

► 1.1. Trong các phát biểu sau, cho biết phát biểu nào là mệnh đề. Khi là mệnh đề, cho biết chân trị của nó

a) 11 là số nguyên chẵn.

b) 23 là số nguyên tố.

c)  $x - 2y = 10$ .

d)  $\log_2 3 > \log_3 2$ .

e)  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  và  $4 > 5$ .

f) nếu  $2 + 3 = 4$  thì Hồ Chí Minh và Trần Hưng đạo là một người.

► 1.2. Đặt  $P, Q$  lần lượt là các mệnh đề

$P :=$  “Minh học chăm”,

$Q :=$  “Minh có kết quả học tập tốt”,

$R :=$  “Minh học giỏi môn Toán”.

Hãy viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó có sử dụng các phép nối.

a) Minh học chăm và có kết quả học tập tốt.

b) Minh học chăm nhưng không có kết quả học tập tốt.

c) Minh học chăm hay Minh có kết quả học tập tốt.

d) Nếu Minh học chăm thì Minh có kết quả học tập tốt.

e) Minh có kết quả học tập tốt khi và chỉ khi Minh học chăm.

► 1.3. Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau và cho biết dạng mệnh đề nào là hằng

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| a) $p \rightarrow (p \vee q)$   | d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$                |
| b) $p \rightarrow (p \wedge q)$ | e) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$                |
| c) $(p \wedge q) \rightarrow p$ | f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ |

► 1.4. Mệnh đề nào dưới đây là hằng đúng

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $p \Rightarrow (p \vee q)$        | d) $\overline{p \rightarrow q} \Rightarrow p$              |
| b) $p \Rightarrow (p \wedge q)$      | e) $(p \rightarrow q) \equiv (-p \vee q)$                  |
| c) $q \Rightarrow (p \rightarrow q)$ | f) $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ . |

► 1.5. Sử dụng logic mệnh đề để giải bài toán sau : Trong một phiên tòa xử án 3 bị can có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả 3 bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau

Anh A: Chị B có tội và anh C vô tội.

Chị B : Nếu anh A có tội thì anh C cũng có tội.

Anh C: Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội.

Hãy xét xem ai là người có tội ?

► 1.6. Cho các mệnh đề được phát biểu như sau, hãy tìm số lớn nhất các mệnh đề đồng thời là đúng.

- Quang là người khôn khéo
- Quang không gặp may mắn
- Quang gặp may mắn nhưng không khôn khéo
- Nếu Quang là người khôn khéo thì nó không gặp may mắn
- Quang là người khôn khéo khi và chỉ khi nó gặp may mắn
- Hoặc Quang là người khôn khéo, hoặc nó gặp may mắn nhưng không đồng thời cả hai.

► 1.7. Cho  $a$  và  $b$  là hai số nguyên dương. Biết rằng, trong 4 mệnh đề sau đây có 3 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai. Hãy tìm mọi cặp số  $(a, b)$  có thể có.

- $a + 1$  chia hết cho  $b$
- $a = 2b + 5$
- $a + b$  chia hết cho 3
- $a + 7b$  là số nguyên tố

► 1.8. Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, chứng minh rằng các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

- a)  $(P \wedge Q) \rightarrow P$   
 b)  $P \rightarrow (\bar{P} \rightarrow P)$   
 c)  $P \rightarrow ((Q \rightarrow (P \wedge Q))$   
 d)  $P \vee \bar{Q} \rightarrow \bar{P}$   
 e)  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

► 1.9. Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, xét xem biểu thức mệnh đề G có là hệ quả của F không ?

