TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

BÀI 4

QUAN HỆ

Nội dung

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ

- Giữa các phần tử trong một tập hợp nào đó mà chúng ta đang quan tâm thường có những mối liên hệ hay những quan hệ.
- Ví dụ quan hệ lớn hơn giữa các số thực, quan hệ "anh em" giữa người với người, quan hệ đồng dạng giữa các tam giác, v.v....
- Mỗi quan hệ trong một tập hợp được đặc trưng bằng một hay một số tiêu chuẩn nào đó thể hiện ngữ nghĩa của quan hệ.
- Ở đây chúng ta chỉ đề cập đến những quan hệ, được gọi là những quan hệ 2 ngôi, nói lên sự liên hệ giữa mỗi phần tử với các phần tử khác trong tập hợp.
- Khi ta đang xem xét một quan hệ như thế, thì với hai phần tử x, y tùy ý trong tập hợp chúng sẽ có hoặc là x có quan hệ với y, hoặc là x không có quan hệ với y.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ (tiếp tục)

- Nói như vậy cũng có nghĩa là tập hợp các cặp (x, y) gồm 2 phần tử có quan hệ có thể xác định được quan hệ đang xét trên tập hợp.
- Về mặt toán học, một quan hệ 2 ngôi được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 4.1

Cho một tập hợp X khác rỗng. Một *quan hệ 2 ngôi* trên X là một tập hợp con R của X^2. Cho 2 phần tử x và y của X, ta nói x có quan hệ R với y khi và chỉ khi $(x, y) \in R$, và viết là xRy.

- Như vậy,
$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$
- Khi x không có quan hệ R với y, ta viết: $x\overline{R}y$.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ

Ví dụ 4.1

1. Trên tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4\}$, xét quan hệ 2 ngôi R được định nghĩa bởi
$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$
Với quan hệ này ta có: $2R4$, nhưng $2\overline{R}3$.
2. Trên tập hợp các số nguyên Z ta định nghĩa một quan hệ 2 ngôi R như sau
xRy nếu và chỉ nếu $x - y$ là số chẵn.
hay nói cách khác
$R = \{(x, y) \in Z^2 | x - y = 2k \text{ với } k \in Z\}$
Quan hệ R này chính là quan hệ đồng dư modulo 2.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ

Ví dụ 4.2

1. Cho n là một số nguyên dương. Nhắc lại rằng quan hệ đồng dư modulo n trên tập hợp các số nguyên Z,
   ký hiệu bởi $= (\mod n)$, được định nghĩa như sau
   $$a = b \pmod n \Leftrightarrow \exists k \in Z : (a - b) = k.n$$
   Quan hệ này là một quan hệ 2 ngôi trên Z.
2. Quan hệ $\leq$ trên tập hợp các số thực R cũng là một quan hệ 2 ngôi.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ

Ví dụ 4.3

Cho E là một tập hợp, đặt $X = P(E)$. Mỗi phần tử thuộc X là một tập hợp con của E. Trên E có các quan hệ quen thuộc sau đây
- quan hệ bao hàm, ký hiệu bởi $\subset$;
- quan hệ chứa, ký hiệu bởi $\supset$;
- quan hệ bằng nhau, ký hiệu bởi $=$.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ

Chú ý.

1. Người ta còn định nghĩa một quan hệ (2 ngôi) giữa một tập hợp A và một tập hợp B là một tập hợp con của $A \times B$. Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{0, 1\}$. Ta có $R = \{(1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0), (5, 0)\}$ là một quan hệ giữa A và B.
2. Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa một *quan hệ* giữa các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ là một tập hợp con của $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ (tích Descartes của các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$). Như vậy, khi R là một quan hệ giữa các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ thì mỗi phần tử của R là một bộ $n(a_1, a_2, ..., a_n)$ với $a_i \in A_i (i = 1, \dots, n)$.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.1. Định nghĩa quan hệ

Cách xác định một quan hệ: Dựa vào các phương pháp xác định một tập hợp, ta có thể xác định một quan hệ bằng các phương pháp sau đây

1. Liệt kê: liệt kê tất cả các cặp hay bộ phần tử có quan hệ R (tức là thuộc R). Trong ví dụ 1 ở trên, quan hệ R được cho theo cách liệt kê.
2. Nêu tính chất đặc trưng cho quan hệ R, tức là tính chất hay tiêu chuẩn để xác định các phần tử thuộc R hay không. Trong các ví dụ 2 và 3 ở trên, quan hệ R được cho bằng cách nêu lên tính chất xác định quan hệ.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

Các phương pháp biểu diễn một quan hệ là theo định nghĩa như tập hợp con của tích Descartes, phương pháp ma trận và phương pháp đồ thị.

- **a) Phương pháp định nghĩa.** Các ví dụ ở phần trước thể hiện phương pháp này. Phương pháp định nghĩa là phương pháp cho quan hệ R một cách trực tiếp hoặc gián tiếp vào tính chất các phần tử của R.
- **b) Phương pháp ma trận.** Ngoài phương pháp biểu diễn một quan hệ 2 ngôi dưới dạng tập hợp các cặp phần tử người ta còn có thể sử dụng ma trận để biểu diễn cho quan hệ trong trường hợp các tập hợp là hữu hạn.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

- Khái niệm ma trận được định nghĩa và khảo sát chi tiết hơn trong "Đại số Tuyến tính". Ở đây chúng ta chỉ cần hiểu ma trận một cách đơn giản là một bảng liệt kê các phần tử thành các dòng và các cột.
- Ví dụ, bảng liệt kê 6 số nguyên thành 2 dòng và 3 cột sau đây là một ma trận:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- Một ma trận M gồm m dòng, n cột sẽ được gọi là một ma trận có cấp $m \times n$. Nếu $m = n$ thì ta nói M là một ma trận vuông cấp n.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

Định nghĩa 4.2

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi giữa một tập hợp hữu hạn $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ và một tập hữu hạn $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Quan hệ R có thể được biểu diễn bởi ma trận $MR = (m_{ij})$ gồm m dòng và n cột (tức là ma trận cấp $m \times n$), trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ta gọi ma trận MR là *ma trận biểu diễn* của quan hệ R.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

Ví dụ 4.4

Với $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{a, b, c\}$, thì các quan hệ sau đây:
$R = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$
$S = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, b), (2, c), (3, c)\}$
có các ma trận biểu diễn là

$$MR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad MS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trong trường hợp R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập X hữu hạn và có n phần tử thì ma trận biểu diễn của R là một ma trận có n dòng và n cột (tức là ma trận vuông cấp n).

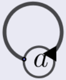
c) Phương pháp đồ thị. Cho tập hữu hạn khác trống $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Định nghĩa 4.3

Một quan hệ $R \subseteq A \times A$ có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng như sau: Mỗi một $a \in A$ được xem là một đỉnh của đồ thị, do đó số đỉnh của đồ thị bằng số phần tử của tập A. Với $(a, b) \in R$ thì có một cung đi từ đỉnh a tới đỉnh b. Như vậy,

- nếu $a, b \in A$ mà $(a, b) \in R$ hay aRb thì a đến b có một cung.

- Nếu $(a, a) \in R$ thì ta có một khuyên tại đỉnh a.



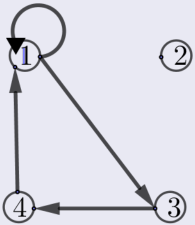
4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

Định nghĩa 4.3(tiếp tục)

- Nếu $(a, b) \notin R$ thì a đến b không có một cung nào.

