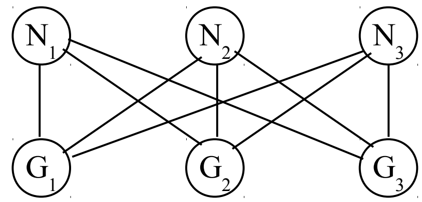
CHƯƠNG VII
ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Từ xa xưa đã lưu truyền một bài toán cổ "Ba nhà, ba giếng": Có ba nhà ở gần ba cái giếng, nhưng không có đường nối thẳng các nhà với nhau cũng như không có đường nối thẳng các giếng với nhau.

Có lần bất hoà với nhau, họ tìm cách làm các đường khác đến giếng sao cho các đường này đôi một không giao nhau. Họ có thực hiện được ý định đó không?



Bài toán này có thể được mô hình bằng đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$. Câu hỏi ban đầu có thể diễn đạt như sau: Có thể vẽ $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau? Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán: có thể vẽ một đồ thị trên một mặt phẳng không có các cạnh nào cắt nhau không. Đặc biệt chúng ta sẽ trả lời bài toán ba nhà ba giếng. Thường có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Khi nào có thể tìm được ít nhất một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh cắt nhau?

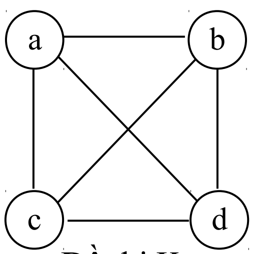
7.1. ĐỒ THỊ PHẲNG.

7.1.1. Định nghĩa: Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là điểm mút của các cạnh). Hình vẽ như thế gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

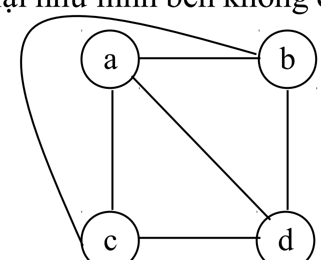
Một đồ thị có thể là phẳng ngay cả khi nó thường được vẽ với những cạnh cắt nhau, vì có thể vẽ nó bằng cách khác không có các cạnh cắt nhau.

Thí dụ 1: 1) Một cây, một chu trình đơn là một đồ thị phẳng.

2) K_4 là đồ thị phẳng bởi vì có thể vẽ lại như hình bên không có đường cắt nhau

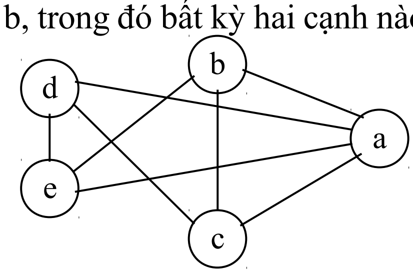


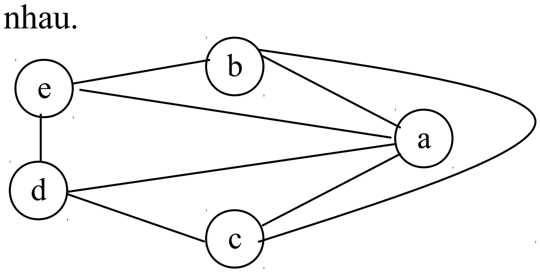
Đồ thị K_4



K_4 vẽ không có đường cắt nhau

3) Xét đồ thị G như trong hình a dưới đây. Có thể biểu diễn G một cách khác như trong hình b, trong đó bất kỳ hai cạnh nào cũng không cắt nhau.



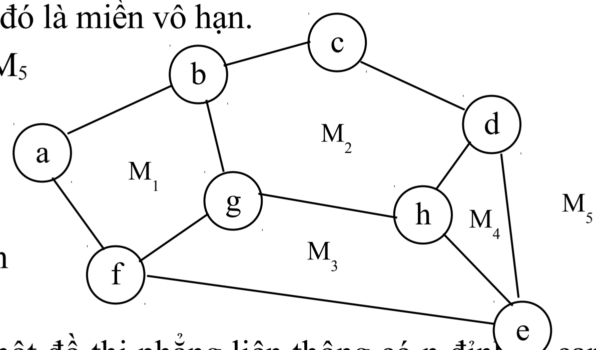


4) Đồ thị đầy đủ K_5 là một thí dụ về đồ thị không phẳng (xem Định lý 7.2.2).

