TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

BÀI 3

CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Nội dung

Nội dung (tiếp tục)

- Một số ứng dụng của nguyên lý Dirichlet

4. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp
   - Hoán vị và chỉnh hợp
   - Tổ hợp và nhị thức
5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng
   - Chỉnh hợp có lặp
   - Tổ hợp lặp
   - Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau
   - Sự phân bố các đồ vật vào trong hộp.
6. Sinh các hoán vị và tổ hợp
   - Sinh các hoán vị
   - Sinh các tổ hợp
7. Hệ thức truy hồi
   - Khái niệm mở đầu hệ thức truy hồi
   - Giải các hệ thức truy hồi

8. Quan hệ chia để trị
   - Giới thiệu
   - Hệ thức chia để trị

3.1.1. Khái niệm tập hợp

- Khái niệm *tập hợp* được dùng để chỉ một sưu tập hay một nhóm các đối tượng nào đó mà ta đang quan tâm xem xét, và sưu tập này phải được xác định tốt.
- Các đối tượng trong sưu tập hay trong nhóm này sẽ được gọi là các *phần tử* hay các thành viên của tập hợp.
- Tính xác định tốt (hay nói vắn tắt là tính xác định) của tập hợp được hiểu theo nghĩa là với một đối tượng nào đó mà ta đang quan tâm thì ta có thể xác định được đích xác rằng trường hợp nào là đúng trong hai trường hợp sau đây

3.1.1. Khái niệm tập hợp

- Trường hợp 1: đối tượng là một phần tử của tập hợp. Trong trường hợp này ta nói đối tượng *thuộc về* tập hợp.
- Trường hợp 2: đối tượng không phải là một phần tử của tập hợp. Trong trường hợp này ta nói đối tượng *không thuộc về* tập hợp.

1. Để thuận tiện cho việc đề cập đến tập hợp về sau, mỗi tập hợp thường được đặt cho một tên, chẳng hạn như $A, B, C \ldots$. Ta cũng dùng ký hiệu $\in$ để diễn đạt quan hệ "thuộc về" của một phần tử đối với một tập hợp. Khi x là một phần tử thuộc về tập hợp A, thì ta viết $x \in A$ và đọc là "x thuộc A", hay đọc là "A chứa phần tử x".
2. Ngược lại, nếu x không phải là một phần tử của tập hợp A thì ta viết $x \notin A$ và đọc là "x không thuộc A", hay đọc là "A không chứa phần tử x".

3.1.1. Khái niệm tập hợp

- **Tập hợp bằng nhau**: Hai tập hợp A và B sẽ được xem là *bằng nhau* khi chúng có cùng các phần tử, tức là mỗi phần tử thuộc A đều là phần tử thuộc B và ngược lại. Khi ấy, ta viết là $A = B$.
- **Tập hợp rỗng:** Tập hợp không có phần tử nào được gọi là *tập hợp rỗng*, và được ký hiệu là $\emptyset$.
- **Cách xác định một tập hợp:** Để *xác định một tập hợp* ta có thể dùng các cách sau đây:
    - *Cách liệt kê:* Ta liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp giữa ký hiệu ngoặc { và }.

Ví dụ 3.1

$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{0, 1\}.$

3.1.1. Khái niệm tập hợp

- *Cách nêu đặc trưng của phần tử:*
  Theo cách này, để xác định một tập hợp A ta sẽ nêu lên "tính chất" dùng để xác định xem phần tử trong một không gian U có thuộc về tập hợp A hay không: phần tử x của U sẽ thuộc A khi x thỏa "tính chất", và x không thuộc A khi x không thỏa "tính chất". Từ "tính chất" thường được thể hiện dưới dạng một vị từ $p(x)$ theo biến $x \in U$. Khi ấy, tập hợp A sẽ được viết như sau:
  $$A = \{x \in U | p(x)\}$$
  hay vắn tắt (hiểu ngầm tập U) là
  $$A = \{x | p(x)\}$$

Ví dụ 3.2

$A = \{n \in N | n \text{ là số nguyên tố }\}$
$B = \{n \in N| \text{ có một số tự nhiên } m \text{ sao cho } n = m^2\}$.

3.1.1. Khái niệm tập hợp

- *Cách xác định tập hợp* dưới dạng ảnh của một tập hợp khác A' qua một phép tương ứng f mà ứng với mỗi $x \in A'$ ta có một phần tử tương ứng $f(x)$ duy nhất trong U. Khi ấy ta viết

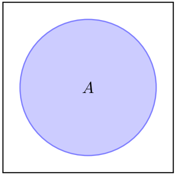
$$A = \{f(x) | x \in A'\}$$

Ghi chú: Phép tương ứng f được nói trên đây chính là một ánh xạ.

Ví dụ 3.3

$B = \{n^2 | n \in N\}; \quad C = \{(2n+1)^2 | n \in N\}.$

- *Sơ đồ Venn*



Hình: Tập hợp A

3.1.2. Quan hệ "bao hàm trong" và tập hợp con

Định nghĩa 3.1

Cho A và B là hai tập hợp mà các phần tử của chúng đều thuộc một tập hợp lớn U (hay còn gọi là tập vũ trụ). Ta nói tập A *bao hàm trong* (hay chứa trong) tập B nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B. Ta cũng nói rằng B bao hàm A (hay B chứa A), và viết là: $A \subset B$ (hay $B \supset A$).
Khi $A \subset B$ ta nói A là một *tập hợp con* của tập hợp B.

Ví dụ 3.4

$\{0, 1, 2\} \subset \{n \in N | n < 10\}$;
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
trong đó $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên, $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên, $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức.

3.1.2. Quan hệ “bao hàm trong” và tập hợp con

Cho X là một tập hợp. Sưu tập tất cả các tập hợp con của X được ký hiệu là $P(X)$. Nói một cách khác, $P(X)$ là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một tập hợp con của X.

Tính chất.

- $\emptyset \subset A$ và $A \subset A$, với mọi tập hợp A.
- $(A \subset B)$ và $(B \subset A) \Rightarrow (A = B)$.
- $(A \subset B)$ và $(B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.
- $X \subset Y \Rightarrow P(X) \subset P(Y)$.
- Nếu tập hợp X có n phần tử $(n \in N)$ thì tập hợp $P(X)$ có 2^n phần tử.

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Trong mục này chúng ta sẽ nêu lên định nghĩa các phép toán tập hợp trên các tập hợp con của một tập hợp vũ trụ U cho trước, và phát biểu một số tính chất liên quan đến các phép toán.

Định nghĩa 3.2

Giao của 2 tập hợp A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử của U mà vừa thuộc tập A vừa thuộc tập B.

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Ví dụ 3.5

a) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{5, 6, 7, 8\}$. Ta có
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
b) Cho $C = \{a, b, c\}; D = \{c, d, e\}$. Ta có $C \cup D = \{a, b, c, d, e\}$

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa 3.3

Hợp của 2 tập hợp A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử của U sao cho nó thuộc tập A hay thuộc tập B.

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Ví dụ 3.6

a) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{5, 6, 7, 8\}$. Ta có $A \cap B = \emptyset$
b) Cho $C = \{a, b, c\}; D = \{c, d, e\}$. Ta có $C \cap D = \{e\}$

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa 3.4

Hiệu của 2 tập hợp A và B, ký hiệu bởi $A \setminus B$ (hay $A - B$), là tập hợp gồm tất cả các phần tử của U sao cho nó thuộc tập A và không thuộc tập B.

$$A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Ví dụ 3.7

a) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{5, 6, 7, 8\}$. Ta có $A \setminus B = \emptyset$
b) Cho $C = \{a, b, c\}; D = \{c, d, e\}$. Ta có $C \setminus D = \{e\}$

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa 3.5

Phần bù của tập A (trong U), ký hiệu bởi $\overline{A}$, là tập hợp tất cả các phần tử của U mà không thuộc A. Nói cách khác,

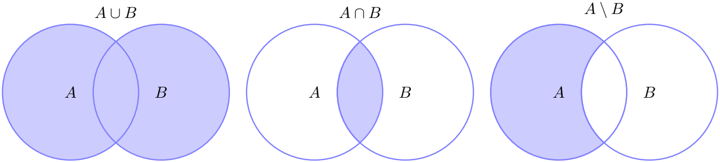
$$\overline{A} = U \setminus A$$

Ví dụ 3.8

a) Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{4, 5\}$. Ta có $\overline{A} = \{4, 5\}$

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Sơ đồ Venn



Hình: Phép toán trên tập hợp

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

Các tính chất của phép toán tập hợp.

- Tính giao hoán

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Tính kết hợp

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- Tính phân bố:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3.1.3. Các phép toán trên tập hợp

- Luật De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Phần tử trung hòa

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

- Phần bù

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

- Tính thống trị

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

3.1.4. Lực lượng của tập hợp

Định nghĩa 3.6

Lực lượng của một tập hợp A là số phần tử của tập hợp A, ký hiệu là $|A|$

Khi đó ta có ba công thức thường gặp khi phải tính số phần tử của một tập hợp.

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
3. $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$.

