BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

***

CHƯƠNG 3:

ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

Giảng viên : **Nguyễn Mậu Hân**

Sinh viên thực hiện : **Nguyễn Thị Diệu Hằng**

Lớp : **Tin K30D**

***Bài 1:**

Với giá trị nào của n thì các đồ thị sau có chu trình Euler?

a) K_n b) C_n c) W_n d) Q_n

Lời giải:

K_n, C_n, W_n, Q_n đều là đồ thị liên thông.

Đồ thị liên thông chứa chu trình Euler là đồ thị Euler. Ta có thể hiểu bài toán là tìm giá trị của n để các đồ thị trên là đồ thị Euler.

Ta có định lý:

Đồ thị(vô hướng) liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

a) K_n

Mỗi đỉnh của K_n đều có bậc là n-1. Do đó, để K_n là đồ thị Euler thì n-1 phải là số chẵn.

Hay n là số lẻ: $n=2k+1$ ($k \in Z^*$)

b) C_n ($n \geq 3$)

Mỗi đỉnh của C_n đều có bậc 2(chẵn). Vậy, C_n luôn là đồ thị Euler.

c) W_n

W_n có n+1 đỉnh.Trong đó, có 1 đỉnh bậc n và n đỉnh bậc 3.Như vậy, W_n không thể là đồ thị Euler.

d) Q_n

Trong Q_n có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là n. Vậy, để Q_n là đồ thị Euler thì n phải chẵn.

***Bài 2:**

Với giá trị nào của m, n thì các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có:

a) Chu trình Euler b) Đường đi Euler

Lời giải:

a) Để đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Euler thì các đỉnh của $K_{m,n}$ phải có bậc chẵn.

Mà các đỉnh của $K_{m,n}$ có bậc m hoặc n.

Vậy muốn $K_{m,n}$ có chu trình Euler thì m, n phải là số chẵn.

b) Để đồ thị phân đôi đầy đủ có đường đi Euler thì trong $K_{m,n}$ phải có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.Với n=m=1 thì đồ thị phân đôi không phải là đồ thị có đường đi Euler.

Hay một trong hai giá trị m hoặc n phải bằng 2 và giá trị còn lại phải là số lẻ.

*** Bài 3:**

Với giá trị nào của m và n thì đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton.

Lời giải:

•Cách 1: (theo định lý Dirac)

Định lý Dirac phát biểu như sau: Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn n/2 thì G là đồ thị Hamilton.

Suy ra: để $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton thì mọi đỉnh của $K_{m,n}$ phải có bậc không nhỏ hơn n/2:

$$\deg(V_i) \geq (n+m)/2 \quad (1)$$

Mà trong $K_{m,n}$, $\deg(V_i)=\{m,n\}$

Từ (1) ta có:

$$\begin{cases} n \geq (m+n)/2 \\ m \geq (m+n)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-m)/2 \geq 0 \\ (m-n)/2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-m)/2 \geq 0 \\ (n-m)/2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad n-m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n=m$$

Vậy với n=m thì $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton.

•Cách 2: (theo định lý Ore)

Định lý Ore được phát biểu như sau: Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và bất kì 2 đỉnh không kề nhau cũng có tổng số bậc không nhỏ hơn n thì G là đồ thị Hamilton.

Hai đỉnh không liền kề của $K_{m,n}$ nằm ở cùng một phần, bất kì 2 đỉnh không liền kề nào đều có tổng bậc là n+m.

Để $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton, theo định lý Ore thì:

$$\begin{cases} n+n \geq n+m \\ m+m \geq n+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-m \geq 0 \\ m-n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n=m$$

Vậy với n=m thì $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton.

•Cách 3:

Ta có định lý: Nếu G là dồ thị phân đôi với 2 tập đỉnh là V_1 và V_2 có số đỉnh cùng bằng n và bậc của mỗi đỉnh lớn hơn n/2 thì G là đồ thị Hamilton.

Vậy với n=m thì $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton.

Bài 4:

Chứng minh rằng đồ thị lập phương Q_n là một đồ thị Hamilton.Vẽ cây liệt kê tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị lập phương Q_3.