7.1.2. Định nghĩa: Cho G là một đồ thị phẳng. Mỗi phần mặt phẳng giới hạn bởi một chu trình đơn không chứa bên trong nó một chu trình đơn khác, gọi là một miền (hữu hạn) của đồ thị G. Chu trình giới hạn miền là biên của miền. Mỗi đồ thị phẳng liên thông có một miền vô hạn duy nhất (là phần mặt phẳng bên ngoài tất cả các miền hữu hạn). Số cạnh ít nhất tạo thành biên gọi là đai của G; trường hợp nếu G không có chu trình thì đai chính là số cạnh của G.

Thí dụ 2: 1) Một cây chỉ có một miền, đó là miền vô hạn.

2) Đồ thị phẳng ở hình bên có 5 miền, M_5 là miền vô hạn, miền M_1 có biên abgfa, miền M_2 có biên là bcdhgb, … Chu trình đơn abcdhgfa không giới hạn một miền vì chứa bên trong nó chu trình đơn khác là abgfa.



7.1.3. Định lý (Euler, 1752): Nếu một đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, p cạnh và d miền thì ta có hệ thức:

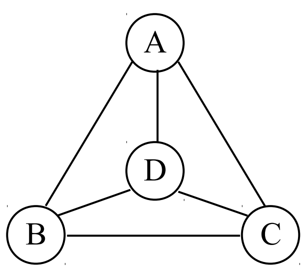
$$n - p + d = 2.$$

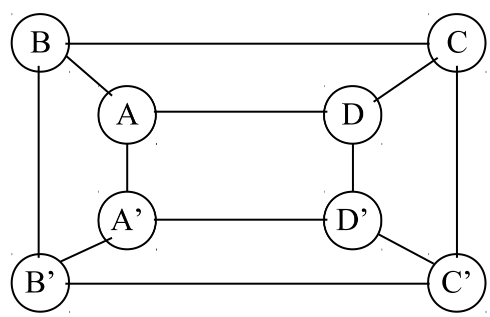
Chứng minh: Cho G là đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, p cạnh và d miền.

Ta bỏ một số cạnh của G để được một cây khung của G. Mỗi lần ta bỏ một cạnh (p giảm 1) thì số miền của G cũng giảm 1 (d giảm 1), còn số đỉnh của G không thay đổi (n không đổi). Như vậy, giá trị của biểu thức $n - p + d$ không thay đổi trong suốt quá trình ta bỏ bớt cạnh của G để được một cây. Cây này có n đỉnh, do đó có $n - 1$ cạnh và cây chỉ có một miền, vì vậy:

$$n - p + d = n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Hệ thức $n - p + d = 2$ thường gọi là "hệ thức Euler cho hình đa diện", vì được Euler chứng minh đầu tiên cho hình đa diện có n đỉnh, p cạnh và d mặt. Mỗi hình đa diện có thể coi là một đồ thị phẳng. Chẳng hạn hình tứ diện ABCD và hình hộp ABCDA'B'C'D' có thể biểu diễn bằng các đồ thị dưới đây.





7.1.4. Hệ quả: Trong một đồ thị phẳng liên thông tuỳ ý, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc không vượt quá 5.

Chứng minh: Trong đồ thị phẳng mỗi miền được bao bằng ít nhất 3 cạnh. Mặt khác, mỗi cạnh có thể nằm trên biên của tối đa hai miền, nên ta có $3d \le 2p$.

Nếu trong đồ thị phẳng mà tất cả các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 6 thì do mỗi đỉnh của đồ thị phải là đầu mút của ít nhất 6 cạnh mà mỗi cạnh lại có hai đầu mút nên ta có $6n \le 2p$ hay $3n \le p$. Từ đó suy ra $3d+3n \le 2p+p$ hay $d+n \le p$, trái với hệ thức Euler $d+n=p+2$.

7.2. ĐỒ THỊ KHÔNG PHẲNG.

7.2.1. Định lý: Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$ là một đồ thị không phẳng.

Chứng minh: Giả sử $K_{3,3}$ là đồ thị phẳng. Khi đó ta có một đồ thị phẳng với 6 đỉnh ($n=6$) và 9 cạnh ($p=9$), nên theo Định lý Euler đồ thị có số miền là $d=p-n+2=5$.