- a)  $F = P \wedge (Q \vee R), G = (P \wedge Q) \vee R$   
 b)  $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R), G = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$   
 c)  $F = P \wedge Q, G = (\bar{P} \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \bar{Q})$

► 1.10. Tương tự bài tập 16 và 17, chứng minh các tương đương logic sau đây

- a)  $(P \vee Q) \wedge \bar{P} \wedge Q \equiv P$   
 b)  $(\bar{P} \vee Q) \wedge R \vee \bar{Q} \equiv Q \wedge R$   
 c)  $((P \vee Q) \wedge (P \vee \bar{Q})) \vee Q \equiv P \vee Q$   
 d)  $\bar{P} \vee \bar{Q} \vee ((\bar{P} \wedge Q) \vee \bar{Q}) \equiv \bar{Q} \wedge \bar{P}$   
 f)  $P \vee (P \wedge (P \vee Q)) \equiv P$   
 g)  $P \vee Q \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge R) \equiv P \vee Q \vee R$   
 h)  $((\bar{P} \vee \bar{Q}) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)) \equiv P \wedge Q$   
 i)  $P \wedge ((\bar{Q} \rightarrow (R \wedge R)) \vee \bar{Q} \vee (R \wedge S) \vee (R \wedge \bar{S})) \equiv P$   
 j)  $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee S \vee \bar{Q}) \wedge (P \vee \bar{S} \vee R) \equiv P \vee (R \wedge (S \vee \bar{Q}))$

► 1.11. Sau khi nướng 1 chiếc bánh cho 2 đứa cháu trai và 2 đứa cháu gái đến thăm, Dì Nellie lấy bánh ra khỏi lò nướng và để nguội. Sau đó, cô rời khỏi nhà để đến đóng cửa hàng ở gần đó. Lúc trở về thì có ai đó đã ăn 1/4 chiếc bánh và thậm chí còn đặt lại cái đĩa dơ bên phần bánh còn lại. Vì không còn ai đến nhà Dì ngày hôm đó trừ 4 đứa cháu nên Dì biết ngay là 1 trong 4 đứa đã ăn mà chưa được cho phép. Dì Nellie bèn hỏi 4 đứa thì được các câu trả lời như sau:

- Charles : Kelly đã ăn phần bánh
- Dawn : Con không ăn bánh
- Kelly : Tyler ăn bánh
- Tyler : Con không ăn, Kelly nói chơi khi bảo rằng con ăn bánh.

Nếu chỉ 1 trong 4 câu trả lời trên là đúng và chỉ 1 trong 4 đứa cháu là thủ phạm, hãy tìm ra người mà Dì Nellie phải phạt ?

► **1.12.** Kiểm tra tính tương đương logic của 2 mệnh đề sau :

$$F = P \rightarrow Q, G = \overline{P \vee Q}$$

► **1.13.** a. Nếu biết mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là sai, hãy cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

$$P \wedge Q, \quad \overline{P} \vee Q, \quad Q \rightarrow P$$

b. Cho các biểu thức mệnh đề sau:

$$((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \vee M)$$

Xác định chân trị của các biến mệnh đề  $P, Q, R, S, M$  nếu các biểu thức mệnh đề trên là sai.

► **1.14.** Nếu  $Q$  có chân trị là  $T$ , hãy xác định chân trị của các biến mệnh đề  $P, R, S$  nếu biểu thức mệnh đề sau cũng là đúng

$$(Q \rightarrow ((\overline{P} \vee R) \wedge \overline{S})) \wedge (\overline{S} \rightarrow (\overline{R} \wedge Q))$$

► **1.15.** Chỉ ra biểu thức sau đây là hằng đúng

$$((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge (d \vee \overline{c}) \wedge (\overline{d} \vee e) \wedge \overline{e}) \rightarrow \overline{a}$$

► **1.15.** Thay  $d \vee \overline{c} \equiv c \rightarrow d$  và  $\overline{d} \vee e \equiv d \rightarrow e$ . Công thức trên có mô hình suy diễn sau

$$\frac{\begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow c \\ c \rightarrow d \\ d \rightarrow e \end{cases}}{\therefore \overline{a}} \text{ (Tđl)} \equiv \frac{\overline{e}}{\therefore \overline{a}} \text{ (Pđ)} \equiv \frac{\overline{a}}{\therefore \overline{a}} \equiv 1$$

► **1.16.** Suy luận dưới đây có đúng không

$$\begin{array}{l}
 a \rightarrow b \\
 b \rightarrow c \\
 c \rightarrow d \\
 \frac{a}{\therefore d} \text{ (Tđl)} \equiv \frac{a \rightarrow d}{\therefore d} \text{ (Kđ)} \equiv \frac{d}{\therefore d} \equiv 1
 \end{array}$$

► 1.16. Suy luận đúng.

