TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

BÀI 6

KHÁI NIỆM ĐỒ THỊ

Nội dung

Giới thiệu

- Lý thuyết đồ thị là một ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại.
- Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ 18 bởi nhà toán học Thụy Sĩ tên là Leonhard Euler.
- Ông đã dùng đồ thị để giải quyết bài toán 7 chiếc cầu Konigsberg nổi tiếng.

Đồ thị cũng được dùng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

- Thí dụ, dùng đồ thị để xác định xem có thực hiện một mạch điện trên một bảng điện phẳng được không.
- Chúng ta cũng có thể phân biệt hai hợp chất hóa học có cùng công thức phân tử nhưng có cấu trúc khác nhau nhờ đồ thị.

Giới thiệu (tiếp tục)

- Chúng ta cũng có thể xác định xem hai máy tính có được nối với nhau bằng một đường truyền thông hay không nếu dùng mô hình đồ thị mạng máy tính.
- Đồ thị với các trọng số được gán cho các cạnh của nó có thể dùng để giải các bài toán như bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong một mạng giao thông.
- Chúng ta cũng có thể dùng đồ thị để lập lịch thi và phân chia kênh cho các đài truyền hình.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh (vô hướng hoặc có hướng) nối các đỉnh đó.
- Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị.
- Nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau có thể giải được bằng mô hình đồ thị.
- Chẳng hạn người ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn sự cạnh tranh các loài trong một môi trường sinh thái, dùng đồ thị để biểu diễn ai có ảnh hưởng lên ai trong một tổ chức nào đó, và cũng có thể dùng đồ thị để biểu diễn các kết cục của cuộc thi đấu thể thao.
- Chúng ta cũng có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như bài toán tính số các tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không,

6.1. Định nghĩa và ví dụ (tiếp tục)

- hay để giải bài toán đi tham quan tất cả các đường phố của một thành phố sao cho mỗi đường phố đi qua đúng một lần,
- hoặc bài toán tìm số các màu cần thiết để tô các vùng khác nhau của một bản đồ.

Trong đời sống, chúng ta thường gặp những sơ đồ, như sơ đồ tổ chức bộ máy, sơ đồ giao thông, sơ đồ hướng dẫn thứ tự đọc các chương trong một cuốn sách, ..., gồm những điểm biểu thị các đối tượng được xem xét (người, tổ chức, địa danh, chương mục sách, ...) và nối một số điểm với nhau bằng những đoạn thẳng (hoặc cong) hay những mũi tên, tượng trưng cho một quan hệ nào đó giữa các đối tượng. Đó là những thí dụ về đồ thị.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.1

Một *đơn đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt.

Định nghĩa 6.2

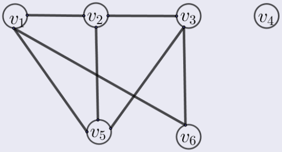
Một *đa đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một họ E mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt. Hai cạnh được gọi là cạnh bội hay song song nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.

Rõ ràng mỗi đơn đồ thị là đa đồ thị, nhưng không phải đa đồ thị nào cũng là đơn đồ thị.

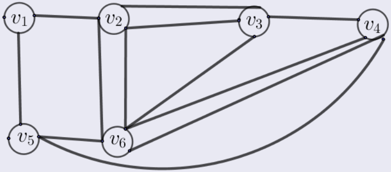
6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.1

Hình 6.1 đơn đồ thị $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_6), (v_3, v_5), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_1, v_6)\}$.
Hình 6.2 đa đồ thị $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_3, v_6), (v_4, v_6), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_2), (v_6, v_4)\}$.



Hình 6.1: Đơn đồ thị



Hình 6.2: Đa đồ thị

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.3

Một *giả đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một họ E mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh (không nhất thiết là phân biệt).
Với $v \in V$, nếu $(v, v) \in E$ thì ta nói có một *khuyên* tại đỉnh v.

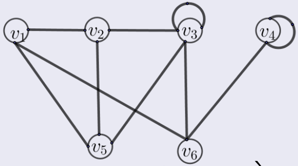
Tóm lại

- giả đồ thị là loại đồ thị vô hướng tổng quát nhất vì nó có thể chứa các khuyên và các cạnh bội.
- Đa đồ thị là loại đồ thị vô hướng có thể chứa cạnh bội nhưng không thể có các khuyên,
- còn đơn đồ thị là loại đồ thị vô hướng không chứa cạnh bội hoặc các khuyên.

