p_2\ dan\ dianggap\ p_1 = p_2 = p$

$$Z_{hit} = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}}$$ untuk populasi tidak terbatas

$$Z_{hit} = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}\sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}}$$ populasi terbatas tanpa pemulihan

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

Contoh

Sebuah lembaga riset ingin mengetahui ada atau tidak perbedaan proporsi golongan mampu dan kurang mampu yang menyukai sabun mandi merek Y. Untuk itu dipilih secara random 60 orang golongan mampu dan 140 orang golongan kurang mampu untuk diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan 40 orang golongan mampu menyukai sabun merek Y dan 80 orang golongan kurang mampu menyukai sabun Y. Berdasarkan hasil penelitian di atas, adakah alasan guna menyangsikan pernyataan yang menganggap bahwa proporsi kedua golongan yang menyukai sabun merek Y adalah sama atau tidak berbeda ?

Jawab :

Populasi tidak terbatas

n_1 = 60 x_1 = 40 $\breve{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{40}{60} = 0{,}6667$

n_2 = 140 x_2 = 80 $\breve{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{80}{140} = 0{,}5714$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$p = \frac{40+80}{60+140}$$

P = $\frac{120}{200}$ p = 0,6

Langkah-langkah pengujian :

$H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_1 \neq p_2$

$\alpha = 0{,}05$ $Z_{\frac{0,05}{2}} = 1{,}96$

Daerah kritis

$Z_{hit} > 1{,}96$ dan $Z_{hit} < -1{,}96$

$$Z_{hit} = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}} = \frac{(0{,}6667 - 0{,}5714) - 0}{\sqrt{\frac{0{,}6(0{,}4)}{60} + \frac{0{,}6(0{,}4)}{140}}} = \frac{0{,}0953}{0{,}0756} = 1{,}26$$

Z_{hit} = 1,26 < $Z_{\frac{0,05}{2}} = 1{,}96$ tidak terletak pada daerah kritis terima H_0 dan tolak H_1

tidak berbeda nyata (tidak signifikan) pada taraf nyata α = 0,05, artinya proporsi kedua golongan ekonomi yang menyukai sabun mandi merek Y berbeda secara tidak bermakna.

9.4 **Beberapa Contoh Cara Pengujian Hipotesis dengan Sampel Kecil (n<30)**

Pengujian hipotesis ini menggunakan distribusi t (t student)

1. Pengujian $H_0 : \mu_x = \mu_0$ dengan σx^2 tidak diketahui

Uji ini dilakukan untuk mengetahui ada atau tidak perbedaan rata-rata populasi dengan rata-rata populasi yang dihipotesiskan.

$t_{hit} = \dfrac{\bar{x} - \mu o}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ populasi tidak terbatas $t_{hit} = \dfrac{\bar{x} - \mu o}{\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$ pop. terbatas tanpa pemulihan

Daerah kritis uji 2 arah

$t_{hit} > t\,(\frac{\alpha}{2};df)$ dan $t_{hit} < -t(\frac{\alpha}{2};df)$

Daerah kritis uji 1 arah

$t_{hit} > t\,(\alpha;\, df)$ atau thit $< -t(\alpha;\, df)$

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

contoh :

Secara hipotesis mesin fotocopy merek Y dapat mengkopi 6500 lembar kertas/jam. Sebuah perusahaan jasa fotocopy ingin membuktikan keabsahannya, untuk itu dipilih secara random 12 buah mesin fotokopi merek Y dan dilakukan observasi. Hasil observasi yang berupa data jumlah lembar kertas yang berhasil dikopi/jam disajikan seperti berikut :

6.000	5.900	6.200	6.200	5.500	6.100
5.800	6.400	6.500	5.400	6.200	6.700

Apakah ada alasan perusahaan jasa fotocopy guna mempercayai hipotesis di atas?

Lakukan uji hipotesis dengan taraf nyata α = 0,05

Jawab :

Populasi tidak terbatas

Tabel 7. Prosedur Penentuan $\bar{x}$, s^2 dan s

Mesin	X_i	$(x_i-\bar{x})^2$
1	6.000	5.625
2	5.900	30.625
3	6.200	15.625
4	6.200	15.625
5	5.500	330.625
6	6.100	625
7	5.800	75.625
8	6.400	105.625
9	6.500	180.625
10	5.400	455.625
11	6.200	15.625
12	6.700	390.625
Jumlah	72.900	1.622.500

$$\overline{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{72.900}{12} = 6.075$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (Xi - \overline{X})^2 = \frac{1}{11}(1.622.500) = 147.500$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{147.500} = 384{,}06$$

Langkah-langkah pengujian

$H_0 : \mu x = 6.500$ $\qquad$ $H_1 : \mu x \neq 6.500$

α = 0,05 $\qquad$ df = n-1 = 12-1 = 11

$$t\left(\frac{0{,}05}{2};11\right) = 2{,}201$$

Daerah Kritis

thit > 2,201 dan thit < -2,201

$$t_{hit} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6.075 - 6.500}{\frac{384,06}{\sqrt{12}}} = \frac{-425\sqrt{12}}{384,06} = -3,833$$

thit = -3,833 < $-t\left(\frac{0,05}{2};11\right) = -2,201$ terletak pada daerah kritis tolak Ho terima H1 berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α = 0,05 artinya kemampuan mengkopi mesin merek Y secara bermakna berbeda dari 6.500 lembar/jam.

2. Pengujian Ho : $\mu_1 = \mu_2$ atau $\mu_1 - \mu_2 = 0$ dengan σ_1^2 dan σ_1^2 tidak diketahui tetapi $\sigma_1^2 = \sigma_1^2$

Uji ini untuk mengetahui ada atau tidak perbedaan rata-rata dua populasi. Penentuan t_{hit} sebagai berikut :

$$thit = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ untuk populasi tidak terbatas

$$thit = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{N_1 + N_2 - 1}}}$$ df = $n_1 + n_2$ -2

untuk populasi terbatas tanpa pemulihan

Langkah selanjutnya sama dengan sebelumnya.