Ví dụ 4.5

Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ $R \subseteq A \times A$ với $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ Khi đó biểu diễn đồ thị của quan hệ R sẽ là



4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

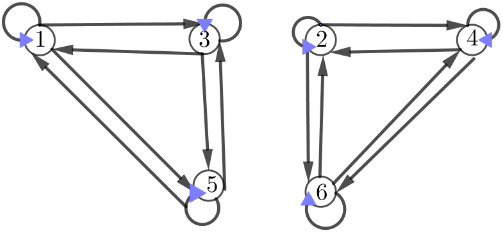
Ví dụ 4.6

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và quan hệ $R \subseteq A \times A$ được xác định như sau: Với mọi $a, b \in A$, aRb khi và chỉ khi hiệu $a - b$ là một số chẵn.
Khi đó ta có thể biểu diễn quan hệ theo cả ba phương pháp như sau:
a) Biểu diễn quan hệ R theo định nghĩa:
Quan hệ R là tập hợp
$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4),$
b) Biểu diễn quan hệ R theo ma trận

$$MR_{6\times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.2. Biểu diễn quan hệ

c) Biểu diễn quan hệ R theo đồ thị



4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

Một quan hệ 2 ngôi trên một tập hợp có thể có một số tính chất nào đó làm cho tập hợp có một cấu trúc nhất định. Dưới đây là định nghĩa một số tính chất thường được xét đối với một quan hệ 2 ngôi.

Định nghĩa 4.4

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập hợp X.

- Ta nói quan hệ R có tính *phản xạ* (reflexive) nếu và chỉ nếu xRx với mọi $x \in X$.
- Ta nói quan hệ R có tính *đối xứng* (symmetric) nếu và chỉ nếu $xRy \Rightarrow yRx$ với mọi $x, y \in X$.
- Ta nói quan hệ R có tính *phản xứng* (antisymmetric) nếu và chỉ nếu $(xRy$ và $yRx) \Rightarrow x = y$ với mọi $x, y \in X$.
- Ta nói quan hệ R có tính *truyền* hay *bắc cầu* (transitive) nếu và chỉ nếu $(xRy$ và $yRz) \Rightarrow xRz$ với mọi $x, y, z \in X$.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 4.7

Trong ví dụ này chúng ta đề cập đến một số quan hệ đã được nêu lên trong các ví dụ của mục ở trên, và phát biểu các tính chất của chúng. Việc kiểm chứng các tính chất này khá dễ dàng.

1. Quan hệ đồng dư modulo n trên Z có 3 tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu.
2. Quan hệ $\leq$ trên tập hợp các số thực có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, bắc cầu.
3. Cho E là một tập hợp. Quan hệ $\subseteq$ trên $P(E)$ có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, bắc cầu.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

Bằng phương pháp biểu diễn quan hệ theo ma trận và đồ thị ta dễ dàng nhận biết được một số tính chất của quan hệ.

- Một quan hệ có tính chất phản xạ khi và chỉ khi ma trận biểu diễn nó có tất cả các phần tử trên đường chéo chính bằng 1.
- Một quan hệ có tính chất phản xạ khi và chỉ khi đồ thị biểu diễn nó tại mỗi đỉnh đều có khuyên.
- Một quan hệ có tính đối xứng khi và chỉ khi ma trận biểu diễn nó là ma trận đối xứng qua đường chéo chính.
- Một quan hệ có tính đối xứng khi và chỉ khi đồ thị biểu diễn nó có tính chất: Với A, B là hai đỉnh bất kỳ và nếu có một cung đi từ A đến B thì cũng có cung đi từ B đến A.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 4.8

Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Tập $R \subseteq A \times A$ được định nghĩa như sau Với mọi $a, b \in A$ thì aRb khi và chỉ khi tổng $a + b$ là số lẻ.

1. Biểu diễn R bằng 3 phương pháp đã nêu.
2. R có tính chất gì?
3. Có nhận xét gì về ma trận và đồ thị của R?

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

Lời giải.

1. Dạng định nghĩa của R là

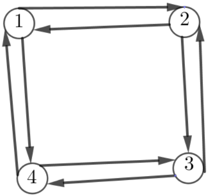
$$R = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4),(2,1),(4,1),(3,2),(4,3)\}$$

Dạng ma trận của R là

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dạng đồ thị là

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ (tiếp tục)



2. Ta có nhận xét về một số tính chất của quan hệ R như sau:
   - Quan hệ R có tính đối xứng, vì $a + b = b + a$ hay $(a, b) \in R$ thì $(b, a) \in R$.
   - R không phản xạ vì $(1, 1) \notin R$.
   - R không phản đối xứng, vì $(1, 2) \in R, (2, 1) \in R$ nhưng $2 \neq 1$.
   - R không bắc cầu, vì $(1, 2) \in R, (2, 3) \in R$ nhưng $(1, 3) \notin R$.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

3. Nhận xét tính chất của R từ ma trận quan hệ

- Trong ma trận trên phần tử trên đường chéo chính bằng 0, nên R là không phản xạ. Do các phần tử đối xứng qua đường chéo chính đều bằng nhau nên R có tính đối xứng
- Nhận xét tính chất của R từ đồ thị quan hệ R. Vì trong đồ thị tồn tại đỉnh không có khuyên nên quan hệ R là không phản xạ. Từ đồ thị ta thấy cứ có một cung đi từ đỉnh i đến j thì chiều ngược lại cũng có, nên R có tính đối xứng.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 4.9

Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $R \subseteq A \times A$ được định nghĩa như sau với mọi $a, b \in A$ thì $aRb \Leftrightarrow a + b = 2k$ (k là số nguyên). Hãy chỉ ra quan hệ R thỏa mãn 3 tính chất: Phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Lời giải.

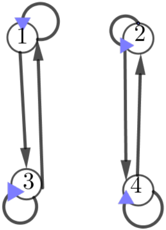
- - R có tính phản xạ vì với mọi $a \in A$ ta có $a + a = 2a$ là một số chẵn, do đó $(a, a) \in R$.
- - R có tính đối xứng, vì với mọi $a, b \in A$ mà $a + b = 2k$ thì $b + a = 2k$ do đó nếu $(a, b) \in R$ thì $(b, a) \in R$.
- - R có tính bắc cầu, vì với mọi $a, b, c \in A$ nếu $a + b = 2k, b + c = 2k'$ thì $a + c = (2k - b) + (2k' - b) = 2(k + k') - 2b = 2k''$ với k, k', k'' là số nguyên nào đó. Nghĩa là $(a, b) \in R$ và $(b, c) \in R$ thì $(a, c) \in R$.

4.1. Quan hệ hai ngôi - 4.1.3. Các tính chất của quan hệ

- Nhận xét về đồ thị và quan hệ R.
  - Ma trân của R

$$MR_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- - Đồ thị của R



4.2. Cung và đường trong đồ thị quan hệ - 4.2.1. Định nghĩa

Giả sử $R \subseteq A \times A$. Nếu $a, b \in A$ mà $(a, b) \in R$ hay aRb thì từ a đến b có một cung hướng đi từ a đến b.

Định nghĩa 4.5

Nếu giữa đỉnh a và b có tồn tại một dãy các đỉnh $a = a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} a_n = b$ sao cho $a_i R a_{i+1}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ thì ta nói từ a đến b có một đường đi trong đồ thị quan hệ R.