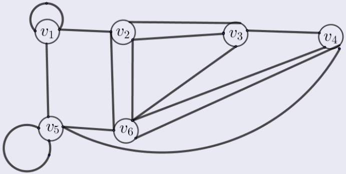
6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.2

Hình 6.3 đơn đồ thị $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_6), (v_3, v_5), (v_3, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_4, v_6), (v_4, v_4)\}$.
Hình 6.4 đa đồ thị $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_3, v_6), (v_4, v_6), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_2), (v_6, v_4)\}$.



Hình 6.3: Giả đơn đồ thị



Hình 6.4: Giả da đồ thị

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.4

Một *đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là các cung, đó là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.4

Một *đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là các cung, đó là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.

Định nghĩa 6.5

Một *đa đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một họ E mà các phần tử của nó gọi là các cung, đó là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.4

Một *đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là các cung, đó là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.

Định nghĩa 6.5

Một *đa đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một họ E mà các phần tử của nó gọi là các cung, đó là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.

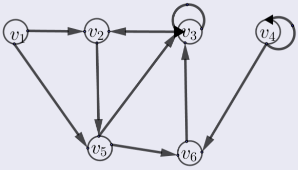
Định nghĩa 6.6

Đồ thị vô hướng nhận được từ đồ thị có hướng G bằng cách xoá bỏ các chiều mũi tên trên các cung được gọi là *đồ thị vô hướng nền* của G.

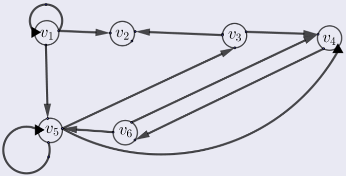
6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.3

Hình 6.5 đơn đồ thị có hướng
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_3, v_2), (v_5, v_3), (v_3, v_3), (v_5, v_6), (v_6, v_3), (v_4, v_6), (v_4, v_4)\}$.
Hình 6.6 đa đồ thị có hướng $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_6), (v_6, v_4), (v_6, v_5), (v_5, v_3), (v_5, v_4), (v_5, v_5)\}$.



Hình 6.5: Giả đơn đồ thi



Hình 6.6: Giả da đồ thi

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.4

Đồ thị "lấn tổ" trong sinh thái học.

- Đồ thị được dùng trong nhiều mô hình có tính đến sự tương tác của các loài vật.
- Chẳng hạn sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái có thể mô hình hóa bằng đồ thị "lấn tổ".
- Mỗi loài được biểu diễn bằng một đỉnh.
- Một cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bằng các đỉnh này là cạnh tranh với nhau.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.5

Đồ thị ảnh hưởng.

- Khi nghiên cứu tính cách của một nhóm người, ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng lên suy nghĩ của những người khác.
- Đồ thị có hướng được gọi là đồ thị ảnh hưởng có thể dùng để mô hình bài toán này.
- Mỗi người của nhóm được biểu diễn bằng một đỉnh.
- Khi một người được biểu diễn bằng đỉnh a có ảnh hưởng lên người được biểu diễn bằng đỉnh b thì có một cung nối từ đỉnh a đến đỉnh b.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.6

Thi đấu vòng tròn.

- Một cuộc thi đấu thể thao trong đó mỗi đội đấu với mỗi đội khác đúng một lần gọi là đấu vòng tròn.
- Cuộc thi đấu như thế có thể được mô hình bằng một đồ thị có hướng trong đó mỗi đội là một đỉnh.
- Một cung đi từ đỉnh a đến đỉnh b nếu đội a thắng đội b.

6.1. Định nghĩa và ví dụ

Ví dụ 6.7

Phần mềm máy tính.

- Các chương trình máy tính có thể thi hành nhanh hơn bằng cách thi hành đồng thời một số câu lệnh nào đó.
- Điều quan trọng là không được thực hiện một câu lệnh đòi hỏi kết quả của câu lệnh khác chưa được thực hiện.
- Sự phụ thuộc của các câu lệnh vào các câu lệnh trước có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng.
- Mỗi câu lệnh được biểu diễn bằng một đỉnh và có một cung từ một đỉnh tới một đỉnh khác nếu câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ hai không thể thực hiện được trước khi câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ nhất được thực hiện.
- Đồ thị này được gọi là đồ thị có ưu tiên trước sau.

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Định nghĩa 6.7

Hai đỉnh u và v trong đồ thị (vô hướng) $G = (V, E)$ được gọi là *liền kề* nếu $(u, v) \in E$. Nếu $e = (u, v)$ thì e gọi là *cạnh liên thuộc* với các đỉnh u và v. Cạnh e cũng được gọi là *cạnh nối* các đỉnh u và v. Các đỉnh u và v gọi là các *điểm đầu mút* của cạnh e.