Ở đây, mỗi cạnh chung cho hai miền, mà mỗi miền có ít nhất 4 cạnh. Do đó $4d\le 2p$, tức là $4x5\le 2x9$, vô lý.

Như vậy định lý này cho ta lời giải của bài toán "Ba nhà ba giếng", nghĩa là không thể thực hiện được việc làm các đường khác đến giếng sao cho các đường này đôi một không giao nhau.

7.2.2. Định lý: Đồ thị đầy đủ K_5 là một đồ thị không phẳng.

Chứng minh: Giả sử K_5 là đồ thị phẳng. Khi đó ta có một đồ thị phẳng với 5 đỉnh ($n=5$) và 10 cạnh ($p=10$), nên theo Định lý Euler đồ thị có số miền là $d=p-n+2=7$.

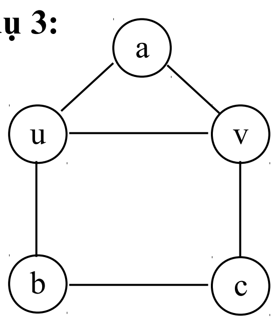
Trong K_5, mỗi miền có ít nhất 3cạnh, mỗi cạnh chung cho hai miền, vì vậy $3d\le 2n$, tức là $3x7\le 2x10$, vô lý.

7.2.3. Chú ý: Ta đã thấy $K_{3,3}$ và K_5 là không phẳng. Rõ ràng, một đồ thị là không phẳng nếu nó chứa một trong hai đồ thị này như là đồ thị con. Hơn nữa, tất cả các đồ thị không phẳng cần phải chứa đồ thị con nhận được từ $K_{3,3}$ hoặc K_5 bằng một số phép toán cho phép nào đó.

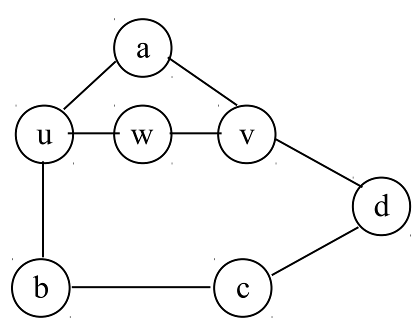
Cho đồ thị G, có cạnh (u,v). Nếu ta xoá cạnh (u,v), rồi thêm đỉnh w cùng với hai cạnh (u,w) và (w,v) thì ta nói rằng ta đã thêm đỉnh mới w (bậc 2) đặt trên cạnh (u,v) của G.

Đồ thị G' được gọi là đồng phôi với đồ thị G nếu G' có được từ G bằng cách thêm các đỉnh mới (bậc 2) đặt trên các cạnh của G.

Thí dụ 3:



G



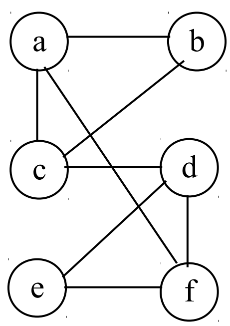
G'

Đồ thị G là đồng phôi với đồ thị G’.

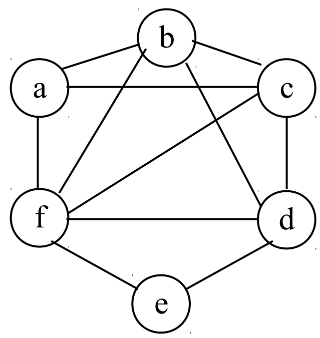
Nhà toán học Ba Lan, Kuratowski, đã thiết lập định lý sau đây vào năm 1930. Định lý này đã biểu thị đặc điểm của các đồ thị phẳng nhờ khái niệm đồ thị đồng phôi.

7.2.4. Định lý (Kuratowski): Đồ thị là không phẳng khi và chỉ khi nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

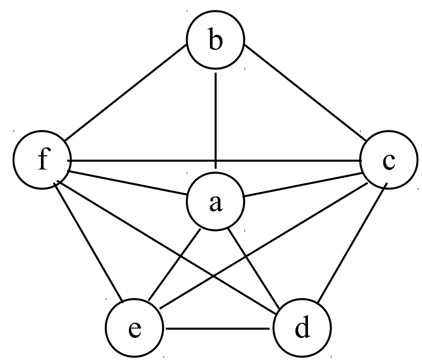
Thí dụ 4:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Đồ thị trong hình 1 và 2 là đồ thị phẳng. Các đồ thị này có 6 đỉnh, nhưng không chứa đồ thị con $K_{3,3}$ được vì có đỉnh bậc 2, trong khi tất cả các đỉnh của $K_{3,3}$ đều có bậc 3; cũng không thể chứa đồ thị con K_5 được vì có những đỉnh bậc nhỏ hơn 4, trong khi tất cả các đỉnh của K_5 đều có bậc 4.

