問題 1. (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の $(x,y)\neq(0,0)$ における偏微分をそれぞれ求めると

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となる．

(b) $p\geq 2$ に対し，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_p)\neq 0$ における $\|\beta\|_2$ の $\beta_i(1\leq i\leq p)$ における偏微分は

$$\frac{\partial\|\beta\|}{\partial\beta_i}=\frac{\beta_i}{\|\beta\|_2}$$

となることより，$\|\beta\|_2$ の $\beta\neq 0$ における偏微分は

$$\frac{\partial\|\beta\|}{\partial\beta}=\frac{\beta}{\|\beta\|_2}$$

となる．

(c) $f(x,y)$ の $(x_0,y_0)=(0,0)$ における劣微分を求める．$(u,v)\in\mathbb{R}^2$ が劣微分の要素であったとする．すなわち，任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$f(x,y)\geq ux+vy \tag{1}$$

を満たしているとする．ここで，$r,s>0, 0\leq\theta,\phi<2\pi$ を用いて

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$
$$u=s\cos\phi,\quad v=s\sin\phi$$

と極座標変換を行うと，(1) 式は

$$\begin{aligned}r&\geq sr\cos\theta\cos\phi+sr\sin\theta\sin\phi\\&=rs\cos(\theta-\phi)\\\therefore 1&\geq s\cos(\theta-\phi)\end{aligned}$$

とかくことができる．上式が成立することの必要十分条件は $s\geq 1$ であることなので，求める劣微分は

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid u^2+v^2\leq 1\}$$

となる． □

問題 2. $g(z) = \frac{1}{2}(y - Xz)^2$ のヘッセ行列 $\nabla^2 g(x)$ を求めると

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z) = -X^T(y - Xz)$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(z) = X^T X$$

となることがわかる．ここで $X^T X$ は非負定値行列であることより，$X^T X$ の二次形式の最大値は $X^T X$ の最大固有値 λ_{max} に一致するので，任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^p$ に対して

$$\begin{aligned}(x-y)^T \nabla^2 g(z)(x-y) &= (x-y)^t X^T X(x-y) \\ &\leq \lambda_{max}\|x-y\|_2^2\end{aligned}$$

が成立することがわかる．上式で $\lambda_{max} = L$ とすれば求めたい不等式が得られる． □

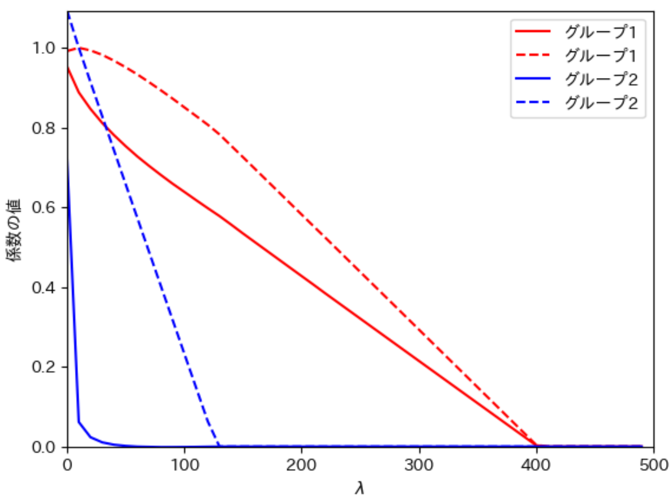
問題 3. 空欄を埋めたプログラムは下の通り．

```python
def group_lasso(z, y, lam=0):
    J = len(z)
    theta = []
    for i in range(J):
        theta.append(np.zeros(z[i].shape[1]))
    for m in range(10):
        for j in range(J):
            r = copy.copy(y)
            for k in range(J):
                if k != j:
                    r = r - z[k] @ theta[k]
            theta[j] = gr(z[j], r, lam)
    return theta
```

```python
n = 100
J = 2
u = randn(n)
v = u + randn(n)
s = 0.1 * randn(n)
t = 0.1 * s + randn(n)
y = u + v + s + t + randn(n)
z = []
z = np.array([np.array([u, v]).T, np.array([s, t]).T])
lambda_seq = np.arange(0, 500, 10)
m = len(lambda_seq)
```

```python
beta = np.zeros((m, 4))
for i in range(m):
    est = group_lasso(z, y, lambda_seq[i])
    beta[i, :] = np.array([est[0][0], est[0][1], est[1][0], est[1][1]])
plt.xlim(0, 500)
plt.ylim(np.min(beta), np.max(beta))
plt.xlabel(r"$\lambda$")
plt.ylabel("係数の値")
labels = ["グループ1", "グループ1", "グループ2", "グループ2"]
cols = ["red", "blue"]
lins = ["solid", "dashed"]
for i in range(4):
    plt.plot(lambda_seq, beta[:, i], color=cols[i//2],
             linestyle=lins[i % 2], label="{}".format(labels[i]))
plt.legend(loc="upper right")
plt.axvline(0, color="black")
plt.show()
```

上記の実行結果は以下の様になる.