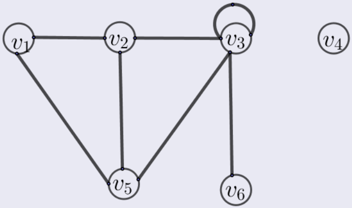
Định nghĩa 6.8

Bậc của đỉnh v trong đồ thị $G = (V, E)$, ký hiệu $\deg(v)$, là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.
Đỉnh v gọi là *đỉnh treo* nếu $\deg(v) = 1$ và gọi là *đỉnh cô lập* nếu $\deg(v) = 0$.

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Ví dụ 6.8

Hình 6.7 bậc của các đỉnh là $\deg(v_1) = 2, \deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = 5, \deg(v_4) = 0, \deg(v_5) = 3, \deg(v_6) = 1$.



Hình 6.7: Bậc đỉnh của đồ thị

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Mệnh đề 6.1

Cho đồ thị $G = (V, E)$. *Khi đó* $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Chứng minh.

- Rõ ràng mỗi cạnh $e = (u, v)$ được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$.
- Từ đó suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Hệ quả 6.1

Số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.

Chứng minh.

- Gọi V_1 và V_2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị $G = (V, E)$.
- Khi đó
$$2|E| = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v).$$
- Vế trái là một số chẵn và tổng thứ nhất cũng là một số chẵn nên tổng thứ hai là một số chẵn.
- Vì $\deg(v)$ là lẻ với mọi $v \in V_2$ nên $|V_2|$ là một số chẵn.

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Mệnh đề 6.2

Trong một đơn đồ thị, luôn tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.

Chứng minh.

- Xét đơn đồ thị $G = (V, E)$ có $|V| = n$.
- Khi đó phát biểu trên được đưa về bài toán: trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.
- Đã chứng minh ở phần trước dùng nguyên lý Diricle.

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Định nghĩa 6.9

Đỉnh u được gọi là nối tới v hay v được gọi là được nối từ u trong đồ thị có hướng G nếu (u, v) là một cung của G. Đỉnh u gọi là *đỉnh đầu* và đỉnh v gọi là *đỉnh cuối* của cung này.

Định nghĩa 6.10

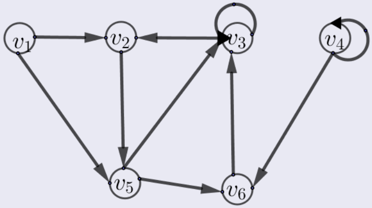
Bậc vào (*Bậc ra*) của đỉnh v trong đồ thị có hướng G, ký hiệu $\deg_t(v)$ ($\deg_o(v)$), là số các cung có đỉnh cuối là v (số các cung có đỉnh đầu là v).

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Ví dụ 6.9

Hình 6.8 đồ thị có hướng, bậc vào và bậc ra các đỉnh là

$$
\begin{aligned}
&\deg_t(v_1) = 0, \deg_o(v_1) = 2,\\
&\deg_t(v_2) = 2, \deg_o(v_2) = 1,\\
&\deg_t(v_3) = 3, \deg_o(v_3) = 2,\\
&\deg_t(v_4) = 1, \deg_o(v_4) = 2,\\
&\deg_t(v_5) = 2, \deg_o(v_5) = 2,\\
&\deg_t(v_6) = 2, \deg_o(v_6) = 1.
\end{aligned}
$$



Hình 6.8: Bậc vào và bậc ra đồ thị có hướng

6.2. Bậc của đỉnh đồ thị

Định nghĩa 6.11

Đỉnh có bậc vào và bậc ra cùng bằng 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh có bậc vào bằng 1 và bậc ra bằng 0 gọi là *đỉnh treo*, cung có đỉnh cuối là đỉnh treo gọi là *cung treo*.

