TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN
HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUÂT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương (viết sai tên trừ điểm)

Nhóm thực hiện:

1. Đoàn Thanh Tùng 21521646
2. Đàm thành Nam 21522354
3. Lê Phan Hiển 21520839
4. Lê Khai Trí 21521565

TP.HCM, ngày 5 tháng 10 năm 2023

---

**Bài 1:**

a. 1 + 3 + 5 + 7 + … + 999

Ta nhận thấy đây là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với: a1 = 1; d = 2

⇨ n = $\frac{999-1}{2}$ + 1 = 500

⇨ Tổng 500 phần tử đầu tiên: S500 = $\frac{500(1+999)}{2}$ = 250 000

b. 2 + 4 + 8 + 16 + … + 1024

Ta nhận thấy đây là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân với: a1 = 2; r = 2

⇨ 1024 = 2.2n-1 ⬄ n = 10

⇨ S500 = $\frac{a(1-r^{10})}{1-r}$ = $\frac{2(1-2^{10})}{1-2}$ = 2046

c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1$

= $\sum_{i=1}^{n+1} 1$ - $\sum_{i=1}^{2} 1$ = n + 1 – 2 = n - 1

d. $\sum_{i=3}^{n+1} \mathrm{i}$

= $\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{i}$ - $\sum_{i=1}^{2} \mathrm{i}$ = $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ – 3 C $\frac{(n+1)^{\wedge}2}{2}$ – 3

e. $\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}(\mathrm{i}+1)$

$= 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{i}(\mathrm{i}+1) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{i} \approx \frac{(\mathrm{n}-1)^3}{3} + \frac{(\mathrm{n}-1)^2}{2}$

f. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

$= 3 \sum_{j=1}^{n} 3^j \approx 3\frac{\mathrm{n}^{j+1}}{j+1}$

g. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

$= \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \approx (\frac{\mathrm{n}^2}{2})^2 \approx (\frac{\mathrm{n}^4}{4})$

h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

$= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

i. $\sum_{j\in\{2,3,5\}} (j^2 + \mathrm{j})$

$= (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (5^2 + 5) = 48$

a. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i + j)$

$= 101 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} (i + j) = 101 \sum_{i=1}^{m} [(n+1)i + 0 + \sum_{j=1}^{n} j]$

$\approx 101[(n+1) \frac{1}{2}m^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} n^2 ]$

$\approx [(n+1) \frac{101}{2}m^2 + \frac{101}{2}mn^2]$

**Bài 2:**

```
s = 0;
i = 1;
while (i ≤ n) do
        j = 1;
        while (j ≤ i^2) do
                s = s + 1;
                j = j + 1;
        end do;
        i = i +1;
end do;
```

Giải

Gọi αi là số lần lặp của while trong (xét độc lập while ngoài)

⇨ $\begin{cases} so\ sánh: \alpha\mathrm{i} + 1 \\ gán: 2\alpha\mathrm{i} \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} \mathrm{G(n)} = 2 + 2\mathrm{n} + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha\mathrm{i} \\ SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha\mathrm{i} + 1) \end{cases}$

Tính αi:

αi = số con j chạy từ 1 đến i2 = i2

⇨ $\mathrm{G(n)} = 2 + 2\mathrm{n} + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha\mathrm{i}$ ≈ $2(1 + n + \frac{\mathrm{n\hat{}2}}{3})$

⇨ $SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha\mathrm{i} + 1)$ ≈ $2n + 1 + \frac{\mathrm{n\hat{}2}}{3}$

**Bài 3:**

```
sum = 0
i = 1
while i≤n do
        j = n-i*i
        while j ≤ i*i do
                sum=sum + i*j
                j=j+1
        endw
        i=i+1
endw
```

