TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

BÀI 9

ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Nội dung

9.1. Chu số của đồ thị

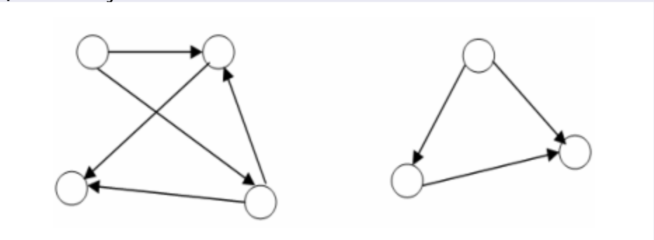
Cho đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh, m cạnh, p thành phần liên thông.

Định nghĩa 9.1

Đại lượng $c = m - n + p$ được gọi là chu số của đồ thị G.

Ví dụ 9.1

Xét đồ thị sau đây



Hình 9.1: Đồ thị định hướng không liên thông

Đồ thị trên có $n = 7$, $m = 8$ và $p = 2$. Vậy chu số $c = 8 - 7 + 2 = 3$.

9.1. Chu số của đồ thị

Trước hết, ta xét các tính chất của chu số.

Định lý 9.1

Nếu thêm một cạnh mới vào đồ thị G thì chu số tăng thêm 1 hoặc không thay đổi.

Chứng minh. Giả sử thêm cạnh mới (a, b) vào đồ thị G. Khi đó m tăng thêm 1.

- i) Nếu hai đỉnh a, b thuộc cùng một mảng liên thông trong G thì n, p không đổi, do vậy chu số tăng thêm 1.
- ii) Nếu hai đỉnh a, b nằm ở hai mảng liên thông khác nhau trong G thì p giảm 1, do vậy chu số không đổi.

9.1. Chu số của đồ thị

Hệ quả 9.2

Chu số của đồ thị là số nguyên không âm.

Chứng minh.

- Thật vậy, đồ thị G được xây dựng từ đồ thị G_0 gồm n đỉnh và không có cạnh nào cả. Sau đó, lần lượt thêm các cạnh vào đồ thị G_0 để được đồ thị G.
- Chu số của G_0 là $c = 0 - n + n = 0$. Quá trình thêm cạnh không làm giảm chu số.
- Vậy chu số của G lớn hơn hoặc bằng chu số của $G_0 = 0$.

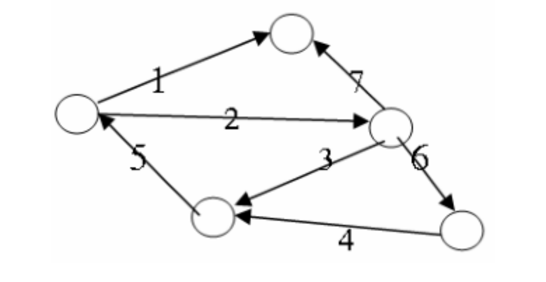
9.1. Chu số của đồ thị

- Bây giờ, ta đi tìm ý nghĩa của chu số.
- Ta đánh số các cạnh của đồ thị G theo một thứ tự nào đó: $1, 2, ..., m$.
- Với mỗi chu trình vô hướng trong đồ thị G ta chọn một chiều thuận và biểu diễn nó bằng một vectơ m chiều $(q_1, q_2, ..., q_m)$ mà q_i là số lần xuất hiện của cạnh thứ i trong chu trình theo chiều thuận trừ đi số lần xuất hiện của cạnh đó trong chu trình theo chiều ngược.

9.1. Chu số của đồ thị

Ví dụ 9.2

Xét đồ thị định hướng sau đây.



Hình 9.2: Đánh số các cạnh của đồ thị

Đồ thị có 7 cạnh, được đánh số như hình vẽ. Với chu trình vô hướng $[e_1, e_2, e_7]$ ta chọn chiều thuận là chiều $e_1 e_2 e_7$ khi đó vectơ tương ứng sẽ là $(-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$.

9.1. Chu số của đồ thị

Do vây, ta có thể đồng nhất mỗi chu trình vô hướng với một vectơ biểu diễn nó.

Định nghĩa 9.2

Các chu trình vô hướng $t_1, t_2, \ldots, t_k$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu các vectơ tương ứng với chúng lập thành một hệ độc lập tuyến tính. Hệ chu trình đơn vô hướng $t_1, t_2, \ldots, t_k$ được gọi là *độc lập tuyến tính cực đại* nếu nó là độc lập tuyến tính và mỗi chu trình vô hướng của đồ thị đều có thể biểu diễn tuyến tính qua các chu trình của hệ.

9.1. Chu số của đồ thị

Định lý 9.3

Chu số của đồ thị bằng số các chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại trong đồ thị đó.

Chứng minh. Quy nạp theo số cạnh m của đồ thị.
- Nếu $m = 0$ thì chu số bằng 0, đồ thị không có chu trình đơn nào.
- $(m) \Rightarrow (m+1)$: Giả sử đồ thị G' có n đỉnh, $m+1$ cạnh, p mảng liên thông. Có thể xem G' được xây dựng từ đồ thị G gồm m cạnh và bổ sung thêm một cạnh mới $e = (a, b)$. Đánh số cạnh e là cạnh thứ $m+1$ của đồ thị G'.

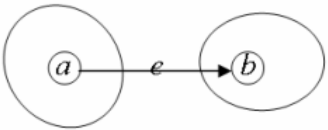
9.1. Chu số của đồ thị

Theo giả thiết quy nạp, chu số của đồ thị G là $c(G) = m - n + p =$ số chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại trong G. Ký hiệu các chu trình đó là: $(T) = t_1, t_2, ..., t_c$

Hiển nhiên, mỗi chu trình trong G' không chứa e đều có thể biểu diễn tuyến tính qua hệ các chu trình (T).

Ta xét hai trường hợp:

- 1) Hai đỉnh a, b của cạnh e nằm trong hai mảng liên thông khác nhau của G. Vì số cạnh tăng 1 nhưng số mảng liên thông bị giảm 1 nên chu số của G' vẫn bằng chu số của G.



Hình 9.3: Hai mảng liên thông

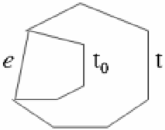
9.1. Chu số của đồ thị (tiếp tục)

Mặt khác, mỗi chu trình trong G' chứa e có tính chất sau đây: số lần e xuất hiện trong chu trình theo chiều thuận bằng số lần e xuất hiện trong chu trình theo chiều ngược vì cạnh e là cầu nối duy nhất giữa hai mảng liên thông này của G. Do đó, thành phần thứ $m+1$ của vectơ biểu diễn chu trình này bằng 0, và chu trình này vẫn có thể biểu diễn qua hệ (T). Suy ra hệ (T) cũng chính là hệ chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại của G'.