Mệnh đề 6.3

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó

$$\sum_{v\in V} \deg_t(v) = \sum_{v\in V} \deg_0(v) = |E|.$$

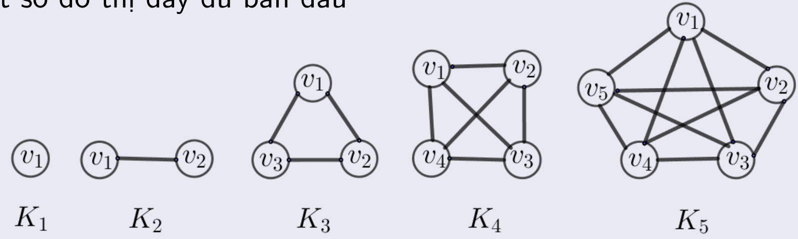
Chứng minh. Kết quả có ngay là vì mỗi cung được tính một lần cho đỉnh đầu và một lần cho đỉnh cuối.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.1. Đồ thị đầy đủ

Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị mà hai đỉnh phân biệt bất kỳ của nó luôn liền kề. Như vậy, K_n có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh và mỗi đỉnh của K_n có bậc là $n-1$.

Ví dụ 6.10

Một số đồ thị đầy đủ ban đầu



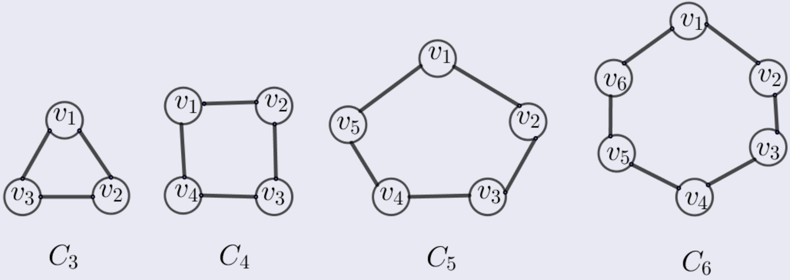
Hình 6.9: Đồ thị đầy đủ

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.2. Đồ thị vòng

Đơn đồ thị n đỉnh $V = \{v_1, v_2, ..., v_n (n \geq 3)\}$ và n cạnh $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$ được gọi là *đồ thị vòng*, ký hiệu là C_n. Như vậy, mỗi đỉnh của C_n có bậc là 2.

Ví dụ 6.11

Một số đồ thị vòng ban đầu



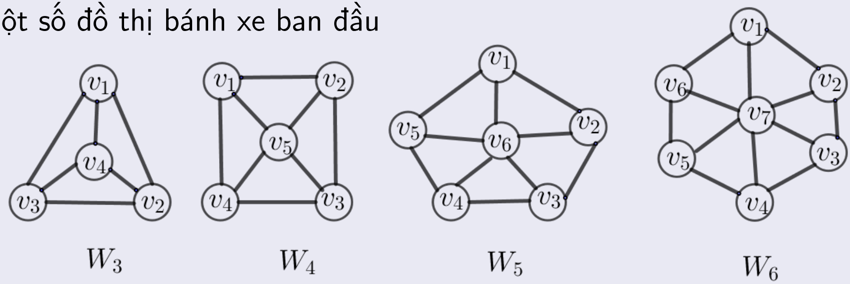
Hình 6.10: Đồ thị vòng

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.3. Đồ thị bánh xe

Từ đồ thị vòng C_n, thêm vào đỉnh v_{n+1} và các cạnh $(v_{n+1}, v_1), (v_{n+1}, v_2), \ldots, (v_{n+1}, v_n)$, ta nhận được đơn đồ thị gọi là *đồ thị bánh xe*, ký hiệu là W_n . Như vậy, đồ thị W_n có $n+1$ đỉnh, $2n$ cạnh, một đỉnh bậc n và n đỉnh bậc 3.

Ví dụ 6.12

Một số đồ thị bánh xe ban đầu



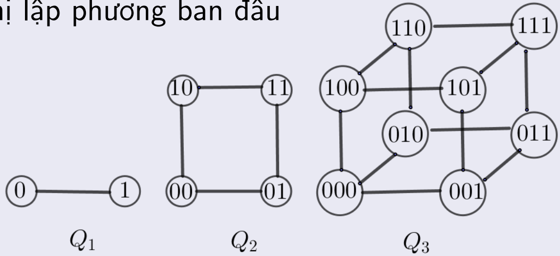
Hình 6.11: Đồ thị bánh xe

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.4. Đồ thị lập phương

Đơn đồ thị 2^n đỉnh, tương ứng với 2^n xâu nhị phân độ dài n và hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi 2 xâu nhị phân tương ứng với hai đỉnh này chỉ khác nhau đúng một bit được gọi là *đồ thị lập phương*, ký hiệu là Q_n. Như vậy, mỗi đỉnh của Q_n có bậc là n và số cạnh của Q_n là $n.2^{n-1}$ (từ công thức $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$).