4.2. Cung và đường trong đồ thị quan hệ - 4.2.2. Tính chất

Độ dài của đường đi là số các cung có mặt trong đường đó. Trong đường trên có độ dài n. Nếu đường đi có độ dài bằng 1 thì đườn đi đó là một cung, hay cung có thể xem như đường đi có độ dài bằng 1.

Định lý 4.1

Cho quan hệ $R \subseteq A \times A$ và R có tính chất bắc cầu. Khi đó nếu trong đồ thị của R có một đường đi độ dài n $(n \geq 1)$ từ đỉnh a tới đỉnh b thì cũng có một cung từ a đến b.

4.2. Cung và đường trong đồ thị quan hệ - 4.2.2. Tính chất

Chứng minh. chứng minh Quy nạp theo $n \geq 1$.

- \- Trường hợp $n = 1$. Cung và đường trùng nhau nên định lý đúng.
- \- Giả sử định lý đúng với n, nghĩa là từ a đến b có một đường đi có độ dài n thì cũng có một cung đi từ a đến b.
- \- Xét trường hợp bất kỳ từ a đến b có độ dài $n+1$ trong đồ thị của R:

Ở đây $aRa_1, a_1Ra_2, ..., a_{n-1}Ra_n, a_nRb$. Đường đi từ a đến a_n có độ dài n nên theo giả thiết quy nạp thì từ a đếna_n có cung, tức là aRa_n.

- Do R có tính bắc cầu nên từ aRa_n và a_nRb ta có aRb hay trong đường độ dài $n+1$ từ a đến b coa một cung đi từ a đến b. Điều phải chứng minh.

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.1. Quan hệ ngược

Định nghĩa 4.6

Giả sử R là quan hệ từ tập A vào tập B. *Quan hệ ngược* của quan hệ R được ký hiệu là R^{-1} đó là quan hệ từ tập B vào tập A được định nghĩa như sau

$$R^{-1} = \{(b, a) : a \in A, b \in B \text{ và } aRb\}$$

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.1. Quan hệ ngược

Ma trận quan hệ ngược : Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ Ma trận quan hệ ngược là ma trận cấp $m \times n$, là ma trận m hàng n cột mà phần tử α_{ji} được xác định như sau

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } b_j R^{-1} a_i \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_i R b_j \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$
$$= \delta_{ij} \text{ là phần tử ở hàng } i, \text{ cột } j \text{ trong ma trân của quan hệ } R\ .$$

Như vậy, nếu quan hệ R có ma trận $MR_{n\times m} = (\delta_{ij})_{m\times n}$ thì ma trận của quan hệ ngược $R^{-1} \subseteq B \times A$ mà ký hiệu là $MR^{-1} = (\alpha_{ji})_{m\times n}$ sẽ nhận được từ $MR_{n\times m}$ bằng cách đổi hàng thành cột, đổi cột thành hàng.

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.1. Quan hệ ngược

Ví dụ 4.10

Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$. R là quan hệ từ A vào B được cho bởi $R = \{(1, 5), (1, 7), (2, 6), (3, 6), (3, 5)\}$. Tìm quan hệ ngược và ma trận của nó?

Lời giải. Theo định nghĩa ta có
$R^{-1} = \{(5, 1), (7, 1), (6, 2), (6, 3), (5, 3)\}$.

$$MR_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad MR^{-1}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng ma trận của quan hệ R^{-1} nhận được từ ma trận của quan hệ R bằng cách chuyển hang thành cột , cột thành hàng.

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.2. Quan hệ hợp thành

Định nghĩa 4.7

Giả sử R là quan hệ từ tập A vào tập B, S là quan hệ từ tập B vào tập C. Khi đó một quan hệ Q từ A vào C được định nghĩa

$$Q = \{(a, c) : a \in A, c \in C \text{ sao cho tồn tại } b \in B \text{ mà } aRb \text{ và } bSc\}$$

Q gọi là quan hệ hợp thành giữa hai quan hệ R và S.

Ta ký hiệu quan hệ hợp thành giữa R và S là $Q = R.S$.

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.2. Quan hệ hợp thành

Ma trận của quan hệ hợp thành.

- Giả sử Q là quan hệ hợp thành từ 2 quan hệ R và S như $Q = R.S$.
- Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ và $C = \{c_1, c_2, ..., c_r\}$.
- Ma trận quan hệ $R \subseteq A \times B$ là $MR_{n\times m}$ và phần tử hàng i, cột j là
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_i R b_j \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$
- Ma trận quan hệ $S \subseteq B \times C$ là $MR_{m\times r}$ và phần tử hàng j, cột k là
$$\beta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } b_j R c_k \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.2. Quan hệ hợp thành

- Ma trận quan hệ $Q \subseteq A \times C$ là $MR_{n\times r}$ và phần tử hàng i, cột k là

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_i R c_k \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

- Theo định nghĩa của quan hệ hợp thành

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{nếu tồn tại} b_j \in B \text{ sao cho } a_i R b_j \text{ và } b_j R c_k \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

- Từ đó suy ra $\gamma_{ik} = 1$ khi và chỉ khi $\delta_{ij} = \beta_{jk} = 1$. Hay ma trận của quan hệ hợp thành từ R, S là nhân hai ma trận của hai quan hệ trên.

$$MQ_{n\times r} = MR_{n\times m}.MS_{m\times r}.$$

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.2. Quan hệ hợp thành

Ví dụ 4.11

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$ và $c = \{a, b\}$. Cho $R \subseteq A \times B$ bởi

$$R = \{(1, 6), (1, 8), (2, 7), (2, 9), (3, 9), (4, 6), (4, 8), (5, 7)\}$$

Cho $S \subseteq B \times C$ bởi

$$S = \{(6, a), (7, a), (8, b)\}.$$

Xác định quan hệ hợp thành $Q = R.S$ và chỉ ra rằng

$$MQ_{5\times 2} = MR_{5\times 4}.MS_{4\times 2}$$

4.3. Quan hệ ngược và hợp thành - 4.3.2. Quan hệ hợp thành

Lời giải. Xét quab hệ $Q \subseteq A \times C$ dựa vào R, S ta có

$$Q = R.S = \{(1,a),(1,b),(2,a),(4,a),(4,b),(5,a)\}.$$

$$MR_{5\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad MS_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad MQ_{5\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.8

Một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X được gọi là một quan hệ tương đương nếu và chỉ nếu nó thỏa 3 tính chất:
1) Phản xạ: Với mọi $a \in A$ ta có aRa;
2) đối xứng: Với mọi $a, b \in A$ nếu aRb thì bRa;
3) Bắc cầu: Với mọi $a, b, c \in A$ nếu aRb và bRc thì aRc;

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.1. Định nghĩa

Ví dụ 4.12

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Trên X ta định nghĩa quan hệ R như sau: Với mọi $a, b \in A$ thì aRb khi và chỉ khi $a + b = 2k$, với k là một số nguyên dương nào đó. Hãy chỉ ra R là quan hệ tương đương?