- 2) Hai đỉnh a, b của cạnh e thuộc cùng một mảng liên thông của G.
  Khi đó chu số $c(G') = c(G) + 1$. Chọn một đường đi đơn vô hướng trong G nối a với b rồi ghép thêm cạnh e ta được một chu trình đơn vô hướng trong G'. Ký hiệu chu trình này là t_0
  Xét hệ $(T') = t_0, (T) = t_0, t_1, t_2, ..., t_c$ gồm $c(G) + 1$ chu trình đơn vô hướng trong G'.

9.1. Chu số của đồ thị (tiếp tục)

Hệ (T') là độc lập tuyến tính vì (T) độc lập tuyến tính và t_0 không thể biểu diễn được qua (T), vì toạ độ thứ $m+1$ của vectơ biểu diễn t_0 bằng 1, còn của các vectơ biểu diễn các chu trình trong (T) thì bằng 0.



Hình 9.4: Hai chu trình chung một cạnh

Giả sử t là một chu trình nào đó của G' chứa e. Chọn chiều của t sao cho chu trình tổng $t+t_0$ không chứa e. Vậy thì chu trình tổng $t+t_0$ có thể biểu diễn tuyến tính qua hệ (T). Do đó, chu trình t cũng có thể biểu diễn tuyến tính qua hệ (T). Vậy (T') là hệ chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại của G'. ?

9.1. Chu số của đồ thị

Đồ thị có chu số bằng 0 được gọi là *đồ thị phi chu trình*. Lớp đồ thị phi chu trình là lớp đặc biệt nhưng hay gặp trong thực tế ứng dụng. Trước hết ta chỉ ra một đặc trưng của lớp đồ thị này như sau.

Định lý 9.4

Đồ thị định hướng $G = (V, E)$ là phi chu trình khi và chỉ khi các đỉnh của nó luôn có thể đánh số để sao cho mỗi cạnh (i, j) của đồ thị đều thoả mãn $i < j$.

Chứng minh.

- a) Nếu có thể đánh số các đỉnh như trên thì hiển nhiên đồ thị không có chu trình.
- b) Để chứng minh điều ngược lại, ta xây dựng thuật toán sau đây để đánh số các đỉnh của đồ thị định hướng phi chu trình.

9.1. Chu số của đồ thị (tiếp tục)

- Thuật toán dựa trên một tính chất rất đơn giản: Trong một đồ thị định hướng không rỗng phi chu trình tuỳ ý, luôn tồn tại đỉnh mà không có một cạnh nào đi vào đỉnh đó. Trước hết, thuật toán tính bậc vào cho các đỉnh của đồ thị.
- Những đỉnh có bậc vào bằng 0 sẽ được đưa vào stack (ngăn xếp – LIFO).
- Đánh số cho đỉnh đang ở đỉnh stack, loại bỏ đỉnh này khỏi stack và giảm bậc vào cho các đỉnh kề với đỉnh này. Nếu có đỉnh mà bậc vào đã giảm hết thì nạp nó lên đỉnh của stack.
- Tiếp tục quá trình đánh số tăng dần, loại đỉnh, giảm bậc vào ... cho đến khi stack trở thành rỗng. Và ta đã đánh số xong tất cả các đỉnh của đồ thị. ?
- Dựa vào chứng minh của định lý trên, ta xây dựng thuật toán đánh số các đỉnh cho đồ thị định hướng phi chu trình như sau.

9.1. Chu số của đồ thị

Thuật toán 9.1: Đánh số các đỉnh của đồ thị phi chu trình

Đầu vào: *Biểu diễn mảng* DK *các danh sách kề của đồ thị phi chu trình* G.
Đầu ra: *Mảng* SO *các số nguyên với* $SO[v]$ *là số đánh trên đỉnh* v.
begin
 for $v \in V$ **do** $BAC_V[v] := 0$; //$BAC\_V[v]$ *chứa bậc vào của đỉnh* v
 for $u \in V$ **do**
  for $v \in DK[u]$ **do** $BAC_V[v] := BAC_V[v] + 1$;
 $S := \emptyset$;
 for $v \in V$ **do**
  if $BAC_V[v] = 0$ **then** *push* v *onto* S ;
 $k := 0$;
 while $S \neq \emptyset$ **do**

9.1. Chu số của đồ thị (tiếp tục)

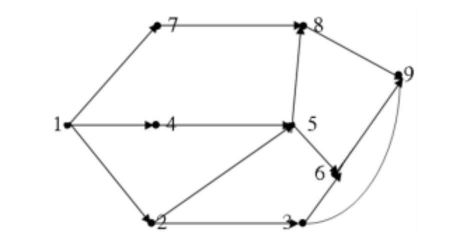
begin $u := top(S); pop(S)$ *;*
  $k := k + 1; SO[u] := k$ *;*
  for $v \in DK[u]$ **do**
    begin $BAC_V[v] := BAC_V[v] - 1$ *;*
      if $BAC_V[v] = 0$ **then** *push v onto S*
    end *;*
  end *;*
end *.*

Độ phức tạp của thuật toán là O(m+n).

9.1. Chu số của đồ thị

Ví dụ 9.3

Áp dụng thuật toán trên để đánh số các đỉnh cho đồ thị phi chu trình sau.



Hình 9.5: Các đỉnh của đồ thị phi chu trình đã được đánh số

Việc đánh số các đỉnh trên đồ thị định hướng phi chu trình có nhiều ứng dụng trong sơ đồ PERT, phương pháp đường tới hạn CPM ...

9.2. Sắc số của đồ thị

- Khái niệm sắc số liên quan đến bài toán tô màu đồ thị như sau:
- *Hãy tô màu các đỉnh của một đồ thị đã cho, sao cho hai đỉnh kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau.*
- Ta nói rằng, đồ thị G tô được bằng k màu nếu tồn tại hàm:

$$m : V \to \{0, 1, 2, ..., k-1\}$$

  sao cho, nếu hai đỉnh x và y kề nhau thì $m(x) \neq m(y)$.
- Dễ thấy rằng, đồ thị G tô màu được khi và chỉ khi nó không có đỉnh nút.

