補題の証明

補題 1

任意の $x, y \in \mathbb{R}^p$ に対して

$$\frac{2}{L}f(x) - f(p(y)) \geq \|p(y) - y\|_2^2 + 2(y-x)^T(p(y)-y)$$

が成立する．

Proof. 関数 g の微分可能性より，Taylor の定理から任意の $x, y \in \mathbb{R}^p$ に対して

$$g(x) = g(y) + (x-y)^T \nabla g(y) + \frac{1}{2}(x-y)^T \nabla^2 g(y + \theta(x-y))(x-y) \tag{1}$$

を満たす実数 θ が存在する．さらに定数 L の定め方より

$$(x-y)^T \nabla^2 g(y + \theta(x-y))(x-y) \leq L\|x-y\|_2^2 \tag{2}$$

が成立することがわかる．以上 (1),(2) 式より不等式

$$g(x) \leq g(y) + (x-y)^T \nabla g(y) + \frac{L}{2}\|x-y\|_2^2$$

が成立するので，両辺に $h(x)$ を加えることで

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ &\leq g(y) + (x-y)^T \nabla g(y) + \frac{L}{2}\|x-y\|_2^2 + h(x) = Q(x,y) \qquad (3) \\ \therefore f(x) &\leq Q(x,y) \end{aligned}$$

が任意の $x, y \in \mathbb{R}^p$ に対して成立することがわかる．

ここで, 関数 $Q(x,y)$ を x で劣微分し, 0 を要素として含むという条件は, $\gamma(y)$ を $x = p(y)$ における $h(x)$ の劣微分の要素の 1 つとして

$$\nabla g(y) + L(p(y) - y) + \gamma(y) = 0 \tag{4}$$

と書くことができ，さらに g, h がどちらも凸関数であったことから任意の $x, y \in \mathbb{R}^p$ に対して

$$g(x) \geq g(y) + (x-y)^T \nabla g(y) \tag{5}$$
$$h(x) \geq h(p(y)) + (x - p(y))^T \gamma(y) \tag{6}$$

が成立することがわかる．以上 (4),(5),(6) 式を用いることで，不等式

$$
\begin{aligned}
f(x)-Q(p(y),y) &= g(x)+h(x)-Q(p(y),y)\\
&\geq g(y)+(x-y)^T\nabla g(y)+h(p(y))+(x-p(y))^T\gamma(y)\\
&\qquad -\left\{g(y)+(p(y)-y)^T\nabla g(y)+\frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+h(p(y))\right\}\\
&= -\frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+(x-p(y))^T(\nabla g(y)+\gamma(y))\\
&= -\frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+L(x-y+y-p(y))^T(y-p(y))\\
&= \frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+L(x-y)^T(y-p(y))\\
\therefore f(x)-Q(p(y),y) &\geq \frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+L(x-y)^T(y-p(y))
\end{aligned}
$$

が成立することがわかる．さらに不等式 (3) を上式に適用すれば

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(p(y)) &\geq \frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+L(x-y)^T(y-p(y))\\
&= \frac{L}{2}\|p(y)-y\|_2^2+L(y-x)^T(p(y)-y)
\end{aligned}
$$

となることがわかり，これが求めたかった不等式である． □

補題 2

FISTA で考える列 $\{\alpha_k\}$ と得られる列 $\{\beta_k\}$，及び最適解 β_* に対して次式が成立する

$$
\frac{2}{L}\left\{\alpha_k^2(f(\beta_k)-f(\beta_*))-\alpha_{k+1}^2(f(\beta_{k+1})-f(\beta_*))\right\}\geq\|t_{k+1}\|_2^2-\|t_k\|_2^2
$$

ただし $t_k:=\alpha_k\beta_k-(\alpha_k-1)\beta_{k-1}-\beta_*$ とする．

Proof. 補題 1 において $x=\beta_k, y=\gamma_{k+1}$ とおくことで

$$
\frac{2}{L}(f(\beta_k)-f(\beta_{k+1}))\geq\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2(\gamma_{k+1}-\beta_k)^T(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}) \tag{7}
$$

