Rozbor a analýza algoritmu

Topologie

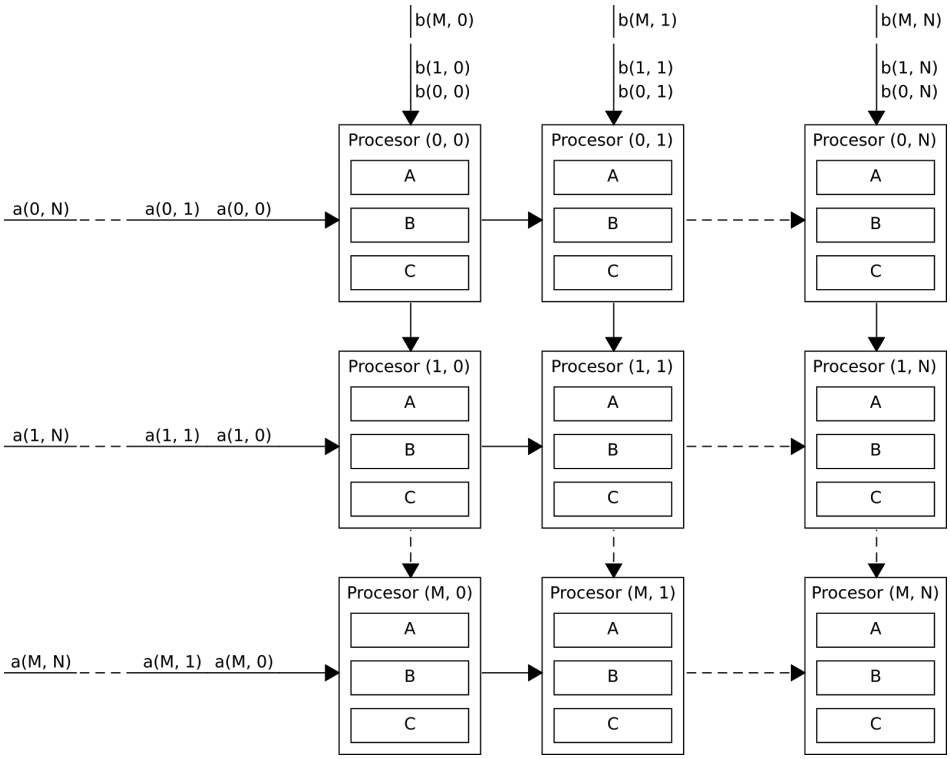
Mesh Multiplication je paralelní algoritmus pro násobení matic, kdy pro každý prvek výsledné matice existuje právě jeden procesor. Ten má za úkol počítat výsledek násobení pouze v daném prvku matice. Jako vstupní hodnoty mu slouží data z příslušného sloupce a řádku násobených matic. Tyto hodnoty jsou lineárně přesouvány mezi procesory a to takovým způsobem, že každý prvek každého řádku (sloupce) je postupně propagován do každého procesoru reprezentující prvek na daném řádku (sloupci) výsledné matice. Postup přesouvání dat ve vodorovném směru je synchronizován s krokem ve směru svislém, takže v každém kroku výpočtu procesoru jsou na jeho vstupu obě hodnoty nově získané. Každá z procesorů tedy disponuje registry:

- **Registr A**, pro uchování hodnoty ze vstupní matice A. Tato hodnota je posouvána vodorovně
- **Registr B**, pro hodnotu prvku z matice B. Tato hodnota je přesouvána svisle
- **Registr C**, akumulátor, který uchovává dočasný (i konečný) výsledek násobení v daném prvku matice

Speciální úlohu zastávají procesory prvního řádku a prvního sloupce. Ty vstupní hodnoty nezískávají od svých předchůdců v řadě či sloupci, ale naopak je čtou přímo ze souboru. Ty navíc disponují vstupními frontami:

- **Fronta A**, pro hodnoty odpovídajícího řádku vstupní matice A
  nebo
- **Fronta B**, pro hodnoty prvků ve sloupci matice B

V konečném důsledku pak topologie vypadá následovně:



Princip algoritmu

Mnou zvolená algortimická reprezentace samotného násobení matic je prakticky shodná s uvedeným postupem v přednášce[1]:

1. Pro každý procesor nastav hodnotu **Registru C** jako $C = 0$

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PDA/private/www/h005.pdf , slide 18