Ví dụ 6.13

Một số đồ thị lập phương ban đầu



Hình 6.12: Đồ thị lập phương

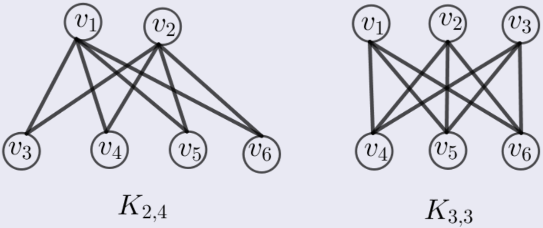
6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.5. Đồ thị hai phần

- Đơn đồ thị $G = (V, E)$ sao cho $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ và mỗi cạnh của G được nối một đỉnh trong V_1 và một đỉnh trong V_2 được gọi là *đồ thị phân đôi*.
- Nếu đồ thị phân đôi $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sao cho với mọi $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E$ thì G được gọi là *đồ thị phân đôi đầy đủ*. Nếu $|V_1| = m, |V_2| = n$ thì đồ thị phân đôi đầy đủ G ký hiệu là $K_{m,n}$.
- Như vậy $K_{m,n}$ có m.n cạnh, các đỉnh của V_1 có bậc n và các đỉnh của V_2có bậc m.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.5. Đồ thị hai phần

Ví dụ 6.14

Một số đồ hai phần ban đầu



Hình 6.13: Đồ thị hai phần

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

1) Các mạng cục bộ (LAN).

- Một số mạng cục bộ dùng cấu trúc hình sao, trong đó tất cả các thiết bị được nối với thiết bị điều khiển trung tâm.
- Mạng cục bộ kiểu này có thể biểu diễn bằng một đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{1,n}$.
- Các thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác đều phải qua thiết bị điều khiển trung tâm.

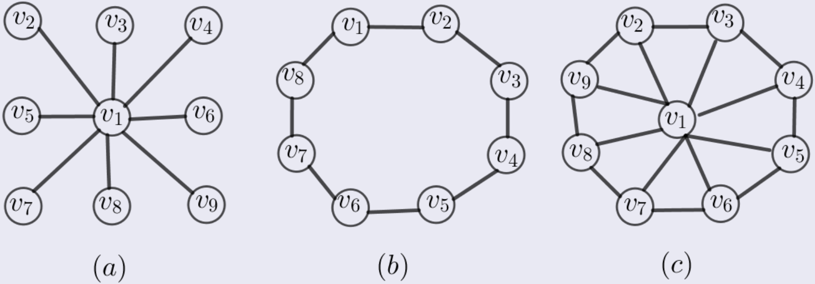
Mạng khác

- Mạng cục bộ cũng có thể có cấu trúc vòng tròn, trong đó mỗi thiết bị nối với đúng hai thiết bị khác.
- Mạng cục bộ kiểu này có thể biểu diễn bằng một đồ thị vòng C_n.
- Thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác được truyền đi theo vòng tròn cho tới khi đến nơi nhận.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

Ví dụ 6.15

Một số cấu trúc mạng



Hình 6.14: (a) Cấu trúc hình sao (b) Cấu trúc vòng tròn (c) Cấu trúc hỗn hợp

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

- Cuối cùng, một số mạng cục bộ dùng cấu trúc hỗn hợp của hai cấu trúc trên.
- Các thông báo được truyền vòng quanh theo vòng tròn hoặc có thể qua thiết bị trung tâm.
- Sự dư thừa này có thể làm cho mạng đáng tin cậy hơn.
- Mạng cục bộ kiểu này có thể biểu diễn bằng một đồ thị bánh xe W_n.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

2) Xử lý song song.

- Các thuật toán để giải các bài toán được thiết kế để thực hiện một phép toán tại mỗi thời điểm là thuật toán nối tiếp.
- Tuy nhiên, nhiều bài toán với số lượng tính toán rất lớn như bài toán mô phỏng thời tiết, tạo hình trong y học hay phân tích mật mã không thể giải được trong một khoảng thời gian hợp lý nếu dùng thuật toán nối tiếp ngay cả khi dùng các siêu máy tính.
- Ngoài ra, do những giới hạn về mặt vật lý đối với tốc độ thực hiện các phép toán cơ sở, nên thường gặp các bài toán không thể giải trong khoảng thời gian hợp lý bằng các thao tác nối tiếp.
- Vì vậy, người ta phải nghĩ đến kiểu xử lý song song.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