3.1.5. Tích Decartes của các tập hợp

- **Tích Descartes của 2 tập hợp:**
  Cho 2 tập hợp A và B. Tích Descartes của tập hợp A và tập hợp B, được ký hiệu bởi $A \times B$, là tập hợp gồm tất cả các cặp (a, b) sao cho $a \in A$ và $b \in B$.

  $$A \times B = \{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$$

  Trong trường hợp $B = A$, ta ký hiệu $A \times B$ là A^2 .
- **Tích Descartes của nhiều tập hợp:**
  Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n (n > 1)$. Tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, được ký hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, là tập hợp gồm tất cả các bộ n phần tử $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_i \in A_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.
  Trong trường hợp $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ thì tập hợp tích $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ sẽ được viết là A.

3.1.5. Tích Decartes của các tập hợp

- **Lượng lượng của tập tích Decartes.**
  1. $|A \times B| = |A|.|B|$
  2. $|A \times B \times C| = |A|.|B|.|C|$
  3. $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1|.|A_2|.\ldots.|A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$

3.1.6. Biểu diễn tập hợp trong máy tính

- Có nhiều cách biểu diễn tập hợp trên máy tính. Dưới đây giới thiệu một cách biểu diễn tập hợp trong máy tính bằng cách lưu trữ các phần tử của nó dưới dạng sắp tùy ý các phần tử của nó dưới dạng sắp tùy ý các phần tử của tập vũ trụ.
- Giả sử X là một tập vũ trụ và $A \subseteq X$ (với giả thiết dung lượng bộ nhớ của máy tính không bé hơn lực lượng của X)
- Giả sử $|X| = n$. khi đó ta sắp các phần tử của $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ta có thể biểu diễn tập A trên máy tính bằng một xâu bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i là 1 nếu $a_i \in A$, còn bit thứ i là 0 nếu $a_i \notin A$ $(1, 2, ..., n)$.

3.1.6. Biểu diễn tập hợp trong máy tính

Ví dụ 3.9

Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (sắp xếp các phần tử của X theo thứ tự tăng dần).
a) Xác định xâu bit của tập $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset X$
b) Xác định xâu bit của tập $B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subset X$
b) Xác định xâu bit của các phần tử không vượt quá 5 trong X tức là tìm xâu bít của $C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset X$

Lời giải. a) Xâu bit của tập $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ là 1010101010.
b) Xâu bit của tập $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ là 0101010101.
b) Xâu bít của $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là 1111100000.

3.1.6. Biểu diễn tập hợp trong máy tính

Ví dụ 3.10

Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ và $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Tìm xâu bít của $A \cup B$.

b) Tìm xâu bít của $A \cap B$.

c) Tìm xâu bít của $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

Lời giải. Xâu bit của tập $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ là 1010101010. Xâu bit của tập $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ là 0101010101.

a) Xâu bít của $A \cup B$ là $1010101010 \vee 0101010101 = 1111111111$.

b) Xâu bít của $A \cap B$ là $1010101010 \wedge 0101010101 = 0000000000$.

c) Vì $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Xâu bít của $\overline{A}$ là 0101010101.

c) Vì $\overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Xâu bít của $\overline{B}$ là 1010101010.

4. Các nguyên lý đếm

- Từ lâu, người ta đã nghiên cứu việc liệt kê, đếm các phần tử hay các đối tượng có những tính chất nào đó để giải quyết một số vấn đề cần thiết được đặt ra. Chẳng hạn, phép đếm được sử dụng trong việc phân tích và đánh giá độ phức tạp của thuật toán. Kỹ thuật đếm còn được sử dụng trong việc tính toán xác suất của các sự kiện.
- Trong mục này chúng ta sẽ trình bày các qui tắc cơ bản của phép đếm. Chúng sẽ giúp ích rất nhiều cho việc giải nhiều vấn đề liên quan đến việc liệt kê, sắp xếp và đếm.

4.1. Phép đếm

- Cho A là một tập hợp khác rỗng, để xác định số phần tử của tập hợp A ta thường thực hiện việc đếm bằng cách lần lượt gán cho các phần tử của A các số tự nhiên kế tiếp nhau, và số tự nhiên đầu tiên (được dùng để gán cho phần tử đầu tiên được xem xét) là 1.
- Nếu quá trình này kết thúc với số tự nhiên n (được gán cho phần tử cuối cùng) thì ta nói A là một tập hợp hữu hạn và có n phần tử.
- Thật ra khi thực hiện việc đếm như thế chính là thiết lập một song ánh từ A vào tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$. Từ đó ta có thể định nghĩa phép đếm như sau:

4.1. Phép đếm

Định nghĩa 3.7

Cho A là một tập hợp khác rỗng. Nếu tồn tại một số nguyên dương n và một song ánh f từ A vào $\{1, 2, ..., n\}$ thì ta nói A là một *tập hợp hữu hạn* và A có n phần tử. Khi đó song ánh

$$f : A \to \{1, 2, ..., n\}$$

là sẽ được xem là một *phép đếm* tập hợp A.

- Tập hợp rỗng có số phần tử là 0, và cũng được xem là tập hữu hạn, $|A| = 0$.
- Nếu tập hợp A không hữu hạn, ta nói A là một *tập vô hạn* và viết $|A| = \infty$.

4.1. Phép đếm

Ghi chú: Để khái quát hóa khái niệm số phần tử đối với các tập hợp tùy ý và so sánh lực lượng của các tập hợp người ta đưa ra định nghĩa về quan hệ đồng lực lượng, và các quan hệ so sánh lực lượng khác dựa vào khái niệm ánh xạ. Chẳng hạn, hai tập hợp A và B được nói là đồng lực lượng khi tồn tại một song ánh f từ A vào B.

Tính chất. Cho A và B là các tập hợp hữu hạn. Giả sử tồn tại đơn ánh từ A vào B. Khi ấy ta có $|A| \leq |B|$.

4.2. Nguyên lý cộng

Cơ sở của nguyên lý cộng là mối liên hệ giữa số phần tử của một tập hợp với số phần tử của các tập hợp con tạo thành phân hoạch của tập hợp đã cho, được phát biểu trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.1

Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$. Khi ấy ta có $|A \cup B| = |A| + |B|$.

4.2. Nguyên lý cộng

Một cách tổng quát: Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là phần giao của hai tập hợp bất kỳ trong n tập hợp là rỗng, thì số phần tử của phần hội của các tập hợp trên bằng tổng của các số lượng phần tử trong mỗi tập hợp:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Để chứng minh mệnh đề trên cho trường hợp 2 tập hợp A và B ta có thể gọi m là số phần tử của tập hợp A và n là số phần tử của tập hợp B. Sau đó, từ việc giả sử có các song ánh
$f : A \to \{1, 2, ..., m\}$ và $g : B \to \{1, 2, ..., n\}$
ta có thể lập dễ dàng một song ánh
$h : A \cup B \to \{1, 2, ..., m + n\}$.
để đi đến kết luận $|A \cup B| = m + n$.

4.2. Nguyên lý cộng

Trong trường hợp tổng quát ta có thể sử dụng nguyên lý qui nạp, với bước cơ sở là việc chứng minh cho trương hợp 2 tập hợp vừa trình bày ở trên.

Ghi chú: Trong trường hợp đối với hai tập hợp hữu hạn A và B tùy ý thì ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Tính chất này có thể mở rộng cho trường hợp đối với n tập hợp tùy ý $A_1, A_2, ..., A_n$ như sau

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{1 \le r \le n} |A_r| - \sum_{1 \le r < s \le n} |A_r \cap A_s| \\ &+ \sum_{1 \le r < s < t \le n} |A_r \cap A_s \cap A_t| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \end{aligned}$$

4.2. Nguyên lý cộng

Nguyên lý cộng: *Giả sử ta phải thực hiện công việc và để thực hiện công việc này ta có thể chọn một trong hai biện pháp khác nhau theo nghĩa là cách thực hiện biện pháp thứ nhất luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ hai. Biện pháp thứ nhất có* n *cách thực hiện, và đối với biện pháp thứ hai ta có* m *cách thực hiện. Vậy ta có* $n + m$ *cách thực hiện công việc.*

4.2. Nguyên lý cộng

Ví dụ 3.11

Chúng ta cần chọn một sinh viên toán năm thứ 3 hay năm thứ 4 đi dự một hội nghị. Hỏi có bao nhiêu cách chọn lựa một sinh viên như thế biết rằng có 100 sinh viên toán học năm thứ 3 và 85 sinh viên toán học năm thứ tư?

Lời giải. Ta có thể thực hiện một trong 2 việc chọn lựa khác nhau: chọn một sinh viên toán năm 3, hoặc chọn một sinh viên toán năm 4. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có 100 cách, và để thực hiện công việc thứ 2 ta có 85 cách. Vậy để chọn một sinh viên toán theo yêu cầu ta có $100+85 = 185$ cách. □

4.2. Nguyên lý cộng

Chúng ta có thể mở rộng nguyên lý cộng cho trường hợp nhiều sự chọn lựa hơn như sau: Giả sử ta phải thực hiện một công việc bằng cách chọn một trong m sự chọn lựa các biện pháp khác nhau $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Để thực hiện $T_i, 1 \leq i \leq m$, ta có n_i cách. Vậy ta số cách thực hiện công việc trên là $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Nguyên lý cộng dạng tổng quát này có thể được chứng minh bằng qui nạp.

Ví dụ 3.12

Một sinh viên có thể chọn một đề tài từ một trong 3 danh sách các đề tài. Số đề tài trong các danh sách đề tài lần lượt là $23, 15, 19$. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách chọn một đề tài.