2. Opakuj $N + M$ krát, pro $0 \leq i < N + M$, kde N je počet sloupců výsledné matice a M je počet řádků:
    a. Pokud je procesor v prvním sloupci, získá hodnotu **Registru A** z vlastní **Fronty A**, v opačném případě ji získá od procesoru vlevo od sebe
    b. Pokud je procesor v první řadě, získá hodnotu **Registru B** z vlastní **Fronty B**, v opačném případě ji získá od procesoru nad sebou
    c. Spočítá a zapamatuje si hodnotu **Registru C** jako $C = C + (A * B)$
    d. Pokud procesor neleží v posledním sloupci, pošle hodnotu svého **Registru A** svému sousedovi v pravo
    e. Pokud procesor neleží v posledním řádku, pošle hodnotu svého **Registru B** svému sousedovi dolů

Implementace

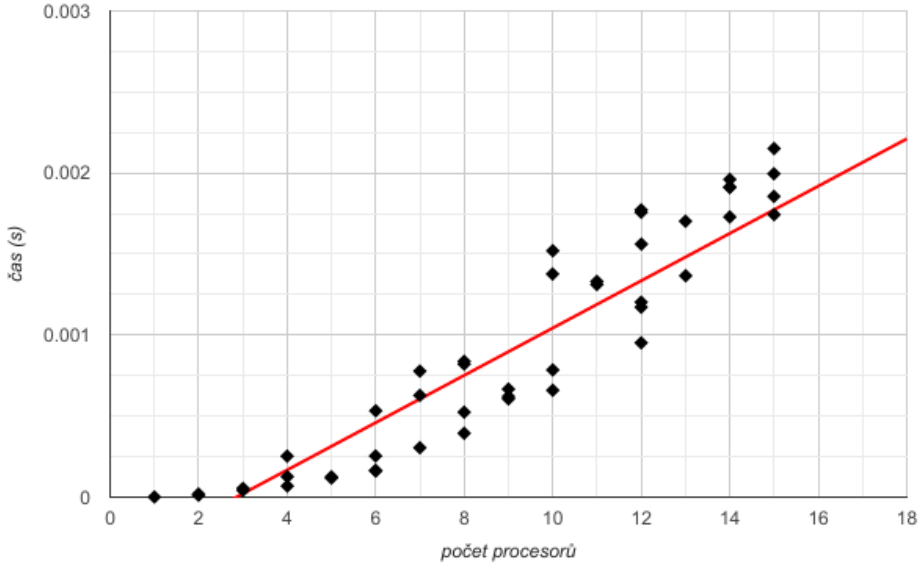
Pro implementaci algoritmu bylo především třeba nejdříve vyřešit správné načtení a přípravu dat. Toho jsem docílil následovně:

1. Nejprve si každý procesor zjistí velikost výsledné matice (šlo by řešit pomocí `MPI_Bcast`, takto se následně nemusí u některých procesorů přeskakovat úvodní řádek při čtení souboru)
2. Pak zjistí, zda-li leží v prvním řádku či prvním sloupci
3. Pokud procesor náleží k prvku v prvním řádku v souboru si načte patřičný řádek a uloží si jeho hodnoty do své vstupní fronty
4. Pokud je procesor v prvním sloupci, pak prochází vstupní soubor druhé matice a ukládá si do své fronty pouze ty prvky, které leží na patřičném místě v řádku matice

Takto načtená data se pak jen vyvolávají z fronty svých procesorů a nijak samotný algoritmus nezpomalují čtením dat ze souboru.
Za zmínku dále stojí implementační detail zobrazování výstupu. Pro tuto činnost bylo z důvodů synchronizace a správného pořadí dat nejlepší si zvolit jeden procesor jako řídící. Tento procesor pak přijímá hodnotu výsledného registru od všech ostatních procesorů a postupně je vypisuje na standardní výstup. Pro přehlednost a jednoduchost jsem zvolil první procesor. Ten totiž může bez obav nejdříve vypsat svá data a následně přijímat od všech ostatních ve zvoleném pořadí, aniž by hrozila ztráta jeho vlastních dat.

Složitost algoritmu

Asymptotická složitost[2] algoritmu	$O(1) + O(n) = O(n)$
Časová složitost	$O(n)$
Prostorová složitost	$O(n^2)$
Celková cena	$O(n) * O(n^2) = O(n^3)$