問題 4. 目的関数 L は

$$L = \frac{1}{2}\|y - X\sum_{k=1}^{K}\theta_k\|_2^2 + \lambda\sum_{k=1}^{K}\|\theta_k\|_2$$

である．ただし

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{3,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_{3,2} \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} \quad (\beta_3 = \beta_{3,1} + \beta_{3,2})$$

として，$\beta = \theta_1 + \theta_2$ とした．ここで，X の最初の 3 列を $X_1 \in \mathbb{R}^{N\times 3}$，最後の 3 列を $X_2 \in \mathbb{R}^{N\times 3}$ と書き，θ_1, θ_2 の非ゼロ成分 γ_1, γ_2 で L に関して劣微分をとると

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_1} = -X_1^T(y - X_1\gamma_1) + \lambda\partial\|\gamma_1\|_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_2} = -X_2^T(y - X_2\gamma_2) + \lambda\partial\|\gamma_2\|_2$$

と書くことができる．したがって L を β で微分して 0 とおく式は

$$-X_1^T(y - X\theta_1) + \lambda\partial\|\gamma_1\|_2 = 0$$
$$-X_2^T(y - X\theta_2) + \lambda\partial\|\gamma_2\|_2 = 0$$

となるので，上式において $\theta_j = 0 (j = 1, 2)$ とおくと

$$X_j^T y = \lambda\partial\|\gamma_j\|_2 \Leftrightarrow \|X_i^T y\|_2 \leq \lambda \quad (i = 1, 2)$$

となる．最右辺が求める条件である． □

問題 5. 空欄を埋めたプログラムは下の通り

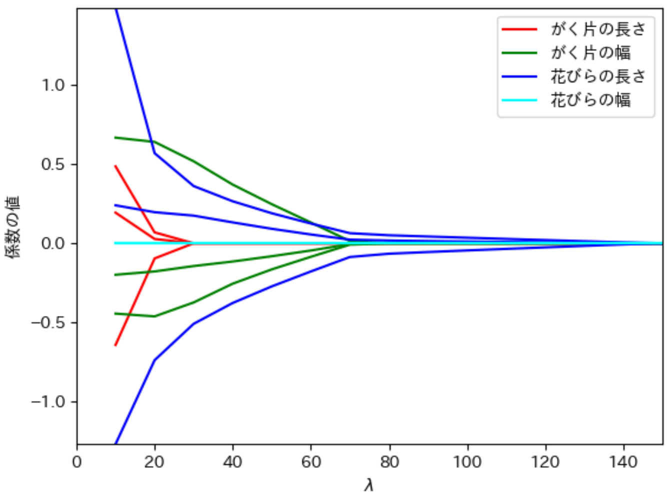
```python
def gr_multi_lasso(X, y, lam):
  n = X.shape[0]
  p = X.shape[1]
  K = len(np.unique(y))
  beta = np.ones((p, K))
  Y = np.zeros((n, K))
  for i in range(n):
      Y[i, y[i]] = 1
  eps = 1
  while eps > 0.001:
      gamma = copy.copy(beta)
      eta = X @ beta
      P = np.exp(eta)
```

```
        for i in range(n):
            P[i, ] = P[i, ] / np.sum(P[i, ])
        t = 2 * np.max(P*(1-P))
        R = (Y-P) / t
        for j in range(p):
            r = R + X[:, j].reshape(n, 1) @ beta[j, :].reshape(1, K)
            M = X[:, j] @ r
            beta[j, :] = (max(1 - lam / t / np.sqrt(np.sum(M*M)), 0)
                          / np.sum(X[:, j]*X[:, j]) * M)
            R = r - X[:, j].reshape(n, 1) @ beta[j, :].reshape(1, K)
        eps = np.linalg.norm(beta - gamma)
    return beta
```

```
iris = load_iris()
X = np.array(iris["data"])
y = np.array(iris["target"])

lambda_seq = np.arange(10, 151, 10)
m = len(lambda_seq)
p = X.shape[1]
K = 3
alpha = np.zeros((m, p, K))
for i in range(m):
    res = gr_multi_lasso(X, y, lambda_seq[i])
    alpha[i, :, :] = res
plt.xlim(0, 150)
plt.ylim(np.min(alpha), np.max(alpha))
plt.xlabel(r"$\lambda$")
plt.ylabel("係数の値")
handles = []
labels = ["がく片の長さ", "がく片の幅", "花びらの長さ", "花びらの幅"]
cols = ["red", "green", "blue", "cyan"]
for i in range(4):
    for k in range(K):
        line, = plt.plot(lambda_seq, alpha[:, i, k], color=cols[i],
                         label="{}".format(labels[i]))
    handles.append(line)
plt.legend(handles, labels, loc="upper right")
```

また実行結果は下の通り



がく片の長さ
がく片の幅
花びらの長さ
花びらの幅
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
係数の値
0
20
40
60
80
100
120
140
λ