Lời giải. Sinh viên có thể chọn một đề tài trong danh sách thứ thứ nhất theo 23 cách, trong danh sách thứ hai theo 15 cách, và trong danh sách thứ ba theo 19 cách. Do đó số cách chọn đề tài là $23 + 15 + 19 = 57$. □

4.2. Nguyên lý cộng

Ví dụ 3.13

Xác định giá trị của k sau khi đoạn chương trình sau đây được thực hiện xong

Đoạn chương trình

```
k := 0
for (i1= 1;i1<n1;i1++)
   k:= k + 1;
for (i2= 1;i2<n2;i2++)
   k:= k + 1;
 .................................
for (im= 1;im<nm;im++)
   k:= k + 1;
```

4.2. Nguyên lý cộng

Lời giải. Giá trị của k ban đầu là 0. Sau đó là m vòng lặp khác nhau. Mỗi thao tác lặp trong một vòng lặp là cộng thêm 1 vào k. Vòng lặp thứ $i$có n_i thao tác, và tất cả m vòng lặp không thể thực hiện 2 vòng lặp nào một cách đồng thời. Do đó số thao tác để thực hiện xong đoạn chương trình trên là $n_1 + n_2 + ... + n_m$. Đây cũng chính là giá trị cuối cùng của k.

4.3. Nguyên lý nhân

Cơ sở của nguyên lý nhân là mối liên hệ giữa số phần tử của một tập hợp tích Descartes với số phần tử của các tập hợp thành phần tạo nên tập hợp tích, được phát biểu trong mệnh đề sau đây

Mệnh đề 3.2

Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau. Khi ấy ta có:

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

Một cách tổng quát: Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hợp hữu hạn thì số phần tử của tích Descartes của các tập hợp trên bằng tích của các số lượng phần tử của các tập hợp trên

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1|.|A_2|.....|A_n|$$

4.3. Nguyên lý nhân

Để chứng minh mệnh đề trên cho trường hợp 2 tập hợp A và B ta có thể gọi m là số phần tử của tập hợp A và n là số phần tử của tập hợp B. Sau đó, từ việc giả sử có các song ánh
$f : A \to \{1, 2, ..., m\}$ và $g : B \to \{1, 2, ..., n\}$
ta có thể lập dễ dàng một song ánh
$h : A \cup B \to \{1, 2, ..., mn\}$.
dễ đi đến kết luận $|A \times B| = mn$.
Trong trường hợp tổng quát ta có thể sử dụng nguyên lý qui nạp, với bước cơ sở là việc chứng minh cho trương hợp 2 tập hợp vừa trình bày ở trên.

4.3. Nguyên lý nhân

Nguyên lý nhân: *Giả sử ta phải thực hiện một thủ tục bao gồm hai công việc kế tiếp nhau. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có* n_1 *cách, và ứng với mỗi cách chọn thực hiện công việc thứ nhất ta có* n_2 *cách thực hiện công việc thứ hai. Vậy ta có số cách thực hiện thủ tục là* $n_1 \times n_2$.

Nguyên lý nhân trên có thể được mở rộng và có dạng tổng quát như sau:

- Giả sử một thủ tục bao gồm m công việc kế tiếp nhau $T_1, T_2, ..., T_m$.
- Nếu công việc T_1 có thể được thực hiện theo n_1 cách, và sau khi chọn cách thực hiện cho T_1 ta có n_2 cách thực hiện T_2, v.v... cho đến cuối cùng, sau khi chọn cách thực hiện các công việc $T_1, T_2, ..., T_{m-1}$ ta có nm cách thực hiện T_m.
- Vậy ta có $n_1.n_2.....nm$ cách để thực hiện thủ tục. Nguyên lý nhân ở dạng tổng quát này có thể được chứng minh bằng qui nạp từ qui tắc nhân cho trường hợp thủ tục gồm 2 công việc.

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.14

Các ghế ngồi trong một hội trường sẽ được ghi nhãn gồm một mẫu tự và một số nguyên dương không lớn hơn 100. Hỏi số ghế tối đa có thể được ghi nhãn khác nhau là bao nhiêu?

Lời giải. Thủ tục ghi nhãn cho một ghế gồm 2 việc : ghi một trong 26 mẫu tự và kế tiếp là ghi một trong 100 số nguyên dương. Qui tắc nhân cho thấy có $26 \times 100 = 2600$ cách khác nhau để ghi nhãn cho một ghế ngồi. Do đó số ghế lớn nhất có thể được ghi nhãn khác nhau là 2600. $\square$

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.15

Giả sử ta phải đi từ một địa điểm A đến một địa điểm C, ngang qua một địa điểm B. Để đi từ A đến B ta có 8 cách đi khác nhau, và có 6 cách đi từ B đến C. Hỏi có bao nhiêu cách để đi từ A đến C ?

Lời giải. Một cách đi từ A đến C gồm 2 việc: đi từ A đến B, rồi đi từ B đến C. Việc thứ nhất (đi từ A đến B) có 8 cách thực hiện, việc thứ hai có 6 cách thực hiện. vậy, theo nguyên lý nhân, số cách đi từ A đến C là $8 \times 6 = 48$. □

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.16

Hỏi có bao nhiêu chuỗi bit khác nhau có độ dài 8 (tức là gồm 8 bits) ?

Lời giải. Mỗi bit có thể được chọn theo 2 cách, vì mỗi bit là 0 hoặc 1. Do đó, qui tắc nhân cho phép ta kết luận rằng có $2^8 = 256$ chuỗi bit có độ dài 8. $\square$

Ví dụ 3.17

Một mã bao gồm 6 ký tự, trong đó gồm 3 mẫu tự rồi đến 3 ký số thập phân. Hỏi có bao nhiêu mã khác nhau?

Lời giải. Có 26 cách chọn cho mỗi mẫu tự và có 10 cách chọn cho mỗi ký số thập phân. Do đó, theo qui tắc nhân, có tất cả $26.26.26.10.10.10 = 17576000$ mã khác nhau. $\square$

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.18

Có bao nhiêu ánh xạ đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử?

Lời giải. Một ánh xạ đi từ tập A gồm m phần tử vào một tập hợp B gồm n phần tử tương ứng với việc chọn lựa một trong n phần tử của B cho mỗi phần tử của A. Do đó, theo qui tắc nhân, có $n.n.....n = nm$ ánh xạ từ A vào B. □

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.19

Có bao nhiêu đơn ánh đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử?

Lời giải. Trước hết ta nhận xét rằng khi $m > n$ thì không có một đơn ánh nào đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử. Vậy, cho $m \leq n$. Giả sử các phần tử trong miền xác định của ánh xạ là $a_1, a_2, ..., a_m$. Có n cách chọn ảnh qua ánh xạ cho phần tử a_1 . Vì ánh xạ là đơn ánh nên đối với phần tử a_2 ta chỉ có $n - 1$ cách chọn ảnh tương ứng (do giá trị ảnh được chọn cho a_1 không thể được chọn lại cho a_2). Tổng quát, giá trị ảnh của phần tử a_k chỉ có thể được chọn theo $n - k + 1$ cách. Theo qui tắc nhân, có $n.(n - 1).....(n - m + 1)$ đơn ánh đi từ một tập hợp gồm m phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử. □

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.20

Phương án đánh số điện thoại.
Giả sử một số điện thoại gồm 10 ký số được chia thành 3 nhóm: 2 nhóm gồm 3 ký số và một nhóm 4 ký số. Do một số lý do nào đó, có một số hạn chế trên các ký số của số điện thoại. Để xác định dạng hợp lệ của một số điện thoại. ta dùng ký hiệu X để chỉ một ký số có thể lấy giá trị từ 0 đến 9, N để chỉ một ký số từ 2 đến 9, và Y chỉ một ký số là 0 hoặc 1.
Chúng ta có 2 phương án để đánh số điện thoại : một phương án cũ và một phương án mới. Theo phương án cũ, số điện thoại có dạng NYX NNX XXXX; và theo phương án mới thì số điện thoại có dạng NXX NXX XXXX.
Hỏi số lượng số điện thoại khác nhau của mỗi phương án là bao nhiêu?

4.3. Nguyên lý nhân

Lời giải. Do qui tắc nhân, đối với phương án đánh số điện thoại cũ, số trường hợp khác nhau của mỗi nhóm ký số trong 3 nhóm lần lượt là : $8.2.10 = 160$ (ứng với dạng NYX), $8.8.10 = 640$ (ứng với dạng NNX), và $10.10.10.10 = 10000$ (ứng với dạng XXXX).
Vậy, trong phương án đánh số điện thoại cũ, số lượng số điện thoại là $160.640.10000 = 1024000000$.
Tương tự Số lượng số điện thoại trong phương án đánh số mới là $(8.10.10).(8.10.10).(10.10.10.10) = 800.800.10000 = 6400000000$.

□

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.21

Sử dụng qui tắc nhân để chứng minh rằng một tập hợp S hữu hạn có tất cả $2^{|S|}$ tập hợp con khác nhau.

