Bài tập chương

4 QUAN HỆ

▷ **4.1.** Cho 2 tập hợp $X = \{a, b, c\}$ và $Y = \{b, c, d, e\}$

a. Tính $|X \times Y|$.

b. Tìm số quan hệ 2 ngôi trên Y.

c. Tìm số quan hệ giữa X và Y chứa $(b, c), (b, d)$.

d. Hãy tìm 1 quan hệ trên X có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.

e. Hãy tìm 1 quan hệ trên Y có tính phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.

▷ **4.2.** Cho $R \subseteq A \times A$. Ta định nghĩa $R^n (n = 1, 2, ...)$ bằng quy nạp như sau

$$R^1 = R, R^{n+1} = R^n.R.$$

a) cho $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Tìm $R^n (n = 1, 2, ...)$

b) Chứng minh tính chất: Quan hệ R trên tập A là bắc cầu khi và chỉ khi $R^n \subseteq R$.

▷ **4.3.** Cho $R \subseteq A \times B$. Quan hệ ngược của R là

$$R^{-1} = \{(b, a) : b \in B, a \in A \text{ và } (a, b) \in R\}.$$

Còn quan hệ bù của R là $\overline{R} = \{(a, b) : (a, b) \notin R\}$.

a) Cho $R = \{(a, b) : a < b\}$ trên tập hợp các số nguyên. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$.

b) Cho R là quan hệ trên tập tất cả các tỉnh, thành phố của Việt Nam và xác định $R = \{(a, b) : a$ là tỉnh giáp với tỉnh $b\}$. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$.

▷ **4.4.** Chứng minh rằng

a) nếu quan hệ R trên tập A có tính đối xứng và bắc cầu thì R có tính phản xạ.

b) nếu quan hệ R trên tập A là phản xạ khi và chỉ khi quan hệ R^{-1} là phản xạ.

c) nếu quan hệ R trên tập A là phản xạ khi và chỉ khi quan hệ $\overline{R}$ là không phản xạ.

▷ **4.5.** R là một quan hệ trên $A = 1, 2, 3, 4, 5$ với
$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1),$
$(3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,2), (5,5)\}$
R có phải là 1 quan hệ tương đương hay không?

▷ **4.6.** Cho R là 1 quan hệ trên tập hợp các số tự nhiên với

$$R = \{(x, y) : x + y \text{ chẵn }\}.$$

Chứng minh R là 1 quan hệ tương đương.

▷ **4.7.** Cho R là 1 quan hệ trên $A \times A$ với $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ sao cho

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow b = d$$

a. Chứng minh R là 1 quan hệ tương đương.

b. Tìm lớp tương đương chứa $(1, 3)$.

c. Phân hoạch $A \times A$ thành các lớp tương đương tách biệt phân hoạch trên R.

▷ **4.8.** Giả sử R là quan hệ trên các tập các xâu chữ cái tiếng Anh sao cho aRb khi và chỉ khi $l(a) = l(b)$, ở đây $l(x)$ là độ dài của xâu x. R có phải quan hệ tương đương không?

▷ **4.9.** Chứng minh rằng quan hệ R trên các tập số nguyên được xác định aRb khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $a = -b$ là quan hệ tương đương.

▷ **4.10.** Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập $\{0, 1, 2, 3\}$ cho dưới đây là quan hệ tương đương? Xác định các tính chất của một quan hệ tương đương mà các quan hệ khác không có

a) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$;

b) $\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$;

c) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$;

d) $\{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;

e) $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$;

▷ **4.11.** Giả sử A là một tệp khác rỗng và f là một hàm số có A là miền xác định. Trên A ta định nghĩa quan hệ R như sau

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

a) Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương.

b) Xác định lớp tương đương của R.

▷ **4.12.** Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận dưới đây có phải là quan hệ tương đương hay không?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▷ **4.13.** Giả sử R_1 và R_2 là hai quan hệ tương đương trên tập A. Xác định xem các quan hệ $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ có nhất thiết là quan hệ tương đương hay không?

▷ **4.14.** Xác định số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập 3 phần tử bằng cách liệt kê ra các quan hệ đó.

▷ **4.15.** Cho $A = \{1,2,3,4,5\}$. Trên A xác định quan hệ R như sau

$$\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a + b = 2k, (k = 1, 2, ...).$$

a) Biểu diễn R bằng các phương pháp liệt kê, ma trận và đồ thị có hướng.

b) Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A.

c) Tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra.

d) Cho $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4,5\}$. Tìm quan hệ tương đương S trên A mà S sinh ra phân hoạch A_1, A_2, A_3.

e) Chứng minh rằng $F = R \cup S$ là một quan hệ trên A mà $MF = RR \vee MS$.

▷ **4.16.** Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Trên A xác định quan hệ R như sau

$$\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a - b = 3k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

a) Biểu diễn R bằng các phương pháp liệt kê, ma trận và đồ thị có hướng.

b) Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A.

c) Tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra.

d) Tìm quan hệ tương đương S trên A sinh ra các tập $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5, 6\}$.

e) Chứng minh rằng $R^{-1} = R$.

▷ **4.17.** R là một quan hệ trên $A \times A$ với $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5),$
$(3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}$

R có phải là 1 quan hệ thứ tự hay không?

▷ **4.18.** Cho là 1 quan hệ trên $X = \{2, 3, 4, 5, 12, 15, 60\}$ xác định bởi

$$\forall x, y \in X, x \prec y \Leftrightarrow y = kx, k \in \mathbb{Z}^+.$$

a. Chứng minh $\prec$ là 1 quan hệ thứ tự.

b. Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất xác định bởi quan hệ trên

c. Vẽ biểu đồ Hasse tương ứng

▷ **4.19.** Cho là 1 quan hệ trên $A \times A$ với $A = \{2, 4, 6, 12, 24\}$ xác định bởi

$$\forall (x, y), (z, t) \in A, (x, y) \prec (z, t) \Leftrightarrow x + y = z + t.$$

$\prec$ có phải là 1 quan hệ thứ tự hay không? Nếu $\prec$ là 1 quan hệ thứ tự thì xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất xác định bởi quan hệ trên.