$P_i$

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

G(n) = 2 + 2n + $\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

Tính $\alpha_i$: số con j với j chạy từ n – $i^2$ tới $i^2$

$\alpha_i$ = $i^2$ – (n – $i^2$) + 1 = $2i^2$ – n + 1

Vòng lặp trong chỉ thực hiện khi j <= $i^2$

≈ n – $i^2$ <= $i^2$

≈ $2i^2$ >= n

≈ i >= $\sqrt{(n/2)}$

⇨ $\alpha_i = \begin{cases} 2i^2 - n + 1 & khi\ i \geq \sqrt{(n/2)} \\ 0 & khi\ i < \sqrt{(n/2)} \end{cases}$

Kết luận:

G(n) = 2 + 2n + 2$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

= 2 + 2n + 2 $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(2i^2 - n + 1)$

= 2 + 2n + 2 $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(2i^2)$ + 2 $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(-n)$ + 2 $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(1)$

= 2 + 2n + 4( $\sum_{i=1}^{n}(i^2)$ - $\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{(n/2)}\rfloor}(i^2)$) – 2n $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(1)$ + 2 $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(1)$

= 2 + 2n + 4($n^3/3$ - $\lfloor\sqrt{(n/2)}\rfloor^3/3$) – 2n (n - $\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil$ + 1) + 2(n - $\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil$ + 1)

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

= 2n + 1 + $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(2i^2 - n + 1)$

= 2n + 1 + $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(2i^2)$ + $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(-n)$ + $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(1)$

= 2n + 1 + 2( $\sum_{i=1}^{n}(i^2)$ - $\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{(n/2)}\rfloor}(i^2)$) - n $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(1)$ + $\sum_{i=\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil}^{n}(1)$

= 2n + 1 + 2($n^3/3$ - $\lfloor\sqrt{(n/2)}\rfloor^3/3$) – n (n - $\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil$ + 1) + (n - $\lceil\sqrt{(n/2)}\rceil$ + 1)

**Bài 4:**

```
float Alpha (float x, long n)
{       long i= 1; float z = 0;
        while ( i ≤ n)
        {       long j = 1; float t = 1;
                while (j  ≤ i )
                {       t = t*x;
                        j = 2*j;
                }
                z = z+i*t;
                i=i+1;
        }
        return z;
}
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

G(n) = 2 + 4n + $\sum_{i=1}^{n} 2\,\alpha_i$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

Tìm $\alpha_i$: số con j với j chạy từ 1 -> I, biến tăng 2

j có thể là {1; 2; 4; 8; ….; $2^k$ <= i}

j có dạng $2^k$

$\alpha_i$ là số phần tử của tập hợp

≈ {1; 2; 4; ….; $2^k$ <= i}

≈ Số con k thỏa điều kiện 1 <= $2^k$ <= i

≈ $\log_2 1$ <= k <= $\log_2 i$

- ⇨ Số con k thỏa điều kiện
  $\alpha_i = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$

Kết luận:

G(n) = 2 + 4n + 2 $\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor \ + \ 1)$

= 2 + 6n + 2$\lfloor n \log_2 n \rfloor$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \ + \ 1)$

= n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor \ + \ 1)$ + $\sum_{i=1}^{n} 1$

= 3n + 1 + $\lfloor n \log_2 n \rfloor$

**Bài 5:**

```
sum = 0; i = 1;
while ( i ≤ n)
{       j = n – i ;
        while (j  ≤ 2* i )
        {       sum = sum + i*j;
                j = j  + 2;
        }
        k = i ;
        while ( k > 0)
        {       sum = sum + 1;
                k = k / 2;
        }
        i = i + 1;
}
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong thứ nhất (xét độc lập với while ngoài)

Gọi $ß_i$ là số lần lặp của while trong thứ hai (xét độc lập với while ngoài)

G(n) = 2 + 3n + $\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$ + $\sum_{i=1}^{n} 2ß_i$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$+ $\sum_{i=1}^{n}(ß_i + 1)$

Tính $\alpha_i$: số con j với j chạy từ n – i -> 2i

Vòng lặp chỉ thực hiện khi n – i <= 2i

≈ n <= 3i

≈ i >= n/3

⇨ $\alpha_i = \begin{cases} 3i - n + 1 & khi\ i \geq \frac{n}{3} \\ 0 & khi\ i < \frac{n}{3} \end{cases}$