Lời giải. Cho S là một tập hợp hữu hạn, $|S| = n$. Liệt kê các phần tử của S theo một thứ tự bất kỳ. Ta có thể thấy rằng có sự tương ứng một-một trên (song ánh) giữa các tập hợp con của S và tập hợp các chuỗi bit gồm n bits. Một tập con của S được cho tương ứng với một chuỗi bits có bit thứ i là 1 nếu phần tử thứ 4 trong danh sách liệt kê thuộc tập hợp con, và bit thứ i là 0 trong trường hợp ngược lại. Bởi qui tắc nhân, có 2^n chuỗi bit gồm n bits. Do đó, S có 2^n tập hợp con. □

4.3. Nguyên lý nhân

Dưới đây chúng ta sẽ xem xét một số bài toán về phép đếm phức tạp hơn. Nó đòi hỏi chúng ta phải sử dụng cả nguyên lý cộng lẫn nguyên lý nhân.

Ví dụ 3.22

Trong một version của ngôn ngữ BASIC tên của một biến là một chuỗi gồm 1 hoặc 2 ký tự, mỗi ký tự là mẫu tự hoặc ký số thập lục phân và không phân biệt giữa chữ in hoa và chữ thường. Hơn nữa, một tên biến phải bắt đầu bởi một mẫu tự và tên biến phải khác với 5 chuỗi gồm 2 ký tự đã được dành riêng cho ngôn ngữ. Hỏi có bao nhiêu tên biến khác nhau trong version này của BASIC.

Lời giải. Đặt V là số tên biến khác nhau trong version này của BASIC, V_1 là số biến gồm một ký tự, và V_2 là số biến gồm hai ký tự. Theo qui tắc cộng ta có $V = V_1 + V_2$.

4.3. Nguyên lý nhân

Vì biến gồm một ký tự phải là một mẫu tự nên $V_1 = 26$. Ngoài ra, theo qui tắc nhân ta có 26.36 chuỗi có độ dài 2 với ký tự đi đầu là mẫu tự và ký tự kế là mẫu tự hoặc ký số thập phân. Tuy nhiên, có 5 chuỗi bị loại ra nên $V_2 = 26.36 - 5 = 931$. Vậy có $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ tên khác nhau cho các biến của version này của BASIC. □

4.3. Nguyên lý nhân

Ví dụ 3.23

Mỗi người sử dụng trên một hệ thống máy tính có một "password" dài từ 6 đến 8 ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ in hoa hoặc là một ký số thập phân. Mỗi "password" phải có ít nhất một ký số. Hỏi có bao nhiêu password khác nhau?

Lời giải. Đặt P là số lượng tất cả các "password", và P_6, P_7, P_8 lần lượt là số các "password" có độ dài $6, 7, 8$. Do qui tắc cộng ta có $P = P_6 + P_7 + P_8$. Chúng ta sẽ tính P_6, P_7, và P_8. Tính trực tiếp P_6 tương đối khó. Để tính P_6 cho dễ, ta tính số chuỗi có độ dài 6 gồm các chữ in hoa hay ký số thập phân, kể cả các chuỗi không có ký số thập phân, và trừ cho số chuỗi (với độ dài 6) không có ký số thập phân. Theo qui tắc nhân, số chuỗi gồm 6 ký tự là 36^6 và số chuỗi không có ký số là 26^6. Suy ra

4.3. Nguyên lý nhân

$$P_6 = 366 - 266 = 2176782336 - 308915776$$
$$= 1867866560.$$

Tương tự, ta có thể tính ra được

$$P_7 = 367 - 267 = 78364164096 - 8031810176$$
$$= 70332353920.$$

và

$$P_8 = 368 - 268 = 2821109907456 - 208827064576$$
$$= 2612282842880.$$

Từ đó ta tính được $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2684483063360.$

4.4. Nguyên lý bù trừ

- Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc.
- Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Từ đó với ba tập hợp hữu hạn A_1, A_2, A_3, ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap$$

4.4. Nguyên lý bù trừ (tiếp tục)

- và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, ..., A_k$ ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - \ldots + (-1)^{k-1} N_k,$$

  trong đó $N_m (1 \leq m \leq k)$ là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}|$$

- Bây giờ ta đồng nhất tập $A_m (1 \leq m \leq k)$ với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào.

4.4. Nguyên lý bù trừ (tiếp tục)

- Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U. Ta có

$$\overline{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^k N_k,$$

  trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho.

- Công thức này được gọi là *nguyên lý bù trừ*. Nó cho phép tính $\overline{N}$ qua các N_m trong trường hợp các số này dễ tính toán hơn.

4.4. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ 3.24

Mỗi sinh viên học lớp toán rời rạc hoặc là giỏi Toán, hoặc là giỏi Tin, hoặc là giỏi cả hai môn này. Trong lớp có bao nhiêu sinh viên nếu có 38 người giỏi Tin, 23 người giỏi Toán và 7 giỏi cả 3 môn.

Lời giải. Đặt
$A =$"Số sinh viên giỏi tin". Suy ra $|A| = 38$.
$B =$"Số sinh viên giỏi toán". Suy ra $|B| = 23$.
$A \cap B =$"Số sinh viên giỏi tin và toán". Suy ra $|A \cap B| = 7$.
Ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 38 + 23 - 7 = 54$.
Vậy số sinh viên của lớp là 54.

4.4. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ 3.25

Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha; 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga; 103 sinh viên học cả Tây Ban Nha và Pháp; 23 sinh viên học cả Tây Ban Nha và Nga; 14 sinh viên học cả Pháp và Nga; Nếu tất cả 2092 sinh viên đều theo hcọ ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

Lời giải. Đặt

$S =$"sinh viên học tiếng Tây Ban Nha". Suy ra $|S| = 1232$;

$F =$"sinh viên học tiếng Pháp". Suy ra $|F| = 879$;

$R =$"sinh viên học tiếng Pháp". Suy ra $|R| = 114$;

Khi đó

$S \cap F =$"sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và Pháp". Suy ra $|S \cap F| = 103$;

4.4. Nguyên lý bù trừ (tiếp tục)

$S \cap R$ ="sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và Nga". Suy ra $|S \cap R| = 23$;
$F \cap R$ ="sinh viên học cả tiếng Pháp và Nga". Suy ra $|S \cap R| = 14$;
$S \cap F \cap R$ ="sinh viên học tất cả ba thứ tiếng". Suy ra $|F \cap S \cap R| = x$.
Ta có
$$|S \cap F \cap R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$
$$= 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + x = 2092$$
Hay $2085 + x = 2092$, suy ra $x = 7$. Vậy có 7 sinh viên học cả ba thứ tiếng.

4.4. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ 3.26

Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Lời giải.

- Mỗi phong bì có n cách bỏ thư vào, nên có tất cả $n!$ cách bỏ thư.
- Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có

$$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^n N_n,$$

4.4. Nguyên lý bù trừ (tiếp tục)

trong đó $N_m (1 \leq m \leq n)$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ.

- Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có $(n-m)!$ cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được

$$N_m = C_n^m (n-m)! = \frac{n!}{k!} \text{ và } \overline{N} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

trong đó $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ là tổ hợp chập m của tập n phần tử (số cách chọn m đối tượng trong n đối tượng được cho).

4.4. Nguyên lý bù trừ (tiếp tục)

- Từ đó xác suất cần tìm là $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$. điều lý thú là xác suất này dần đến e^{-1} (nghĩa là còn $> \frac{1}{3}$) khi n khá lớn.
- Số $\overline{N}$ trong bài toán này được gọi là số mất thứ tự và được ký hiệu là D_n. Dưới đây là một vài giá trị của D_n, cho ta thấy D_n tăng nhanh như thế nào so với n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	1	2	9	44	265	1851	14833	133496	1334961	14684570

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.1. Giới thiệu nguyên lý

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim. Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.

Mệnh đề 3.3 (**Nguyên lý**)

Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng k. Điều này trái giả thiết là có ít nhất $k+1$ vật.

- Nguyên lý này thường được gọi là nguyên lý Dirichlet, mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.1. Giới thiệu nguyên lý

Ví dụ 3.27

Trong bất kỳ một nhóm 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người có ngày sinh nhật giống nhau.

Lời giải. Bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau. □

Ví dụ 3.28

Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?

Lời giải. Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau. □

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.1. Giới thiệu nguyên lý

Ví dụ 3.29

Trong số những người có mặt trên trái đất, phải tìm được hai người có hàm răng giống nhau.

Lời giải. Nếu xem mỗi hàm răng gồm 32 cái như là một xâu nhị phân có chiều dài 32, trong đó răng còn ứng với bit 1 và răng mất ứng với bit 0, thì có tất cả 2 32 = 4.294.967.296 hàm răng khác nhau. Trong khi đó số người trên hành tinh này là vượt quá 5 tỉ, nên theo nguyên lý Dirichlet ta có điều cần tìm. $\square$

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

- Ta dùng ký hiệu $\lceil x \rceil$ là giá trị của hàm trần tại số thực x, đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x.
- Khái niệm này đối ngẫu với $[x]$ (hoặc $\lfloor x \rfloor$) - giá trị của hàm sàn hay hàm phần nguyên tại x - là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x.

Mệnh đề 3.4

Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật.

Chứng minh. Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật là $\leq k\left(\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\dfrac{N}{k} = N$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp.

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Ví dụ 3.30

Trong 100 người, có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng.

Lời giải. Xếp những người sinh cùng tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một nhóm có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ người. □

Ví dụ 3.31

Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.