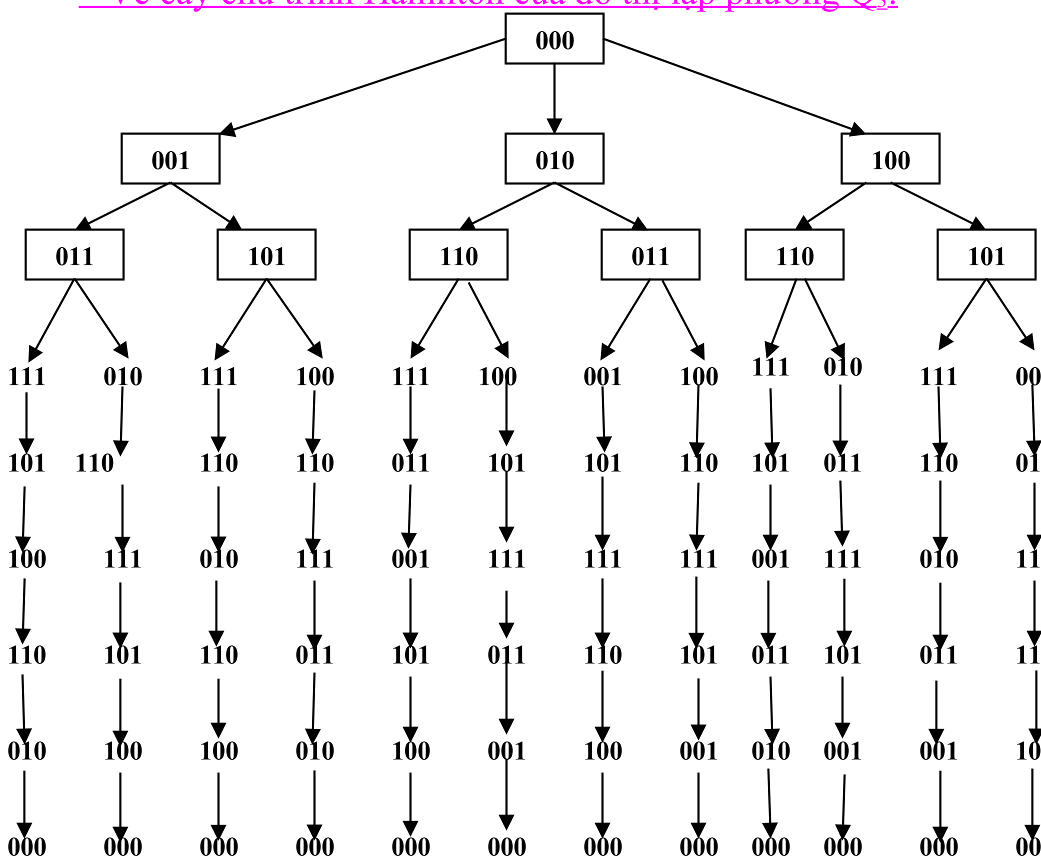
Lời giải:

Theo định lý Dirac: Nếu G là đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn n/2 thì G là đồ thị Hamilton.

Mà trong đồ thị lập phương Q_n, mọi đỉnh đều có bậc n.

Vậy, đồ thị lập phương Q_n là đồ thị Hamilton (Đpcm)

* Vẽ cây chu trình Hamilton của đồ thị lập phương Q_3:



*** Bài 5:**

Trong một cuộc họp có 15 người mỗi ngày ngồi với nhau chung một bàn tròn một lần. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho mỗi lần ngồi họp, mỗi người có 2 người ngồi bên cạnh là bạn mới, và sắp xếp như thế nào?

Lời giải:

Xét đơn đồ thị gồm n=15 đỉnh, mỗi đỉnh ứng với một đại biểu tham gia cuộc họp, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu muốn làm quen với nhau.Vậy ta có đơn đồ thị đầy đủ K_{15}.

Đây là đồ thị Hamilton, mỗi chu trình Hamilton chính là một cách sắp xếp chỗ ngồi cho các đại biểu thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Theo định lý, trong K_n với n lẻ, $n \geq 3$ có đúng (n-1)/2 chu trình Hamilton phân biệt.Vậy có (15-1)/2 = 7 cách sắp xếp chỗ ngồi như trên.

Mỗi cách sắp xếp là một chu trình Hamilton của K_{15}.