Tính $ß_i$: số con k với k chạy từ i -> 0, bước giảm tỉ lệ ½

K có thể là

{i; i/2; i/4; ……; i/($2^m$) > 0}

K có dạng i/($2^m$)

$ß_i$: số phần tử của tập hợp

{i; i/2; i/$2^2$; ….; i/$2^m$ > 0}

≈ Số con m thỏa mãn điều kiện 0 < i/$2^m$ <= i

≈ 1 <= i/$2^m$ <= i

≈ $\log_2 1$ <= $\log_2 2^m$ <= $\log_2 i$

≈ 0 <= k <= $\log_2 i$

- ⇨ Số con k thỏa điều kiện:
  $ß_i = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$

Kết luận:

G(n) = 2 + 3n + $2\sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n}[3i - n + 1] + 2\sum_{i=1}^{n}[\lfloor \log_2 i \rfloor + 1]$

= 2 + 3n + $2\sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n} 3i + 2\sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n} -n + 2\sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n} 1 + 2\lfloor n\log_2 i \rfloor + 2n$

= 2 + 5n + $6\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil} i\right) - 2n\left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + 2\left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + 2\lfloor n\log_2 i \rfloor$

= 2 + 5n + $6\left(n^2/2 - \left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right)^2/2\right) - 2n\left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + 2\left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + 2\lfloor n\log_2 i \rfloor$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n}(ß_i + 1)$

= 3n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(3i - n + 1) + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1)$

= 4n + 1 + $3\sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n} i - \sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n} n + \sum_{i=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor$

= 4n + 1 + $3\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil} i\right) - n\left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + \left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + \lfloor n\log_2 i \rfloor$

= 4n + 1 + $3\left(n^2/2 - \left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right)^2/2\right) - n\left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + \left(n - \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil + 1\right) + \lfloor n\log_2 i \rfloor$