Khi xử lý song song,

- người ta dùng các máy tính có nhiều bộ xử lý riêng biệt, mỗi bộ xử lý có bộ nhớ riêng, nhờ đó có thể khắc phục được những hạn chế của các máy nối tiếp.
- Các thuật toán song song phân chia bài toán chính thành một số bài toán con sao cho có thể giải đồng thời được.
- Do vậy, bằng các thuật toán song song và nhờ việc sử dụng các máy tính có bộ đa xử lý, người ta hy vọng có thể giải nhanh các bài toán phức tạp.
- Trong thuật toán song song có một dãy các chỉ thị theo dõi việc thực hiện thuật toán, gửi các bài toán con tới các bộ xử lý khác nhau, chuyển các thông tin vào, thông tin ra tới các bộ xử lý thích hợp.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

Khi dùng cách xử lý song song,

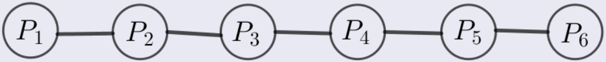
- mỗi bộ xử lý có thể cần các thông tin ra của các bộ xử lý khác. Do đó chúng cần phải được kết nối với nhau.
- Người ta có thể dùng loại đồ thị thích hợp để biểu diễn mạng kết nối các bộ xử lý trong một máy tính có nhiều bộ xử lý.
- Kiểu mạng kết nối dùng để thực hiện một thuật toán song song cụ thể phụ thuộc vào những yêu cầu với việc trao đổi dữ liệu giữa các bộ xử lý,
- phụ thuộc vào tốc độ mong muốn và tất nhiên vào phần cứng hiện có.
- Mạng kết nối các bộ xử lý đơn giản nhất và cũng đắt nhất là có các liên kết hai chiều giữa mỗi cặp bộ xử lý.
- Các mạng này có thể mô hình bằng đồ thị đầy đủ $K_{n,n}$, trong đó n là số bộ xử lý.
- Tuy nhiên, các mạng liên kết kiểu này có số kết nối quá nhiều mà trong thực tế số kết nối cần phải có giới hạn.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

Các bộ xử lý có thể kết nối đơn giản là sắp xếp chúng theo một mảng một chiều. Ưu điểm của mảng một chiều là mỗi bộ xử lý có nhiều nhất 2 đường nối trực tiếp với các bộ xử lý khác. Nhược điểm là nhiều khi cần có rất nhiều các kết nối trung gian để các bộ xử lý trao đổi thông tin với nhau.

Ví dụ 6.16

Kết nối bộ vi xử lý



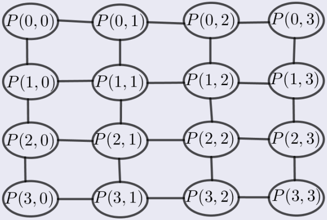
Hình 6.15: Mô hình kết nối mảng một chiều

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

Mạng kiểu lưới (hoặc mảng hai chiều) rất hay được dùng cho các mạng liên kết. Số các bộ xử lý là một số chính phương, $n = m^2$. Các bộ xử lý được gán nhãn $P(i, j), 0 \leq i, j \leq m - 1$. Các kết nối hai chiều sẽ nối bộ xử lý $P(i, j)$ với bốn bộ xử lý bên cạnh, tức là với $P(i, j \pm 1)$ và $P(i \pm 1, j)$ chừng nào các bộ xử lý còn ở trong lưới.

Ví dụ 6.17

Kết nối bộ vi xử lý



Hình 6.16: Mô hình kết nối mảng hai chiều

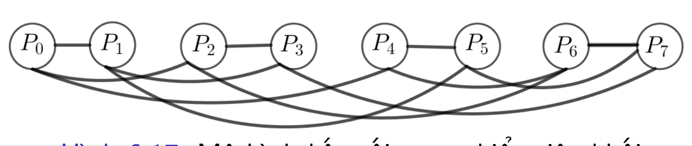
6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

- Mạng kết nối quan trọng nhất là mạng kiểu siêu khối.
- Với các mạng loại này số các bộ xử lý là luỹ thừa của 2, $n = 2^m$.
- Các bộ xử lý được gán nhãn là $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$.
- Mỗi bộ xử lý có liên kết hai chiều với m bộ xử lý khác.
- Bộ xử lý P_i nối với bộ xử lý có chỉ số biểu diễn bằng dãy nhị phân khác với dãy nhị phân biểu diễn i tại đúng một bit.
- Mạng kiểu siêu khối cân bằng số các kết nối trực tiếp của mỗi bộ xử lý và số các kết nối gián tiếp sao cho các bộ xử lý có thể truyền thông được.
- Nhiều máy tính đã chế tạo theo mạng kiểu siêu khối và nhiều thuật toán đã được thiết kế để sử dụng mạng kiểu siêu khối.
- Đồ thị lập phương Q_m biểu diễn mạng kiểu siêu khối có 2^m bộ xử lý.