Lời giải. Ta kiểm tra ba tính chất của quan hệ. Thật vậy,

- Tính phản xạ đúng, vì $\forall a \in A$ ta có $a + a = 2a$ nên aRa.
- Tính đối xứng đúng, vì giả sử $a, b \in A$ và aRb khi đó $a + b = 2k$, do đó $b + a = 2k$ nên bRa.
- Tính bắc cầu đúng, vì giả sử $a, b, c \in A$ và aRb, bRc tức là $a + b = 2k_1$ và $b + c = 2k_2$.
  Xét
  $a + c = (2k_1 - b) + (2k_2 - b) = 2(k_1 + k_2) - 2b = 2(k_1 + k_2 - b)$.
  Từ đó suy ra $a + c = 2k_3$, với k_3 là một số nguyên dương nào đó, nên aRc. Vậy R là quan hệ tương đương.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.1. Định nghĩa

Ví dụ 4.13

1. Một ví dụ quan trọng về quan hệ tương đương là quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$. Ta đã biết quan hệ này có 3 tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.
2. Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ không phải là một quan hệ tương đương vì nó không có tính chất đối xứng.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.2. Lớp tương đương và tập hợp tương đương

Định nghĩa 4.9

Với mỗi phần tử $x \in A$, ta định nghĩa *lớp tương đương* chứa x, ký hiệu $\overline{x}_R$ là tập hợp tất cả những phần tử (thuộc x) có quan hệ R với x:

$$\overline{x}_R = \{y : y \in X \text{ và } yRx\}.$$

- Như vậy mỗi lớp tương đương là một tập hợp con của A. Nhiều khi ta biết quan hệ tương đương rồi thì người tha viết $\overline{x}$ thay vì $\overline{x}_R$.
- Người ta đã chứng minh rằng tập hợp các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trên A tạo thành một "phân hoạch" của tập hợp A, tức là sưu tập các lớp tương đương khác nhau cho ta một họ các tập con của A rời nhau đôi một và có phần hội bằng A.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.2. Lớp tương đương và tập hợp tương đương

Định nghĩa 4.10

Tập hợp các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trên A này (là một tập con của $P(A)$) được gọi là *tập hợp thương* (của quan hệ tương đương R trên A).

Quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$ có tập hợp thương tương ứng, được ký hiệu là $\mathbb{Z}_n$, gồm n phần tử

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

trong đó $(k \in \mathbb{Z})$ là tập hợp tất cả những số nguyên đồng dư với k modulo n.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.2. Lớp tương đương và tập hợp tương đương

Định lý 4.2

Cho R là quan hệ tương đương trên A. Ba điều kiện sau là tương đương
1) aRb;
2) $\overline{a}_R = \overline{b}_R$;
3) $\overline{a}_R \cap \overline{b}_R \neq \emptyset$;

Người ta còn chứng minh được rằng việc xác định một quan hệ tương đương trên một tập hợp A tương đương với việc xác định một phân hoạch của tập hợp A, tức là có một song ánh giữa tập hợp tất cả các quan hệ tương đương trên A và tập hợp tất cả các phân hoạch của tập A.

4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Định nghĩa 4.11

Cho tập $A \neq \emptyset$ và hữu hạn phần tử. Ta chia tập A thành n tập con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$. Khi đó ta nói các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một *phân hoạch tương đương* trên tập A.

Ngược lại, ứng với mỗi phân hoạch tương đương $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trên A, ta xác định quan hệ tương đương R trên A sinh ra phân hoạch đó như sau

$$\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow \exists A_i \text{ sao cho } a, b \in A_i (i \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Ta sẽ chỉ ra quan hệ R định nghĩa như trên là quan hệ tương đương trên A và R sinh ra phân hoạch đã cho. Thật vậy, ta sẽ chỉ ra R thỏa mãn ba tính chất:

- \- Phản xạ: với mọi $a \in A$ có duy nhất A_i để $a \in A_i$ hay aRa.
- \- Đối xứng: Nếu $a, b \in A$ mà aRb, suy ra có ít nhất A_i sao cho $a, b \in A_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, từ đó $b, a \in A$ nên bRa.
- \- Bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in A$ và aRb, bRc, ta cần chỉ ra aRc. Thật vậy, từ aRb suy ra tồn tại tập A_i để $a, b \in A_i$; từ bRc suy ra tồn tại A_j để $b, c \in A_j$. Do tính chất $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$ nên suy ra $A_i = A_j$ vì chúng đều chứ b. Điều đó chứng tỏ $a, c \in A_i$, hay aRc.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Ví dụ 4.14

Cho $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ và phân hoạch của A là $A_1 = \{2, 3\}, A_2 = \{4\}, A_3 = \{5, 6\}$. Quan hệ tương đương R sinh ra phân hoạch trên là $R = \{(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$. Hãy chỉ ra R sinh ra phân hoạch trên A.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Lời giải. Để chỉ ra R sinh ra A_1, A_2, A_3 ở trên ta lập ma trận từ quan hệ R

$$MR_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hàng thứ nhất và thứ hai của ma trận sinh ra $A_1 = \{2, 3\}$.
Hàng thứ ba của ma trận sinh ra $A_2 = \{4\}$.
Hàng thứ tư và thứ năm của ma trận sinh ra $A_3 = \{4, 6\}$.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Ví dụ 4.15

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Trên A ta định nghĩa một quan hệ: $\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a - b = 3k$ (với k là một số nguyên). Hãy chỉ ra quan hệ R trên là quan hệ tương đương và tìm phân hoạch tương đương do R sinh ra.

Lời giải. Từ định nghĩa ta có
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (1, 4), (4, 1), (1, 7), (7, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 7), (7, 4)\}$.
Trước hết chỉ ra R thỏa mãn 3 tính chất

1. Phản xạ: Với $\forall a \in A$ rõ ràng $a - a = 0 = 3.0$ nên aRa.
2. Đối xứng: Giả sử $a, b \in A$ và aRb ta có $a - b = 3k$. Dĩ nhiên $b - a = 3.(-k)$, do đó bRa.
3. Bắc cầu: Giả sử $a, b, c \in A$: aRb và bRc. theo định nghĩa ta có $a - b = 3k_1, b - c = 3k_2$. Xét $a - c = (3k_1 + b) - (b - 3k_2) = 3(k_1 + k_2) = 3k_3$. Vậy aRc.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Để tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra, ta lập ma trận

$$MR_{7\times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các hàng 1,4 và 7 sinh ra tập $A_1 = \{1, 4, 7\}$.
Các hàng 2 và 5 sinh ra tập $A_2 = \{2, 5\}$.
Các hàng 3 và 6 sinh ra tập $A_1 = \{3, 6\}$.
Khi đó A_1, A_2, A_3 sẽ tạo ra một phân hoạch tương đương trên A.

4.4. Quan hệ tương đương - 4.4.3. Phân hoạch tương đương

Định lý 4.3

- *Nếu* $R \subseteq A \times A$ *là một quan hệ tương đương trên* $A(A \neq \emptyset)$ *thì* R *sẽ tạo ra một phân hoạch tương đương trên* A.
- *Giả sử* $A_1, A_2, ..., A_n$ *là một phân hoạch tương đương nào đó trên* A. *Khi đó sẽ có một quan hệ tương đương* $S \subseteq A \times A$ *sinh ra phân hoặc tương đương trên.*

Chứng minh. Dựa vào định nghĩa quan hệ tương đương và phân hoạch tương đương trên A.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 4.12

Một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X (khác rỗng) được gọi là một *quan hệ thứ tự* (hay vắn tắt, là một thứ tự) nếu và chỉ nếu nó có 3 tính chất: *phản xạ, phản xứng, bắc cầu*. Khi đó ta cũng nói tập hợp X là một tập có thứ tự. Nếu có thêm tính chất: với mọi $x, y \in X$ ta có xRy hay yRx thì ta nói R là một *quan hệ thứ tự toàn phần* trên X.