Lời giải. Gọi N là số sinh viên, khi đó $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6$ khi và chỉ khi $5 < \frac{N}{5} \leq 6$ hay $25 < N \leq 30$. Vậy số N cần tìm là 26. □

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Ví dụ 3.32

Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).

Lời giải. Có $10^7 = 10.000.000$ số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có

$$\left\lceil \frac{25.000.000}{10.000.000} \right\rceil = 3$$

có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng. □

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.3. Một số ứng dụng

Trong nhiều ứng dụng thú vị của nguyên lý Dirichlet, khái niệm đồ vật và hộp cần phải được lựa chọn một cách khôn khéo. Trong phần nay có vài thí dụ như vậy.

Ví dụ 3.33

Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Lời giải.

- Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$.
- Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n-1$ (tức là quen tất cả).

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.3. Một số ứng dụng (tiếp tục)

- Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành $n - 1$ nhóm.
- Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tai một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau. $\square$

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.3. Một số ứng dụng

Ví dụ 3.34

Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nhưng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Lời giải. Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j. Khi đó

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{30} < 45$$

$$15 \leq a_1 + 14 < a_2 + 14 < \ldots < a_{30} + 14 < 59.$$

Sáu mươi số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy tồn tại i và j sao cho $a_i = a_j + 14 (j < i)$. Điều này có nghĩa là từ ngày $j + 1$ đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.3. Một số ứng dụng

Ví dụ 3.35

Chứng tỏ rằng trong $n+1$ số nguyên dương không vượt quá 2n, tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác.

Lời giải. Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dưới dạng $a_j = 2^{k_j} q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{k_i} q$ và $a_j = 2^{k_j} q$. Vì vậy, nếu $k_i \leq k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j . □

5. Nguyên lý Dirichlet - 5.3. Một số ứng dụng

- Thí dụ cuối cùng trình bày cách áp dụng nguyên lý Dirichlet vào lý thuyết tổ hợp mà vẫn quen gọi là *lý thuyết Ramsey*, tên của nhà toán học người Anh.
- Nói chung, lý thuyết Ramsey giải quyết những bài toán phân chia các tập con của một tập các phần tử.

Ví dụ 3.36

Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Lời giải.

- Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$.
- Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A, nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau.
- Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A. $\square$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.1. Hoán vị và chỉnh hợp

Định nghĩa 3.8

Hoán vị của một tập các đối tượng khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự các đối tượng này.
Một cách sắp xếp có thứ tự r phần tử của một tập hợp n phần tử được gọi là *chỉnh hợp chập r của n* phần tử. Ký hiệu P_n^r là số chỉnh hợp chập r của tập n phần tử.

Định lý 3.1

Số chỉnh hợp chập r của n phần tử là

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.1. Hoán vị và chỉnh hợp

Ví dụ 3.37

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự hai phần tử trong tệp A?

Lời giải. $P_3^2 = 3.2 = 6$. Đó là các cặp

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}.$$

Ví dụ 3.38

Có bao nhiêu cách chọn 4 cầu thủ khác nhau trong 10 cầu thủ của đội bóng?

Lời giải. $P_{10}^4 = 10(10-1)(10-2)(10-3) = 10.9.8.7 = 5040$.

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.1. Hoán vị và chỉnh hợp

Chú ý. Số chỉnh hợp chập n của n phần tử là $P_n^n = n!$.
Nghĩa là số hoán vị của tập gồm n phần tử là $P_n^n = n!$,

Ví dụ 3.39

Giả sử có 8 vận động viên chạy thi tốc độ cự ly 2000m. Người đến đích đầu tiên được trao huy chương vàng, người đến đích thứ hai được trao huy chương bạc và người đến đích thứ ba được trao huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu cách trao huy chương Vàng, Bạc và Đồng cho 8 vận động viên trên.

Lời giải. Số cách trao huy chương Vàng, Bạc và Đồng cho 8 vận động viên chính là chỉnh hợp chập 3 của 8. Nghĩa là
$P_8^3 = 8.7.6 = 336$ cách.

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Định nghĩa 3.9

Một tổ hợp chập r của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự r phần tử của tập hợp đã cho.

- Một tổ hợp chập r chính là một tập hợp con r của tập hợp đã cho.
- Số tổ hợp chập r của tập hợp n ký hiệu là C_n^r, $0 \leq r \leq n$. Ta có kết quả sau

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Định lý 3.2

Số tổ hợp chập r của n phần tử là

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Chứng minh. $P(n,r) = C_n^r P(r,r)$ hay

$$C_n^r = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Hệ quả 3.3

Cho n, r là các số nguyên không âm sao cho $r \leq n$. Khi đó ta có $C_n^r = C_n^{n-r}$.

Chứng minh. Theo Định lý 3.2 ta có $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Vậy

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r.$$

Hệ quả 3.4

Cho n, r là các số nguyên không âm sao cho $n \geq k$. Khi đó ta có

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k.$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Hệ quả 3.5

$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ (n nguyên dương).

Chứng minh. Số các tập con của tập gồm n phần tử là

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Ví dụ 3.40

Cho $A = \{a, b, c, d\}$ Tìm C_4^2, C_4^3.

Lời giải. Ta có $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6.$

Cụ thể là các cặp $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

Ta có $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$

Cụ thể là các cặp $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Ví dụ 3.41

Có bao nhiêu cách tuyển 5 trong số 10 cầu thủ của một đội quần vợt để đi thi đấu?

Lời giải. Đó chính là $C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!(10-5)!} = 252.$

Ví dụ 3.42

Cho $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{a, b, c, d\}$. Hãy liệt kê tất cả các hoán vị của A và của B.

Lời giải. Đối với A có $3! = 6$ hoán vị là $abc, acb, cab, cba, bac, bca$.
Đối với B có $4! = 24$ hoán vị là $abcd, abcd, adbc, \ldots$.

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Ví dụ 3.43

Giả sử $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
a) Tìm các chỉnh hợp chập 3 của A.
b) Tìm các tổ hợp chập 3 của A.

Lời giải. a) $P_5^3 = 5.4.3 = 60$.
b) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{4.5}{2} = 10$.

Ví dụ 3.44

Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ hai, thứ ba trong cuộc đua có 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự tới đích đều có thể xẩy ra?

Lời giải. Số khả năng tìm chính là $P_{12}^3 = 1320$.

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Ví dụ 3.45

Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ từ bảng chữ cái tiếng Anh?

Lời giải. Số cách chọn chính là

$$C_{26}^5 = \frac{26!}{5!21!} = \frac{22.23.24.25.26}{5!} = \frac{7893600}{120} = 65780.$$

Ví dụ 3.46

Một tập hợp có 100 phần tử có bao nhiêu tập con có nhiều hơn hai phần tử?

Lời giải. Theo Hệ quả 3.5 ta có $\sum\limits_{i=0}^{100} C_n^i = 2^{100}$, hay

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức (tiếp tục)

Số tập con của tập 100 phần tử có nhiều hơn hai phần tử là

$$\begin{aligned}
2^{100}-\left(\frac{100!}{0!100!}+\frac{100!}{1!99!}+\frac{100}{2!98!}\right) &= 2^{100}-\left(1+100+\frac{99.100}{2}\right)\\
&= 2^{100}-(101+4950)\\
&= 2^{100}-5051.
\end{aligned}$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Định lý 3.6

Cho x, y là hai biến và n là một số nguyên dương. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{i=1}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i \\ &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n.\end{aligned}$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Ví dụ 3.47

Tìm khai triển $(x+y)^5$.

Lời giải. Ta có

$$(x+y)^5 = C_5^0x^5 + C_5^1x^4y + C_5^2x^3y^2 + C_5^3x^2y^3 \\ + + C_5^4xy^4 + C_5^5y^5,$$

với $C_5^0 = 1$, $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$.

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

6. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp - 6.2. Tổ hợp và nhị thức

Ví dụ 3.48

Trong khai triển $(x+y)^{100}$ có bao nhiêu số hạng?

Lời giải. Có 101 số hạng là $C_{100}^{0}, C_{100}^{1}, \ldots, C_{100}^{100}$.

Ví dụ 3.49

Tìm hệ số x^9 trong khai triển $(2-x)^{19}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(2-x)^{19} = C_{19}^{0}2^{19} + C_{19}^{1}2^{18}(-x) + C_{19}^{2}2^{17}(-x)^2 + \cdots \\ + C_{19}^{9}2^{10}(-x)^9 + \cdots \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Vậy số hạng của x^9 là $-C_{19}^{9}2^{10} = -94595072$.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.1. Chỉnh hợp có lặp

Định nghĩa 3.10

Một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của một tập n phần tử được gọi là *một chỉnh hợp lặp* chập k từ tập n phần tử.

- Nếu A là tập gồm n phần tử đó thì mỗi chỉnh hợp như thế là một phần tử của tập A^k .
- Ngoài ra, mỗi chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử là một hàm từ tập k phần tử vào tập n phần tử.
- Vì vậy số chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử là n^k.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.2. Tổ hợp lặp

Định nghĩa 3.11

Một tổ hợp lặp chập k của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của tập đã cho.

Như vậy một tổ hợp lặp kiểu này là một dãy không kể thứ tự gồm k thành phần lấy từ tập n phần tử. Do đó có thể là $k > n$.