Đồ thị trong hình 3 là đồ thị không phẳng vì nếu xoá đỉnh b cùng các cạnh (b,a), (b,c), (b,f) ta được đồ thị con là K_5.

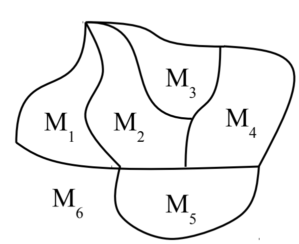
7.3. TÔ MÀU ĐỒ THỊ.

7.3.1. Tô màu bản đồ:

Mỗi bản đồ có thể coi là một đồ thị phẳng. Trong một bản đồ, ta coi hai miền có chung nhau một đường biên là hai miền kề nhau (hai miền chỉ có chung nhau một điểm biên không được coi là kề nhau). Một bản đồ thường được tô màu, sao cho hai miền kề nhau được tô hai màu khác nhau. Ta gọi một cách tô màu bản đồ như vậy là một cách tô màu đúng.

Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, chúng ta tô mỗi miền bằng một màu khác nhau. Tuy nhiên việc làm đó nói chung là không hợp lý. Nếu bản đồ có nhiều miền thì sẽ rất khó phân biệt những màu gần giống nhau. Do vậy người ta chỉ dùng một số màu cần thiết để tô bản đồ. Một bài toán được đặt ra là: xác định số màu tối thiểu cần có để tô màu đúng một bản đồ.

Thí dụ 5: Bản đồ trong hình bên có 6 miền, nhưng chỉ cần có 3 màu (vàng, đỏ, xanh) để tô đúng bản đồ này. Chẳng hạn, màu vàng được tô cho M_1 và M_4, màu đỏ được tô cho M_2 và M_6, màu xanh được tô cho M_3 và M_5.

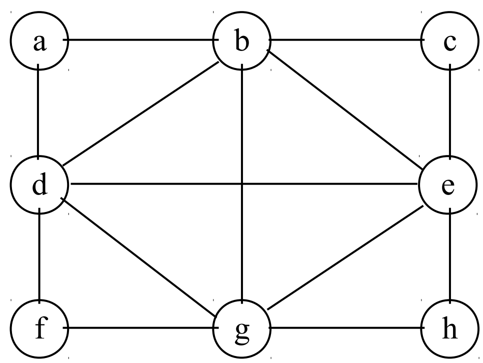


7.3.2. Tô màu đồ thị:

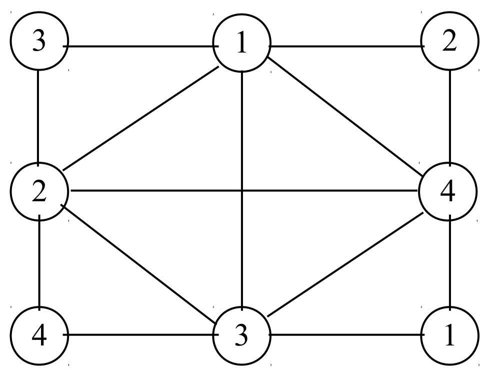
Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị, trong đó mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh; các cạnh nối hai đỉnh, nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này là kề nhau. Đồ thị nhận được bằng cách này gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ đang xét. Rõ ràng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có đồ thị đối ngẫu phẳng. Bài toán tô màu các miền của bản đồ là tương đương với bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị đối ngẫu sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau có cùng một màu, mà ta gọi là tô màu đúng các đỉnh của đồ thị.

Số màu ít nhất cần dùng để tô màu đúng đồ thị G được gọi là sắc số của đồ thị G và ký hiệu là $\chi(G)$.

Thí dụ 6:



Ta thấy rằng 4 đỉnh b, d, g, e đôi một kề nhau nên phải được tô bằng 4 màu khác nhau. Do đó $\chi(G) \geq 4$. Ngoài ra, có thể dùng 4 màu đánh số 1, 2, 3, 4 để tô màu G như sau:



Như vậy $\chi(G) = 4$.