Định nghĩa 9.3

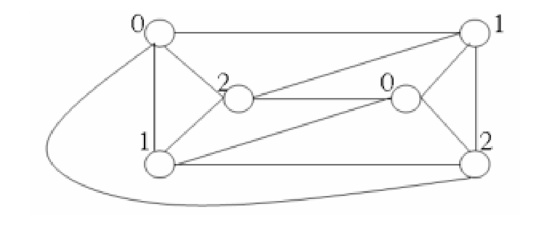
Sắc số của một đồ thị chính là số màu ít nhất dùng để tô các đỉnh của đồ thị đó.

Ta ký hiệu số s là sắc số của đồ thị G. Hiển nhiên $s \leq n$, số màu không vượt quá số đỉnh của đồ thị.

9.2. Sắc số của đồ thị

Ví dụ 9.4

Hãy tô màu đồ thị sau đây.



Hình 9.6: Tô màu các đỉnh đồ thị

Đồ thị trên có sắc số bằng 3.

9.2. Sắc số của đồ thị

- **Nhận xét:** Mỗi cách tô màu m cho đồ thị G sẽ ứng với một cách phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không giao nhau, mỗi tập ứng với một màu.
- Ngược lại, mỗi cách phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không giao nhau sẽ cho ta một cách tô màu.

9.2. Sắc số của đồ thị

Định lý 9.5

Mọi chu trình độ dài lẻ luôn có sắc số bằng 3.

Chứng minh.

- Giả sử chu trình có độ dài là $2n+1$.
- Ta chứng minh bằng quy nạp theo số n.
- $n = 1$: Chu trình gồm 3 đỉnh, mà hai đỉnh bất kỳ đều kề nhau. Vậy ta phải dùng đúng 3 màu để tô các đỉnh.
- $(n) \Rightarrow (n+1)$: Giả sử α là một chu trình có độ dài $2(n+1)+1 = 2n+3$ với dãy các đỉnh là $[x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}]$.
- Nối x_1 với x_{2n+1} ta được một chu trình α' có độ dài $2n+1$.
- Theo giả thiết quy nạp, chu trình α' có sắc số bằng 3.

9.2. Sắc số của đồ thị (tiếp tục)

- Lấy màu của x_1 tô cho x_{2n+2}, còn màu của x_{2n+1} tô cho x_{2n+3}. Chu trình α đã được tô màu mà không phải thêm màu mới.
- Vậy chu trình α có sắc số bằng 3.

Định lý 9.6

Đồ thị đầy đủ n đỉnh K_n có sắc số bằng n.

Dưới đây là một tiêu chuẩn đơn giản để kiểm tra xem một đồ thị có hai sắc (sắc số bằng 2) hay không.

9.2. Sắc số của đồ thị

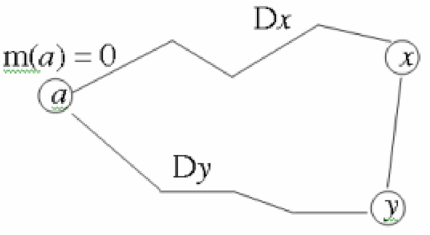
Định lý 9.7

Giả sử đồ thị G có ít nhất một cạnh. Đồ thị G là hai sắc khi và chỉ khi G không có chu trình đơn vô hướng độ dài lẻ.

Chứng minh.

- Giả sử G là đồ thị hai sắc. Theo Định lý 9.5 thì G không thể có chu trình đơn vô hướng độ dài lẻ.
- Ngược lại, giả sử G không có chu trình đơn vô hướng độ dài lẻ. Không mất tính tổng quát có thể xem G là liên thông. Chọn một đỉnh a nào đó trong đồ thị.

9.2. Sắc số của đồ thị (tiếp tục)



Hình 9.7: Cách xây dựng hàm tô màu

Đặt $m(a) = 0$.

- Với $x \neq a$ ta ký hiệu $d(x)$ là độ dài đường đi vô hướng ngắn nhất nối a với x.
- Đặt $m(x) = d(x) \mod 2$. Ta sẽ chứng minh m là hàm màu của G.

9.2. Sắc số của đồ thị (tiếp tục)

- Giả sử x, y kề nhau. Lấy Dx là đường đi vô hướng ngắn nhất nối a với x có độ dài $d(x)$, và Dy là đường đi vô hướng ngắn nhất nối a với y có độ dài $d(y)$. Chu trình đơn $[Dx, (x, y), Dy]$ có độ dài $d(x) + d(y) + 1$ phải là một số chẵn.
- Vậy thì $d(x) + d(y)$ là một số lẻ, có nghĩa là $d(x)$ và $d(y)$ khác nhau tính chẵn lẻ. Do vậy: $m(x) \neq m(y)$.
- Hàm tô màu m có hai giá trị, vậy sắc số ≤ 2. G có ít nhất một cạnh nên sắc số của nó bằng 2.

9.2. Sắc số của đồ thị

Từ định lý trên chúng ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 9.8

Tất cả các chu trình độ dài chẵn đều có sắc số bằng 2.

Thuật toán 9.2: Tô màu đồ thị không có đỉnh nút

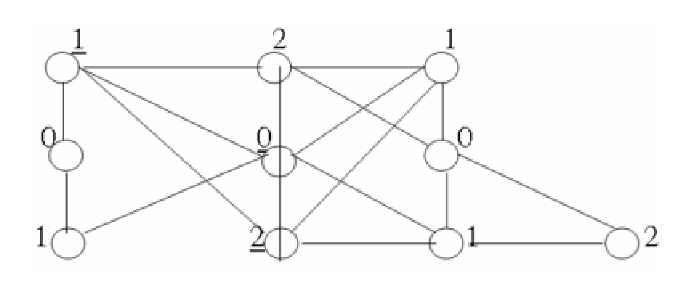
1. *Liệt kê các đỉnh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của đồ thị theo thứ tự giảm dần của bậc:$r(x_1) \geq r(x_2) \geq \ldots \geq r(x_n)$ để làm giảm các phép kiểm tra ở bước dưới.*
2. *Tô màu 0 cho đỉnh x_1 (đỉnh có bậc lớn nhất) cùng các đỉnh không kề với $x_1$và không kề với các đỉnh đã tô màu 0.*
3. *Lặp lại thủ tục tô màu $i+1$ giống như thủ tục tô màu i cho đến khi tô màuhết các đỉnh của đồ thị.*

9.2. Sắc số của đồ thị

Số màu đã dùng chính là sắc số của đồ thị.

Ví dụ 9.5

Tô màu đồ thị sau đây.