Contoh :

Sebuah lembaga riset ingin mengetahui ada atau tidak perbedaan rata-rata laba yang diperoleh PKL garmen dan PKL elektronik. Untuk itu dipilih secara random masing-masing 7 PKL dari populasinya dan diwawancarai. Hasil wawancara menunjukkan laba yang diperoleh dalam Rp juta per tahun sebagai berikut :

Tabel 8. Laba PKL Garmen dan PKL Elektronik (Rp juta /tahun)

PKL Garmen	36	38	39	42	50	51	53
PKL Elektronik	40	37	45	51	62	42	50

Lakukanlah uji hipotesis dengan taraf nyata α = 0,05!

Jawab

Tabel 9. Prosedur Perhitungan $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, s_1^2, dan s_2^2

No	X_1	$(X_1-\overline{X}_1)^2$	X_2	$(X_2-\overline{X}_2)^2$
1	36	66,2596	40	45,0241
2	38	37,6996	37	94,2841
3	39	26,4196	45	2,9241
4	42	4,5796	51	18,4041
5	50	34,3396	62	233,7841
6	51	47,0596	42	22,1841
7	53	78,4996	50	10,8241
Jumlah	309	294,8572	327	427,4287

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n} = \frac{309}{7} = 44{,}14$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n} = \frac{327}{7} = 46{,}71$$

$$s_1^{\;2} = \frac{1}{n_1 - 1}\sum\left(X_1 - \overline{X}_1\right)^2 = \frac{1}{6}(294{,}8572) = 49{,}14$$

$$s_2^{\;2} = \frac{1}{n_2 - 1}\sum\left(X_2 - \overline{X}_2\right)^2 = \frac{1}{6}(427{,}4287) = 71{,}24$$

Langkah pengujian

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 0{,}05$ df = $n_1 + n_2 - 2 = 7 + 7 - 2 = 12$

$$t\left(\frac{0{,}05}{2};12\right) = 2{,}179$$

Daerah Kritis

$t_{hit} > 2{,}179$ dan $t_{hit} < -2{,}179$

$$t_{hit} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(44{,}14 - 46{,}71) - (0)}{\sqrt{\frac{6(49{,}14)+6(71{,}24)}{7+7-2}}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}} = \frac{-2{,}57}{4{,}147} = -0{,}6197$$

$t_{hit} = -0{,}6197 > -\ t\left(\frac{0{,}05}{2};12\right) = -2{,}179$ tidak terletak pada daerah kritis terima H_0 tolak H_1 tidak berbeda nyata (tidak signifikan) pada taraf nyata $\alpha = 0{,}05$. Artinya rata-rata laba PKL garmen dan rata-rata laba PKL elektronik berbeda secara tidak bermakna.

3. Pengujian $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ atau $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dengan σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$$t_{hit} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{(n_1-1)} + \frac{s_2^2}{(n_2-1)}}}$$

$$df = \frac{\left(\frac{s_1{}^2}{n_1} + \frac{s_2{}^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1{}^2}{n_1} \right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{s_2{}^2}{n_2} \right)^2}{(n_2 - 1)}}$$

Langkah selanjutnya sama seperti contoh di atas.

BAB X
ANALISIS VARIANS

10.1 Pengertian

Analisis varians digunakan untuk menguji beda rata-rata populasi lebih dari dua populasi.

10.2 Analisis Varians Klasifikasi Tunggal (Analisis Varians Satu Arah)

Adalah analisis yang hanya membandingkan satu kategori dari parameter populasi. Ada beberapa asumsi yang digunakan dalam analisis ini yaitu :

1. Populasi berdistribusi normal.
2. Varians masing-masing populasi sama (Homogen)
3. Masing-masing populasi independent

Contoh :

Tabel 10. Hasil Pengamatan

Populasi ke			
1	2	....	k
y_{11}	y_{21}		y_{k1}
y_{12}	y_{22}		y_{k2}
y_{13}	y_{23}		y_{k3}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
y_{1n1}	y_{2n2}		y_{knk}
J_1	J_2		J_k
$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$		$\bar{y}_k$

Hipotesisnya

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

H_1 : paling sedikit satu tanda sama dengan tidak berlaku

Tabel 11. Analisis Varians

Sumber Variasi	Dk	JK	KT	F_{hitung}
Rata-rata Antar Kelompok Dalam Kelompok	1 k – 1 $\Sigma(n_i-1)$	Ry Ay Dy	$R = \frac{Ry}{1}$ $A = \frac{Ay}{k-1}$ $D = \frac{Dy}{\sum(n_i - 1)}$	A/D
Total	Σn_i	Σy_i		

F_{hitung} dibandingkan dengan F_{tabel} [$F_{\alpha(V1:V2)}$]. Jika F hitung > F_{tabel} tolak H_0 terima H_1 berbeda nyata pada taraf nyata α = 0,05, artinya paling tidak ada satu rata-rata populasi yang berbeda secara signifikan

$$Ry = \frac{J^2}{\sum ni}; \; J = J_1 + J_2 + J_3 + ... + J_k$$

$$Ay = \sum\left(\frac{Ji^2}{ni}\right) - Ry$$

Σy_i^2 = jumlah kuadrat dari semua nilai pengamatan

$Dy = \Sigma y_i^2 - Ry - Ay$

Contoh :

Sebuah lembaga riset ingin mengetahui ada atau tidak perbedaan rata-rata laba PKL garmen, PKL elektronik, PKL barang pecah belah dan PKL makanan. Untuk itu dipilih secara random 5 PKL dari garmen, 5 PKL elektronik, 4 PKL pecah belah dan 4 PKL makanan untuk diwawancarai. Hasil wawancara berupa data laba per tahun dalam juta rupiah pada tahun 2008 adalah sebagai berikut :

Tabel 12. Laba 4 Kelompok PKL tahun 2008

Laba (Rp Juta/thn)			
PKLG	**PKLE**	**PKLP**	**PKLM**
12	14	6	9
20	15	16	14
23	10	16	18
10	19	20	19
17	22	-	-
82	80	58	60
16,4	16	14,5	15

Apakah ada alasan untuk menyatakan bahwa laba ke-4 kelompok PKL berbeda?