*** Bài 6:**

Hiệu trưởng mời 2n($n \geq 2$) sinh viên giỏi đến dự tiệc.Mỗi sinh viên giỏi quen với ít nhất n sinh viên giỏi khác đến dự tiệc.Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp tất cả các sinh viên giỏi ngồi xung quanh một bàn tròn để mỗi người ngồi giữa hai người mà sinh viên đó quen.

Lời giải:

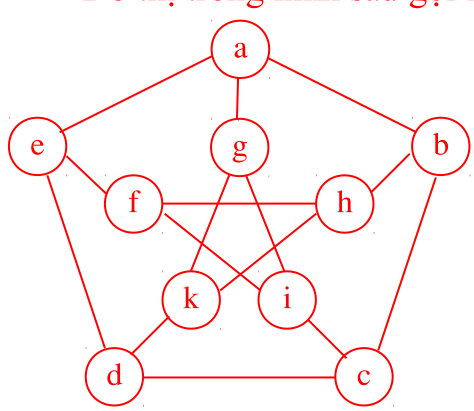
Cho đồ thị G=(V,E), mỗi đỉnh của G là một sinh viên, giữa 2 sinh viên quen nhau tồn tại một cạnh.G là đơn đồ thị có 2n đỉnh.

Do mỗi sinh viên đến dự tiệc quen với ít nhất n sinh viên khác nên bậc của mọi đỉnh của đồ thị G $\deg(V_i) \geq n$ (2n/2)

Theo định lý Dirac thì G là đồ thị Hamilton.Suy ra, tồn tại chu trình Hamilton trong G.Mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp chỗ ngồi cho các sinh viên xung quanh bàn tròn sao cho mỗi người ngồi giữa 2 người họ quen.Vậy ta có điều phải chứng minh.

*** Bài 7:**

Đồ thị trong hình sau gọi là đồ thị Peterson



a) Tìm một đường đi Hamilton trong G

b) Chứng minh P\{v}, với v là đỉnh bất kì của P, là một đồ thị Hamilton.

Lời giải:

a) Một đường đi Hamilton trong G:

a→b→c→d→e→f→h→k→g→i

b) Chứng minh P\{v} là một đồ thị Hamilton(với v là một đỉnh bất kì của P):

Rõ ràng trong P, các đỉnh được chia làm 2 phần

- Phần 1: gồm a, b, c, d, e
- Phần 2: gồm f, g, h, i, k

Trong mỗi phần, các đỉnh có vai trò như nhau.

Xét 2 trường hợp:

*** Trường hợp 1**: v là đỉnh thuộc phần 1

Do vai trò các đỉnh như nhau, giả sử ta bỏ đỉnh a.Lúc này, trong P\{a} tồn tại chu trình Hamilton: i→ f→ e →d →c →b →h→ k→ g→ i.

Suy ra, P\{a} là đồ thị Hamilton.

*** Trường hợp 2**: v là đỉnh thuộc phần 2

Cũng như trường hợp trên, vai trò các đỉnh như nhau, giả sử ta bỏ đỉnh f. Trong P\{f} tồn tại chu trình Hamilton:

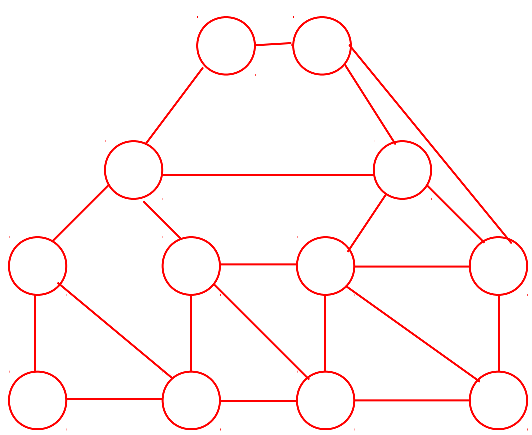
h→k→ d→ e →a →g →i→ c →b →h

Suy ra, P\{f} là đồ thị Hamilton

Như vậy, trường hợp tổng quát, với v là đỉnh bất kỳ ta luôn có P\{v} là đồ thị Hamilton(Đpcm)