Hình 9.8: Tô màu một đồ thị

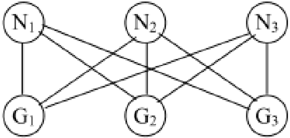
9.2. Sắc số của đồ thị

Định lý 9.9

Nếu bậc lớn nhất của các đỉnh trong đồ thị G là r thì sắc số của đồ thị $G \leq r + 1$.

9.3. Đồ thị phẳng

- Từ xa xưa đã lưu truyền một bài toán cổ "Ba nhà, ba giếng":
- Có ba nhà ở gần ba cái giếng, nhưng không có đường nối thẳng các nhà với nhau cũng như không có đường nối thẳng các giếng với nhau.



Hình 9.9: Bài toán 3 giếng nước

- Có lần bất hoà với nhau, họ tìm cách làm các đường khác đến giếng sao cho các đường này đôi một không giao nhau.
- Họ có thực hiện được ý định đó không?

9.3. Đồ thị phẳng

- Bài toán này có thể được mô hình bằng đồ thị phân đôi đầy đủ K 3,3 .
- Câu hỏi ban đầu có thể diễn đạt như sau: Có thể vẽ $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau?
- Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán: có thể vẽ một đồ thị trên một mặt phẳng không có các cạnh nào cắt nhau không.
- Đặc biệt chúng ta sẽ trả lời bài toán ba nhà ba giếng.
- Thường có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Khi nào có thể tìm được ít nhất một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh cắt nhau?

9.3. Đồ thị phẳng

Định nghĩa 9.4

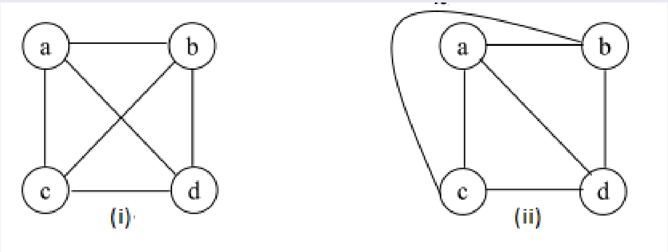
Một đồ thị được gọi là *phẳng* nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là điểm mút của các cạnh). Hình vẽ như thế gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

Một đồ thị có thể là phẳng ngay cả khi nó thường được vẽ với những cạnh cắt nhau, vì có thể vẽ nó bằng cách khác không có các cạnh cắt nhau.

9.3. Đồ thị phẳng

Ví dụ 9.6

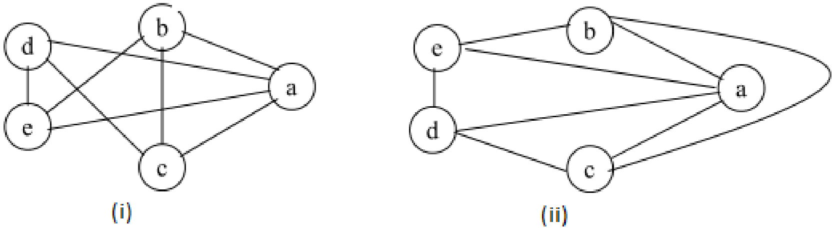
1) Một cây, một chu trình đơn là một đồ thị phẳng.
2) K_4 là đồ thị phẳng bởi vì có thể vẽ lại như hình bên không có đường cắt nhau.



Hình 9.10: (i) Đồ thị K_4, (ii) K_4 vẽ không có đường cắt nhau

9.3. Đồ thị phẳng

3) Xét đồ thị G như trong hình a dưới đây. Có thể biểu diễn G một cách khác như trong hình b, trong đó bất kỳ hai cạnh nào cũng không cắt nhau.



Hình 9.11: (i) Đồ thị có cạng giao nhau, (ii) Có thể vẽ lại không có đường cắt nhau

4) Đồ thị đầy đủ K_5 là một thí dụ về đồ thị không phẳng (xem phần sau).

9.3. Đồ thị phẳng

Định nghĩa 9.5

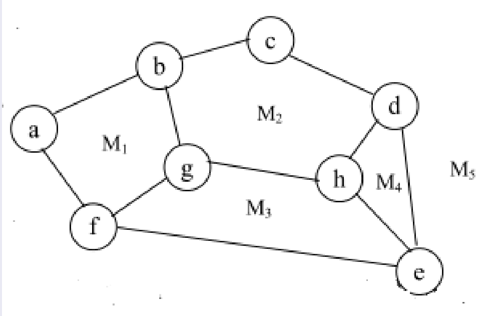
Cho G là một đồ thị phẳng.

- Mỗi phần mặt phẳng giới hạn bởi một chu trình đơn không chứa bên trong nó một chu trình đơn khác, gọi là *một miền* (hữu hạn) của đồ thị G.
- Chu trình giới hạn miền là *biên của miền*.
- Mỗi đồ thị phẳng liên thông có một *miền vô hạn* duy nhất (là phần mặt phẳng bên ngoài tất cả các miền hữu hạn).
- Số cạnh ít nhất tạo thành biên gọi là *đai* của G; trường hợp nếu G không có chu trình thì đai chính là số cạnh của G.

9.3. Đồ thị phẳng

Ví dụ 9.7

Đồ thị phẳng ở hình 9.12 có 5 miền, M_5 là miền vô hạn, miền M_1 có biên *abgfa*, miền M_2 có biên là *bcdhgb*, ... Chu trình đơn *abcdhgfa* không giới hạn một miền vì chứa bên trong nó chu trình đơn khác là *abgfa*.



Hình 9.12: Miền của đồ thị phẳng

9.3. Đồ thị phẳng

Ký hiệu: h là số diện hữu hạn của một đồ thị phẳng.
Ta sẽ thấy rằng, hệ chu trình đơn độc lập cực đại sẽ chia đồ thị phẳng thành các diện hữu hạn. Thật vậy,

Định lý 9.10

Số diện hữu hạn của một đa đồ thị phẳng G bằng chu số của đồ thị này.

Chứng minh. Quy nạp theo số diện hữu hạn h của G.

9.3. Đồ thị phẳng

- $h = 1$: chỉ có một chu trình đơn duy nhất, đó chính là biên của diện này. Suy ra chu số bằng 1.
- $(h-1) \Rightarrow (h)$: Giả sử đồ thị phẳng G với n đỉnh, m cạnh và p mảng liên thông có h diện.
- Lập đồ thị G' từ G bằng cách bớt đi cạnh e nào đó trên biên của một diện để số diện hữu hạn bớt đi 1. Khi đó, G' có $h-1$ diện.
- Theo giả thiết quy nạp, chu số của G' là $h-1 = (m-1) - n + p$ (p không đổi vì chỉ bớt đi một cạnh trên chu trình).
- Suy ra số diện hữu hạn của G là $h = m - n + p =$ chu số của G.