Lakukanlah uji hipotesis dengan taraf nyata $\alpha = 0{,}05$!

Jawab :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1 : paling sedikit satu tanda sama dengan tidak berlaku

Tabael 13. Analisis Varians

Sumber Variasi	dk	JK	KT	F_{hitung}
Rata-rata Antar kelompok Dalam Kelompok	1 3 14	4355,56 10,24 372,2	4355,56 3,41 26,59	0,128
Jumlah	18	4738		

$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$

$J = 82 + 80 + 58 + 60 = 280$

$$Ry = \frac{J^2}{\sum ni} = \frac{280^2}{18} = 4355{,}56$$

$$\sum y_i^2 =$$

$$12^2 + 20^2 + 23^2 + 10^2 + 17^2 + 14^2 + 15^2 + 10^2 + 19^2 + 22^2 + 6^2 + 16^2 + 16^2 + 20^2 + 9^2 + 14^2 + 18^2 + 19^2$$

$= 4738$

Ay = $\sum\left(\frac{J_i^{\ 2}}{n_i}\right) - Ry$

$$= \left(\frac{82^2}{5} + \frac{80^2}{5} + \frac{58^2}{4} + \frac{60^2}{4}\right) - 4355{,}56 = 4365{,}8 - 4355{,}56 = 10{,}24$$

Dy = $\sum yi^2 - Ry - Ay = 4738 - 4355{,}56 - 10{,}24 = 372{,}2$

$F_{0,05}$ (3;14) = 3,34

F_{hit} = 0,128 < $F_{0,05}$ (3;14) = 3,34

Terima H_0 tolak H_1 tidak berbeda nyata (tidak signifikan) pada taraf nyata α = 0,05 artinya rata-rata laba keempat kelompok PKL dapat dianggap sama.

BAB XI

REGRESI DAN KORELASI SEDERHANA

11.1 Pengertian

Regresi adalah suatu analisis yang menitik beratkan pada variabel tertentu sedangkan variabel lain dianggap tetap (dikonstantir).

Misalkan akan dianalisis pasangan data xi dan yi → (xi,yi).

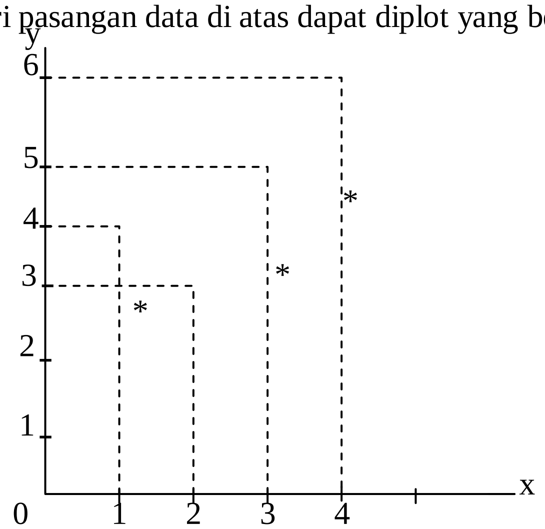
Pasangan data tersebut dapat langsung digambarkan dalam suatu grafik, maka diperoleh diagram pencar (scatter diagram) dan diagram titik (dot diagram).

<u>Contoh :</u>

Tabel 14 Pasangan Data x_i dan y_i

X_i	0	1	2	3	4
y_i	2	4	3	5	6

Dari pasangan data di atas dapat diplot yang berupa diagram pencar yaitu :



Gambar 13. Diagram Pencar

Dapat pula digambarkan dalam grafik setelah dibuat persamaan yang menghubungkan xi dan yi → regresi.

Hubungan fungsional xi dan yi secara matematis adalah sebagai berikut :

$y = f(x)$

x = Variabel bebas (independent Variable) ;

y = Variabel terikat (dependent Variable)

dibaca y_i sama dengan fungsi dari x_i → maksudnya nilai y_i tergantung pada nilai x_i

y dan x dapat diganti variabel lain :

Contoh :

Fungsi permintaan : $Q_D = f(P)$

harga

Jumlah diminta

Atau :

V = f(D)

D = Jumlah saluran distribusi

V = Volume Penjualan

dan lain-lain.

11.2 Penerapan Garis Regresi

1. Jenis-jenis Persamaan Regresi

Dalam menerapkan garis regresi dapat dilakukan dengan beberapa persamaan antara lain :

1) Regresi linear sederhana
2) Regresi berganda linear
3) Regresi non-linear

Pada bab ini akan dibahas regresi linear sederhana.

Persamaan regresi linear sederhana adalah sebagai berikut :

$y = a + bx + e$

$\hat{y} = a + bx$

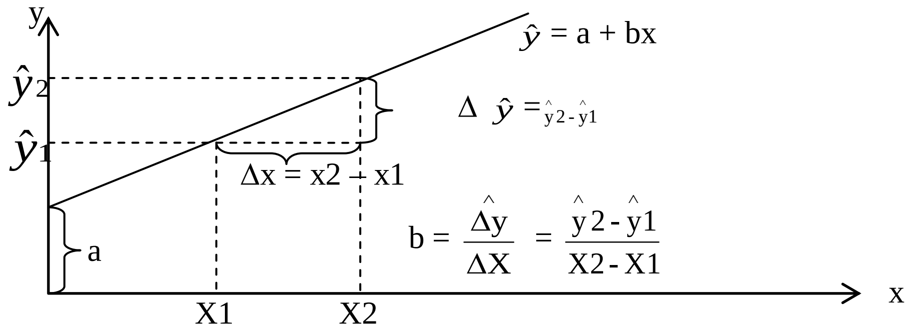
$\hat{y}$ = nilai y perkiraan (Variabel terikat)

a = konstanta

b = koefisien regresi

x = nilai x (Variabel bebas)

Kurva regresi linear sederhana dapat digambarkan seperti berikut :



Gambar 14. Kurva Regresi Linear Sederhana

Berdasarkan grafik di atas dapat dipahami arti nilai a dan b.

a = konstanta → menunjukkan nilai $\hat{y}$ pada saat nilai x = 0

b = koefisien regresi → menunjukkan perubahan nilai $\hat{y}$ akibat x berubah 1 unit.