6.3. Những đơn đồ thị đặc biệt - 6.3.6. Một vài ứng dụng

Ví dụ 6.18

Kết nối mạng



Hình 6.17: Mô hình kết nối mạng kiểu siêu khối

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Định nghĩa 6.12

Cho đồ thị $G = (V, E)$ (vô hướng hoặc có hướng), với $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. *Ma trận liền kề* của G ứng với thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ là ma trận

$$A = (a_{ij})_{n\times n}$$

Trong đó a_{ij} là

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{Số các cạnh (cung) nối } v_i \text{ nối với } v_j \text{ nếu } v_i \neq v_j \\ \text{Số cạnh (cung) vòng tại } v_j \text{ nếu } v_i = v_j \end{cases}$$

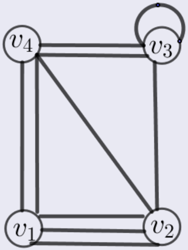
Như vậy, ma trận liền kề của một đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}$, trong khi ma trận liền kề của một đồ thị có hướng không có tính đối xứng.

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.19

Ma trận liền kề với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4 là

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



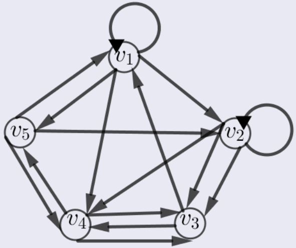
Hình 6.18: Ma trận liền kề đồ thị vô hướng

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.20

Ma trận liền kề với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 là

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Hình 6.19: Ma trận liền kề đồ thị có hướng

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Định nghĩa 6.13

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là các đỉnh và $e_1, e_2, \ldots, e_m$ là các cạnh của G. *Ma trận liên thuộc* của G theo thứ tự trên của V và E là ma trận

$$A = (a_{ij})_{n\times m}$$

trong đó

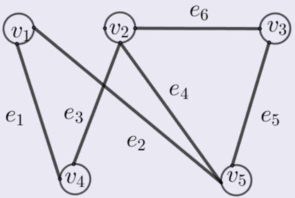
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ nối với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ không nối với đỉnh } v_i. \end{cases}$$

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.21

Ma trận liên thuộc theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, v_3, v_4, v - 5$ và các cạnh $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ là

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Hình 6.20: Ma trận liên thuộc đồ thị không hướng

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Định nghĩa 6.14

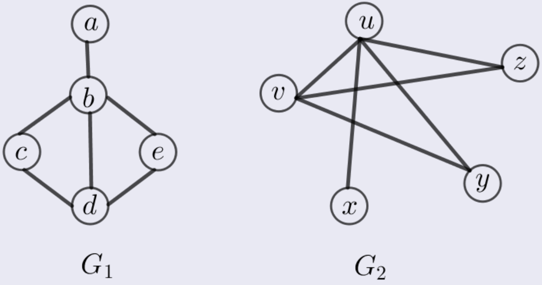
Các đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là *đẳng cấu* nếu tồn tại một song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh u và v là liền kề trong G_1 khi và chỉ khi $f(u)$ và $f(v)$ là liền kề trong G_2 với mọi u và v trong $V - 1$. Ánh xạ f như thế gọi là một *phép đẳng cấu*.

- Thông thường, để chứng tỏ hai đơn đồ thị là không đẳng cấu, người ta chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà các đơn đồ thị đẳng cấu cần phải có.
- Tính chất như thế gọi là một bất biến đối với phép đẳng cấu của các đơn đồ thị.

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.22

Hai đơn đồ thị G_1 và G_2 sau là đẳng cấu qua phép đẳng cấu $f : a \to x, b \to u, c \to z, d \to v, e \to y$, (Hình 6.21).

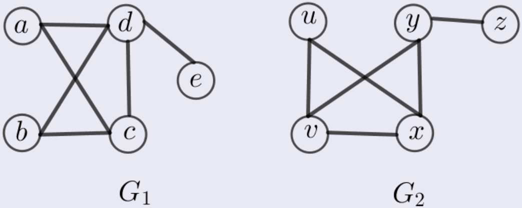


Hình 6.21: Hai đồ thị đẳng cấu

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.23

Hai đồ thị G_1 và G_2 (Hình 6.22) đều có 5 đỉnh và 6 cạnh nhưng không đẳng cấu vì trong G_1 có một đỉnh bậc 4 mà trong G_2 không có đỉnh bậc 4 nào.

