

ĐỒ THỊ PHẪNG VÀ TÔ MÀU ĐỒ THỊ

▷ 9.1. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị G .

▷ 9.2. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Tìm số cạnh và số mặt của G .

▷ 9.3. Tìm số đỉnh, số cạnh và đại của: a) K_n ; b) $K_{m,n}$.

▷ 9.4. Chứng minh rằng

a) K_n là phẳng khi và chỉ khi $n \leq 4$.

b) $K_{m,n}$ là phẳng khi và chỉ khi $m \leq 2$ hay $n \leq 2$.

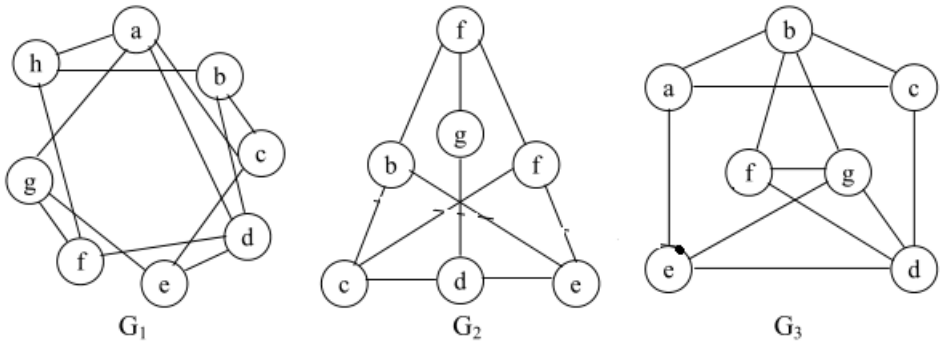
▷ 9.5. Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: Bỏ một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc của nó tạo ra một đồ thị phẳng. a) K_5 ; b) K_6 ; c) $K_{3,3}$.

▷ 9.6. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh và m cạnh, trong đó $n \geq 3$. Chứng minh rằng

$$m \leq 3n - 6.$$

▷ 9.7. Trong các đồ thị ở hình dưới đây, đồ thị nào là phẳng, đồ thị nào không phẳng? Nếu đồ thị là phẳng thì có thể kẻ thêm ít nhất là bao nhiêu cạnh để được đồ thị không phẳng?

▷ 9.8. Chứng minh rằng đồ thị Peterson (Hình ?? Bài tập 7.11, Chương 7) là đồ thị không phẳng.



Hình 9.1. Đồ thị phẳng và không phẳng

► 9.9. Đa diện lồi có d mặt ($d \geq 5$), mà từ mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh. Hai người chơi trò chơi như sau: mỗi người lần lượt tô đỏ một mặt trong các mặt còn lại. Người thắng là người tô được 3 mặt có chung một đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại cách chơi mà người được tô trước luôn luôn thắng.

► 9.10. Chứng minh rằng

a) Một đồ thị phẳng có thể tô đúng các đỉnh bằng hai màu khi và chỉ khi đó là đồ thị phân đôi.

b) Một đồ thị phẳng có thể tô đúng các miền bằng hai màu khi và chỉ khi đó là đồ thị Euler.

► 9.11. Tìm sắc số của các đồ thị cho trong Hình 9.1.

► 9.12. Tìm sắc số của các đồ thị K_n , $K_{m,n}$, C_n , và W_n .

► 9.13. Khoa Toán có 6 hội đồng học mỗi tháng một lần. Cần có bao nhiêu thời điểm họp khác nhau để đảm bảo rằng không ai bị xếp lịch họp hai hội đồng cùng một lúc, nếu các hội đồng là

$$H_1 = \{H, L, P\}, H_2 = \{L, M, T\}, H_3 = \{H, T, P\}.$$

► 9.14. Một vườn bách thú muốn xây dựng chuồng tự nhiên để trưng bày các con thú. Không may, một số loại thú sẽ ăn thịt các con thú khác nếu có cơ hội. Có thể dùng mô hình đồ thị và tô màu đồ thị như thế nào để xác định số chuồng khác nhau cần có và cách nhốt các con thú vào các chuồng thú tự nhiên này?

► 9.15. Chứng minh rằng một đơn đồ thị phẳng có 8 đỉnh và 13 cạnh không thể được tô đúng bằng hai màu.

▷ **9.16.** Chứng minh rằng nếu G là một đơn đồ thị phẳng có ít hơn 12 đỉnh thì tồn tại trong G một đỉnh có bậc ≤ 4 . Từ đó hãy suy ra rằng đồ thị G có thể tô đúng bằng 4 màu.