Nilai a dan b dapat ditentukan dengan metode kuadrat minimum

$na + \Sigma xb = \Sigma y$ $\qquad\qquad$ $\Sigma y = na + b\,\Sigma x$

$\Sigma xa + \Sigma x^2\,b = \Sigma xy$ $\qquad\qquad$ $\Sigma xy = a\,\Sigma x + b\Sigma x^2$

$$b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

a = $\frac{(\Sigma y - b\Sigma x)}{n}$

n = jumlah pasangan observasi (pengukuran).

2. Sumber Data

- Data yang digunakan dalam analisa regresi dapat berupa data runtut waktu (time series) atau data kerat lintang (cross section)
- Data runtut waktu kurang baik untuk menganalisa pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat. Hal ini disebabkan adanya perubahan sistematis dalam variabel y dan x. Perubahan sistematis tersebut menyebabkan koefisien regresi kurang tepat.
- Data kerat lintang baik untuk melihat pengaruh variabel x terhadap y.

Contoh :

Tabel 15. Setoran Retribusi Parkir per Bulan dan Jumlah Petugas Rata-rata per hari.

Setoran retribusi Parkir (Rp juta/bulan)	Jumlah Petugas Rata-rata per hari dalam 1 bulan (orang)
50	2
61	3
73	4
80	5
95	7

Sumber : Data Hipotesis

Dari data Tabel 1 dapat ditentukan persamaan regresinya.

Prosedur penentuan persamaan regresi ditampilkan pada tabel 2.

Tabel 16. Prosedur Penentuan Persamaan Regresi

Setoran retribusi (Rp juta/bulan) = y	Jumlah petugas perhari Dalam 1 bulan (orang) = x	xy	x^2
50	2	100	4
61	3	183	9
73	4	292	16
80	5	400	25
95	7	665	49
Jumlah : 359	21	1640	103

Sumber : Tabel 1

$n = 5 \quad \Sigma x = 21 \qquad \Sigma x^2 = 103$

$\Sigma y = 359 \qquad \Sigma xy = 1640$

$$b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma .x)^2} = \frac{5(1640) - (21)(359)}{5(103) - (21)^2} = \frac{8200 - 7539}{515 - 441} = \frac{661}{74} = 8{,}93$$

$$a = \frac{\Sigma y - b\Sigma x}{n} = \frac{359 - 8{,}93(21)}{5} = 34{,}29$$

$\hat{y} = 34{,}29 + 8{,}93x$

jika jumlah petugas 10 orang per hari, maka penerimaan retribusi parkir adalah :

$\hat{y} = 34{,}29 + 8{,}93\ (10) = 123{,}59$

$\hat{y}$ = Rp 123,59 juta /bulan

3. Kesalahan Duga

Pengukuran dispersi titik-titik ordinat (xi,yi) dari garis duga regresinya dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$s^2\, {}^{y}\!/\!_{x} = \frac{1}{n-2} \sum (yi - \hat{y}i)^2$$

$$s\, {}^{y}\!/\!_{x} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum (yi - \hat{y})^2}$$

$s^2\, {}^{y}\!/\!_{x}$ = Varians y terhadap x

$s\,{}^{y}\!/_{x}$ = kesalahan duga standar y terhadap x

Jika :

Ỳ = $\mu y/_{x}$ = A + BX

Ỳ = $\mu y/_{x}$ = nilai variabel terikat populasi

X = nilai variabel bebas populasi

$\hat{y}$ = a + bx → persamaan regresi sampel

$\hat{y}$ digunakan untuk menduga Ỳ = $\mu y/_{x}$

a digunakan untuk menduga A

b digunakan untuk menduga B

Dalam menduga suatu nilai akan muncul bias (kesalahan) antara nilai yang menduga dan nilai yang diduga. Bias ini diukur dengan varians dan deviasi standar.

$s^2\,{}^{y}\!/_{x}$ dan $s\,{}^{y}\!/_{x}$ → $\sigma^2\,{}^{y}\!/_{x}$ dan $\sigma\,{}^{y}\!/_{x}$

s^2a dan sa → σa^2 dan σa

s^2b dan sb → σb^2 dan σb

Varians a = s^2a = $\dfrac{\left(\sigma^2\,{}^{y}\!/_{x}\right)\left(\sum x^2\right)}{n\sum\left(xi-\bar{x}\right)^2} = \dfrac{\left(S^2\,{}^{y}\!/_{x}\right)\left(\sum x^2\right)}{n\sum\left(xi-\bar{x}\right)^2}$

Deviasi standar a = sa = $\sqrt{S^2a}$

Varians b = s^2b = $\dfrac{\sigma^2\,{}^{y}\!/_{x}}{\sum\left(xi-\bar{x}\right)^2} = \dfrac{S^2\,{}^{y}\!/_{x}}{\sum\left(xi-\bar{x}\right)^2}$

Deviasi standar b = sb = $\sqrt{s^2b}$

Dalam contoh di atas nilai $s^2\, y/x$, $s\, y/x$, $s^2{}_a$, s_a, $s^2{}_b$, s_b