が成立する．同様に補題 1 において $x=\beta_*, y=\gamma_{k+1}$ とおくことで

$$
\frac{2}{L}(f(\beta_*)-f(\beta_{k+1}))\geq\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2(\gamma_{k+1}-\beta_*)^T(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}) \tag{8}
$$

が成立する．(7) 式の両辺を $\alpha_{k+1}-1$ 倍し，(8) 式の両辺を加えることを考えると，(7) 式の両辺の $\alpha_{k+1}-1$ 倍は

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{L}(\alpha_{k+1}-1)(f(\beta_k)-f(\beta_{k+1})) \geq (\alpha_{k+1}-1)\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2(\alpha_{k+1}-1)(\gamma_{k+1}-\beta_k)^T(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}) \\
\Leftrightarrow &\frac{2}{L}\left\{(\alpha_{k+1}-1)f(\beta_k)-\alpha_{k+1}f(\beta_{k+1})+f(\beta_{k+1})\right\} \geq \alpha_{k+1}\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2-\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2(\gamma_{k+1}-\beta_k)^T(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1})
\end{aligned}
$$

であるため，上式に (8) 式を加えることで

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{L}\{(\alpha_{k+1}-1)f(\beta_k)-\alpha_{k+1}f(\beta_{k+1})+f(\beta_*)\} \\
&\quad \geq \alpha_{k+1}\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2(\alpha_{k+1}-1)(\gamma_{k+1}-\beta_k)^T(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1})+2(\gamma_{k+1}-\beta_*)^T(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}) \\
&\quad = \alpha_{k+1}\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2\{(\alpha_{k+1}-1)(\gamma_{k+1}-\beta_k)^T+(\gamma_{k+1}-\beta_*)^T\}(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}) \\
&\quad = \alpha_{k+1}\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2\langle\beta_{k+1}-\gamma_{k+1},\alpha_{k+1}\gamma_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ &\frac{2}{L}\{(\alpha_{k+1}-1)f(\beta_k)-\alpha_{k+1}f(\beta_{k+1})+f(\beta_*)\} \\
&\qquad\qquad \geq \alpha_{k+1}\|\beta_{k+1}-\gamma_{k+1}\|_2^2+2\langle\beta_{k+1}-\gamma_{k+1},\alpha_{k+1}\gamma_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\rangle
\end{aligned} \tag{9}
$$

が成立し，上式の両辺を α_{k+1} 倍することで

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{L}\{(\alpha_{k+1}^2-\alpha_{k+1})f(\beta_k)-\alpha_{k+1}^2f(\beta_{k+1})+f(\beta_*)\} \\
&\qquad\qquad \geq \|\alpha_{k+1}(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1})\|_2^2+2\alpha_{k+1}\langle\beta_{k+1}-\gamma_{k+1},\alpha_{k+1}\gamma_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\rangle
\end{aligned} \tag{10}
$$

が得られる．ここで，α_k の定め方より

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= \frac{1+\sqrt{1+4\alpha_k^2}}{2} \\
2\alpha_{k+1}-1 &= \sqrt{1+4\alpha_k^2} \\
4\alpha_{k+1}^2-4\alpha_{k+1}+1 &= 1+4\alpha_k^2 \\
\therefore \alpha_{k+1}^2-\alpha_{k+1} &= \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

となるので，これを (10) 式に適用することで

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{L}\{\alpha_k^2f(\beta_k)-\alpha_{k+1}^2f(\beta_{k+1})+f(\beta_*)\} \\
&\qquad\qquad \geq \|\alpha_{k+1}(\beta_{k+1}-\gamma_{k+1})\|_2^2+2\alpha_{k+1}\langle\beta_{k+1}-\gamma_{k+1},\alpha_{k+1}\gamma_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\rangle
\end{aligned} \tag{11}
$$

