

BÀI TẬP ÔN TẬP MÔN GIẢI TÍCH 2**CHƯƠNG I: PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN****Bài 1:** Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau theo các biến:

1. $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; 2. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 3. $z = \arctan \frac{y}{x}$; 4. $z = x^{2y}$
5. $z = (1 + xy)^y$; 6. $z = x^{x^y}$; 7. $z = x^2y + 3y^4x^2 + e^{(x+3y)}$; 8. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
9. $z = (2x + 3\sin xy)e^{(3x+2y)}$; 10. $z = \ln\left(\sin \frac{x+1}{\sqrt{y+2}}\right)$; 11. $z = (x + \sin y)^{(e^{3x} + \ln xy)}$
12. $z = 3^{(x^2+x^3+3x^2y^3)}$; 13. $u = \frac{x^3 + y}{y + x} - e^x \cdot \arctan \frac{2x + yz}{x^2 + z^2}$; 14. $z = \tan(x+y) \cdot e^{\frac{x}{y}}$.

Bài 2: Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau:

1. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$; 2. $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$; 3. $z = \frac{x-y}{x+y}$
4. $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{(x+y)}$; 5. $z = e^{x-y^2} + \cos(x+2y)$; 6. $u = \frac{x}{z} \ln(x^2 + y^2 + yz)$.

Bài 3:

- a. Cho hàm số $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tính $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
- b. Cho hàm số $z = x \ln(y^2 - x^2)$. Tính $B = \frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y - \frac{z}{x^2}$.

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau:

- a) $z = \ln[(u+1)^2 + (v-1)^2]$, $u = \frac{x+2y}{y}$, $v = xy$; b) $z = y\sqrt{4+2x^2}$, $x = e^{-2t}$, $y = te^{2t}$.

Bài 5: Tính đạo hàm các hàm số ẩn sau:

- a. Cho hàm số $x = x(y, z)$ là hàm ẩn xác định bởi $y^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{z^2 - x^2}$. Tính $dx(y, z)$.
- b) $\ln \sqrt{x^4 + 2y^2} = \arccot \frac{x}{y}$ tính y' ; b) $xy^3z^2 - \sin(2x-3y+5z) - \ln(x+y^2+2z) = 31$ tính y'_x, y'_z .
- c) Cho hàm số ẩn $z = f(x, y)$ xác định bởi hệ thức $z = xe^{\frac{2z}{y}}$ tính gần đúng $f(0,04;0,96)$.
- d) Tính đạo hàm của hàm số ẩn $x = x(y)$, $z = z(y)$ xác định bởi hệ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

Bài 6: Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

1. $z = \sin(x^2 + y^2 - 1)$; 2. $z = \ln \cot \frac{y}{x}$; 3. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$
4. $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$; 5. $u = 2^{x^y} + z^{(2x)^y}$; 6. $z = \int_u^v e^{t^2} dt, u = x^2 - 3y, v = 2x - \cos y^2$.
7. Cho $u(x, y), v(x, y)$ là các hàm số ẩn xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}; \quad u(1,1) = 0, v(1,1) = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } du(1,1), dv(1,1).$$

Bài 7: Tính gần đúng giá trị các biểu thức sau:

- 1) $\sqrt{\sin^2 1,75 + 8.e^{0,055}}$; 2) $(\sqrt{98} - \sqrt[3]{126})^4$; 5) $\sqrt{5.e^{0,02} + (1,03)^2 + (0,98)^3}$
- 3) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$; 4) $\arctan\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$; 6) $\sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$.

Bài 8: Tìm cực trị địa phương của các hàm hai biến sau:

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1. $z = x^2 - 2xy + 4y^3$ | 6. $z = x^2 - 4xy + y^3 - 3y + 1$ | 11. $z = x^3 + y^3 - 9xy - 3$ |
| 2. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$ | 7. $z = y^2 - 4xy - x^3 + 3x$ | 12. $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 5$ |
| 3. $z = -3x^2 - x^2y + 2y^3 + 3y^2$ | 8. $z = x^2 - 6xy + y^3 - 21y$ | 13. $z = x^2 + 8x + y^3 + 13y - 8xy + 9$ |
| 4. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ | 9. $z = 2x^2 - 4xy + y^3 + y$ | 14. $z = x^2y(4 - x - y) + 7$ |
| 5. $z = 3y^3 + 4x^2y + 24xy + 1$ | 10. $z = 2x^2 - 4xy + 3y^3 - 5y$ | 15. $z = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 12x + 12y$ |

Bài 9: Tìm cực trị của các hàm số sau:

- a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$; b) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + 2xy + \frac{1}{4}y^4$ với $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 10: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

- a. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong miền $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
- b. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong miền $\{(x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$,
- c. $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ trong miền tròn: $x^2 + y^2 \leq 1$.