7.3.3. Mệnh đề: Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đồng phôi với đồ thị đầy đủ K_n thì $\chi(G) \geq n$.

Chứng minh: Gọi H là đồ thị con của G đồng phôi với K_n thì $\chi(H) \geq n$. Do đó $\chi(G) \geq n$.

7.3.4. Mệnh đề: Nếu đơn đồ thị G không chứa chu trình độ dài lẻ thì $\chi(G) =2$.

Chứng minh: Không mất tính chất tổng quát có thể giả sử G liên thông. Cố định đỉnh u của G và tô nó bằng màu 0 trong hai màu 0 và 1. Với mỗi đỉnh v của G, tồn tại một đường đi từ u đến v, nếu đường này có độ dài chẵn thì tô màu 0 cho v, nếu đường này có độ dài lẻ thì tô màu 1 cho v. Nếu có hai đường đi mang tính chẵn lẻ khác nhau cùng nối u với v thì dễ thấy rằng G phải chứa ít nhất một chu trình độ dài lẻ. Điều mâu thuẫn này cho biết hai màu 0 và 1 tô đúng đồ thị G.

7.3.5. Mệnh đề: Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một đồ thị không chứa K_3 và có sắc số bằng n.

Chứng minh: Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo n.

Trường hợp n=1 là hiển nhiên.

Giả sử ta có đồ thị G_n với k_n đỉnh, không chứa K_3 và có sắc số là n. Ta xây dựng đồ thị G_{n+1} gồm n bản sao của G_n và thêm k_n^n đỉnh mới theo cách sau: mỗi bộ thứ tự $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, với v_i thuộc bản sao G_n thứ i, sẽ tương ứng với một đỉnh mới, đỉnh mới này được nối bằng n cạnh mới đến các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dễ thấy rằng G_{n+1} không chứa K_3 và có sắc số là n+1.

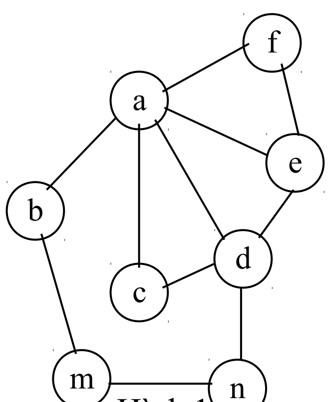
7.3.6. Định lý (Định lý 5 màu của Kempe-Heawood): Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 5 màu.

Chứng minh: Cho G là một đồ thị phẳng. Không mất tính chất tổng quát có thể xem G là liên thông và có số đỉnh $n \geq 5$. Ta chứng minh G được tô đúng bởi 5 màu bằng quy nạp theo n.

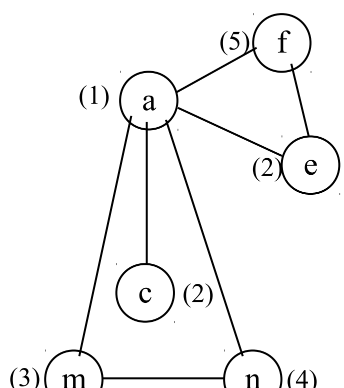
Trường hợp n=5 là hiển nhiên. Giả sử định lý đúng cho tất cả các đồ thị phẳng có số đỉnh nhỏ hơn n. Xét G là đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh.

Theo Hệ quả 7.1.4, trong G tồn tại đỉnh a với $\deg(a) \leq 5$. Xoá đỉnh a và các cạnh liên thuộc với nó, ta nhận được đồ thị phẳng G' có n−1 đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, có thể tô đúng các đỉnh của G' bằng 5 màu. Sau khi tô đúng G' rồi, ta tìm cách tô đỉnh a bằng một màu khác với màu của các đỉnh kề nó, nhưng vẫn là một trong 5 màu đã dùng. Điều này luôn thực hiện được khi $\deg(a) < 5$ hoặc khi $\deg(a)=5$ nhưng 5 đỉnh kề a đã được tô bằng 4 màu trở xuống.