Chú ý.

- Trong trường hợp trên X có nhiều quan hệ thứ tự thì khi xét đến thứ tự trên X ta phải nói rõ thứ tự nào, và ta thường viết tập hợp X có thứ tự dưới dạng một cặp (X, R); trong đó R là quan hệ thứ tự đang xét trên X.
- Với 2 tập hợp có thứ tự X và Y ta có thể định ra một thứ tự trên tích Descartes$X \times Y$ dựa vào các thứ tự trênX và trên Y. Từ đó ta $X \times Y$ trở thành một tập hợp thứ tự .

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Ví dụ 4.16

1. Quan hệ $\leq$ trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ là một quan hệ thứ tự toàn phần.
2. Cho E là một tập hợp. Quan hệ $\subset$ trên $P(E)$ là một quan hệ thứ tự. Nếu E có nhiều hơn 2 phần tử thì thứ tự này không phải là thứ tự toàn phần. Việc kiểm chứng điều này được dành cho người đọc.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Ví dụ 4.17

Trên tập hợp các số nguyên Z, xét qna hệ "chia hết" hay "ước số của", ký hiệu là | , được định nghĩa như sau:

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = k.b$$

Dễ dàng kiểm chứng rằng quan hệ | có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, bắc cầu. Từ đó ta có $(\mathbb{Z}, |)$ là một tập hợp có thứ tự.
Ta có 2 số nguyên 2 và 3, không có quan hệ với nhau theo quan hệ |.
Do đó | không phải là thứ tự toàn phần trên $\mathbb{Z}$.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Nhận xét.
Nếu (X, R) là một tập hợp có thứ tự và $A \subset X$ thì quan hệ thứ R thu hẹp trên tập A, cũng được ký hiệu là R (nếu không gây ra nhầm lẫn), là một quan hệ thứ tự trên A. Nói một cách khác, ta có (X, R) thứ tự và $A \subset X \Rightarrow (A, R)$ thứ tự.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Đối với một tập hợp có thứ tự thì việc đề cập đến các khái niệm như "phần tử nhỏ nhất", "phần tử lớn nhất", ... là điều rất tự nhiên. Dưới đây, chúng ta sẽ giới thiệu một số khái niệm quan trọng khi xét một tập hợp có thứ tự.

Định nghĩa 4.13

Cho $(X, \leq)$ là một tập hợp có thứ tự, và $A \subset X$.
Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử nhỏ nhất* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi $x \in A$ ta có : $a \leq x$.
Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử lớn nhất* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi $x \in A$ ta có : $x \leq a$.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 4.14

Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử tối tiểu* của tập hợp A nếu và chỉ nếu không tồn tại $x \in A$ sao cho $x \neq a$ và $x \leq a$.
Ta gọi một phần tử $a \in A$ là một *phần tử tối đại* của tập hợp A nếu và chỉ nếu không tồn tại $x \in A$ sao cho $x \neq a$ và $a \leq x$.

Nhận xét.

1. Phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) của một tập hợp, nếu có, là duy nhất.Ta ký hiệu phần tử nhỏ nhất của một tập hợpA là $\min A$ hay $\min(A)$, và ký hiệu phần tử lớn nhất của A là $\max A$ hay $\max(A)$.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa (tiếp tục)

2. Phần tử tối tiểu (tối đại) của một tập hợp có thứ tự không nhất thiết là duy nhất.

Ví dụ 4.18

Ví dụ: xét tập hợp $X = \{1, 2, 3\}$ với quan hệ 2 ngôi ρ được cho bởi $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 2)\}$. Chúng ta có thể kiểm chứng rằng (X, ρ) là một tập hợp có thứ tự. Với thứ tự ρ này, X có 2 phần tử tối tiểu là 1 và 3.

3. Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của một tập hợp, nếu có, là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của tập hợp đó.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Ví dụ 4.19

1. Trong tập hợp có thứ tự $(\mathbb{Z}, \leq)$, tập hợp
$$A = \{m \in \mathbb{Z} | m^2 < 100\}$$
có phần tử nhỏ nhất là -9, và phần tử lớn nhất là 9. Ta có thể viết: $\min(A) = -9; \max(A) = 9$.
2. Trong tập hợp có thứ tự $(R, \leq)$,
$$A = \{x \in R | x^2 < 100\}$$
không có phần tử nhỏ nhất và cũng không có phần tử lớn nhất.
3. Cho E là một tập hợp. Ta đã biết $(P(E), \subset)$ là một tập hợp có thứ tự. Với thứ tự này $P(E)$ có phần tử nhỏ nhất là $\emptyset$, phần tử lớn nhất là E.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 4.15

Cho $(X, \leq)$ là một tập hợp có thứ tự, và $A \subset X$. Ta gọi một phần tử $x \in X$ là một *chặn dưới* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi $a \in A$ ta có : $x \leq a$. *Chặn dưới lớn nhất* (nếu có), tức là phần tử lớn nhất trong tập hợp tất cả những chặn dưới của A được ký hiệu là $\inf(A)$.

Định nghĩa 4.16

Ta gọi một phần tử $x \in X$ là một *chặn trên* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi $a \in A$ ta có : $a \leq x$. *Chặn trên nhỏ nhất* (nếu có), tức là phần tử nhỏ nhất trong tập hợp tất cả những chặn trên, của A được ký hiệu là $\sup(A)$.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.1. Các định nghĩa

Ví dụ 4.20

Trong $(\mathbb{R}, \leq)$, $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 100|\}$. Ta có $\sup(A) = 10$ và $\inf(A) = -10$.

Định nghĩa 4.17 (**Thứ tự tốt**)

Một tập hợp có thứ tự được gọi là có *thứ tự tốt* (hay được sắp tốt) nếu và chỉ nếu mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ 4.21

1. Tập hợp thứ tự $(\mathbb{N}, \leq)$ là một tập hợp được sắp tốt.
2. Tập hợp có thứ tự $(\mathbb{Z}, \leq)$ không phải là một tập hợp được sắp tốt vì $\mathbb{Z}$ không có phần tử nhỏ nhất.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.2. Biểu diễn quan hệ thứ tự

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi giữa một tập hợp hữu hạn $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ và một tập hữu hạn $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Quan hệ R có thể được biểu diễn bởi ma trận $MR = (mij)$ gồm m dòng và n cột (tức là ma trận cấp $m \times n$), trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ta gọi ma trận MR là *ma trận biểu diễn* của quan hệ R.