9.3. Đồ thị phẳng

Hệ quả 9.11

Nếu đa đồ thị phẳng G có n đỉnh, m cạnh, p mảng liên thông và h diện thì: $n - m + h = p + 1$ (công thức Euler tổng quát).

Chứng minh. Số diện của đồ thị phẳng bằng số diện hữu hạn cộng thêm 1 (diện vô hạn) = chu số + 1. Vậy thì, $h = m - n + p + 1$. Do đó, $n - m + h = p + 1$.

Hệ quả 9.12

Trong một đơn đồ thị phẳng có ít nhất một đỉnh có bậc không quá 5.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát có thể giả thiết rằng đơn đồ thị là liên thông.

9.3. Đồ thị phẳng (tiếp tục)

- Trong đơn đồ thị phẳng mỗi diện hữu hạn được giới hạn bởi ít nhất 3 cạnh, mà mỗi cạnh thuộc nhiều nhất là hai diện nên

$$3h \leq 2m \Rightarrow h \leq \frac{2m}{3}.$$

- Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử mọi đỉnh của đồ thị G đều có bậc ít nhất là bằng 6.
- Khi đó, tổng tất cả các bậc của các đỉnh của trong $G = 2m \geq 6n$. Do vậy: $m \geq 3n$ hay $n \leq \dfrac{m}{3}$.
- Theo công thức Euler thì $n - m + h = 1 + p = 2$. Ta có $2 \leq \dfrac{m}{3} - m + \dfrac{2m}{3} = 0$ Suy ra điều vô lý.

9.3. Đồ thị phẳng

- Các điều kiện cho tính phẳng của đồ thị.
- Với điều kiện nào đảm bảo cho một đồ thị là phẳng. Để trả lời cho câu hỏi này ta dựa vào một số khái niệm được định nghĩa dưới đây.
- Trước hết, ta có ngay những kết quả hiển nhiên sau đây.

Định lý 9.13

Giả sử G là một đồ thị và G' là đồ thị con của nó.
Đồ thị G phẳng thì G' cũng phẳng.
Đồ thị G' không phẳng thì G cũng không phẳng.

Chứng minh. Hiển nhiên.

9.3. Đồ thị phẳng

Ký hiệu: δ là độ dài của chu trình ngắn nhất hoặc là số cạnh của đồ thị G nếu nó không có chu trình. Số δ được gọi là *đai* của đồ thị.

Định lý 9.14

Nếu đồ thị G là phẳng và đai của nó $\delta \geq 3$ thì

$$m \leq \frac{\delta}{\delta - 2}(n - 2).$$

Chứng minh. Ta có: $h.\delta \leq 2m$. Do vậy theo công thức Euler thì $\delta.(m - n + 2) \leq 2m$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

9.3. Đồ thị phẳng

Hệ quả 9.15

Đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$ là đồ thị phẳng khi và chỉ khi $m \leq 2$ hoặc $n \leq 2$.

9.4. Đồ thị không phẳng

Định lý 9.16

Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$ là một đồ thị không phẳng.

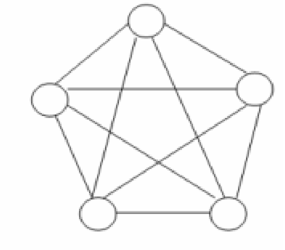
Chứng minh. Ta thấy $\delta = 4$, mà $m = 9 > \dfrac{4}{4-2}(6-2) = 8$. theo Định lý 9.14, đồ thị Hình 9.9 là không phẳng.
Như vậy định lý này cho ta lời giải của bài toán "Ba nhà ba giếng", nghĩa là không thể thực hiện được việc làm các đường khác đến giếng sao cho các đường này đôi một không giao nhau.

9.4. Đồ thị không phẳng

Định lý 9.17

Đồ thị đầy đủ K_5 là một đồ thị không phẳng.

Chứng minh. Đồ thị đầy đủ 5 đỉnh



Hình 9.13: Đồ thị đầy đủ 5 đỉnh (K_5)

9.4. Đồ thị không phẳng

- Đồ thị này có đai $\delta = 3$.
- Vậy $m = 10 > \dfrac{3}{3-2}(5-2) = 9$.
- Do đó, đồ thị K_5 không phẳng.
- Từ đó suy ra, đồ thị đầy đủ K_n với $n \geq 5$ là không phẳng.
- Chú ý rằng, đồ thị đầy đủ K_n với $n \leq 4$ là đồ thị phẳng.

9.4. Đồ thị không phẳng

Định nghĩa 9.6

Từ đồ thị G' cho trước ta xây dựng đồ thị G bằng cách: Thêm vào G' các đỉnh mới và các cạnh mới. Đỉnh mới có thể nối với một đỉnh khác bằng một cạnh mới. Đỉnh mới cũng có thể đặt trên một cạnh cũ và chia cạnh này thành hai cạnh mới. Ta nói rằng, đồ thị G nhận được có chứa cấu hình G'. Hay đồ thị G' là một *cấu hình* của đồ thị G.

Chẳng hạn, đồ thị riêng của đồ thị là một cấu hình của đồ thị này.

Định lý 9.18 (**Kuratowski**)

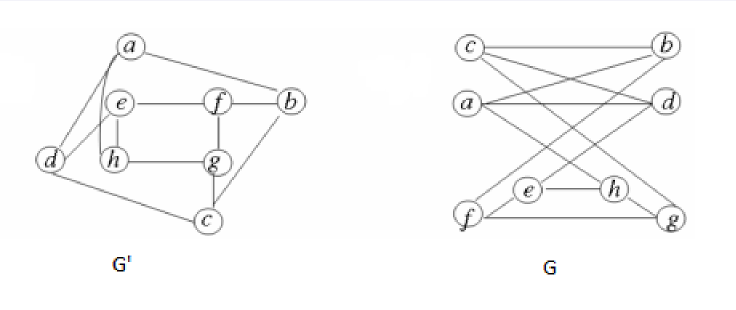
Đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa cấu hình $K_{3,3}$ *hoặc* K_5.

9.4. Đồ thị không phẳng

Ta có thể áp dụng định lý Kuratowski để xét tính chất phẳng của đồ thị.