Tabel 17. Prosedur Perhitungan $s^2\, y/x$, $s\, y/x$, $s^2{}_a$, s_a, $s^2{}_b$, s_b

xi	yi	$\hat{y}i$ = 34,29 + 8,93x	(yi - $\hat{y}i$)^2	xi^2	(xi – $\overline{x}$)^2
2	50	52,15	4,6225	4	4,84
3	61	61,08	0,0064	9	1,44
4	73	70,01	8,9401	16	0,04
5	80	78,94	1,1236	25	0,64
7	95	96,80	3,24	49	7,84
Jumlah = 21	359		17,9326	103	14,8

$$\overline{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{21}{5} = 4{,}2$$

$$S^2\, y/x = \frac{1}{n-2}\sum (yi - \hat{y}i)^2 = \frac{1}{3}(17{,}9326) = 5{,}9775$$

$$s\, y/x = \sqrt{s^2\, y/x} = \sqrt{5{,}9775} = 2{,}445$$

$$s^2 a = \frac{\left(s^2\, y/x\right)\left(\sum x^2\right)}{n\sum\left(xi - \overline{x}\right)^2} = \frac{(5{,}9775)(103)}{5(14{,}8)} = 8{,}320$$

$$s_a = \sqrt{s^2 a} = \sqrt{8{,}320} = 2{,}884$$

$$s^2{}_b = \frac{s^2\, y/x}{\sum (xi - \overline{x})^2} = \frac{5{,}9775}{14{,}8} = 0{,}403885$$

$$s_b = \sqrt{s^2 b} = \sqrt{0{,}403885} = 0{,}636$$

4. Pengujian Parameter A dan B

Untuk persamaan regresi populasi :

Ỳ = A + BX

A → adalah nilai Ỳ pada saat X = 0

B → adalah besarnya perubahan Ỳ pada saat X berubah 1 unit.

Apakah nilai A atau B dapat diperhitungkan pada tingkat kesalahan tertentu?

Hal ini perlu diuji :

Uji Parameter A :

H0 : A = 0

H1 : A ≠ 0

$\propto$ = 0,05

df = n–2 = 5–2 = 3

$t\left(\frac{0,05}{2};3\right) = 3,182$

Daerah kritis

$t_{hitung} > 3,182$ dan $t_{hitung} < -3,182$

$t_{hitung} = \frac{a-A}{Sa} = \frac{34,29-0}{2,884} = 11,8897$

$t_{hitung} > 3,182$ terletak pada daerah kritis, tolak Ho terima H1, berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata $\propto$ = 0,05 artinya A ≠ 0

Uji Parameter B :

H0 : B = 0

H1 : B ≠ 0

$\propto$ = 0,05

df = n – k = n–2 = 5–2 = 3

$t\left(\frac{0,05}{2};3\right) = 3,182$

Daerah Kritis :

$t_{hitung} > 3,182$ dan $t_{hitung} < -3,182$

thitung = $\dfrac{b-B}{Sb} = \dfrac{8{,}93-0}{0{,}636} = 14{,}041$

thitung > 3,182 terletak pada daerah kritis, tolak Ho terima H1, berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata $\propto$ = 0,05, artinya B ≠ 0 atau rata-rata petugas harian mempengaruhi rata-rata setoran parkir bulanan secara bermakna.

5. Pengertian Koefisien Determinasi dan Koefisien Korelasi

Koefisien determinasi = r^2

Koefisien korelasi = r = $\sqrt{r^2}$

Koefisien non – Determinasi = $1-r^2$

Koefisien determinasi ditentukan dengan rumus berikut:

$$r^2 = \frac{\sum(\hat{y}i-\bar{y})^2}{\sum(yi-\bar{y})^2}$$

Koefisien korelasi = r = $\sqrt{r^2}$

Koefisien korelasi yang ditentukan dengan rumus ini selalu positip. Dalam kenyataannya nilai koefisien korelasi dapat positip atau negatip. Tanda positip atau negatip koefisien korelasi disesuaikan dengan tanda positip atau negatip koefisien regresi. Jika koefisien regresi positip, maka koefisien korelasi positip. Jika koefisien regresi negatip, maka koefisien korelasi diberi tanda negatip.

Koefisien korelasi di atas (yang sedang dibahas) disebut koefisen korelasi product moment Pearson. Koefisien korelasi dapat pula ditentukan dengan rumus berikut:

$$r = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma.x)^2}\sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

Koefisien korelasi yang ditentukan dengan rumus ini akan positip atau negatip sesuai hasil perhitungan. Nilainya $-1 \leq r \leq 1$. Semakin mendekati 1 semakin kuat dan searah yaitu jika x naik, maka y naik, jika x turun, maka y turun. Semakin mendekati -1 semakin kuat tetapi berlawanan arah yaitu jika x naik, maka y turun, jika x turun, maka y naik. Semakin mendekati 0 maka semakin lemah, dan jika 0 maka x dan y tidak berhubungan.

Contoh :

Dari persamaan regresi di atas. Tentukanlah koefisien determinasi, koefisien non determinasi dan koefisien korelasi!

Jawab :

Tabel 18. Prosedur Penentuan r^2, $1 - r^2$,r

Xi	Yi	$\hat{y}$ = 34,29 + 8,93X	$(\hat{y}i - \bar{y})^2$	$(yi - \bar{y})^2$
2	50	52,15	386,1225	475,24
3	61	61,08	114,9184	116,64
4	73	70,01	3,2041	1,44
5	80	78,94	50,9796	67,24
7	95	96,80	625	538,24
21	359		1180,2246	1198,8

$\bar{y} = \Sigma y/n = 359/5 = 71,8$

$$r^2 = \frac{\sum(\hat{y}i - \bar{y})^2}{\sum(yi - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{1180,2246}{1198,8000} = 0,9845$$

artinya 98,45% variabel penerimaan retribusi parkir telah dijelaskan oleh tenaga pemungut parkir.

r = $\sqrt{r^2} = \sqrt{0{,}9845} = 0{,}9922$

artinya hubungan antara variabel penerimaan parkir dan variabel tenaga pemungut parkir adalah 99,22%, berarti sangat kuat dan searah.