► 1.17. Chỉ ra công thức dưới đây là hằng đúng

$$((A \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow D)$$

► 1.17. Vì  $\overline{\bar{B} \rightarrow D} \equiv \bar{B} \wedge \bar{D}$  nên áp dụng quy tắc mâu thuẫn ta có suy luận sau

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow B}{\bar{A} \rightarrow C} \equiv \frac{A \rightarrow B}{\bar{A} \rightarrow C} \equiv \frac{\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \bar{B} \end{array} \right\}}{\bar{A} \rightarrow C} \equiv \frac{\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} \\ \bar{A} \rightarrow C \end{array} \right\}}{\bar{C}} \text{ (Kđ)} \equiv \\
 \frac{C \rightarrow D}{\therefore \bar{B} \rightarrow D} \equiv \frac{C \rightarrow D}{\therefore 0} \equiv \frac{\left\{ \begin{array}{l} C \rightarrow D \\ \bar{D} \end{array} \right\}}{\therefore 0} \equiv \frac{\bar{C}}{\therefore 0} \equiv \frac{\bar{C}}{\therefore 0} \equiv \frac{C \wedge \bar{C}}{\therefore 0} \equiv \frac{0}{\therefore 0} \equiv 1
 \end{array}$$

Vậy công thức trên là hằng đúng.

► 1.18. Chỉ ra suy luận dưới đây là đúng

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow y \\
 \bar{x} \rightarrow z \\
 z \rightarrow w \\
 \hline
 \therefore \bar{y} \rightarrow w
 \end{array}$$

► 1.18. Dùng quy tắc mâu thuẫn ta có biểu thức tương đương

$$\begin{array}{c}
 x \rightarrow y \\
 \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \rightarrow z \\ z \rightarrow w \end{array} \right. \\
 \frac{\bar{y} \wedge \bar{w}}{\therefore 0} \quad (\text{Tđl}) \equiv \frac{\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow y \\ \bar{y} \\ \bar{x} \rightarrow w \\ \bar{w} \end{array} \right.}{\therefore 0} \quad (\text{Pđ}) \equiv \\
 \equiv \frac{\bar{x}}{\therefore 0} \equiv \frac{x}{\therefore 0} \equiv \frac{\bar{x} \wedge x}{\therefore 0} \equiv \frac{0}{\therefore 0} \equiv 1
 \end{array}$$

► 1.19. Suy luận dưới đây có đúng không? "Nếu muốn đi họp sáng thứ ba thì An phải dậy sớm. Nếu An đi nghe nhạc tối thứ hai thì An sẽ về muộn. Nếu An về muộn và thức dậy sớm thì An phải đi họp sáng thứ ba và chỉ được ngủ dưới 7 giờ trong ngày. Nhưng An không thể đi họp nếu chỉ đi ngủ dưới 7 giờ trong ngày. Vậy hoặc An không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc An phải bỏ họp sáng thứ ba."

► 1.19. Đặt

$p_1$  = "An muốn đi họp sáng thứ ba";

$p_2$  = "An phải dậy sớm";

$p_3$  = "An đi nghe nhạc tối thứ hai";

$p_4$  = "An sẽ về muộn";

$p_5$  = "An ngủ dưới 7 giờ trong một ngày".