**Bài 6:**

```
i = 1; count =0;
while ( i ≤ 4n)
{       x=(n-i)(i-3n) ;
        y=i-2n;
        j=1;
        while (j  ≤ x )
        {       count = count - 2;
                j = j  + 2;
        }
        if (x>0)
                if (y>0)
                        count = count +1;
        i = i + 1;
}
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong thứ nhất (xét độc lập với while ngoài)

$\alpha_i$: số con j với j chạy từ 1 tới x, bước nhảy tăng 2

⇨ $\alpha_i$ = x/2 (tương đối) = (n -i) (i -3n)/2

whilie trong chỉ thực hiện khi j <= x

$\approx 1 <= x$

$\approx x > 0$

⇨ $\alpha_i = \begin{cases} \frac{(n-i)(I-3n)}{2} & khi\ x > 0 \\ 0 & khi\ x \le 0 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

| i | 1 | n | 2n | 3n | 4n |
|---|---|---|---|---|---|
| x = (n - i) (i – 3n) | - | 0 | + | + 0 | - |
| y = i – 2n | - | - | 0 + | + | |

Câu lệnh y > 0 chỉ được thực hiện khi x > 0

≈ n < i < 3n

≈ n + 1 <= i <= 3n – 1

- ⇨ Số lần thực hiện câu lệnh ≈ (3n - 1) – (n - 1) + 1

  ≈ 2n – 1

Số lần thực hiện count = số lần $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

≈ 2n < i < 3n

≈2n + 1 <= i <= 3n – 1

- ⇨ Số lần thực hiện = (3n - 1) (2n + 1) + 1 = n – 1

G(n) = 2 + 12n + $\sum_{i=1}^{4n} 2\alpha i$ + n – 1 + 4n

= 17n + 1 + 2$\sum_{i=1}^{4n} \alpha i$ = 17n + 1 + $\sum_{i=1}^{4n} x$

= 17n + 1 + $\sum_{i=1}^{4n}(\mathrm{n}-\mathrm{i})(\mathrm{i}-3\mathrm{n})$

= 17n + 1 + $\sum_{i=n}^{3n}(\mathrm{n}-\mathrm{i})(\mathrm{i}-3\mathrm{n})$

= 17n + 1 + $\sum_{i=n}^{3n}(-i^2 + 4\mathrm{ni} - 3n^2)$

= 17n + 1 - $\sum_{i=n}^{3n} i^2$ + $\sum_{i=n}^{3n} 4ni$ + $\sum_{i=n}^{3n} 3n^2$

= 17n + 1 – ( $\sum_{i=1}^{3n} i^2$ - $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ) + 4n ($\sum_{i=1}^{3n} i$ -$\sum_{i=1}^{n} i$) + $3n^2(2n + 1)$

= 17n + 1 – ($(3n)^3/3 - n^3/3$) + 4n($(3n)^2/2 - n^2/2$) + $3n^2(2n + 1)$

SS(n) = 4n + 1 + $\sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1)$ + 4n + 2n – 1

= 14n + $\sum_{i=1}^{4n} \alpha_i$

**Bài 7**

$i = 1;\ count = 0;$ //g = 2

$while\ (i \leq 4n)$ //g =3, ss = 4n+1

{

$x = (n - i)(i - 3n);$

$y = i - 2n;$

$y = 1;$

$while\ (j \leq x)$

$\{$

$if(i \geq 2y)$

$count = count - 2;$ //1g

$j = j + 1;$ //1g

$\}$

$i = i + 1$ //1g

$\}$

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của vòng while trong (độc lập với while ngoài).

Ta có $\alpha_i$ là số con $j$ mà $j$ chạy từ $1 \rightarrow x$ với bước tăng là 1. Vì vậy,

$$\alpha_i = x = (n-i)(i-3n)$$

Điều kiện lặp của vòng while trong: $j \leq x \Leftrightarrow x \geq 1$. Từ đó, ta xác định được:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i \leq n \text{ hoặc } i \geq 3n \\ (n-i)(i-3n), & n+1 \leq i \leq 3n \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

| $i$ | $-\infty$ | $n$ | | $2n$ | | $3n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = (n-i)(i-3n)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y = i - 2n$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

Điều kiện để $count = count - 2$ được thực hiện là

$$i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2(i-2n) \Leftrightarrow i \leq 4n.$$

Vì vậy, phép gán này luôn thực hiện khi while trong lặp

Ta có:

$$G(n) = 2 + 4 \times 4n + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i = 2 + 16n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n)$$

$$SS(n) = 4n + 1 + \sum_{1}^{4n}(\alpha_i + 1) + 4\sum_{1}^{4n}(\alpha_i) = 8n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n - i)(3i - n)$$

**Bài 8**

```
i = 1; count = 0;                                   //g=2
while (i ≤ 3n)                                      //ss=3n+1, g=3
{
    x = 2 × n − i;
    y = i − n;
    y = 1;
    while (j ≤ x)
    {
        if(j ≥ n)
            count = count − 1;                      //g=1
        j = j + 1;                                  //g=1
    }
    if(y > 0)
        if(x > 0)
            count = count + 1                       //g = 1
    i = i + 1                                       //g = 1
}
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của vòng while trong (độc lập với while ngoài).

Ta có $\alpha_i$ là số con $j$ mà $j$ chạy từ $1 \rightarrow x$ với bước tăng là 1. Vì vậy,

$$\alpha_i = x = 2n - i$$

Điều kiện lặp của vòng while trong: $j \leq x \Leftrightarrow x \geq 1$. Từ đó, ta xác định được:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i > 2n - 1 \\ 2n - i, & i \leq 2n - 1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

| $i$ | | $n$ | | $2n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = \ 2n - i$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y = \ i - n$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

Gọi $\beta_i$ là số lần câu lệnh if $j \geq n$ thỏa mãn. Ta có, $j \leq x = 2n - i \ khi \ i \leq 2n - 1$.