$1 - r^2 = 1 - 0{,}9845 = 0{,}0155$

artinya 1,55% penerimaan retribusi parkir tidak dijelaskan oleh variabel tenaga pemungut parkir.

6. Pengujian Parameter Koefisien Korelasi Populasi (ρ)

r (koefisien korelasi sampel) = penduga ρ (koefisien korelasi populasi)

$t = \dfrac{r\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r^2}}$

k = jumlah variabel terikat dan variabel bebas
ρ= koefisien korelasi populasi

dalam regresi linier sederhana k = 2

$t = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

Berdasarkan data di atas :

Ho : $\rho = 0$ H$_1$: $\rho \neq 0$

$\alpha = 0{,}05$ df = n-2 = 5 – 2 = 3

$t\left(\dfrac{0{,}05}{2};3\right) = 3{,}182$

Daerah kritis

$t_{hitung} > 3{,}182$ dan $t_{hitung} < -3{,}182$

thit = $\dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \dfrac{0{,}9922\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-0{,}9845}} = 13{,}804$

$t_{hit} > t_{(\frac{0,05}{2},3)}$ terletak pada daerah kritis, tolak H_0 terima H_1berbeda nyata pada taraf nyata α = 0,05 artinya $\rho \neq 0$ atau hubungan antara rata-rata petugas harian dan rata-rata penerimaan parkir bulanan bermakna (significant) pada taraf nyata $\propto$ = 0,05.

DAFTAR PUSTAKA

Anto Dajan. *Pengantar Metode Statistika Jilid II* .LP3ES.Jakarta.

J. Supranto. Statistika, Teori dan Aplikasi Jilid II. Erlangga. Jakarta.

Lind A. Douglas, William G. Marchal, Samuel A Wathem. Statistical Technique in Business and Economics. Mc Geaw Hill.

M. Iqbal Hasan. Pokok-pokok Materi Statistika 2 (Statistik Inferensif). Bumi Aksara. Jakarta .

Mason Robert D. dan Douglas A. Lind, Teknik Statistika untuk Bisnis dan Ekonomi Jilid I . Terjemahan Ellen Gunawan Sitompul dkk, Erlangga, Jakarta.

________________________________. Teknik Statistika untuk Bisnis dan Ekonomi Jilid II. Terjemahan Widyono Soetjipto dkk, Erlangga, Jakarta.

Sri Adiningsih. Statistik. BPFE. Yogyakarta.

Sudjana. Metoda Statistika . Tarsito. Bandung.

_______. Statistika Inferens untuk Ekonomi dan Niaga. Tarsito. Bandung.

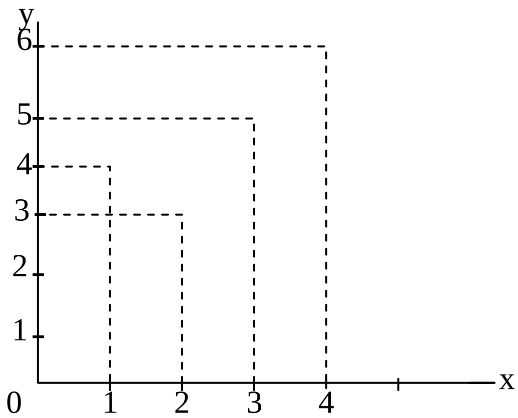
VARIASI STRATEGI

Contoh :

Tabel pasangan data x_i dan y_i

X_i	0	1	2	3	4
y_i	2	4	3	5	6

Dari pasangan data di atas dapat diplot yang berupa diagram pencar yaitu :



$y_i = f(x_i)$ → dibaca y_i sama dengan fungsi dari x_i → maksudnya nilai uji tergantung pada nilai x_i

y_i = variabel terikat, dependent variabel, variabel regresan, variabel dijelaskan.

x_i = variabel bebas, independent variabel, variabel regresor, variabel penjelasan.

1. Regresi Linear Sederhana

$\hat{y} = a + bx$

2. Regresi Berganda Linear

$\hat{y} = a + bx_1 + cx_2$

3. Regresi non-Linear

$\hat{y} = a + bx + cx^2$ $\quad$ $c \neq 0$

Soal :

Jika target penerimaan retribusi parkir Rp 250 juta/bulan, maka berapakah seharusnya petugas yang bertugas setiap harinya?

Jawab :

$\hat{y} = 34{,}29 + 8{,}93\,x$

$8{,}93\,x = 250 - 34{,}29$

$x = \dfrac{215{,}71}{8{,}93}$

$x = 24$

$250 = 34{,}29 + 8{,}93\,x$

Untuk mencapai target penerimaan retribusi parkir sebesar Rp 250 juta/bulan jumlah orang yang bertugas rata-rata setiap harinya 24 orang.

Soal :

Tabel biaya promosi dan volume penjualan sepeda motor 7 dealer di Jabotabek tahun 2008

Biaya Promosi (Rp M/th)	0,8	0,9	1,2	1,4	1,6	2,0	2,3
Volume penjualan (Ribu unit/th)	10	15	12	18	25	24	30

4. Buatlah persamaan regresi linear dari data di atas dan interpretasikan nilai a dan b
5. Jika biaya promosi Rp 3,0 milyar/thn, maka berapakah perkiraan volume penjualan sepeda motor?
6. Lakukan uji parameter koefisien regresi pada taraf nyata α = 0,05!