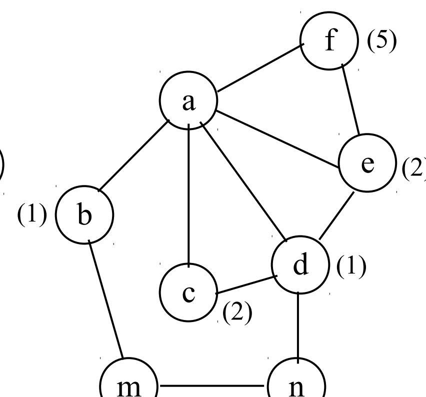
Chỉ còn phải xét trường hợp $\deg(a)=5$ mà 5 đỉnh kề a là b, c, d, e ,f đã được tô bằng 5 màu rồi. Khi đó trong 5 đỉnh b, c, d, e ,f phải có 2 đỉnh không kề nhau, vì nếu 5 đỉnh đó đôi một kề nhau thì b c d e f là đồ thị đầy đủ K_5 và đây là một đồ thị không phẳng, do đó G không phẳng, trái với giả thiết. Giả sử b và d không kề nhau (Hình 1).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Xoá 2 đỉnh b và d và cho kề a những đỉnh trước đó kề b hoặc kề d mà không kề a (Hình 2), ta được đồ thị mới G'' có n−2 đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, ta có thể tô đúng G'' bằng 5 màu. Sau khi các đỉnh của G'' được tô đúng rồi (Hình 2), ta dựng lại 2 đỉnh b và d, rồi tô b và d bằng màu đã tô cho a (màu 1, Hình 3), còn a thì được tô lại bằng màu khác với màu của b, c, d, e, f. Vì b và d không kề nhau đã được tô bằng cùng màu 1, nên với 5 đỉnh này chỉ mới dùng hết nhiều lắm 4 màu.. Do đó G được tô đúng bằng 5 màu.

7.3.7. Định lý (Định lý 4 màu của Appel-Haken): Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 4 màu.

Định lý Bốn màu đầu tiên được đưa ra như một phỏng đoán vào năm 1850 bởi một sinh viên người Anh tên là F. Guthrie và cuối cùng đã được hai nhà toán học Mỹ là Kenneth Appel và Wolfgang Haken chứng minh vào năm 1976. Trước năm 1976 cũng đã có nhiều chứng minh sai, mà thông thường rất khó tìm thấy chỗ sai, đã được công bố. Hơn thế nữa đã có nhiều cố gắng một cách vô ích để tìm phản thí dụ bằng cách cố vẽ bản đồ cần hơn bốn màu để tô nó.

Có lẽ một trong những chứng minh sai nổi tiếng nhất trong toán học là chứng minh sai "bài toán bốn màu" được công bố năm 1879 bởi luật sư, nhà toán học nghiệp dư Luân Đôn tên là Alfred Kempe. Nhờ công bố lời giải của "bài toán bốn màu", Kempe được công nhận là hội viên Hội Khoa học Hoàng gia Anh. Các nhà toán học chấp nhận cách chứng minh của ông ta cho tới 1890, khi Percy Heawood phát hiện ra sai lầm trong chứng minh của Kempe. Mặt khác, dùng phương pháp của Kempe, Heawood đã chứng minh được "bài toán năm màu" (tức là mọi bản đồ có thể tô đúng bằng 5 màu).

Như vậy, Heawood mới giải được "bài toán năm màu", còn "bài toán bốn màu" vẫn còn đó và là một thách đố đối với các nhà toán học trong suốt gần một thế kỷ. Việc tìm lời giải của "bài toán bốn màu" đã ảnh hưởng đến sự phát triển theo chiều hướng khác nhau của lý thuyết đồ thị.