Vậy $\beta_i = \ số \ con \ j \ trong \ khoảng \ từ \ n \ tới \ 2n - \ i = \ n - \ i + 1 \ khi \ 2n - i \geq \ n \ \Leftrightarrow \ i \leq \ n,$

Vậy số lần $count = \ count + 1$ được thực hiện được tương đương với $\beta_i = n - i + 1$ khi $i \leq n = \ \sum_{i=1}^{n} n - \ i + 1$

Từ bảng xét dấu ta có:

$$x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq i \leq 2n - 1$$

$$y > 0 \Leftrightarrow \ n + 1 \leq i \leq 3n$$

Để thỏa mãn đồng thời $x > 0 \ và \ y > 0 \Leftrightarrow \ n + 1 \leq \ i \leq 2n - 1$. Vậy nên số phép gán

$i = \ i + 1$ sẽ là $n - 1$ phép gán

Ta có:

$$G(n) = 2 + 4 \times \ 3n + \sum_{i=1}^{3n} \beta_i + \sum_{i=\,1}^{3n} \alpha_i + (n - 1)$$

$$= 1 + 13n + \sum_{i=1}^{n} (n - \ i + 1) + \sum_{i=\,1}^{2n-1} 2n - \ i$$

$$SS(n) = 3n + 1 + \sum_{1}^{3n} (\alpha_i + 1) + \sum_{1}^{3n} (\alpha_i) + 3n + [3n - (n + 1) + 1]$$

$$= 8n + 1 + 2\sum_{i=1}^{3n} 1 + 2\sum_{i=1}^{2n-1} 2n - \ i$$

**Bài 9.**

```
i=1;
res=0;
while i≤n do
        j=1;
        k=1;
        while j ≤ i do
                res=res+i*j;
                k=k+2;
                j=j+k;
        endw
        i=i+1;
endw
```

$P_i$

2n g

n + 1 ss

2n g

$\alpha_i$ + 1 ss

3 $\alpha_i$ g

n g

Gọi $\alpha_i$ là số lần so sánh của while trong (Xét độc lập với while ngoài)

Ta có:

G(n) = 2 + 2n + $\sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i$ + n

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

Lúc ban đầu j = 1, k = 1

Lần chạy 1: k = 1 + 2 = 3; j = 1 + 3 = 4

Lần chạy 2: k = 3 + 2 = 5; j = 4 + 5 = 9

Lần chạy 3: k = 5 + 2 = 7; j = 9 + 7 = 16

Lần chạy 4: k = 7 + 2 = 9; j = 16 + 9 = 25

…

Khi chạy tới con k cuối cùng thì $k_{cuối}$ = 1 + $2\alpha_i$

Khi đó thì con $j_{cuối}$ = 1 + 3 + 5 + 7 + … + (1 + $2\alpha_i$)

= $(\alpha_i + 1)^2$ (Công thức ở câu 1, với n = 1 + $2\alpha_i$)

Ta có j thuộc trong tập {1, 4, 9, 16, … , $(k + 1)^2$ + … + $(\alpha_i + 1)^2$ <= i}

Khi đó $\alpha_i$ chính là số con k thỏa mãn

Ta có: 0 <= k <= $\alpha_i$

Lại có $(\alpha_i + 1)^2$ <= i

⇔ 1 <= $(\alpha_i + 1)$ <= $\sqrt{i}$

⇔ 0 <= $\alpha_i$ <= $\sqrt{i} - 1$

- ⇨ 0 <= k <= $\alpha_i$ <= $\sqrt{i} - 1$
- ⇨ ⇔ 0 <= k <= $\sqrt{i} - 1$
- ⇨ Có ($\sqrt{i}$ – 1 – 0 + 1) = $\sqrt{i}$ con k thỏa mãn hay $\alpha_i$ = $\sqrt{i}$

Khi đó:

G(n) = 2 + 2n + $\sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i$ + n

= 2 + 3n + 3 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

= 2 + 3n + 3 $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$

Ta có $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$ = $\sum_{i=1}^{n} i^{1/2} \approx \frac{1}{\frac{1}{2}+1}$ * n ½ = 2/3 * $n^{3/2}$