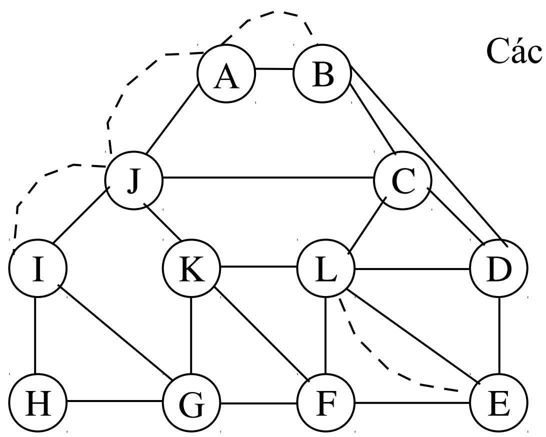
*** Bài 8:**

Giải bài toán người phát thư Trung Hoa với đồ thị cho trong hình sau:



Lời giải:

Trước tiên, ta gán nhãn cho đồ thị:



Các đỉnh bậc lẻ:$V_0(G)$={B, E,I, L}

Tập các phân hoạch cặp:

$P=\{P_1, P_2, P_3\}$

Trong đó:

$P_1=\{(B,E),(I,L)\} \rightarrow d(P_1) = d(B,E) + d(I,L) = 2 + 2 = 4$

$P_2=\{(B,I),(E,L)\} \rightarrow d(P_2) = d(B,I) + d(E,L) = 3 + 1 = 4$

$P_3=\{(B,L),(E,I)\} \rightarrow d(P_3) = d(B,L) + d(E,I) = 2 + 3 = 5$

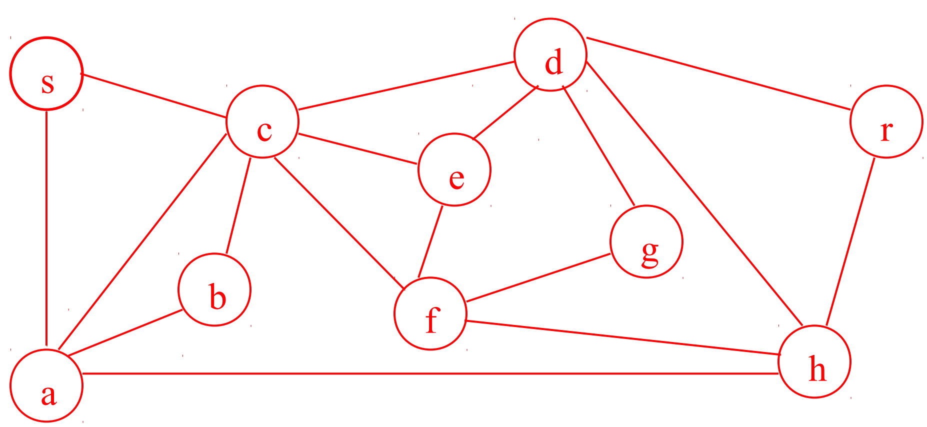
$m(G) = \min\{d(P_1), d(P_2), d(P_3)\} = 4$

Vậy, G_T có được bằng cách thêm vào đồ thị G 4 cạnh (A,B), (A,J), (I,J), (E,L).G_T là đồ thị Euler. Đường đi ngắn nhất là chu trình Euler trong G_T, đó là:

H, I, G, K, F, L, K, J, I, J, A, J, C, B, A, D, E, L, D, E, L, E, F, G, H

***Bài 9:**

Chứng minh rằng đồ thị G cho trong hình sau có đường đi Hamilton (từ s đến r) nhưng không có chu trình Hamilton.



Lời giải:

Trong G tồn tại đường đi Hamilton (từ s đến r).

Thật vậy,trong G tồn tại đường đi:s→a→b→c→e→f→g→d→h→r là đường đi Hamilton.

Ta giả sử trong G tồn tại chu trình Hamilton.Theo hình vẽ ta thấy, để đi tới s thì phải đi qua a hoặc c.Mặt khác, để đi tới b cũng phải đi qua a hoặc c.Như vậy, trong chu trình này, đỉnh a hoặc c sẽ xuất hiện 2 lần.Vô lí, vì đây là chu trình Hamilton, mỗi đỉnh chỉ xuất hiện 1 lần(ngoại trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau).

Vậy, không tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị G.

*** Bài 10:**

Cho ví dụ về:

a) Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler, vừa là chu trình Hamilton.

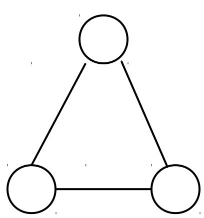
b) Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton, nhưng hai chu trình này không trùng nhau.