Jawab :

Biaya Promosi (Rp Milyar/thn) y	Volume penjualan (Ribu Unit/th) x	x.y	X^2
0,8	10	8	100
0,9	15	13,5	225
1,2	12	14,4	144
1,4	18	25,2	324
1,6	25	40	625
2,0	24	48	576
2,3	30	69	900
Jumlah = 10,2	134	218,1	2.894

n = 7 Σx = 134 Σx^2 = 2.894 Σy = 10,2 Σxy = 218,1

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{7(218,1) - (134)(10,2)}{7(2.894) - (134)^2} = \frac{159,9}{2.302} = 0,069 = 0,07$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n} = \frac{10,2 - (0,07)(134)}{7} = \frac{0,82}{7} = 0,12$$

$$\hat{y} = 0,12 + 0,07x$$

$$\hat{y} = 3,0 \ milyar / thn$$

3,0 = 0,12 + 0,07x

0,07x = 2,88

x = 41,14

x = 41

untuk mencapai biaya promosi sebesar Rp 3,0 milyar maka jumlah volume penjualan rata-rata sepeda motor sebanyak 41.000 unit/thn.

Tabel biaya promosi dan volume penjualan sepeda motor 7 dealer di Jabotabek tahun 2008

a) Penentuan Persamaan Regresi

Biaya Promosi (Rp M/th) (y_i) → x_i	Volume Penjualan (Ribu unit/th) (x_i) → y_i	$x_i.y_i$	x_i^2
0,8	10	8	100
0,9	15	13,5	225
1,2	12	14,4	144
1,4	18	25,2	324

1,6 2,0 2,3	25 24 30	40 48 69	625 576 900
Jumlah : 10,2	134	218,1	2894

n = 7 $\Sigma x = 134$ $\Sigma x^2 = 2.894$ $\Sigma y = 10,2$ $\Sigma xy = 218,1$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{7(218{,}1) - (134)(10{,}2)}{7(2.894) - (134)^2} = \frac{159{,}9}{2.302} = 0{,}069 = 0{,}07$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n} = \frac{10{,}2 - (0{,}07)(134)}{7} = \frac{0{,}82}{7} = 0{,}12$$

b) $\hat{y}$ = a + bx

3,0 = 0,12 + 0,07x

3,0 – 0,12 = 0,07x

$$x = \frac{2{,}88}{0{,}07}$$

x = 41,140 motor

Dengan biaya promosi Rp 3,0 M/thn perusahaan memperkirakan jumlah motor yang terjual rata-rata sebanyak 41,140 motor/th

c) Tabel prosedur perhitungan $s^2 y/x$, sy/x, $s^2 a$, sa, $s^2 b$, sb

y	x	y = ($y_i - \bar{y}$)	x = ($x_i - \bar{x}$)	y^2	x^2	xy
0,8	10	-0,66	-9,14	0,4356	83,56	6,0324
0,9	15	-0,56	-4,14	0,3136	17,14	2,3184
1,2	12	-0,26	-7,14	0,0676	50,98	1,8564
1,4	18	-0,06	-1,14	0,0036	1,3	0,0684
1,6	25	0,14	5,86	0,0196	34,34	0,8204
2,0	24	0,54	4,86	0,2916	23,62	2,6244
2,3	30	0,84	10,86	0,7056	117,94	9,1224
10,2	134			1,8372	328,86	22,8428

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{10{,}2}{7} = 1{,}46$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{134}{7} = 19{,}14$$

$$s^2\, y/x = \frac{1}{n-2}\left[\sum y^2 - b^2 \sum x^2\right]$$

$$= \frac{1}{7-2}\left[(1{,}8372) - \left(\frac{159{,}9}{2302}\right)^2 (328{,}86)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[1{,}8372 - (0{,}0048\ X\ 328{,}86)\right]$$

$$= \frac{1}{5}(1{,}8372 - 1{,}587)$$

$$= \frac{1}{5}(0,25)$$
$$= 0,05$$
$$s\,{}^{y}\!/_{x} = \sqrt{S^2\,{}^{y}\!/_{x}} = \sqrt{0,05} = 0,224$$
$$s^2 a = \frac{\left(s^2\,{}^{y}\!/_{x}\right)\left(\sum x^2\right)}{n\sum x^2} = \frac{(10,05)(2894)}{7(328,86)} = \frac{144,7}{2302,02} = 0,063$$
$$sa = \sqrt{s^2 a} = \sqrt{0,063} = 0,0251$$
$$s^2 b = \frac{s^2\,{}^{y}\!/_{x}}{\sum x^2} = \frac{0,05}{328,86} = 0,00015$$
$$sb = \sqrt{s^2 b} = \sqrt{0,00015} = 0,0123$$

Uji parameter B
H_0 : B = 0
H_1 : B ≠ 0
α = 0,05
df = n – k
= 7 – 2
= 5
$$t\left(\frac{0,05}{2};5\right) = 2,571$$

Daerah Kritis
$t_{hitung} > 2,571$ dan $t_{hitung} < -2,571$
$$t_{hitung} = \frac{b-B}{sb} = \frac{0,07-0}{0,0123} = 5,691$$
$T_{hitung} = 5,691 > t\left(\frac{0,05}{2};5\right) = 2,571$
Terletak pada daerah kritis, tolak H_0 terima H_1 berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata α = 0,05 artinya B ≠ 0

STATISTIKA II

Anto Dajan. *Pengantar Metode Statistika* Jilid II. LP3ES. Jakarta.
J. Supranto. *Teori dan Aplikasi*. Jilid II. Erlangga. Jakarta.
Mason Robert D dan Douglas A. Lind. *Teknik Statistika Unit Bisnis & Ekonomi* Jilid I dan II. Erlangga. Jakarta.
Sudjana. *Statistika Inferes Unt Ekonomi & Niaga*. Tarsito. Bandung.

Materi :

3. Permutasi dan Kombinasi.
4. Teori Probabilita dan Distribusi Probabilita Disktrit.
5. Distribusi Binomial dan Distribusi Hipergeometris.
6. Distribusi Poisson.
7. Distribusi Normal.
8. Distribusi Sample.
9. Pendugaan secara statistik.
10. Pengujian Hipotesis.
11. Analisis Varians.
12. Regresi dan Korelasi Sederhana.
13. Regresi dan Korelasi Berganda.
14. Distribusi KAI Kuadrat.
15. Metode non padrametrik..