G(n) = 2 + 3n + 3 * (2/3 * $n^{3/2}$) = 2 + 3n + $2n^{3/2}$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

= n + 1 + $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ + $\sum_{i=1}^{n} 1$

= 2n + 1 + $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$

= 2n + 1 + $\frac{2}{3}$ n $^{3/2}$

**Bài 10.**

| | |
|---|---|
| `sum = 0; i=1; idx=-1;` | 3 g |
| `while (i<=n)` | n + 1 ss |
| `{ j=1;` | n g |
| `while(j<=n)` | n + 1 ss |
| `{ if( (i==j) && (i+j==n+1) )` | $\alpha_i$ ss |
| `idx=i;` | $\beta_i$ g |
| `sum=sum+a[i][j];` | |
| `j++;` | 2n g |
| `}` | |
| `i++;` | n g |
| `}` | |
| `if(idx !=-1)` | 1 ss |
| `sum=sum-a[idx][idx];` | $\gamma$ g |

Gọi $\alpha_i$ là số lần so sánh của biểu thức if ((I == j) && (i + j == n + 1)) trong while trong

$\beta_i$ là số phép gán của biểu thức if ((I == j) && (i + j == n + 1)) trong while trong

$\gamma$ là số phép gán của biểu thức sum = sum – a[idx][idx];

Ta có:

G(n) = 3 + n + $\sum_{i=1}^{n}(2n + \beta_i)$ + n + $\gamma$

= 3 + 2n + $\sum_{i=1}^{n}(2n + \beta_i)$ + $\gamma$

SS(n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + n + 1)$ + 1

Xét biểu thức if ((I == j) && (i + j == n + 1)) có tối đa 2n so sánh

Khi chạy 2 while lồng nhau:

+ Có n trường hợp i == j

+ Có n trường hợp i + j == n + 1

+ Cả 2 biểu thức đều đúng khi (I == j) trùng với (I + j == n + 1)

⇔ $\begin{cases} i == j \\ i + j == n + 1 \end{cases}$

⇔ i = (n + 1) / 2

⇔i = $\begin{cases} 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ 1 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

Vì phép toán idx == I chỉ được thực hiện khi cả 2 biểu thức đúng

⇨ $\sum_{i=1}^{n} \beta_i$ = $\begin{cases} 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ 1 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$ = n % 2

Ta lại có biểu thức sum = sum – a[idx][idx] được thực hiện khi biểu thức if ((I == j) && (i + j == n + 1)) đúng ⇔ $\gamma$ = n % 2

Ta có:

G(n) = 3 + 2n + $\sum_{i=1}^{n}(2n + \beta_i)$ + $\gamma$

= 3 + 2n + $\sum_{i=1}^{n} 2n$ + $\sum_{i=1}^{n} \beta_i$ + $\gamma$

= $2n^2$+ 2n + 3 + 2(n % 2)

Ta có 1 lần while trong thực hiện thì biểu thức I == j thực hiện n lần

⇨ n lần while trong thực hiện thì biểu thức I == j thực hiện $n^2$ lần

Biểu thức (i + j == n + 1) được thực hiện khi biểu thức (i == j) đúng

⇔ n lần biểu thức (i + j == n + 1) được thực hiện

⇨ SS(n) $= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + n + 1\ ) + 1$

$= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} n + 1\ + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ + 1$

$= n^2 + 2n + 2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$= n^2 + 2n + 2 + (n^2 + n)$