が成立することがわかる．一般に，$a, b, c \in \mathbb{R}^p$ に対して

$$
\|b-a\|_2^2+2\langle b-a, a-c\rangle = \|b-c\|_2^2-\|a-c\|_2^2 \tag{12}
$$

が成立することから，$a=\alpha_{k+1}\gamma_{k+1}, b=\alpha_{k+1}\beta_{k+1}, c=(\alpha_{k+1}-1)\beta_k+\beta_*$ として (11) 式に (12) 式を適用すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{L}\{\alpha_k^2 f(\beta_k)-\alpha_{k+1}^2 f(\beta_{k+1})+f(\beta_*)\}\\
&\quad\geq \|b-a\|_2^2+2\langle b-a, a-c\rangle\\
&\quad= \|b-c\|_2^2-\|a-c\|_2^2\\
&\quad= \|\alpha_{k+1}\beta_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\|_2^2-\|\alpha_{k+1}\gamma_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\|_2^2\\
&\quad= \|\alpha_{k+1}\beta_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)\beta_k-\beta_*\|_2^2-\|\alpha_k\beta_k+(\alpha_k-1)\beta_{k-1}-\beta_*\|_2^2\\
&\quad= \|t_{k+1}\|_2^2-\|t_k\|_2^2
\end{aligned}
$$

が成立することがわかる．ただし，4 番目の式変形は (3.20) 式より

$$
\begin{aligned}
\gamma_{k+1} &= \beta_k+\frac{\alpha_k-1}{\alpha_{k+1}}(\beta_k-\beta_{k-1})\\
\alpha_{k+1}\gamma_{k+1} &= \alpha_{k+1}\beta_k+(\alpha_k-1)(\beta_k-\beta_{k-1})
\end{aligned}
\tag{13}
$$

が成立することを用いた．(13) 式の最左辺と最右辺を見ることで，不等式

$$
\frac{2}{L}\{\alpha_k^2 f(\beta_k)-\alpha_{k+1}^2 f(\beta_{k+1})+f(\beta_*)\}\geq \|t_{k+1}\|_2^2-\|t_k\|_2^2
$$

が得られる．これは求める不等式であった． □

補題 3

ある実数 c が存在して，2 つの非負値実数列 $\{a_k, b_k\}$ が任意の自然数 $k\geq 1$ について

$$
a_k-a_{k+1}\geq b_{k+1}-b_k \text{ かつ } a_1+b_1\leq c
$$

を満たすならば，任意の自然数 k に対して $a_k\leq c$ が成立する．

Proof. 条件式を変形すると

$$
a_k+b_k\geq a_{k+1}+b_{k+1}
$$

となり，これは実数列 $\{a_k+b_k\}$ が単調減少列であることを示している．これと $c\geq a_1+b_1$ であることより，任意の自然数 k に対して

$$
c\geq a_1+b_1\geq\cdots\geq a_k+b_k
$$

が成立する．$\{a_k\},\{b_k\}$ の非負値性より，任意の自然数 k に対して $a_k\leq c$ がいえる □

補題 4

FISTA で考える列 $\{\alpha_k\}$ は任意の自然数 $k \geq 1$ に対して

$$\alpha_k \geq \frac{k+1}{2}$$

が成立する．

Proof. 帰納法で証明する；(3.19) 式より任意の自然数 $k \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= \frac{1+\sqrt{1+4\alpha_k^2}}{2} \\
&\geq \frac{1+\sqrt{1+(k+1)^2}}{2} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&\geq \frac{1+\sqrt{(k+1)^2}}{2} = \frac{(k+1)+1}{2}
\end{aligned}$$

となるので

$$\alpha_{k+1} \geq \frac{(k+1)+1}{2}$$

が成立する．また $k=1$ のときは

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1+1}{2}$$

となるので成立している．以上より任意の自然数 $k \geq 1$ に対して

$$\alpha_k \geq \frac{k+1}{2}$$

が成立することが言える． □