Khi đó suy luận trên tương đương với

$$\begin{array}{c}
 p_1 \rightarrow p_2 \\
 p_3 \rightarrow p_4 \\
 (p_4 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_5) \\
 p_5 \rightarrow \bar{p}_1 \\
 \frac{\therefore \bar{p}_3 \vee \bar{p}_1 w}{\therefore 0} \quad (\text{Mt}) \equiv \frac{\begin{array}{l} p_1 \rightarrow p_2 \\ p_3 \rightarrow p_4 \\ (p_4 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_5) \\ p_5 \rightarrow \bar{p}_1 \\ \bar{p}_3 \vee \bar{p}_1 \end{array}}{\therefore 0} \equiv
 \end{array}$$

$$\frac{\begin{cases} p_1 \rightarrow p_2 \\ p_1 \\ p_3 \rightarrow p_4 \\ p_3 \\ (p_4 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_5) \\ p_5 \rightarrow \bar{p}_1 \end{cases}}{\therefore 0} \text{ (Kđ)} \equiv \frac{\begin{cases} p_4 \wedge p_2 \\ (p_4 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_5) \\ p_5 \rightarrow \bar{p}_1 \\ p_1 \equiv \bar{p}_1 \end{cases}}{\therefore 0}$$

$$\text{(Kđ và phủ định)} \equiv \frac{p_1 \wedge p_5}{\therefore 0} \equiv \frac{\bar{p}_5}{\therefore 0} \equiv \frac{p_5 \wedge \bar{p}_5}{\therefore 0} \equiv \frac{0}{\therefore 0} \equiv 1$$

► 1.20. "Nếu An đi làm về muộn thì vợ An sẽ rất giận dữ. Nếu Bình thường xuyên vắng nhà thì vợ Bình cũng sẽ rất giận dữ. Nếu vợ Bình hoặc vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ nhận được than phiền, mà cô Hà không hề nhận được lời than phiền. Vậy An đi làm về sớm và Bình rất ít khi vắng nhà."

Dùng quy tắc suy diễn để chỉ ra suy luận trên là đúng.

► 1.20. Đặt

$p_1$  = "An đi làm về muộn";

$p_2$  = "Vợ An sẽ rất giận dữ";

$p_3$  = "Bình thường xuyên vắng nhà";

$p_4$  = "Vợ Bình cũng rất giận dữ";

$p_5$  = "Cô Hà bạn họ nhận được lời than phiền".

Suy luận trên tương đương với

$$\frac{\begin{matrix} p_1 \rightarrow p_2 \\ p_3 \rightarrow p_4 \\ \left\{ (p_2 \vee p_4) \rightarrow p_5 \right. \\ \left. \bar{p}_5 \right\} \end{matrix}}{\therefore \bar{p}_1 \vee \bar{p}_3} \text{ (Pđ)} \equiv \frac{\begin{matrix} p_1 \rightarrow p_2 \\ \left\{ p_3 \rightarrow p_4 \right. \\ \left. \bar{(p_2 \vee p_4)} \right\} \end{matrix}}{\therefore \bar{p}_1 \vee \bar{p}_3} \equiv$$

$$\frac{\begin{matrix} \left\{ p_1 \rightarrow p_2 \right. \\ \left\{ \bar{p}_2 \right. \\ \left\{ p_3 \rightarrow p_4 \right. \\ \left. \bar{p}_4 \right\} \end{matrix}}{\therefore \bar{p}_1 \vee \bar{p}_3} \text{ (Pđ)} \equiv \frac{\bar{p}_1 \vee \bar{p}_3}{\therefore \bar{p}_1 \vee \bar{p}_3} \equiv 1$$

▷ 1.21. Chỉ ra suy luận dưới đây là sai

"Ông mình đã khẳng định rằng, nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ xin nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông Minh nghỉ việc mà vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe máy. Biết rằng, nếu vợ ông Minh hay đi làm muộn thì sẽ mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương. Vậy nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta không đi làm muộn."