Ví dụ 9.8

Xét các đồ thị sau đây

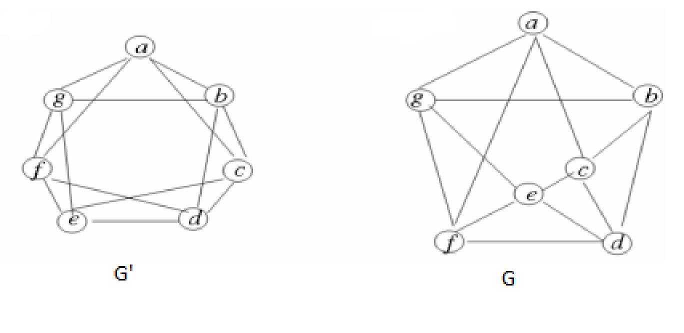


Hình 9.14: Hai đồ thị đẳng hình chứa cấu hình $K_{3,3}$

9.4. Đồ thị không phẳng

Ví dụ 9.9

Xét các đồ thị sau đây



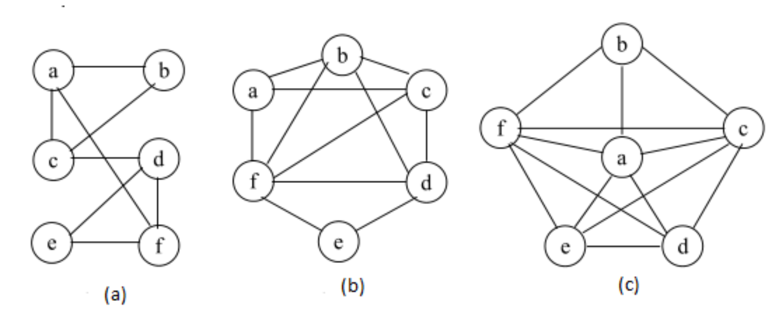
Hình 9.15: Hai đồ thị đẳng hình chứa cấu hình K_5

Đồ thị này chứa cấu hình K_5. Vậy nó là không phẳng.

9.4. Đồ thị không phẳng

Ví dụ 9.10

Xét các hình sau



Hình 9.16: (a), (b) là đồ thị phẳng, (c) là đồ thị không phẳng

9.4. Đồ thị không phẳng (tiếp tục)

- Đồ thị trong hình (a) và (b) là đồ thị phẳng. Các đồ thị này có 6 đỉnh, nhưng không chứa đồ thị con $K_{3,3}$ được vì có đỉnh bậc 2, trong khi tất cả các đỉnh của $K_{3,3}$ đều có bậc 3;
- cũng không thể chứa đồ thị con K_5 được vì có những đỉnh bậc nhỏ hơn 4, trong khi tất cả các đỉnh của K_5 đều có bậc 4.
- Đồ thị trong hình (c) là đồ thị không phẳng vì nếu xoá đỉnh b cùng các cạnh (b, a), (b, c), (b, f) ta được đồ thị con là K_5.

9.5. Tô mầu đồ thị

Định nghĩa 9.7

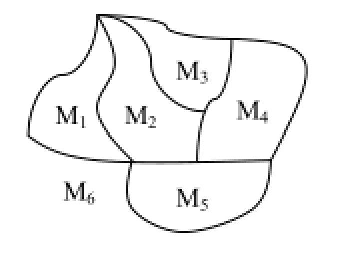
Mỗi bản đồ có thể coi là một đồ thị phẳng. Trong một bản đồ, ta coi hai miền có chung nhau một đường biên là hai miền kề nhau (hai miền chỉ có chung nhau một điểm biên không được coi là kề nhau). Một bản đồ thường *được tô màu*, sao cho hai miền kề nhau được tô hai màu khác nhau. Ta gọi một cách tô màu bản đồ như vậy là một *cách tô màu đúng*.

- Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, chúng ta tô mỗi miền bằng một màu khác nhau.
- Tuy nhiên việc làm đó nói chung là không hợp lý. Nếu bản đồ có nhiều miền thì sẽ rất khó phân biệt những màu gần giống nhau.
- Do vậy người ta chỉ dùng một số màu cần thiết để tô bản đồ. Một bài toán được đặt ra là: xác định số màu tối thiểu cần có để tô màu đúng một bản đồ.

9.5. Tô mầu đồ thị

Ví dụ 9.11

Bản đồ trong hình bên có 6 miền, nhưng chỉ cần có 3 màu (vàng, đỏ, xanh) để tô đúng bản đồ này. Chẳng hạn, màu vàng được tô cho $M1$ và $M4$, màu đỏ được tô cho $M2$ và $M6$, màu xanh được tô cho $M3$ và $M5$



Hình 9.17: Tô màu bản đồ

9.5. Tô mầu đồ thị

- Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị, trong đó mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh;
- các cạnh nối hai đỉnh, nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này là kề nhau.
- Đồ thị nhận được bằng cách này gọi là *đồ thị đối ngẫu* của bản đồ đang xét.
- Rõ ràng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có đồ thị đối ngẫu phẳng.
- Bài toán tô màu các miền của bản đồ là tương đương với bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị đối ngẫu sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau có cùng một màu, mà ta gọi là tô màu đúng các đỉnh của đồ thị.

9.5. Tô mầu đồ thị

Mệnh đề 9.1

Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một đồ thị không chứa K_3 và có sắc số bằng n.

Chứng minh. Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo n.

- Trường hợp $n = 1$ là hiển nhiên.
- Giả sử ta có đồ thị G_n với k_n đỉnh, không chứa K_3 và có sắc số là n.
- Ta xây dựng đồ thị G_{n+1} gồm n bản sao của G_n và thêm k_n^n đỉnh mới theo cách sau: mỗi bộ thứ tự $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, với v_i thuộc bản sao G_n thứ i, sẽ tương ứng với một đỉnh mới, đỉnh mới này được nối bằng n cạnh mới đến các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Dễ thấy rằng G_{n+1} không chứa K_3 và có sắc số là $n + 1$.

9.5. Tô mầu đồ thị

Định lý 9.19 (**Định lý 5 màu của Kempe-Heawood**)

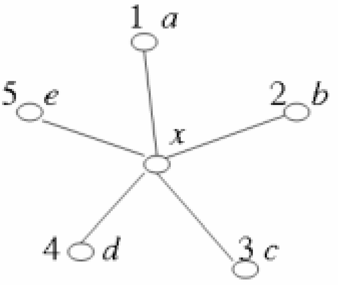
Mọi đồ thị phẳng không có đỉnh nút đều có sắc số không lớn hơn 5.

Chứng minh.