Bài 11:

- a) Cho $u = xy^2z^3$, $M_0(1, 2, -1)$, $M_1(0, 4, -3)$. Tính $\frac{\partial u(M_0)}{\partial M_0 M_1}$.
- b) Cho $u = \arccos \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$ và $A(1, 1, 1)$. Tính $\frac{\partial u(A)}{\partial AB}$ biết $B(3, 2, 3)$.

c) Cho $u = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$. Xác định điểm tại đó $\text{grad}u = \left(1, -\frac{16}{9}\right)$.

d) Cho $\vec{F}(x, y, z) = (x^3y + y^3z^2)\vec{i} + (x^2z^2 + 3xy^3)\vec{j} + (2xy^2z + z^3)\vec{k}$.

Tính $\text{div}\vec{F}(x, y, z)$ và $\text{rot}\vec{F}(x, y, z)$.

Bài 12:

a) Tìm hàm $f(x, z)$ sao cho trường véc tơ $\vec{F} = (3x^2 + 7y - 6xy - 3z^2; f(x, z); 6z(y - x))$

là trường thế.

b) Cho trường vô hướng $u = e^{xy}(2x - y)$. Tính $\text{rot}(\text{grad}u)$ và $\frac{\partial u}{\partial(\text{grad}u(1,1))}(1,1)$.

CHƯƠNG II : TÍCH PHÂN BỘI HAI – TÍCH PHÂN BỘI BA

A. Tích phân kép.

Bài 1: Thay đổi thứ tự trong tích phân sau:

a) $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx$

b) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$

c) $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy$

d) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

e) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$

f) $\int_1^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$

Bài 2: Tính $I = \iint_D xy \, dx dy$, trong đó

a) D được giới hạn bởi $y = x^2$; $x = y^2$.

b) D được giới hạn bởi đường thẳng $y = x - 4$ và (P) $y^2 = 2x$.

Bài 3: Tính $I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy$ trong đó D được giới hạn bởi:

a) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

b) Hình vành khăn $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$.

c) $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx dy$; D là hình tròn tâm gốc O bán kính bằng 2.

d) $J = \iint_D (2x - x^2 - y^2)^3 \, dx dy$; D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2x$.

B. Tích phân bội ba**Bài 1:** Tính $I = \iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$; V giới hạn bởi

$$x=0; y=0; z=0; z=1; x^2 + y^2 = 2x.$$

Bài 2: Tính $I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ Tính $\iiint_V z^2 dx dy dz$; V là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

CHƯƠNG III : TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – TÍCH PHÂN MẶT**A. Tích phân đường.****Bài 1:** Tính các tích phân đường sau:a. $\int_{AB} (x - y) ds$, AB là đoạn thẳng nối 2 điểm $A(0;0)$, $B(2;1)$.b. $\int_L xy ds$, L là biên hình chữ nhật $ABCD$: $A(0; 0)$; $B(4;0)$; $C(4;2)$; $D(0; 2)$.c. $\int_L \sqrt{2y} ds$, L : $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $z = \frac{t^3}{3}$; $0 \leq t \leq 1$.**Bài 2:** Tính các tích phân đường sau:a. $\int_{ABC} (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, ABC là đường gấp khúc $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(4, 0)$.b. $\int_L y dx - (y + x^2) dy$, L là cung Parabol $y = 2x - x^2$ nằm ở trên trục hoành theo chiều kim đồng hồ.**Bài 3:** Tính $I = \int_{AB} (xy - 1) dx + x^2 y dy$ với AB từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(0; 2)$ theo các đường sau:a. $2x + y = 2$; b. $4x + y^2 = 4$; c. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ theo chiều dương.**Bài 4:** Tính các tích phân đường sau:a. $\oint_L xy \left[-\left(x + \frac{y}{2}\right) dx + \left(y + \frac{x}{2}\right) dy \right]$, L là biên $\triangle ABC$, $A(-1; 0)$, $B(1; -2)$, $C(1; 2)$

b. $\int_{ABC} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy$, ABC là đường gấp khúc nối A(0; 0), B(1; 1), C(0; 2)

c. $I = \oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$; $J = \oint_L x^3(y + \frac{x}{4})dy - y^3(x + \frac{y}{4})dx$,

với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

B. Tích phân mặt

Bài 1: Tính tích phân mặt $I = \iint_S (x^2 + y^2)dS$ nếu

a. S là mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

b. S là mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c. $\iint_S (x + y + z)dS$, S là biên hình lập phương $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Bài 2: Tính các tích phân mặt sau:

a. $I = \iint_S xyzdxdy$, S là mặt ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b. $\iint_S z dxdy$, S là mặt ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Bài 3: Tính các tích phân mặt sử dụng cùng thức Ostrogradsky.

a. $\iint_S xzdydz + yxdzdx + zy dxdy$, S là mặt ngoài của biên hình chóp $0 \leq x, y, z$ và $x + y + z \leq 1$.

b. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, S là phía ngoài của $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bài 4: Tính thông lượng của các trường véc tơ sau:

a) $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + x^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ qua mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

b) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k}$ qua mặt ngoài của mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Bài 5: Xét các trường sau, trường nào là trường thế. Nếu là trường thế tìm hàm thế vị.

a) $\vec{F}(x, y, z) = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 7y)\vec{j}$; b) $\vec{F}(x, y, z) = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.