Mệnh đề 3.5

Số tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử bằng C^k_{n+k-1}

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.1. Chỉnh hợp có lặp

Ví dụ 3.50

Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 1000đ, 2000đ, 5000đ, 10.000đ, 20.000đ, 50.000đ, 100.000đ. Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Lời giải. Vì ta không kể tới thứ tự chọn tờ tiền và vì ta chọn đúng 5 lần, mỗi lần lấy một từ 1 trong 7 loại tiền nên mỗi cách chọn 5 tờ giấy bạc này chính là một tổ hợp lặp chập 5 từ 7 phần tử. Do đó số cần tìm là $C^5_{7+5-1} = 462$.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.1. Chỉnh hợp có lặp

Ví dụ 3.51

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải. Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 15 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 15 từ tập có 3 phần tử và bằng $C^{15}_{3+15-1} = 136$.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.2. Hoán vị có lặp

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần. Ta xét thí dụ sau.

Ví dụ 3.52

Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?

Lời giải.

- Vì một số chữ cái của từ SUCCESS là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được.
- Từ này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có C_7^3 cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Có C_4^2 cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ C, còn lại 2 chỗ trống.
- Có thể đặt chữ U bằng C_2^1 cách và C_1^1 cách đặt chữ E vào xâu.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.2. Hoán vị có lặp (tiếp tục)

- Theo nguyên lý nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là:

$$C_7^3.C_4^2.C_2^1.C_1^1 = \frac{71412!1!}{3!4!2!2!1!1!1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.2. Hoán vị có lặp

Mệnh đề 3.6

Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử như nhau thuộc loại k, bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Chứng minh.

- Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có $C_n^{n_1}$ cách giữ n_1 chỗ cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống.
- Sau đó có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách đặt n_2 phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại $n - n + 1 - n_2$ chỗ trống.
- Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4,..., loại $k - 1$vào chỗ trống trong hoán vị.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.2. Hoán vị có lặp (tiếp tục)

- Cuối cùng có $C^{n_k}_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}$ cách đặt n_k phần tử loại k vào hoán vị.
- Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị có thể là

$$C^{n_1}_{n}.C^{n_2}_{n-n_1}.\ldots.C_n - n_1 - \ldots - n_{k-1} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.3. Sự phân bố đồ vật

Ví dụ 3.53

Có bao nhiêu cách chia những xấp bài 5 quân cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?

Lời giải. Người đầu tiên có thể nhận được 5 quân bài bằng C_{52}^5 cách. Người thứ hai có thể được chia 5 quân bài bằng C_{47}^5 cách, vì chỉ còn 47 quân bài. Người thứ ba có thể nhận được 5 quân bài bằng C_{42}^5 cách. Cuối cùng, người thứ tư nhận được 5 quân bài bằng C_{37}^5 cách. Vì vậy, theo nguyên lý nhân tổng cộng có

$$C_{52}^5 . C_{47}^5 . C_{42}^5 . C_{37}^5$$

cách chia cho 4 người mỗi người một xấp 5 quân bài.

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng - 5.3. Sự phân bố đồ vật

Thí dụ trên là một bài toán điển hình về việc phân bố các đồ vật khác nhau vào các hộp khác nhau. Các đồ vật là 52 quân bài, còn 4 hộp là 4 người chơi và số còn lại để trên bàn. Số cách sắp xếp các đồ vật vào trong hộp được cho bởi mệnh đề sau

Mệnh đề 3.7

Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong k hộp khác nhau sao cho có n_i vật được đặt vào trong hộp thứ i, với $i = 1, 2, ..., k$ bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!.(n - n_1 - ... - n_k)!}$$

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.1. Sinh các hoán vị

- Có nhiều thuật toán đã được phát triển để sinh ra $n!$ hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$.
- Ta sẽ mô tả một trong các phương pháp đó, phương pháp liệt kê các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ theo thứ tự từ điển.
- Khi đó, hoán vị $a_1a_2...a_n$ được gọi là đi trước hoán vị $b_1b_2...b_n$ nếu tồn tại $k(1 \leq k \leq n)$, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_{k-1} = b_{k-1}$ và $a_k < b_k$.
- Thuật toán sinh các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ dựa trên thủ tục xây dựng hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển, từ hoán vị cho trước $a_1a_2...a_n$.
- Đầu tiên nếu $a_{n-1} < a_n$ thì rõ ràng đổi chỗ a_{n-1} và a_n cho nhau thì sẽ nhận được hoán vị mới đi liền sau hoán vị đã cho.

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.1. Sinh các hoán vị

- Nếu tồn tại các số nguyên a_j và a_{j+1} sao cho $a_j < a_{j+1}$ và $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n$, tức là tìm cặp số nguyên liền kề đầu tiên tính từ bên phải sang bên trái của hoán vị mà số đầu nhỏ hơn số sau.
- Sau đó, để nhận được hoán vị liền sau ta đặt vào vị trí thứ j số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j của tập $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$,
- rồi liệt kê theo thứ tự tăng dần của các số còn lại của $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ vào các vị trí $j+1, \ldots, n$.
- Dễ thấy không có hoán vị nào đi sau hoán vị xuất phát và đi trước hoán vị vừa tạo ra.

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.1. Sinh các hoán vị

Ví dụ 3.54

Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 4736521.

Lời giải.

- Cặp số nguyên đầu tiên tính từ phải qua trái có số trước nhỏ hơn số sau là $a_3 = 3$ và $a_4 = 6$.
- Số nhỏ nhất trong các số bên phải của số 3 mà lại lớn hơn 3 là số 5.
- Đặt số 5 vào vị trí thứ 3.
- Sau đó đặt các số 3, 6, 1, 2 theo thứ tự tăng dần vào bốn vị trí còn lại.
- Hoán vị liền sau hoán vị đã cho là 4751236.

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.1. Sinh các hoán vị

procedure Hoán vị liền sau (a[1], a[2],...,a[n])
(hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$ khác (n, n-1, ..., 2, 1))

```
   j := n - 1;
while (a[i] > a[j+1])
   j := j -1; //j là chỉ số lớn nhất mà a[j] < a[j + 1]
k := n;
while (a[j] > a[k])
//a k là số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a j và bên phải a j
{
   k := k - 1;
   doicho (a[j] ,a[k]);
}
r := n;
s := j + 1;
while (r > s){
```

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.1. Sinh các hoán vị (tiếp tục)

```
    doicho (a[r] , a[s] );
    r := r − 1 ; s := s + 1;
}
//Điều này sẽ xếp phần đuôi của hoán vị ở sau vị trí thứ j theo thứ tự tăng dần.
```

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.2. Sinh các tổ hợp

- Làm thế nào để tạo ra tất cả các tổ hợp các phần tử của một tập hữu hạn? Vì tổ hợp chính là một tập con, nên ta có thể dùng phép tương ứng 1-1 giữa các tập con của $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và xâu nhị phân độ dài n.
- Ta thấy một xâu nhị phân độ dài n cũng là khai triển nhị phân của một số nguyên nằm giữa 0 và $2^n - 1$.
- Khi đó 2^n xâu nhị phân có thể liệt kê theo thứ tự tăng dần của số nguyên trong biểu diễn nhị phân của chúng.
- Chúng ta sẽ bắt đầu từ xâu nhị phân nhỏ nhất 00...00 (n số 0).
- Mỗi bước để tìm xâu liền sau ta tìm vị trí đầu tiên tính từ phải qua trái mà ở đó là số 0, sau đó thay tất cả số 1 ở bên phải số này bằng 0 và đặt số 1 vào chính vị trí này.

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.2. Sinh các tổ hợp

procedure Xâu nhị phân liền sau (b[n-1]b[n-2] ...b[1]b[0]): xâu nhị phân khác (11...11)

```
i := 0;
while (b[i]= 1)
{
   b[i] := 0
   i := i + 1;
}
b[i] := 1;
```

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.2. Sinh các tổ hợp

- Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày thuật toán tạo các tổ hợp chập k từ n phần tử $\{1, 2, ..., n\}$.
- Mỗi tổ hợp chập k có thể biểu diễn bằng một xâu tăng.
- Khi đó có thể liệt kê các tổ hợp theo thứ tự từ điển.
- Có thể xây dựng tổ hợp liền sau tổ hợp $a_1 a_2 ... a_k$ bằng cách sau.
- Trước hết, tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã cho kể từ phải qua trái sao cho $a_i \neq n - k + i$.
- Sau đó thay a_i bằng $a_i + 1$ và a_j bằng $a_i + j - i + 1$ với $j = i + 1, i + 2, ..., k$.

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.2. Sinh các tổ hợp

Ví dụ 3.55

Tìm tổ hợp chập 4 từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ đi liền sau tổ hợp $\{1, 2, 5, 6\}$.

Lời giải.

- Ta thấy từ phải qua trái $a_2 = 2$ là số hạng đầu tiên của tổ hợp đã cho thỏa mãn điều kiện $a_i \neq 6 - 4 + i$.
- Để nhận được tổ hợp tiếp sau ta tăng a_i lên một đơn vị, tức $a_2 = 3$, sau đó đặt $a_3 = 3 + 1 = 4$ và $a_4 = 3 + 2 = 5$.
- Vậy tổ hợp liền sau tổ hợp đã cho là $\{1, 3, 4, 5\}$. Thủ tục này được cho dưới dạng thuật toán như sau.