- Ta chứng minh định lý bằng quy nạp theo số đỉnh n của đồ thị. $n = 1, 2, 3, 4, 5$: Hiển nhiên đúng.
- $(n-1) \Rightarrow (n)$: Theo Hệ quả 9.12, đồ thị G có ít nhất một đỉnh x với bậc không quá 5. Xây dựng đồ thị G' từ đồ thị G bằng cách bỏ đỉnh x. Theo giả thiết quy nạp, đồ thị G' có sắc số không vượt quá 5.
- Lấy một cách tô màu nào đấy của G'.
- Nếu các đỉnh kề với đỉnh x được tô bằng ít hơn 5 màu thì vẫn còn thừa màu để tô cho x. Sắc số của G bằng sắc số của G' (không vượt quá 5).

9.5. Tô mầu đồ thị (tiếp tục)

- Vậy ta chỉ cần xét trường hợp đỉnh x kề với 5 đỉnh và các đỉnh kề với x được đánh số thứ tự theo chiều kim đồng hồ và tô bằng 5 màu như Hình 9.18 dưới đây.
- Khi đó, ta phải đổi màu của các đỉnh trên để dành ra màu cho đỉnh x.



Hình 9.18: Năm đỉnh kề với 5 màu

9.5. Tô mầu đồ thị (tiếp tục)

- Xét tất cả các đường đi trong G bắt đầu từ đỉnh a và gồm các đỉnh chỉ tô bằng màu 1 và màu 3.
- Trong các đường này nếu không có đường nào đi qua đỉnh c thì ta có thể tráo đổi màu 1 với màu 3 cho tất cả các đỉnh trên các đường đi ấy.
- Sau đó, ta tô màu 1 cho đỉnh x.
- Ngược lại, nếu có một đường đi từ a đến c gồm toàn các đỉnh được tô bằng các màu 1 và màu 3 thì đường này cùng với hai cạnh (c, x) và (x, a) sẽ tạo thành một chu trình trong G.
- Do tính chất phẳng của đồ thị G nên hai đỉnh b và d không thể cùng nằm bên trong hoặc cùng nằm bên ngoài chu trình này được.
- Suy ra không có đường đi nào nối b với d gồm các đỉnh chỉ tô bằng màu 2 và màu 4.

9.5. Tô mầu đồ thị (tiếp tục)

- Vậy ta lại có thể tráo đổi màu 2 với màu 4 cho tất cả các đỉnh trên các đường đi qua đỉnh b.
- Khi đó, hai đỉnh b và d có cùng màu 4. Ta tô màu 2 cho đỉnh x.
- Định lý được chứng minh.

9.5. Tô mầu đồ thị

- **Định lý Bốn màu** đầu tiên được đưa ra như một phỏng đoán vào năm 1850 bởi một sinh viên người Anh tên là F. Guthrie và cuối cùng đã được hai nhà toán học Mỹ là Kenneth Appel và Wolfgang Haken chứng minh vào năm 1976.
- Trước năm 1976 cũng đã có nhiều chứng minh sai, mà thông thường rất khó tìm thấy chỗ sai, đã được công bố.
- Hơn thế nữa đã có nhiều cố gắng một cách vô ích để tìm phản thí dụ bằng cách cố vẽ bản đồ cần hơn bốn màu để tô nó.
- Có lẽ một trong những chứng minh sai nổi tiếng nhất trong toán học là chứng minh sai "bài toán bốn màu" được công bố năm 1879 bởi luật sư, nhà toán học nghiệp dư Luân Đôn tên là Alfred Kempe.
- Nhờ công bố lời giải của "bài toán bốn màu", Kempe được công nhận là hội viên Hội Khoa học Hoàng gia Anh.

9.5. Tô mầu đồ thị (tiếp tục)

- Các nhà toán học chấp nhận cách chứng minh của ông ta cho tới 1890, khi Percy Heawood phát hiện ra sai lầm trong chứng minh của Kempe.
- Mặt khác, dùng phương pháp của Kempe, Heawood đã chứng minh được "bài toán năm màu" (tức là mọi bản đồ có thể tô đúng bằng 5 màu).
- Như vậy, Heawood mới giải được "bài toán năm màu", còn "bài toán bốn màu" vẫn còn đó và là một thách đố đối với các nhà toán học trong suốt gần một thế kỷ.
- Việc tìm lời giải của "bài toán bốn màu" đã ảnh hưởng đến sự phát triển theo chiều hướng khác nhau của lý thuyết đồ thị.

9.5. Tô mầu đồ thị

- Mãi đến năm 1976, khai thác phương pháp của Kempe và nhờ công cụ máy tính điện tử, Appel và Haken đã tìm ra lời giải của "bài toán bốn màu".
- Chứng minh của họ dựa trên sự phân tích từng trường hợp một cách cẩn thận nhờ máy tính.
- Họ đã chỉ ra rằng nếu "bài toán bốn màu" là sai thì sẽ có một phản thí dụ thuộc một trong gần 2000 loại khác nhau và đã chỉ ra không có loại nào dẫn tới phản thí dụ cả.
- Trong chứng minh của mình họ đã dùng hơn 1000 giờ máy.
- Cách chứng minh này đã gây ra nhiều cuộc tranh cãi vì máy tính đã đóng vai trò quan trọng biết bao.
- Chẳng hạn, liệu có thể có sai lầm trong chương trình và điều đó dẫn tới kết quả sai không?
- Lý luận của họ có thực sự là một chứng minh hay không, nếu nó phụ thuộc vào thông tin ra từ một máy tính không đáng tin cậy?

9.5. Tô mầu đồ thị

Định lý 9.20 (**Appel - Haken**)

Mọi đồ thị phẳng không có đỉnh nút đều có sắc số không quá 4.

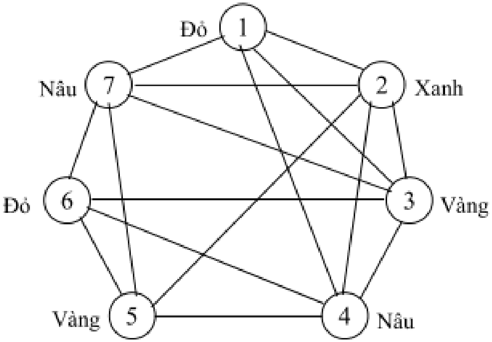
9.6. Ứng dụng tô mầu đồ thị

1) Lập lịch thi:

- *Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc.*
- Có thể giải bài toán lập lịch thi bằng mô hình đồ thị, với các đỉnh là các môn thi, có một cạnh nối hai đỉnh nếu có sinh viên phải thi cả hai môn được biểu diễn bằng hai đỉnh này.
- Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy việc lập lịch thi sẽ tương ứng với việc tô màu đồ thị này.
- Chẳng hạn, có 7 môn thi cần xếp lịch.
- Giả sử các môn học được đánh số từ 1 tới 7 và các cặp môn thi sau có chung sinh viên: 1 và 2, 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7, 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7, 3 và 4, 3 và 6, 3 và 7, 4 và 5, 4 và 6, 5 và 6, 5 và 7, 6 và 7.