**Bài 11:**

```
i = 1; ret = 0; s = 0;
while ( i ≤ n)
{       j = 1 ;
        s = s+1/i; // {số thực}
        while (j  ≤ s )
        {       ret = ret + i*j;
                j = j  + 1;
        }
        i = i + 1;
}
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần chạy của while trong (xét độc lập với while ngoài)

$\alpha_i$: số con j với j chạy từ 1 tới $S_i = \left\lfloor S_{i-1} + \frac{1}{i} \right\rfloor$

$S_i = \lfloor S_{i-1} + 1/i \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} \right\rfloor \approx \ln i + \gamma$, $\gamma \approx 0.5722$

$\alpha_i$: $\lfloor S_i \rfloor - 1 + 1 = \lfloor \ln i + \gamma \rfloor$

$G(n) = 3 + 2n + n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$

$= 3 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$

$= 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n} \lfloor \ln i + \gamma \rfloor$

$= 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n} \gamma + 2\sum_{i=1}^{n} \ln i$

Ta có $\sum_{i=1}^{n} \ln i = \ln(n!)$

⇨ $G(n) = 3 + 3n + 2n\gamma + 2\ln(n!)$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

$= 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \ln i + \gamma \rfloor$

$= 2n + 1 + n\gamma + \ln(n!)$

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G(n) ≈ 4.1544n + 3 + n * ln (n !) | 7.15 | 12.7 | 20.84 | 32.33 | 47.7 | 67.4 | 91.76 | 121.1 | 155, 6 |
| G(n) kết quả khi chạy chương trình | 7.15 | 12, 69 | 17 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | 59 |
| SS(n) ≈ 2.5722n + 1 + ln (n !) | 3.57 | 6.84 | 10.51 | 14.47 | 18.65 | 23.01 | 27.53 | 32.18 | 36.95 |
| SS(n) kết quả khi chạy chương trình | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |

| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 195.59 | 241.22 | 292.7 | 350.2 | 413.83 | 483.8 | 560.22 | 643.21 | 732.9 | 829.39 | 932.8 |
| 66 | 75 | 84 | 93 | 102 | 111 | 120 | 129 | 138 | 147 | 156 |
| 41.83 | 46.80 | 51.85 | 56.99 | 62.2 | 67.48 | 72.83 | 78.23 | 83.7 | 89.21 | 94.78 |
| 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 47 | 52 | 56 | 60 | 64 | 68 |

**Bài 12**: Số thứ tự nhóm = 11

```
i = 1; res = 0;
while (i ≤ n) do
        j = 1;
        while (j ≤ i) do
                res = res + i*j ;
                j = j + 1;
        end do;
        i = i + số thứ tự của nhóm;
end do;
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

$\alpha_i$: số con j với j chạy từ 1 -> i, bước nhảy = 1

$\alpha_i = i + 1 - 1 = i$

k: số lần lặp của while ngoài

Ta có số lần lặp của while ngoài là k = $\left\lfloor \frac{n-1}{11} \right\rfloor + 1$

G(n) = 2 + k + $\sum_{i=1, i+=11}^{n} 2\alpha_i$ + k

= 2 + 2k + 2 $\sum_{i=1, i+=11}^{n} \alpha_i$

= 2 + 2k + 2$\sum_{i=1, i+=11}^{n} \mathrm{i}$

Ta có $\sum_{i=1, i+=11}^{n} \alpha_i$ = 1 + 12 + 23 + … + n

$= (\frac{n+1}{2}).(\frac{n-1}{11} + 1) = \frac{(n+1)(n+10)}{22}$

⇨ $G(n) = 4 + 2\left\lfloor\frac{n-1}{11}\right\rfloor + 2\frac{(n+1)(n+10)}{22}$

$SS(n) = k + 1 + \sum_{i=1,i+=11}^{n}(\alpha_i + 1)$ , $k = \left\lfloor\frac{n-1}{11}\right\rfloor + 1$

$= k + 1 + \sum_{i=1,i+=11}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1,i+=11}^{n} 1$

$= k + 1 + \frac{(n+1)(n+10)}{22} + \frac{n-1}{11} + 1$

$= 2(\frac{n-1}{11} + 1) + \frac{(n+1)(n+10)}{22}$

| **N** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G(n) ≈ 2(x - 1)/11 + 4 + 2(x+1)(x+10)/11 | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 21 |
| G(n) kết quả khi chạy chương trình | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| SS(n) ≈ 2(x - 1)/11 + 2 + 2(x+1)(x+10)/11 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| SS(n) kết quả khi chạy chương trình | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 26 | 32 | 35 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 63 |
| 5 | 5 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| 12 | 13 | 17 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 3 | 3 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |

Ta có thể thấy đối với trường hợp n rất nhỏ thì sai số sẽ rất lớn, giá trị chỉ thay đổi khi đi qua giá trị chia hết cho 11.