6. Sinh các hoán vị và tổ hợp - 6.2. Sinh các tổ hợp

procedure Tổ hợp liền sau (a[1] , a[2] , ..., a[k])
tập con thực sự của tập $\{1, 2, ..., n\}$ không bằng $\{n - k + 1, ..., n\}$ với a[1] < a[2] < ... < a[k].

```
i := k;
while (a[i] = n - k + i){
   i := i - 1;
   a[i] := a[i] + 1;
}
for (j= i + 1; j< k; j++)
   a[j] := a[i] + j - i;
```

7. Hệ thức truy hồi - 7.1. Khái niệm mở đầu

- Đôi khi ta rất khó định nghĩa một đối tượng một cách tường minh.
- Nhưng có thể dễ dàng định nghĩa đối tượng này qua chính nó. Kỹ thuật này được gọi là đệ quy.
- Định nghĩa đệ quy của một dãy số định rõ giá trị của một hay nhiều hơn các số hạng đầu tiên và quy tắc xác định các số hạng tiếp theo từ các số hạng đi trước.
- Định nghĩa đệ quy có thể dùng để giải các bài toán đếm.
- Khi đó quy tắc tìm các số hạng từ các số hạng đi trước được gọi là các hệ thức truy hồi.

7. Hệ thức truy hồi - 7.1. Khái niệm mở đầu

Định nghĩa 3.12

Hệ thức truy hồi (hay công thức truy hồi) đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy.
Dãy số được gọi là lời giải hay *nghiệm của hệ thức truy hồi* nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

7. Hệ thức truy hồi - 7.1. Khái niệm mở đầu

Ví dụ 3.56 (Lãi kép)

Giả sử một người gửi 10.000 đô la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Lời giải. Gọi T_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số có sau $n-1$ năm cộng lãi suất của năm thứ n, nên ta thấy dãy $\{T_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi sau:

$$T_n = T_{n-1} + 0,11\,T_{n-1} = (1,11)\,T_{n-1}$$

với điều kiện đầu $T_0 = 10.000$ đô la. Từ đó suy ra
$T_n = (1,11)^n.10.000$. Thay $n = 30$ cho ta $T_{30} = 228922,97$ đô la.

7. Hệ thức truy hồi - 7.1. Khái niệm mở đầu

Ví dụ 3.57

Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu nhị phân như thế có độ dài bằng 5?

Lời giải.

- Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp.
- Để nhận được hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$, ta thấy rằng theo quy tắc cộng, số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp bằng số các xâu nhị phân như thế kết thúc bằng số 1 cộng với số các xâu như thế kết thúc bằng số 0. Giả sử $n \geq 3$.

7. Hệ thức truy hồi - 7.1. Khái niệm mở đầu (tiếp tục)

- Các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bằng số 1 chính là xâu nhị phân như thế, độ dài $n-1$ và thêm số 1 vào cuối của chúng.
- Vậy chúng có tất cả là a_{n-1} .
- Các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 0, cần phải có bit thứ $n-1$ bằng 1, nếu không thì chúng có hai số 0 ở hai bit cuối cùng.
- Trong trường hợp này chúng có tất cả là a_{n-2} .
- Cuối cùng ta có được

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ với } n \geq 3.$$

- Điều kiện đầu là $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$.
- Khi đó $a_5 = a_4 + a_3 = a_3 + a_2 + a_3 = 2(a_2 + a_1) + a_2 = 13$.

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi

Định nghĩa 3.13

Một *hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k* với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực và $c_k \neq 0$.

- Theo nguyên lý của quy nạp toán học thì dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi nêu trong định nghĩa được xác định duy nhất bằng hệ thức truy hồi này và k điều kiện đầu:

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi

- Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Chú ý rằng $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ nếu và chỉ nếu

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k}$$

- hay

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

- Phương trình này được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ thức truy hồi, nghiệm của nó gọi là *nghiệm đặc trưng* của hệ thức truy hồi.

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi

Mệnh đề 3.8

Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

có k *nghiệm phân biệt* $r_1, r_2, \ldots, r_k$*. Khi đó dãy* $\{a_n\}$ *là nghiệm của hệ thức truy hồi* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ *nếu và chỉ nếu* $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$*, với* $n = 1, 2, \ldots$ *trong đó* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *là các hằng số.*

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi

Ví dụ 3.58

Tìm công thức hiển của các số Fibonacci.

Lời giải.

- Dãy các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ và các điều kiện đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$.
- Các nghiệm đặc trưng là $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Do đó các số Fibonacci được cho bởi công thức

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi (tiếp tục)

- Các điều kiện ban đầu $f_0 = 0 = \alpha_1 + \alpha_2$ và $f_1 = 1 = \alpha_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.
- Từ hai phương trình này cho ta $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
- Do đó các số Fibonacci được cho bởi công thức hiển sau

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi

Ví dụ 3.59

Hãy tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 2, a_1 = 5$ và $a_2 = 15$.

Lời giải.

- Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi này là $r^3 - 6r^2 + 11r - 6$.
- Các nghiệm đặc trưng là $r = 1, r = 2, r = 3$.
- Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n.$$

7. Hệ thức truy hồi - 7.2. Giải các hệ thức truy hồi (tiếp tục)

- Các điều kiện ban đầu

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 &= 5 = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \alpha_3 3 \\ a_1 &= 15 = \alpha_1 + \alpha_2 4 + \alpha_3 9. \end{aligned}$$

- Giải hệ các phương trình này ta nhận được $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2.$
- Vì thế, nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này và các điều kiện ban đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$ với

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n.$$

8. Quan hệ chia để trị - 8.1. Giới thiệu

- Nhiều thuật toán đệ quy chia bài toán với các thông tin vào đã cho thành một hay nhiều bài toán nhỏ hơn.
- Sự phân chia này được áp dụng liên tiếp cho tới khi có thể tìm được lời giải của bài toán nhỏ một cách dễ dàng.
- Chẳng hạn, ta tiến hành việc tìm kiếm nhị phân bằng cách rút gọn việc tìm kiếm một phần tử trong một danh sách tới việc tìm phần tử đó trong một danh sách có độ dài giảm đi một nửa.
- Ta rút gọn liên tiếp như vậy cho tới khi còn lại một phần tử.
- Một ví dụ khác là thủ tục nhân các số nguyên. Thủ tục này rút gọn bài toán nhân hai số nguyên tới ba phép nhân hai số nguyên với số bit giảm đi một nửa.
- Phép rút gọn này được dùng liên tiếp cho tới khi nhận được các số nguyên có một bit.
- Các thủ tục này gọi là các thuật toán chia để trị.

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

- Giả sử rằng một thuật toán phân chia một bài toán cỡ $n$thành a bài toán nhỏ, trong đó mỗi bài toán nhỏ có cỡ $\frac{n}{b}$ (để đơn giản giả sử rằng n chia hết cho b;
- trong thực tế các bài toán nhỏ thường có cỡ $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ hoặc $\lceil \frac{n}{b} \rceil$).
- Giả sử rằng tổng các phép toán thêm vào khi thực hiện phân chia bài toán cỡ n thành các bài toán có cỡ nhỏ hơn là $g(n)$.
- Khi đó, nếu $f(n)$ là số các phép toán cần thiết để giải bài toán đã cho thì f thỏa mãn hệ thức truy hồi sau

$$f(n) = a.f\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

- Hệ thức này có tên là *hệ thức truy hồi chia để trị*.

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

Ví dụ 3.60

Thuật toán tìm kiếm nhị phân đưa bài toán tìm kiếm cỡ n về bài toán tìm kiếm phần tử này trong dãy tìm kiếm cỡ $\frac{n}{2}$, khi n chẵn. Khi thực hiện việc rút gọn cần hai phép so sánh. Vì thế, nếu $f(n)$ là số phép so sánh cần phải làm khi tìm kiếm một phần tử trong danh sách tìm kiếm cỡ n ta có $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 2$, nếu n là số chẵn.

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

Ví dụ 3.61

Có các thuật toán hiệu quả hơn thuật toán thông thường để nhân hai số nguyên. Ở đây ta sẽ có một trong các thuật toán như vậy. Đó là thuật toán phân nhánh, có dùng kỹ thuật chia để trị. Trước tiên ta phân chia mỗi một trong hai số nguyên $2n$ bit thành hai khối mỗi khối n bit. Sau đó phép nhân hai số nguyên $2n$ bit ban đầu được thu về ba phép nhân các số nguyên n bit cộng với các phép dịch chuyển và các phép cộng.