5. Quan hệ thứ tự - 4.5.2. Biểu diễn quan hệ thứ tự

Ví dụ 4.22

Với $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{a, b, c\}$, thì các quan hệ sau đây
$R = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$
$S = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, b), (2, c), (3, c)\}$
có các ma trận biểu diễn là

$$MR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad MS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập X hữu hạn và có n phần tử thì ma trận biểu diễn của R là một ma trận có n dòng và n cột (tức là ma trận vuông cấp n).
Chú ý. Ngoài cách biểu diễn quan hệ dưới dạng ma trận ta còn biểu đồ (dạng đồ thị) để biểu diễn quan hệ. Cách biểu diễn này sẽ được xét đến trong phần sau, khi nói về biểu đồ Hasse của một cấu trúc

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

- Sắp xếp topo là một vấn đề quan trọng trong việc khảo sát các cấu trúc thứ tự hữu hạn và phương pháp sắp xếp topo thường được sử dụng để giải nhiều bài toán thực tế. Chúng ta thử xem bài toán đặt ra như sau:
- Giả sử có một đề tài gồm 20 công việc khác nhau. Một số công việc chỉ có thể được thực hiện sau khi một số công việc khác được thực hiện hoàn tất. Chúng ta phải thực hiện các công việc theo thứ tự nào?
- Để mô hình cho vấn đề, chúng ta đặt X là tập hợp 20 công việc của đề tài; trên X ta xét một thứ tự (hay quan hệ thứ tự) $\leq$ sao cho $a \leq b$ nếu và chỉ nếu a và b là 2 công việc trong đó công việc b chỉ có thể được bắt đầu khi công việc a đã được hoàn thành.
- Muốn có một kế hoạch thực hiện các công việc cho đề tài chúng ta phải tìm ra một thứ tự cho tất cả 20 công việc "tương thích" với thứ tự $\leq$ nêu trên.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

Trước hết chúng ta nêu ra định nghĩa khái niệm “tương thích" như sau

Định nghĩa 4.18

Cho (X, ρ) là một tập hợp có thứ tự. Một thứ tự toàn phần $\leq$ trên X được gọi là *tương thích* với thứ tự ρ nếu và chỉ nếu

$$a\rho b \Rightarrow a \leq b, \forall a, b \in X.$$

Việc xây dựng thứ tự toàn phần tương thích với một thứ tự cho trước được gọi là *sắp xếp topo*.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

- Thuật toán sắp xếp topo cho một tập hợp hữu hạn có thứ tự dựa vào kết quả nêu trong các định lý trên.
- Để định nghĩa một thứ tự toàn phần trên (X, ρ), trước hết ta chọn ra một phần tử tối tiểu a_1 của X; phần tử này tồn tại do định lý 1.
- Kế đó, chú ý rằng Nếu tập hợp $X \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ thì $(X \setminus \{a_1\}, \rho)$ cũng là một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) có thứ tự. Ta lại chọn ra phần tử tối tiểu a_2 trong $X \setminus \{a_1\}$, rồi loại a_2 khỏi việc xem xét ở bước tiếp theo để chọn phần tử tối tiểu trong $X \setminus \{a_1, a_2\}$ nếu tập hợp $X \setminus \{a_1, a_2\}$ khác rỗng.
- Tiếp tục quá trình này bằng cách chọn phần tử tối tiểu a_{k+1} trong $X \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ khi tập hợp còn phần tử.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo (tiếp tục)

- Vì X là một tập hợp hữu hạn nên quá trình chọn trên phải dừng. Cuối c ng ta đã sắp các phần tử của tập hợp X thành một dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa điều kiện : với mọi i, j sao cho $i < j$ ta có $a_i \rho a_j$ hoặc a_i và a_j không có quan hệ trong thứ tự ρ.
- Như vậy chọn thứ tự toàn phần $\leq$ trên X được xác định bởi dây chuyền

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$$

thì ta được một thứ tự toàn phần trên X tương thích với thứ tự ρ. Thuật toán sắp xếp topo có thể được viết dưới dạng mã giả như sau:

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

Thuật toán. Sắp xếp topo
Đầu vào : (X, ρ) là một cấu trúc thứ tự hữu hạn.
Đầu ra : Dãy $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là một sự sắp xếp topo của (X, ρ).

1. $k := 1$; $S := \emptyset$;
2. while $X \neq \emptyset$ do
   begin

   $a_k :=$ một phần tử tối tiểu của X // (xem định lý 1 và thuật toán 1)
   $S := S \cup \{a_k\}$
   $X := X \setminus \{a_k\}$
   $k := k + 1$

   end
3. Xuất S.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

Ví dụ 4.23

Tìm một thứ tự toàn phần tương thích với tập hợp có thứ tự $(\{1, 5, 2, 4, 12, 20\}, |)$.

Lời giải.

- Đầu tiên ta chọn một phần tử tối tiểu. Phần tử này phải là 1 vì đó là phần tử tối tiểu duy nhất (hay phần tử nhỏ nhất).
- Kế đó ta chọn phần tử tối tiểu của $(\{5, 2, 4, 20, 12\}, |)$. Có 2 phần tử tối tiểu trong tập hợp có thứ tự này là 2 và 5.
- Ta chọn 5. Những phần tử còn lại là $\{2, 4, 20, 12\}$. Trong tập hợp này ta chọn một phần tử tối tiểu, ví dụ là 2.
- Tiếp tục quá trình này ta lần lượt chọn ra được các phần tử 4, 20, và 12.
- Cuối cùng ta được một thứ tự toàn phần cho bởi:

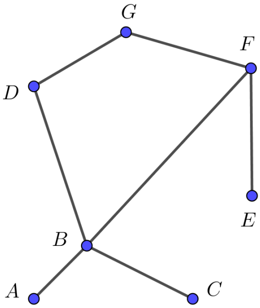
$$1 \leq 5 \leq 2 \leq 4 \leq 20 \leq 12.$$

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

Ví dụ 4.24

Giả sử có một đề tài ở một công ty máy tính đòi hỏi phải hoàn thành 7 công việc A, B, C, D, E, F, G. Một số công việc chỉ có thể bắt đầu sau khi đã hoàn thành một số công việc khác. Nói một c ách khác, có một thứ tự ρ được định ra trên tập hợp các công việc như sau : (công việc X) ρ (công việc Y) nếu và chỉ nếu công việc Y chỉ có thể bắt đầu khi công việc X đã được thực hiện hoàn tất. Biểu đồ Hasse cho 7 công việc ứng với thứ tự này là :

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo



Hình 4.1:

Hãy tìm một thứ tự thực hiện cho 7 công việc để có thể hoàn thành đề tài.

4.5. Quan hệ thứ tự - 4.5.3. Sắp xếp topo

Lời giải. Áp dụng phương pháp sắp xếp topo ta đạt được một thứ tự có thể thực hiện cho các công việc là

$$A \leq C \leq B \leq D \leq E \leq F \leq G.$$

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Định nghĩa 4.19

Cho $(L, \leq)$ là một tập hợp có thứ tự. Ta nói $(L, \leq 4)$ là một *dàn* nếu và chỉ nếu với mọi $a, b \in L$, tập hợp $\{a, b\}$ có chặn dưới lớn nhất và có chặn trên nhỏ nhất; tức là tồn tại $\sup(a, b)$ và $\inf(a, b)$. Ta sẽ dùng ký hiệu $a \vee b$ và $a \wedge b$ để chỉ $\sup(a, b)$ và $\inf(a, b)$

$$a \vee b = \sup(a, b) \qquad a \wedge b = \inf(a, b).$$

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

1. Tập hợp có thứ tự toàn phần là một dàn, với $a \vee b = \max(a, b)$ và $a \wedge b = \min(a, b)$.
2. Trong dàn $(L, \leq)$, phần tử $\sup(a, b) = a \vee b$ được đặc trưng bởi 2 tính chất sau:
   (1) $a \leq a \vee b$ và $b \leq a \vee b$,
   (2) $\forall c \in L : (a \leq c$ và $b \leq c) \Rightarrow (a \vee b \leq c)$.
3. Trong dàn $(L, \leq)$, phần tử $\inf(a, b) = a \wedge b$ được đặc trưng bởi 2 tính chất sau:
   (1) $a \wedge b \leq a$ và $a \wedge b \leq b$,
   (2) $\forall c \in L : (c \leq a$ và $c \leq b) \Rightarrow (c \leq a \wedge b)$.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Ví dụ 4.25