▷ 1.21. Đặt

$p_1$  = "Ông Minh được tăng lương";

$p_2$  = "Ông Minh xin nghỉ việc";

$p_3$  = "Vợ ông Minh bị mất việc";

$p_4$  = "Ông Minh phải bán xe";

$p_5$  = "Vợ ông Minh đi làm muộn";

Đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn sau

$$\begin{array}{l} \bar{p}_1 \rightarrow p_2 \\ (p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_4 \\ p_5 \rightarrow p_3 \\ p_1 \\ \hline \therefore \bar{p}_4 \rightarrow p_5 \end{array}$$

Chọn  $p_4 = 0$  và  $p_5 = 1$  thì kết luận sai.

Từ  $p_4 = 0$  và  $p_5 = 1$  ta có  $p_3 = 1, p_2 = 0$  và  $p_1 = 1$ . Với những giá trị này thì giả thiết đúng. Vậy giả thiết đúng kết luận sai thì mô hình trên là sai. Hay đoạn văn trên là sai.

▷ 1.22. Tìm phản ví dụ cho ví dụ dưới đây

$\begin{array}{l} X \equiv Y \\ Y \rightarrow Z_1 \\ \text{a) } \frac{Z_1 \vee \bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 \rightarrow Y} \\ \hline \therefore Z_2 \end{array}$	$\begin{array}{l} X_1 \\ X_1 \rightarrow X_2 \\ \text{b) } \frac{X_1 \rightarrow (X_3 \vee \bar{X}_2)}{\bar{X}_3 \vee \bar{X}_4} \\ \hline \therefore X_4 \end{array}$
--	--

▷ 1.22. a) Chọn  $X \equiv Y = 1$  ta suy ra  $Z_1 = 1$  và  $Z_2 = 0$ . Như vậy giả thiết đúng kết luận sai. Hay suy luận trên không đúng.

b) Suy luận này sai vì chọn  $X_1 = X_2 = X_3 = 1$  và  $X_4 = 0$ . Khi đó giả thiết đúng kết luận sai.



► 1.23. Lập bảng chân trị và chỉ ra các mệnh đề luôn đúng:

- a)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow x$
- b)  $((\bar{a} \rightarrow b) \vee (c \rightarrow \bar{b})) \rightarrow (a \wedge c)$
- c)  $(m \rightarrow (n \rightarrow p)) \rightarrow (m \rightarrow \bar{p})$
- d)  $(p \rightarrow (r \vee p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p))$

► 1.24. Lập bảng chân trị cho biểu thức sau

- a)  $((a \rightarrow b) \vee \bar{a})$
- b)  $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$

► 1.25. Lập bảng chân trị thu gọn các biểu thức sau

- a)  $(a \rightarrow b) \wedge a$
- b)  $(a \vee \bar{c}) \leftrightarrow b$

► 1.26. Kiểm tra các công thức sau có đồng nhất đúng không?

- a)  $((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow b$
- b)  $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \leftrightarrow (b \leftrightarrow a))$

► 1.27. Kiểm tra các biểu thức sau

- a)  $(a \leftrightarrow b)$  logic kéo theo  $(a \rightarrow b)$ ?
- b)  $\bar{a} \vee b$  và  $\bar{b} \vee a$  là logic tương đương?

► 1.28. Hãy loại bỏ các cặp ngoặc

- a)  $((b \leftrightarrow (\bar{c} \vee (d \wedge a))) \leftrightarrow (b \rightarrow b))$
- b)  $((((a \wedge \bar{b}) \wedge c) \vee d)$

► 1.29. Viết ngoặc cho công thức sau

- a)  $c \rightarrow \overline{a \vee c} \wedge a \leftrightarrow b$ .
- b)  $c \rightarrow a \rightarrow a \leftrightarrow \bar{a} \vee b$ .

► 1.30. Xác định biểu thức đồng nhất đúng và đồng nhất sai

- a)  $a \rightarrow (a \vee a)$ ;
- b)  $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$