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

- Giả sửa và b là các số nguyên có các biểu diễn nhị phân độ dài $2n$ là
  $a = (a_{2n-1}a_{2n-2}...a_1a_0)_2$
  và $b = (b_{2n-1}b_{2n-2}...b_1b_0)_2$.
- Giả sử $a = 2^nA_1 + A_0, b = 2^nB_1 + B_0$, trong đó

$$A_1 = (a_{2n-1}a_{2n-2}...a_{n+1}a_n)_2, A_0 = (a_{n-1}...a_1a_0)_2$$
$$B_1 = (b_{2n-1}b_{2n-2}...b_{n+1}b_n)_2, B_0 = (b_{n-1}...b_1b_0)_2.$$

- Thuật toán nhân nhánh các số nguyên dựa trên đẳng thức:

$$ab = (2^{2n} + 2^n)A_1B_1 + 2^n(A_1 - A_0)(B_0 - B_1) + (2^n + 1)A_0B_0.$$

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị (tiếp tục)

- Đẳng thức này chỉ ra rằng phép nhân hai số nguyên 2n bit có thể thực hiện bằng cách dùng ba phép nhân các số nguyên n bit và các phép cộng, trừ và phép dịch chuyển.
- Điều đó có nghĩa là nếu $f(n)$ là tổng các phép toán nhị phân cần thiết để nhân hai số nguyên n bit thì

$$f(2n) = 3f(n) + C_n.$$

- Ba phép nhân các số nguyên n bit cần $3f(n)$ phép toán nhị phân.
- Mỗi một trong các phép cộng, trừ hay dịch chuyển dùng một hằng số nhân với n lần các phép toán nhị phân và C_n là tổng các phép toán nhị phân được dùng khi làm các phép toán này.

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

Mệnh đề 3.9

Giả sử f là một hàm tăng thoả mãn hệ thức truy hồi $f(n) = a.f\left(\dfrac{n}{b}\right) + c$ *với mọi n chia hết cho b*, $a \geq 1$, *b là số nguyên lớn hơn 1, còn c là số thực dương. Khi đó*

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}), & a > 1 \\ O(\log n), & a = 1. \end{cases}$$

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

Mệnh đề 3.10

Giả sử f là hàm tăng thoả mãn hệ thức truy hồi $f(n) = a.f\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$ *với mọi* $n = b^k$ *, trong đó k là số nguyên dương,* $a \geq 1$, *b là số nguyên lớn hơn 1, còn c và d là các số thực dương. Khi đó*

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}), & a > b^d \\ O(n^d \log n), & a = b^d. \\ O(n^d), & a < b^d. \end{cases}$$

8. Quan hệ chia để trị - 8.2. Hệ thức chia để trị

Ví dụ 3.62

Hãy ước lượng số phép toán nhị phân cần dùng khi nhân hai số nguyên n bit bằng thuật toán nhân nhanh.

Lời giải. Ví dụ trước đã chỉ ra rằng$f(n) = 3f(n/2) + C_n$, khi n chẵn. Vì thế, từ Mệnh đề 3.10 ta suy ra $f(n) = O(n^{\log_2 3})$. Chú ý là $\log_2 3 \approx 1,6$. Vì thuật toán nhân thông thường dùng $O(n^2)$ phép toán nhị phân, thuật toán nhân nhanh sẽ thực sự tốt hơn thuật toán nhân thông thường khi các số nguyên là đủ lớn.

9. Bài tập

▷ 3.1

Có 100 vé đánh số từ 1 đến 100 được bán cho 100 người khác nhau. Người ta sẽ trao 4 giải thưởng kể cả giải độc đắc. Hỏi
a) Có bao nhiêu cách trao thưởng?
b) Có bao nhiêu cách trao thưởng nếu người giữ vé 47 trúng giải độc đắc?

▷ 3.2

Một câu lạc bộ có 25 thành viên.
a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?
b) Có bao nhiêu cách chọn Chủ tích, Phó chủ tích, Thư ký và Thủ quỹ?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.3

Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 ủy viên trong đó ủy viên nam bằng số ủy viên nữ.

▷ 3.4

Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{200}$.

▷ 3.5

Để chuẩn bị cho giai đoạn 2, coa 150 sinh viên ghi tên học môn Lôgic toán; 120 sinh viên ghi tên học môn Lý thuyết đồ thị và 200 sinh viên ghi tên học môn Văn phạm và Ôtômat. Hỏi có bao nhiêu sinh viên ghi tên học một trong ba môn, biết rằng không có sinh viên nào ghi tên học đồng thời 2 môn hoặc cả 3 môn.

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.6

Ghi nhãn cho chiếc ghế trong hội trường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Hỏi có bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn?

▷ 3.7

Trong một trung tâm máy tính có 50 máy tinh. Mỗi máy có 24 cổng. Hỏi có bao nhiêu cổng khác nhau trong trung tâm này.

▷ 3.8

Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài:

a) Bằng n?

b) Nhỏ hơn hoặc bằng n?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.9

Một dãy XXXYYY độ dài 6. X có thể gán bởi một chữ cái, Y có thể gán một chữ số. Có bao nhiêu dãy được thành lập theo cách trên?

▷ 3.10

Có thể tạo bao nhiêu hàm số từ tập A có m phần tử vào tập B có n phần tử?

▷ 3.11

Trong tương lai số điện thoại có 10 chữ số, trong đó 3 chữ số đầu NXX là mã vùng, ba chữ số tiếp theo là mã chi nhánh có dạng NXX, 4 chữ còn lại là XXXX là mã máy. Biết N có thể nhẫn chữ số từ 2 đến 9, còn X nhận các số từ 0 đến 9. Hỏi có bao nhiêu số điện thoại khác nhau theo cách trên?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.12

Mỗi người sử dụng máy tính đều có mật khẩu dài từ 6 đến 8 ký tự. Trong đó mỗi ký tự là một chữ hoa hay một chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

▷ 3.13

Giả sử trong Kho Công nghệ có 1807 sinh viên năm thứ nhất, trong số này có 453 sinh viên chọn môn Tin học; 567 chọn môn toán và 299 chọn cả hai môn Toán và Tin. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không học Toán cũng không học Tin học?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.14

Tập $A \cup B$ có bao nhiêu phần tử nếu A có 12 phần tử, B có 18 phần tử và
a) $A \cap B = \emptyset$?
b) $|A \cap B| = 1$?
c) $|A \cap B| = 6$?
d) $A \subset B$?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.15

Tìm số phần tử của tệp $A \cup B \cup C$ nếu mỗi tập có 100 phần tử và nếu
a) Các tập hợp là từng cặp rời nhau;
b) Có 50 phần tử chung của mỗi cặp tập hợp và không có phần tử chung của ba tập hợp;
c) Có 50 phần tử chung của mỗi cặp tập hợp và 25 phần tử chung của ba tập hợp;

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.16

Giả sử Khoa Toán - Cơ -Tin học có tổng số sinh viên. Trong đó có 1876 sinh viên học Basic; 999 sinh viên học Java; 345 sinh viên học C. Ngoài ra, 876 sinh viên học Basic và Java; 232 sinh viên học Java và C; 290 sinh viên học Basic và C. Nếu có 189 sinh viên học cả ba môn thì trong khoa có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong cả ba môn kể trên?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.17

Sau cuộc phỏng vấn sinh viên tại nhà ăn ĐHKHTN, người ta thấy 64 sinh viên thích ăn cải xanh; 94 sinh viên thích ăn bắp cải; 58 sinh viên thích ăn súp lơ; 26 sinh viên thích ăn cải xanh và bắp cải; 28 sinh viên thích ăn cải xanh và sup lơ; 22 sinh viên thích ăn bắp cải và sup lơ; 11 sinh viên thích ăn tất cả các loại. Hỏi trong số 270 sinh viên này có bao nhiêu sinh viên không thích ăn cả ba loại rau trên?

▷ 3.18

Một cuộc họp gồm 12 người tham dự để bàn về 3 vấn đề. Có 8 người phát biểu về vấn đề I, 5 người phát biểu về vấn đề II và 7 người phát biểu về vấn đề III. Ngoài ra, có đúng 1 người không phát biểu vấn đề nào. Hỏi nhiều lắm là có bao nhiêu người phát biểu cả 3 vấn đề.

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.19

Chỉ ra rằng có ít nhất 4 người trong số 25 triệu người có cùng tên họ viết tắt bằng 3 chữ cái sinh cùng ngày trong năm (không nhất thiết trong cùng một năm).

▷ 3.20

Một tay đô vật tham gia thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ anh ta có ít nhất một trận đấu, nhưng toàn bộ anh ta có không quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp anh ta đã đấu đúng 24 trận.

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.21

Cho n là số nguyên dương bất kỳ. Chứng minh rằng luôn lấy ra được từ n số đã cho một số số hạng thích hợp sao cho tổng của chúng chia hết cho n.

▷ 3.22

Trong một cuộc lấy ý kiến về 7 vấn đề, người được hỏi ghi vào một phiếu trả lời sẵn bằng cách để nguyên hoặc phủ định các câu trả lời tương ứng với 7 vấn đề đã nêu. Chứng minh rằng với 1153 người được hỏi luôn tìm được 10 người trả lời giống hệt nhau.

▷ 3.23

Có 17 nhà bác học viết thư cho nhau trao đổi 3 vấn đề. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 người cùng trao đổi một vấn đề.

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.24

10. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ MISSISSIPI, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?

▷ 3.25

Một giáo sư cất bộ sưu tập gồm 40 số báo toán học vào 4 chiếc ngăn tủ, mỗi ngăn đựng 10 số. Có bao nhiêu cách có thể cất các tờ báo vào các ngăn nếu
1) Mỗi ngăn được đánh số sao cho có thể phân biệt được;
2) Các ngăn là giống hệt nhau?

9. Bài tập (tiếp tục)

▷ 3.26

1) Tìm hệ thức truy hồi mà R_n thoả mãn, trong đó R_n là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi n đường thẳng nếu không có hai đường nào song song và không có 3 đường nào cùng đi qua một điểm.
2) Tính R_n bằng phương pháp lặp.

▷ 3.27

16. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$.