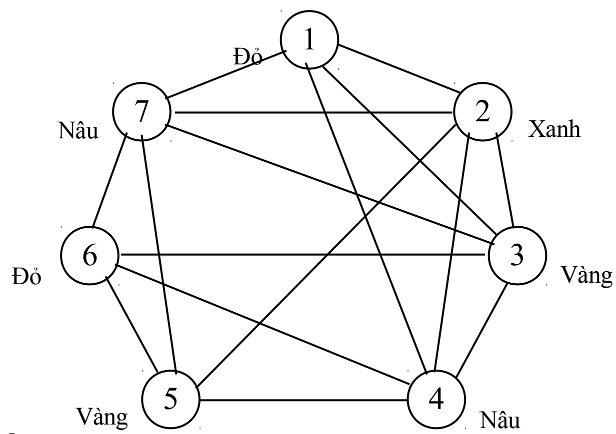
Mãi đến năm 1976, khai thác phương pháp của Kempe và nhờ công cụ máy tính điện tử, Appel và Haken đã tìm ra lời giải của "bài toán bốn màu". Chứng minh của họ dựa trên sự phân tích từng trường hợp một cách cẩn thận nhờ máy tính. Họ đã chỉ ra rằng nếu "bài toán bốn màu" là sai thì sẽ có một phản thí dụ thuộc một trong gần 2000 loại khác nhau và đã chỉ ra không có loại nào dẫn tới phản thí dụ cả. Trong chứng minh của mình họ đã dùng hơn 1000 giờ máy. Cách chứng minh này đã gây ra nhiều cuộc tranh cãi vì máy tính đã đóng vai trò quan trọng biết bao. Chẳng hạn, liệu có thể có sai lầm trong chương trình và điều đó dẫn tới kết quả sai không? Lý luận của họ có thực sự là một chứng minh hay không, nếu nó phụ thuộc vào thông tin ra từ một máy tính không đáng tin cậy?

7.3.8. Những ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị:

1) Lập lịch thi: Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc.

Có thể giải bài toán lập lịch thi bằng mô hình đồ thị, với các đỉnh là các môn thi, có một cạnh nối hai đỉnh nếu có sinh viên phải thi cả hai môn được biểu diễn bằng hai đỉnh này. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy việc lập lịch thi sẽ tương ứng với việc tô màu đồ thị này.

Chẳng hạn, có 7 môn thi cần xếp lịch. Giả sử các môn học được đánh số từ 1 tới 7 và các cặp môn thi sau có chung sinh viên: 1 và 2, 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7, 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7, 3 và 4, 3 và 6, 3 và 7, 4 và 5, 4 và 6, 5 và 6, 5 và 7, 6 và 7. Hình dưới đây biểu diễn đồ thị tương ứng. Việc lập lịch thi chính là việc tô màu đồ thị này. Vì số màu của đồ thị này là 4 nên cần có 4 đợt thi.



2) Phân chia tần số: Các kênh truyền hình từ số 1 tới số 12 được phân chia cho các đài truyền hình sao cho không có đài phát nào cách nhau không quá 240 km lại dùng cùng một kênh. Có thể chia kênh truyền hình như thế nào bằng mô hình tô màu đồ thị.

Ta xây dựng đồ thị bằng cách coi mỗi đài phát là một đỉnh. Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu chúng ở cách nhau không quá 240 km. Việc phân chia kênh tương ứng với việc tô màu đồ thị, trong đó mỗi màu biểu thị một kênh.

3) Các thanh ghi chỉ số: Trong các bộ dịch hiệu quả cao việc thực hiện các vòng lặp được tăng tốc khi các biến dùng thường xuyên được lưu tạm thời trong các thanh ghi chỉ số của bộ xử lý trung tâm (CPU) mà không phải ở trong bộ nhớ thông thường. Với một vòng lặp cho trước cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số? Bài toán này có thể giải bằng mô hình tô màu đồ thị. Để xây dựng mô hình ta coi mỗi đỉnh của đồ thị là một biến trong vòng lặp. Giữa hai đỉnh có một cạnh nếu các biến biểu thị bằng các đỉnh này phải được lưu trong các thanh ghi chỉ số tại cùng thời điểm khi thực hiện vòng lặp. Như vậy số màu của đồ thị chính là số thanh ghi cần có vì những thanh ghi khác nhau được phân cho các biến khi các đỉnh biểu thị các biến này là liền kề trong đồ thị.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI:

1. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị G.

2. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Tìm số cạnh và số mặt của G.

3. Tìm số đỉnh, số cạnh và đai của:

a) K_n; **b)** $K_{m,n}$.

4. Chứng minh rằng:

a) K_n là phẳng khi và chỉ khi $n \le 4$.

b) $K_{m,n}$ là phẳng khi và chỉ khi $m \le 2$ hay $n \le 2$.