Soal :

7. Tabel hasil pengukuran 7 botol minuman ringan merek ”y”

Nomor	1	2	3	4	5	6	7
Isi (L)	1,00	1,10	1,03	1,05	1,15	1,00	1,00

Apakah dapat dikatakan isi minuman dalam botol sama dengan 1,00 L? Lakukan uji hipotesis dengan taraf nyata α = 0,05 ?

Jawab

Tabel Penentuan $\overline{X}$ dan s^2

Nomor	X_i	$(X_i - \bar{x})^2$
1	1,00	0,0036
2	1,10	0,0016
3	1,03	0,0009
4	1,05	0,0001
5	1,15	0,0081
6	1,00	0,0036
7	1,08	0,0004
Jumlah	7,41	0,0183

$$s^2 = \frac{1}{6}(0{,}0183) = 0{,}00305$$

$$\overline{X} = \frac{7{,}41}{7} = 1{,}06$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}00305} = 0{,}055$$

Langkah pengujian

$H_0 : \mu x = 1$

$H_1 : \mu x \neq 1$

Daerah Kritis

$t_{hit} > 2{,}447$ dan $t_{hit} < -2{,}447$

$$\text{thit} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1{,}06 - 1{,}00}{\frac{0{,}055}{\sqrt{7}}} = \frac{0{,}06\sqrt{7}}{0{,}055} = 2{,}886$$

$$t\left(\frac{0{,}05}{2};6\right) = 2{,}447$$

$$t_{hit} = 2{,}886 > t\left(\frac{0{,}05}{2};6\right) = 2{,}447$$

terletak pada daerah kritis tolak H_0 terima H_1 berbeda nyata (signifikan) pada taraf nyata $\alpha = 0{,}05$. Artinya isi minuman dalam botol secara bermakna berbeda dari 1,00 Liter.

8. Tabel penghasilan sarjana ekonomi yang bekerja disektor keuangan dan non keuangan (Rp juta/tahun)

Keuangan	36	40	48	60	38	50
Non Keuangan	48	60	52	45	54	-

Apakah dapat dikatakan penghasilan sarjana ekonomi yang bekerja disektor keuangan dan non keuangan berbeda ? lakukan uji hipotesis pada $\alpha = 0{,}01$!

Jawab

Tabel Penentuan

2. No.	X_1	$(X_1- \bar{x}_1)$	X_2	$(X_2- \bar{x}_2)^2$
1	36	86,49	48	14,44
2	40	28,09	60	67,24
3	48	7,29	52	0,04
4	60	216,09	45	46,24
5	38	53,29	54	4,84
6	50	22,09	-	-
Jumlah	272	413,36	259	132,8

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum\left(X1 - X\right)^2 = \frac{1}{5}(413{,}36) = 82{,}67$$

$S_2{}^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\sum\left(X_2 - \overline{X}_2\right) = \dfrac{1}{5}(132{,}8)$ = 26,56

Langkah pengujian :

$H_0 : M_1 = M_2$

$H_1 : M_1 \neq M_2$

α = 0,01; df = $n_1 + n_2$ -2 = 6 + 5 -2 = 9 $\qquad t\left(\dfrac{0{,}01}{2};9\right) = 3{,}250$

Daerah kritis

t_{hit} > 3,250 dan t_{hit} < -3,250

$$t_{hit} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(M_1 - M_2\right)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1{}^2 + (n_2 - 1)S_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{(45{,}3 - 51{,}8) - 0}{\sqrt{\dfrac{5(82{,}67) + 4(26{,}56)}{6 + 5 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}}} = \frac{-6{,}5}{4{,}601} = -1{,}413$$

t_{hit} = -1,413 > -t$\left(\dfrac{0{,}01}{2};9\right) = -3{,}250$

tidak terletak pada daerah kritis terima H_0 tolak H_1 tidak berbeda nyata (tidak signifikan) pada taraf nyata α = 0,01. Artinya penghasilan SE yang bekerja disektor keuangan keuangan tidak bermakna.

9. Tabel Laba PKL garmen Jakarta, Bogor dan Bekasi tahun 2008

Laba (Rp Juta/tahun)		
Jakarta	Bogir	Bekasi
40	62	48
42	50	52
60	48	60

52 70 68	62 50 51	64 62 -
J 332	323	286
y 55,33	53,83	57,2

Apakah laba PKL garmen ditiga lokasi tersebut dapat dikatakan sama? Lakukan uji hipotesis taraf nyata dengan α = 0,05

Jawab :

$H_0 : M_1 = M_2 = M_3 = ... = M_k$

H_1 : paling sedikit satu tanda sama dengan tidak berlaku

Sumber Variasi	dk	Jk	KT	F_{hitung}
Rata-rata	1	52.087,12	52.087,12	
Antar kelompok	2	30,91	15,45	0,18
Dalam Kelompok	14	1.214,97	86,78	
Jumlah	17			

$$Ry = \frac{J^2}{\sum ni} = \frac{941^2}{17} = \frac{885.481}{17} = 52.087,12$$

$$\sum {y_i}^2 = 40^2 + 42^2 + 60^2 + 52^2 + 70^2 + 68^2 + 62^2 + 50^2 + 48^2 + 62^2 + 50^2 + 51^2 + 48^2 + 52^2 + 60^2 + 64^2 + 62^2$$

= 53,333

$$Ay = \sum \left(\frac{{y_i}^2}{n_i} \right) - Ry$$

$$= \left(\frac{332^2}{6} + \frac{323^2}{6} + \frac{286^2}{5} \right) - 52.087{,}12 = 52.118{,}03 - 52.087{,}12 = 30{,}91$$

$$\text{Dy} = \sum y_1^{\ 2} - Ry - Ay = 53.333 - 52.087{,}12 - 30{,}91 = 1.214{,}97$$