Cho E là một tập hợp; Tập hợp $(P(E), \subseteq)$ là một dàn. Với mọi $A, B \in P(E)$, ta thấy $A \cup B$ và $A \cap B$ lần lượt chính là chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất theo thứ tự $\subseteq$. Nói cách khác, ta có $A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B$

Ví dụ 4.26

Ta đã biết rằng $(N, |)$ là một tập hợp có thứ tự. Theo thứ tự $|$, thứ tự "chia hết", với 2 số tự nhiên a và b ta có chặn trên nhỏ nhất chính là bội số chung nhỏ nhất của chúng, chặn dưới lớn nhất chính là ước số chung lớn nhất của chúng. Vậy $(N, |)$ là một dàn, và ta có
$a \vee b = [a, b]$ (bội số chung nhỏ nhất của a và b)
$a \wedge b = (a, b)$ (ước số chung lớn nhất của a và b)

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

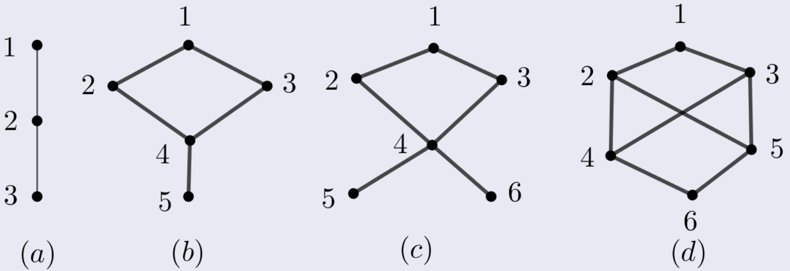
Ví dụ 4.27

Cho n là một số tự nhiên. Đặt D_n là tập hợp tất cả các ước số không âm của n. Ta có $(D_n, |)$ là một tập hợp có thứ tự. Cho a và b là 2 ước số không âm của n, ta có n là một bội số chung của a và b. Do đó bội số chung nhỏ nhất $[a, b]$ của a và b cũng là một ước số của n. Vậy $[a, b]$ chính là chận trên nhỏ nhất của a và b trong D_n. Ước số chung lớn nhất (a, b) của a và b cũng là một ước số của n, nên ta có (a, b) chính là chận dưới lớn nhất của a và b trong D_n.
Tóm lại, ta có thể kết luận rằng $(D_n, |)$ là một dàn.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Ví dụ 4.28

Các tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi các biểu đồ Hasse trong hình dưới đây có phải là dàn hay không?



Hình 4.2: Các tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi (a) và (b) là các dàn

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi (c) không phải là một dàn vì $5 \wedge 6$ không tồn tại.
Tập hợp có thứ tự được biểu diễn bởi (d) không phải là một dàn vì $4 \vee 5$ không tồn tại.
Chú ý. Với 2 dàn X và Y ta có thể định ra một thứ tự trên tích Descartes $X \times Y$ dựa vào các thứ tự trên X và trên Y để $X \times Y$ trở thành một dàn (xem phần bài tập).

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Sau đây chúng ta sẽ giới thiệu tiếp khái niệm “dàn con" và "đồng cấu dàn".

Định nghĩa 4.20

Cho$(L, \leq)$ là một dàn và B là một tập hợp con của L. Ta nói B là một *dàn con* của L khi và chỉ khi với mọi $a, b \in B$ ta có $a \vee b \in B$ và $a \wedge b \in B$.

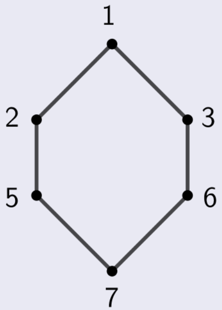
Ví dụ 4.29

Cho một số tự nhiên n, ta có D_n là một dàn con của dàn $(N, |)$.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Ví dụ 4.30

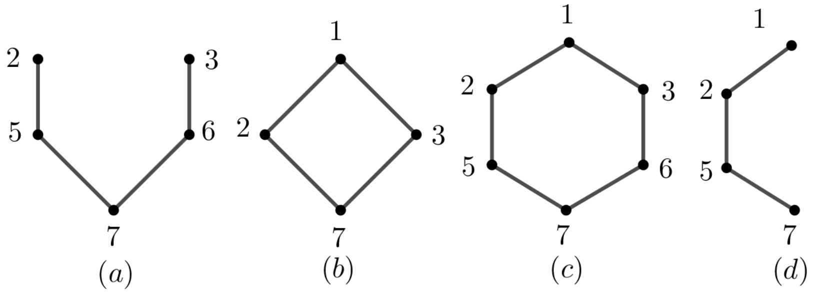
Xem dàn L có biểu đồ Hasse như sau



Hình 4.3:

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Trong cấu trúc thứ tự có các biểu đồ Hasse như dưới đây, cấu trúc nào là một dàn con của dàn L? Xem dàn L có biểu đồ Hasse như sau



Hình 4.4:

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Tập hợp có thứ tự (a) không phải là một dàn con của L vì $2 \vee 3$ không thuộc tập hợp đó.
Tập hợp có thứ tự (c) cũng không phải là một dàn con của L vì $2 \wedge 3$ không thuộc tập hợp đó.
Các tập hợp có thứ tự (b) và (d) đúng là các dàn con của L.

Ví dụ 4.31

Cho $(L, \leq)$ là một dàn và a, b là các phần tử thuộc L. Đặt

$$[a, b] = \{x \in L | a \leq x \text{ và } x \leq b\}$$

Chứng minh rằng $[a, b]$ là một dàn con của L với mọi a,b thỏa $a \leq b$.
Việc chứng minh tính chất này khá đơn giản và được dành cho phần bài tập.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Định nghĩa 4.21

Cho $(L, \leq)$ và $(M, \leq)$ là các dàn. Một ánh xạ $f : L \to M$ được gọi là một *đồng cấu dàn* nếu và chỉ nếu

$$\forall x, y \in L : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Trường hợp f có thêm tính chất song ánh thì ta nói f là một *đẳng cấu dàn*.

Ghi chú. Ta có thể chứng minh được rằng nếu $f : L \to M$ là một đẳng cấu dàn thì với mọi $x, y \in L$ ta có

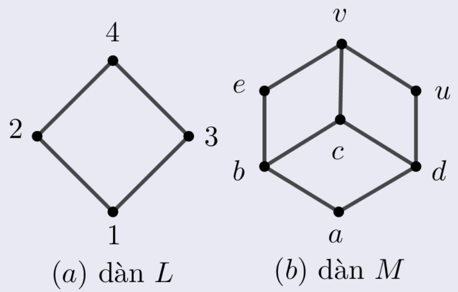
$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Ví dụ 4.32

Xem hai dàn L và M có biểu đồ Hasse như dưới đây



Hình 4.5:

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Ánh xạ $f : L \to M$ được định nghĩa bởi

$$f(1) = b, f(2) = e, f(3) = c, f(4) = v$$

là một đồng cấu dàn.
Ánh xạ $g : L \to M$ được định nghĩa bởi :

$$g(1) = a, g(2) = b, g(3) = d, g(4) = v$$

không phải là một đồng cấu dàn vì $g(2) \vee g(3) = b \vee d = c$, nhưng $g(2 \vee 3) = g(4) = v \neq c$.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Ví dụ 4.33

Cho $E = \{a, b\}$. Hai dàn $(P(E), \subset)$ và $(D_{10}, |)$ đẳng cấu với nhau. Thật vậy, xét ánh xạ $f : P(E) \to D_{10}$ được định nghĩa bởi

$$f(\emptyset) = 1, f(\{a\}) = 2, f(\{b\}) = 5, f(\{a, b\}) = 10$$

ta có thể kiểm tra dễ dàng f là một đẳng cấu dàn. Điều này có thể thấy rõ khi ta quan sát các biểu đồ Hasse của 2 dàn trên.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu một số tính chất của dàn. Việc chứng minh các tính chất này được xem như bài tập.