CHƯƠNG IV: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**Bài 1:** Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$; b) $y' + \cos(x-y) = \cos(x+y)$; c) $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \frac{3y+2}{x+1} \cdot y'$

d. $(x-2)(y^2-1)dx - (x+4)ydy = 0$; e. $y' = \sin(x-y+2)$

f. $(2x-1)(y^2-4)dx - e^x \cdot y \cdot dy = 0$.

Bài 2: Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau:

a) $e^{1+x^2} \tan y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$, $y|_{x=0} = \frac{\pi}{2}$; b) $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+1)} = 0$, $y|_{x=1} = 3$.

Bài 3: Giải các phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1 sau:

a) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ b) $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$ c) $x \cdot \sin \frac{y}{x} \cdot y' + x = y \sin \frac{y}{x}$

d) $y' = \frac{-x-y+2}{x-y+4}$; e) $y' = \frac{-2x+2y+1}{x-y+1}$

Bài 4: Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau:

a. $(2+x^2)y' - 2xy = (2+x^2)^2$; b. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$; c. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

d. $y' + \tan y = \frac{x}{\cos y}$; e. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$; $y|_{x=e} = \frac{1}{2}e^2$; f. $xy' + y = e^x$; $y|_{x=1} = 1$

g. $(2e^y - x)y' = 1$; h. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$; k. $(\sin^2 y + x \cot y)y' = 1$

Bài 5: Giải các phương trình vi phân Becnulli sau:

1) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$; 2) $ydx + (x + x^2 y)dy = 0$; 3) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

4) $3y^2 y' + y^3 + x = 0$; 5) $y' + 2y = y^2 e^x$; 6) $(x+1)(y' + y^2) = -y$

7) $y' = y^4 \cos x + y \tan x$; 8) $xy^2 y' = x^2 + y^3$; 9) $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$

10) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$; 11) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$; 12) $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$

Bài 6: Giải các phương trình vi phân toàn phần sau:

a. $(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy = 0$; b. $3x^2(1+\ln y)dx - (2y - \frac{x^3}{y})dy = 0$,

c. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

Bài 7: Giải các phương trình sau đây bằng cách tìm thừa số tích phân α

a. $(2y+xy)dx + 2xdy = 0$, $\alpha(x)$; b. $y(1+xy)dx - xdy = 0$, $\alpha(y)$;
c. $xdx + (2x+y)dy = 0$, $\alpha(x+y)$; d. $xdy + ydx - xy^2 \ln xdx = 0$, $\alpha(xy)$

Bài 8: Giải các phương trình vi phân cấp 2 khuyết sau:

1) $y'' = 2\cos^2 x - \sin^3 x$; 2) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$; 3) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$; $y(2)=1, y'(2)=-1$
4) $(1-x^2)y'' - xy' = 2$; 5) $(1+x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$; 6) $1 + y'^2 = y y''$; 7) $y''(2y+3) - 2y'^2 = 0$
8) $y y'' - y'^2 = 0$, $y(0)=1, y'(0)=2$; 9) $y''(1+y) = y'^2 + y'$; 10. $2xy' y'' = y'^2 + 1$

Bài 9: Giải phương trình vi phân cấp hai sau:

a. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$; biết 1 nghiệm riêng $y = x$;
b. $(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng $y_1(x)=1$; $y_2(x)=x$.

Bài 10: Giải phương trình vi phân sau bằng phương pháp đổi biến.

a. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$, $t = e^x$,
b. $(x^2+1)y'' + 2xy' + \frac{4y}{x^2+1} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\tan t = x$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$,
c. $x^2 y'' + 4xy' + (2+x^2)y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \frac{u}{x^2}$.

Bài 11: Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Lagrange:

1) $y'' - y = \frac{1}{x}$ 5) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$ 9) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$
2) $y'' - 2y' + y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$ 6) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ 10) $y'' + 4y = 2 \tan x$
3) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ 7) $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$ 11) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

4) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

8) $y'' + y = \tan x$

12) $y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x \cdot \sqrt{\sin 2x}}$

Bài 12: Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y'' - 3y' + 2y = (x + 5)e^x$; b. $y'' + 6y' + 9y = 3\sin x$; c. $y'' - 5y' - 6y = \cos x + \sin 2x$

d. $y'' + y = 2\sin 2x - x^2 \cos 2x$; e. $y'' - y = e^x(x - 7)$; f. $y'' - 9y' + 20y = xe^{4x}$

g. $y'' - 4y = e^x[(-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin x]$;

h. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

i. $y'' + 4y = \sin 2x + 1, y\Big|_{x=0} = \frac{1}{4}, y'\Big|_{x=0} = 0$;

k. $y'' - y = x \cdot \cos^2 x$.

GOODLUCK TO YOU!