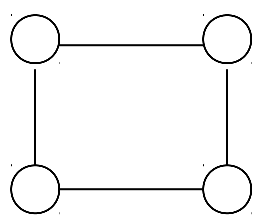
c) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton nhưng không phải là đồ thị Euler.

d) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler nhưng không phải là đồ thị Hamilton.

Lời giải:

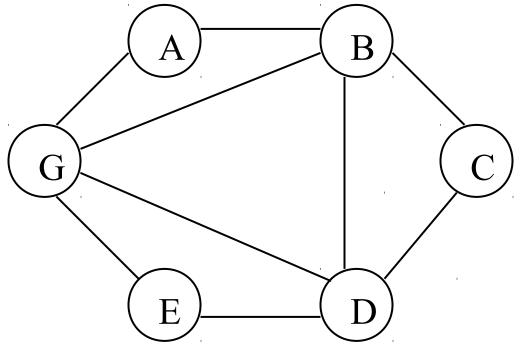
a) Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler, vừa là chu trình Hamilton:





b) Đồ thị có một chu trình Euler, một chu trình Hamilton nhưng 2 chu trình này không trùng nhau:

b_1)



Trong đồ thị trên có chứa chu trình Hamilton và chu trình Euler.

* Chu trình Hamilton:

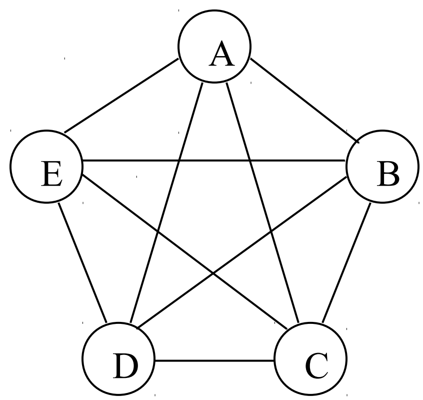
A, B, C, D, E, G, A

* Chu trình Euler:

A, B, C, D, G, B, D, E, G, A

Hai chu trình này không trùng nhau.

b_2)



Đồ thị trên có:

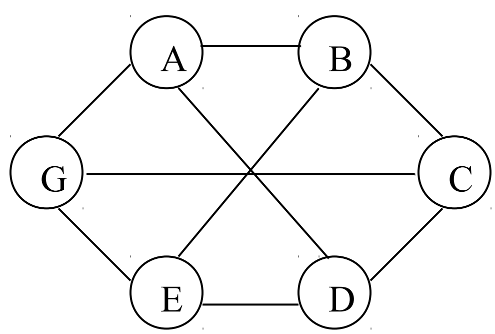
* Chu trình Hamilton:

A, B, C, D, E, A

* Chu trình Euler:

A, B, C, D, E, B, D, A, C, E, A

c) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton mà không phải là đồ thị Euler:

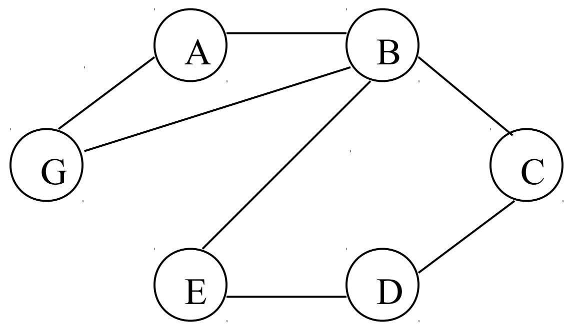


Đồ thị trên là đồ thị Hamilton, do có chứa chu trình Hamilton:

A, B, C, D, E, G

Nhưng đồ thị trên không phải là đồ thị Euler, do mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc lẻ(bậc 3)

d) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler nhưng không phải là đồ thị Hamilton:



Đồ thị trên chứa chu trình Euler: A, B, C, D, E, B, G, A nên nó là đồ thị Euler.

Ta thấy rằng, E và G không liền kề.Muốn đi từ E qua G hay ngược lại thì cần thông qua B.Vậy, trong bất kì chu trình nào chứa tất cả các đỉnh thì có đỉnh B xuất hiện hơn 1 lần.Vậy không tồn tại chu trình Hamilton, hay đồ thị trên không phải là đồ thị Hamilton.

---&0&---