Алгебраическое уравнение Риккати в общем виде:

$$E^T\dot{P}E + E^TPA + A^TPE + Q - E^TPBR^{-1}B^TPE = 0$$

Дискретизируем по времени

$$\dot{P}(t) \approx \frac{P_{k+1} - P_k}{\tau}$$

$$E^T(P_{k+1} - P_k)E + \tau E^TP_{k+1}A + \tau A^TP_{k+1}E + \tau Q - \tau E^TP_{k+1}BR^{-1}B^TP_{k+1}E = 0$$

Упростим

$$E^TP_{k+1}BR^{-1}B^TP_{k+1}E \approx E^TP_{k+1}BR^{-1}B^TP_kE,$$

так как $P_{k+1} \approx P_k + \delta P$ при малом изменении P_{k+1} относительно P_k

$$E^TP_{k+1}E + \tau(E^TP_{k+1}A + A^TP_{k+1}E - E^TP_{k+1}BR^{-1}B^TP_kE) = E^TP_kE - \tau Q$$

Разобеьм временные шаг τ на две итерации(два полушага) с помощью параметров $\alpha + \beta = 1$, разделяя смешанные члены E^TPA и A^TPE. α — «вес» первого полушага, β — «вес» второго.

$$E^TP_{k+1}E+\tau E^TP_{k+1}A+\tau A^TP_{k+1}E \to (E^T+\alpha\tau A^T)P_{k+\frac{1}{2}}(E+\alpha\tau A)+(E^T+\beta\tau A^T)P_{k+1}(E+\beta\tau A)$$

Соответственно

$$(E^T + \alpha\tau A^T)P_{k+\frac{1}{2}}(E + \alpha\tau A) = E^TP_kE - \tau Q + \tau E^TP_kBR^{-1}B^TP_kE$$

$$(E^T + \beta\tau A^T)P_{k+1}(E + \beta\tau A) = E^TP_kE - \tau Q + \tau E^TP_{k+\frac{1}{2}}BR^{-1}B^TP_kE$$

Итерации Арнольда

1. Выбрать вектор v_1 с нормой 1(берем просто единичный)

2. Перебираем j от 1 до m

   (a) $w_j = Av_j$

   (b) $h_{ij} = (w_j, v_i)$ для i от 1 до j

   (c) $w_j = w_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij}v_i$

   (d) $h_{j+1,j} = ||w_j||$

   (e) $v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$

Эвристический алгоритм подбора параметра на основе итераций Арнольда

1. Считаем матрицу H с искомыми собственными значениями итерациями Арнольда от матрицы A
2. Считаем матрицу H с искомыми собственными значениями итерациями Арнольда от матрицы A^{-1}
3. Находим параметры $\alpha_i = -\frac{1}{w_i}$ для A и $\alpha_{m+i} = -\frac{1}{w_i}$ для A^{-1}
4. Выбираем m наиболее разнесенных значений (обязательно минимальное и максимальное)

Алгоритм решения уравнения Риккати

1. Находим параметры сдвига α с помощью эвристического алгоритма
2. P_0 — нулевая матрица
3. Перебираем k от 0 до m и полушагами находим следующие значения P

$$(E^T + \alpha\tau A^T)P_{k+\frac{1}{2}}(E + \alpha\tau A) = E^T P_k E - \tau Q + \tau E^T P_k B R^{-1} B^T P_k E$$

$$(E^T + \beta\tau A^T)P_{k+1}(E + \beta\tau A) = E^T P_k E - \tau Q + \tau E^T P_{k+\frac{1}{2}} B R^{-1} B^T P_k E$$