9.6. Ứng dụng tô mầu đồ thị (tiếp tục)

- Hình dưới đây biểu diễn đồ thị tương ứng.
- Việc lập lịch thi chính là việc tô màu đồ thị này. Vì số màu của đồ thị này là 4 nên cần có 4 đợt thi.



Hình 9.19: Lập lịch thi

9.6. Ứng dụng tô mầu đồ thị

2) Phân chia tần số:

- Các kênh truyền hình từ số 1 tới số 12 được phân chia cho các đài truyền hình sao cho không có đài phát nào cách nhau không quá 240 km lại dùng cùng một kênh.
- Có thể chia kênh truyền hình như thế nào bằng mô hình tô màu đồ thị.
- Ta xây dựng đồ thị bằng cách coi mỗi đài phát là một đỉnh.
- Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu chúng ở cách nhau không quá 240 km.
- Việc phân chia kênh tương ứng với việc tô màu đồ thị, trong đó mỗi màu biểu thị một kênh.

9.6. Ứng dụng tô mầu đồ thị

3) Các thanh ghi chỉ số:

- Trong các bộ dịch hiệu quả cao việc thực hiện các vòng lặp được tăng tốc khi các biến dùng thường xuyên được lưu tạm thời trong các thanh ghi chỉ số của bộ xử lý trung tâm (CPU) mà không phải ở trong bộ nhớ thông thường.
- Với một vòng lặp cho trước cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số?
- Bài toán này có thể giải bằng mô hình tô màu đồ thị. Để xây dựng mô hình ta coi mỗi đỉnh của đồ thị là một biến trong vòng lặp.
- Giữa hai đỉnh có một cạnh nếu các biến biểu thị bằng các đỉnh này phải được lưu trong các thanh ghi chỉ số tại cùng thời điểm khi thực hiện vòng lặp.
- Như vậy số màu của đồ thị chính là số thanh ghi cần có vì những thanh ghi khác nhau được phân cho các biến khi các đỉnh biểu thị các biến này là liền kề trong đồ thị.

9.7. Bài tập

▷ 9.1

Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị G.

▷ 9.2

Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5$. Tìm số cạnh và số mặt của G.

▷ 9.3

Tìm số đỉnh, số cạnh và đai của: a) K_n; b) $K_{m,n}$.

9.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 9.4

Chứng minh rằng
a) Kn là phẳng khi và chỉ khi $n \leq 4$.
b) $K_{m,n}$ là phẳng khi và chỉ khi $m \leq 2$ hay $n \leq 2$.

▷ 9.5

Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: Bỏ một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc của nó tạo ra một đồ thị phẳng. a) $K5$; b) K_6; c) $K_{3,3}$.

9.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 9.6

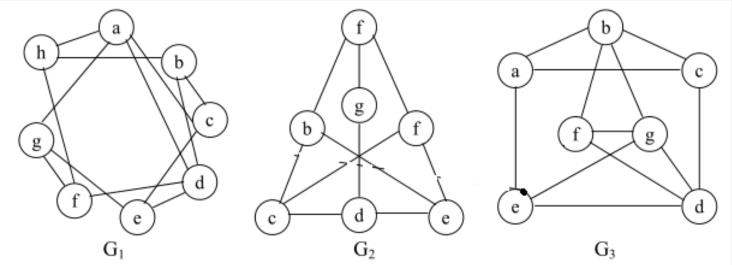
Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh và m cạnh, trong đó $n \geq 3$. Chứng minh rằng

$$m \leq 3n - 6.$$

9.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 9.7

Trong các đồ thị ở hình dưới đây, đồ thị nào là phẳng, đồ thị nào không phẳng? Nếu đồ thị là phẳng thì có thể kẻ thêm ít nhất là bao nhiêu cạnh để được đồ thị không phẳng?



Hình 9.20: Đồ thị phẳng và không phẳng

9.7. Bài tập

▷ 9.8

Chứng minh rằng đồ thị Peterson (Bài tập 7.11, Chương 7) là đồ thị không phẳng.

▷ 9.9

Đa diện lồi có d mặt ($d \geq 5$), mà từ mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh. Hai người chơi trò chơi như sau: mỗi người lần lượt tô đỏ một mặt trong các mặt còn lại. Người thắng là người tô được 3 mặt có chung một đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại cách chơi mà người được tô trước luôn luôn thắng.

9.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 9.10

Chứng minh rằng
a) Một đồ thị phẳng có thể tô đúng các đỉnh bằng hai màu khi và chỉ khi đó là đồ thị phân đôi.
b) Một đồ thị phẳng có thể tô đúng các miền bằng hai màu khi và chỉ khi đó là đồ thị Euler.

▷ 9.11

Tìm sắc số của các đồ thị cho trong Hình 9.20.

▷ 9.12

Tìm sắc số của các đồ thị K_n, $K_{m,n}$, C_n, và W_n.

9.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 9.13

Khoa Toán có 6 hội đồng họp mỗi tháng một lần. Cần có bao nhiêu thời điểm họp khác nhau để đảm bảo rằng không ai bị xếp lịch họp hai hội đồng cùng một lúc, nếu các hội đồng là

$$H_1 = \{H, L, P\}, H_2 = \{L, M, T\}, H_3 = \{H, T, P\}.$$

▷ 9.14

Một vườn bách thú muốn xây dựng chuồng tự nhiên để trưng bày các con thú. Không may, một số loại thú sẽ ăn thịt các con thú khác nếu có cơ hội. Có thể dùng mô hình đồ thị và tô màu đồ thị như thế nào để xác định số chuồng khác nhau cần có và cách nhốt các con thú vào các chuồng thú tự nhiên này?

9.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 9.15

Chứng minh rằng một đơn đồ thị phẳng có 8 đỉnh và 13 cạnh không thể được tô đúng bằng hai màu.

▷ 9.16

Chứng minh rằng nếu G là một đơn đồ thị phẳng có ít hơn 12 đỉnh thì tồn tại trong G một đỉnh có bậc ≤ 4. Từ đó hãy suy ra rằng đồ thị G có thể tô đúng bằng 4 màu.