Đối với giá trị n rất lớn thì sai số sẽ giảm đi rất nhiều.

| **100** | **500** | **1000** | **2000** | **5000** | **10000** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1032 | 23322 | 92094 | 366003 | 2278640 | 9102732 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1022 | 22910 | 90365 | 362910 | 2273637 | 9101822 |
| 525 | 11706 | 46137 | 183182 | 1139774 | 4552275 |
| 516 | 11478 | 45228 | 181546 | 1137046 | 4551366 |

**Bài 13**:

```
sum := 0;
i := n;
while  (i > 0) do
          j := i ;
          while (j  > 0)  do
                    sum := sum + 1;
                    j := j  - 1;
          endw;
          i = i div 2;
endw;
```

Gọi $\alpha_i$ là số lần thực hiện của while ngoài (xét độc lập với while trong)

$\alpha_i$: số con i với i chạy từ n tới 0, bước nhảy i/2

i có thể là { $n$; $\frac{n}{2}$; $\frac{n}{4}$; …..; $\frac{n}{2^k}$ > 0}

- ⇨ $\alpha_i$ = số con k thỏa mãn 0 < $\frac{n}{2^k}$ <= n

  ≈ 1 <= $\frac{n}{2^k}$ <= n

$\approx 2^k <= n <= n*2^k$

$\approx 1 <= 2^k <= n$

$\approx 0 <= k <= \log_2 n$

$\approx \alpha_i = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

$G(n) = 2 + 2\alpha_i + \sum_{i=n,i=i/2}^{i>0} 2i$

$= \sum_{i=n,i=i/2}^{i>0} i = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots.. + \frac{n}{2^k} > 0$

= Cấp số nhân với số hạng đầu là n và công bội là ½

$= \frac{n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = -2n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1\right)$

⇨ $G(n) = 2 + 2(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) - 4n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1\right)$

$SS(n) = \alpha_i + 1 + \sum_{i=n,i=i/2}^{i>0} (i + 1)$

$= \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 + 1 + \sum_{i=n,i=i/2}^{i>0} i + \sum_{i=n,i=i/2}^{i>0} 1$

$= \lfloor \log_2 n \rfloor + 2 - 2n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

$= 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 3 - 2n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1\right)$

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(n) \approx 2 + 2(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) - 4n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1\right)$ | 6 | 12 | 17 | 22 | 26.64 | 31 | 35 | 40 | 44 |
| G(n) kết quả khi chạy chương trình | 4 | 8 | 10 | 16 | 18 | 22 | 24 | 32 | 34 |
| $SS(n) \approx 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 3 - 2n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1\right)$ | 4 | 5 | 6 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 |
| SS(n) kết quả khi chạy chương trình | 2 | 4 | 5 | 8 | 9 | 11 | 12 | 16 | 17 |

| **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 48 | 52 | 57 | 61 | 65 | 69 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 |
| 38 | 40 | 46 | 48 | 52 | 54 | 64 | 66 | 70 | 72 | 78 |
| 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 |
| 19 | 20 | 23 | 24 | 26 | 27 | 32 | 33 | 35 | 36 | 39 |

Ta có thể thấy đối với trường hợp n rất nhỏ thì sai số sẽ rất lớn

Đối với giá trị n rất lớn thì sai số sẽ giảm đi rất nhiều.

| **100** | **500** | **1000** | **2000** | **5000** | **10000** |
|---|---|---|---|---|---|
| 415 | 2019 | 4021 | 8023 | 20026 | 40028 |
| 396 | 1990 | 3990 | 7990 | 19992 | 39992 |
| 205 | 1007 | 2008 | 4009 | 10011 | 20012 |
| 198 | 995 | 1995 | 3995 | 9996 | 19960 |