Định lý 4.4

Với mọi phần tử x, y, z *thuộc dàn* $(L, \leq)$ *ta có*

1. $x \vee x = x, x \wedge x = x$ *(tính lũy đẳng)*
2. $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ *(tính giao hoán)*
3. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *(tính kết hợp)*
   $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
4. $(x \leq y) \Leftrightarrow (x \vee y = y) \Leftrightarrow (x \wedge y = x)$
5. $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$.

4.6. Dàn (lattice - tập bị chặn)

Định lý 4.5

Với mọi phần tử a, b, c, d thuộc dàn $(L, \leq)$ ta có

1. $(a \leq b) \Rightarrow (a \vee c \leq b \vee c$ *và* $a \wedge c \leq b \wedge c)$
2. $(a \leq b$ *và* $c \leq d) \Rightarrow (a \vee c \leq b \vee d$ *và* $a \wedge c \leq b \wedge d)$.

Định lý 4.6

Với mọi phần tử x, y, z thuộc dàn $(L, \leq)$ ta có

1. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
2. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
3. $(x \leq z) \Rightarrow (x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z)$.

4.7. Bài tập

▷ 4.1

Cho 2 tập hợp $X = \{a, b, c\}$ và $Y = \{b, c, d, e\}$
a. Tính $|X \times Y|$.
b. Tìm số quan hệ 2 ngôi trên Y.
c. Tìm số quan hệ giữa X và Y chứa $(b, c), (b, d)$.
d. Hãy tìm 1 quan hệ trên X có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.
e. Hãy tìm 1 quan hệ trên Y có tính phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.2

Cho $R \subseteq A \times A$. Ta định nghĩa $R^n (n = 1, 2, ...)$ bằng quy nạp như sau

$$R^1 = R, R^{n+1} = R^n.R.$$

a) cho $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Tìm $R^n (n = 1, 2, ...)$
b) Chứng minh tính chất: Quan hệ R trên tập A là bắc cầu khi và chỉ khi $R^n \subseteq R$.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.3

Cho $R \subseteq A \times B$. Quan hệ ngược của R là

$$R^{-1} = \{(b, a) : b \in B, a \in A \text{ và } (a, b) \in R\}.$$

Còn quan hệ bù của R là $\overline{R} = \{(a, b) : (a, b) \notin R\}$.
a) Cho $R = \{(a, b) : a < b\}$ trên tập hợp các số nguyên. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$.
b) Cho R là quan hệ trên tập tất cả các tỉnh, thành phố của Việt Nam và xác định $R = \{(a, b) : a \text{ là tỉnh giáp với tỉnh } b\}$. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.4

Chứng minh rằng
a) nếu quan hệ R trên tập A có tính đối xứng và bắc cầu thì R có tính phản xạ.
b) nếu quan hệ R trên tập A là phản xạ khi và chỉ khi quan hệ R^{-1} là phản xạ.
c) nếu quan hệ R trên tập A là phản xạ khi và chỉ khi quan hệ $\overline{R}$ là không phản xạ.

▷ 4.5

R là một quan hệ trên $A = 1, 2, 3, 4, 5$ với
$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,2), (5,5)\}$
R có phải là 1 quan hệ tương đương hay không?

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.6

Cho R là 1 quan hệ trên tập hợp các số tự nhiên với

$$R = \{(x, y) : x + y \text{ chẵn } \}.$$

Chứng minh R là 1 quan hệ tương đương.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.7

Cho R là 1 quan hệ trên $A \times A$ với $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ sao cho

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow b = d$$

a. Chứng minh R là 1 quan hệ tương đương.
b. Tìm lớp tương đương chứa $(1, 3)$.
c. Phân hoạch $A \times A$ thành các lớp tương đương tách biệt phân hoạch trên R.

▷ 4.8

Giả sử R là quan hệ trên các tập các xâu chữ cái tiếng Anh sao cho aRb khi và chỉ khi $l(a) = l(b)$, ở đây $l(x)$ là độ dài của xâu x. R có phải quan hệ tương đương không?

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.9

Chứng minh rằng quan hệ R trên các tập số nguyên được xác định aRb khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $a = -b$ là quan hệ tương đương.

▷ 4.10

Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập $\{0, 1, 2, 3\}$ cho dưới đây là quan hệ tương đương? Xác định các tính chất của một quan hệ tương đương mà các quan hệ khác không có

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$;

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.11

Giả sử A là một tệp khác rỗng và f là một hàm số có A là miền xác định. Trên A ta định nghĩa quan hệ R như sau

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

a) Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương.
b) Xác định lớp tương đương của R.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.12

Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận dưới đây có phải là quan hệ tương đương hay không?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▷ 4.13

Giả sử R_1 và R_2 là hai quan hệ tương đương trên tập A. Xác định xem các quan hệ $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ có nhất thiết là quan hệ tương đương hay không?

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.14

Xác định số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập 3 phần tử bằng cách liệt kê ra các quan hệ đó.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.15

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Trên A xác định quan hệ R như sau

$$\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a + b = 2k, (k = 1, 2, ...).$$

a) Biểu diễn R bằng các phương pháp liệt kê, ma trận và đồ thị có hướng.
b) Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A.
c) Tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra.
d) Cho $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5\}$. Tìm quan hệ tương đương S trên A mà S sinh ra phân hoạch A_1, A_2, A_3.
e) Chứng minh rằng $F = R \cup S$ là một quan hệ trên A mà $MF = RR \vee MS$.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.16

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Trên A xác định quan hệ R như sau

$$\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a - b = 3k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

a) Biểu diễn R bằng các phương pháp liệt kê, ma trận và đồ thị có hướng.
b) Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A.
c) Tìm phân hoạch tương đương trên A do R sinh ra.
d) Tìm quan hệ tương đương S trên A sinh ra các tập $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5, 6\}$.
e) Chứng minh rằng $R^{-1} = R$.

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.17

R là một quan hệ trên $A \times A$ với $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5),$
$(3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}$
R có phải là 1 quan hệ thứ tự hay không?

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.18

Cho là 1 quan hệ trên $X = \{2, 3, 4, 5, 12, 15, 60\}$ xác định bởi

$$\forall x, y \in X, x \prec y \Leftrightarrow y = kx, k \in \mathbb{Z}^+.$$

a. Chứng minh $\prec$ là 1 quan hệ thứ tự.
b. Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất xác định bởi quan hệ trên
c. Vẽ biểu đồ Hasse tương ứng

4.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 4.19

Cho là 1 quan hệ trên $A \times A$ với $A = \{2, 4, 6, 12, 24\}$ xác định bởi

$$\forall (x, y), (z, t) \in A, (x, y) \prec (z, t) \Leftrightarrow x + y = z + t.$$

$\prec$ có phải là 1 quan hệ thứ tự hay không? Nếu $\prec$ là 1 quan hệ thứ tự thì xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất xác định bởi quan hệ trên.