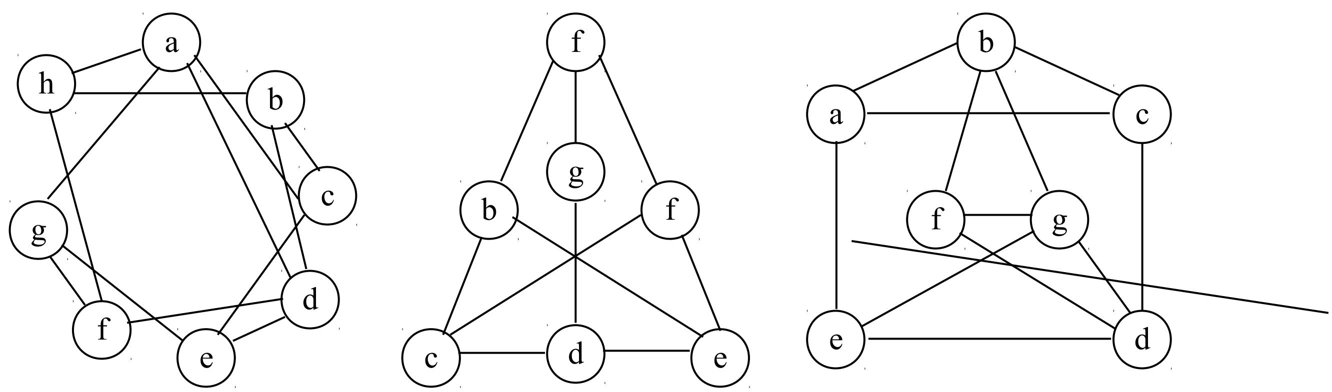
5. Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: Bỏ một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc của nó tạo ra một đồ thị phẳng.

a) K_5; **b)** K_6; **c)** $K_{3,3}$.

6. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh và m cạnh, trong đó $n \ge 3$. Chứng minh rằng:

$$m \le 3n - 6.$$

7. Trong các đồ thị ở hình dưới đây, đồ thị nào là phẳng, đồ thị nào không phẳng? Nếu đồ thị là phẳng thì có thể kẻ thêm ít nhất là bao nhiêu cạnh để được đồ thị không phẳng?



G_1 G_2 G_3

8. Chứng minh rằng đồ thị Peterson (đồ thị trong Bài tập 8, Chương IV) là đồ thị không phẳng.

9. Cho G là một đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, m cạnh và đai là g, với $g \ge 3$. Chứng minh rằng:

$$m \le \frac{g}{g-2}(n-2).$$

10. Đa diện lồi có d mặt ($d \ge 5$), mà từ mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh. Hai người chơi trò chơi như sau: mỗi người lần lượt tô đỏ một mặt trong các mặt còn lại. Người thắng là người tô được 3 mặt có chung một đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại cách chơi mà người được tô trước luôn luôn thắng.

11. Chứng minh rằng:

a) Một đồ thị phẳng có thể tô đúng các đỉnh bằng hai màu khi và chỉ khi đó là đồ thị phân đôi.

b) Một đồ thị phẳng có thể tô đúng các miền bằng hai màu khi và chỉ khi đó là đồ thị Euler.

12. Tìm sắc số của các đồ thị cho trong Bài tập 7.

13. Tìm sắc số của các đồ thị K_n, $K_{m,n}$, C_n, và W_n.

14. Khoa Toán có 6 hội đồng họp mỗi tháng một lần. Cần có bao nhiêu thời điểm họp khác nhau để đảm bảo rằng không ai bị xếp lịch họp hai hội đồng cùng một lúc, nếu các hội đồng là:

$$H_1 = \{H, L, P\}, H_2 = \{L, M, T\}, H_3 = \{H, T, P\}.$$

15. Một vườn bách thú muốn xây dựng chuồng tự nhiên để trưng bày các con thú. Không may, một số loại thú sẽ ăn thịt các con thú khác nếu có cơ hội. Có thể dùng mô hình đồ thị và tô màu đồ thị như thế nào để xác định số chuồng khác nhau cần có và cách nhốt các con thú vào các chuồng thú tự nhiên này?

16. Chứng minh rằng một đơn đồ thị phẳng có 8 đỉnh và 13 cạnh không thể được tô đúng bằng hai màu.

17. Chứng minh rằng nếu G là một đơn đồ thị phẳng có ít hơn 12 đỉnh thì tồn tại trong G một đỉnh có bậc ≤ 4. Từ đó hãy suy ra rằng đồ thị G có thể tô đúng bằng 4 màu.