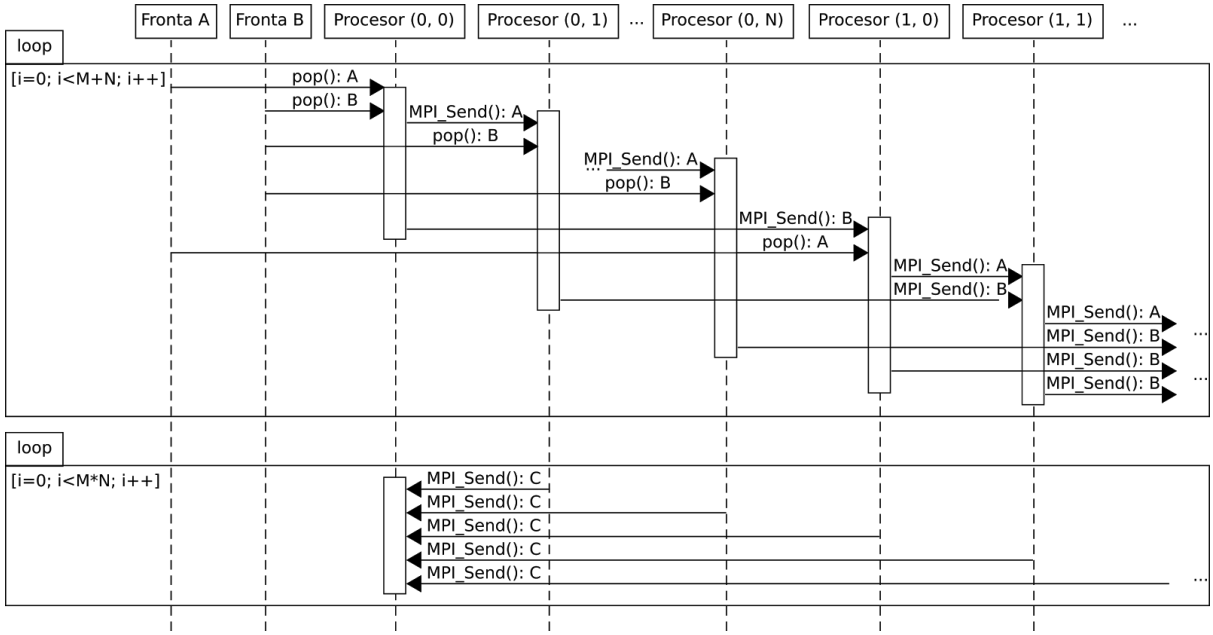


[2] Každá složka součtu odpovídá jednomu kroku podle uvedeného algoritmu

Tyto teoretické hodnoty byly podrobeny praktickému testu, kdy pro různé velikosti vstupních matic, a tudíž i různé počty použitých procesorů, bylo sledováno trvání výpočtu. Pro každou velikost bylo vygenerováno 10 náhodných dvojic vstupních matic s hodnotami v rozsahu `$RANDOM` (Bash) a druhým rozměrem o náhodné velikosti od 2 do 10. Takto získaný časový údaj byl následně vynesen do grafu. Pro každý počet procesorů bylo měřeno trvání výpočtu pro všechny topologie, tedy například pro 12 procesorů byly vyzkoušeny všechny tyto možnosti: $1 * 12$, $12 * 1$, $2 * 6$, $6 * 2$, $3 * 4$, $4 * 3$. Měření probíhalo bez zohlednění trvání načítání vstupů do paměti a také shormažďování výsledků – měřeno bylo tedy pouze trvání samotného algoritmu Mesh Multiplication. Měřeny byly časy pro počet procesorů 1 až 15, celkově tedy bylo naměřeno 46 sad měření průměrných časů z 10 běhů programu.

Komunikační protokol

Pro komunikaci mezi procesory disponuje knihovna OpenMPI funkcemi `MPI_Send` a `MPI_Recv`. Následující diagram zpráv znázorňuje veškeré operace při kterých spolu procesory musí kooperovat a koordinovat svou činnost. V prvním cyklu tedy probíhá Mesh Multiplication, druhý cyklus symbolizuje sběr výsledků a jejich akumulaci a výpis prvním procesorem.



Závěr

Experimentální výsledky měření časové složitosti potvrzují předpokládané. Avšak je zde zřejmá vysoká fluktuace hodnot. A to i přes to, že byla snaha elimitovat jakékoliv další vnější vlivy. Možná příčina je v nedostatečné náhodě velikosti vstupních matic (druhého rozměru, než toho, který definuje počet procesorů). To v souvislosti, kdy v sadě proběhlo pouze 10 měření může ovlinit konečnou průměrnou hodnotu.

Implementace má také své úskalí, které mohlo být vyřešeno lépe. Tím je načítání vstupních dat, kdy každý proces přistupuje ke vstupním souborům. Ideální přístup by byl, kdy pouze jeden procesor otevře soubor, postupně načte hodnoty rozměru, ty přes sběrnici rozpošle. Taktéž poté předá vstupní hodnoty (ve **Frontě A** či **Frontě B**). Mé řešení produkuje zbytečnou zátěž pro I/O operace a naráží na systémová limity ve chvíli, kdy je procesorů tolik jako polovina limitu pro počet otevřených file descriptorů.