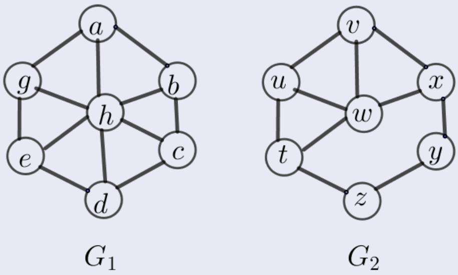


Hình 6.22: Hai đồ thị không đẳng cấu do có bậc đỉnh khác nhau

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.24

Hai đồ thị G_1 và G_2 (Hình 6.23) đều có 7 đỉnh, 10 cạnh, cùng có một đỉnh bậc 4, bốn đỉnh bậc 3 và hai đỉnh bậc 2. Tuy nhiên G_1 và G_2 là không đẳng cấu vì hai đỉnh bậc 2 của G_1 (a và d) là không kề nhau, trong khi hai đỉnh bậc 2 của G_2 (y và z) là kề nhau.



Hình 6.23: Hai đồ thị không đẳng cấu do có hai đỉnh không kề

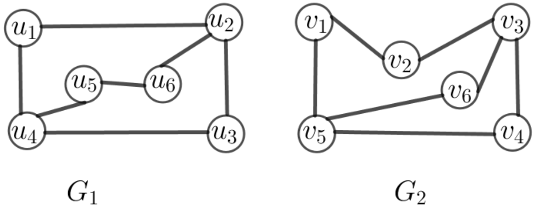
6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu

Ví dụ 6.25

Hai đồ thị G_1 và G_2 là đẳng cấu vì hai ma trận liền kề của G_1 theo thứ tự các đỉnh $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ và của G_2 theo thứ tự các đỉnh $v_6, v_3, v_4, v_5, v_1, v_2$ là như nhau và bằng

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận và sự đẳng cấu



Hình 6.24: Hai đồ thị đẳng cấu nhờ ma trận kề

6.5. Đồ thị con và đồ thị bao trùm

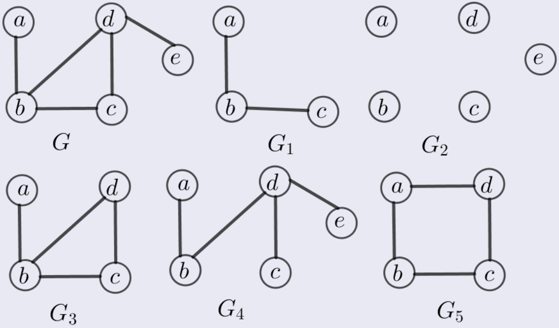
Định nghĩa 6.15

Cho hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$. Ta nói G_2 là *đồ thị con* của G_1 nếu $V_2 \subset V_1$ và $E_2 \subset E_1$. Trong trường hợp $V_1 = V_2$ thì G_2 gọi là con *bao trùm* của G_1

6.5. Đồ thị con và đồ thị bao trùm

Ví dụ 6.26

Hình 6.25, G_1, G_2, G_3 và G_4 là các đồ thị con của G, trong đó G_2 và G_4 là đồ thị con bao trùm của G, còn G_5 không phải là đồ thị con của G.



Hình 6.25: Đồ thị con

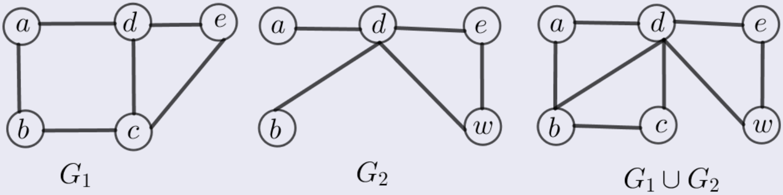
6.5. Đồ thị con và đồ thị bao trùm

Định nghĩa 6.16

Hợp của hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đơn đồ thị có tập các đỉnh là $V_1 \cup V2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$, ký hiệu là $G_1 \cup G_2$

Ví dụ 6.27

Hình 6.26 Hợp hai đồ thị



Hình 6.26: Đồ thị con

6.5. Đồ thị con và đồ thị bao trùm

Định nghĩa 6.17

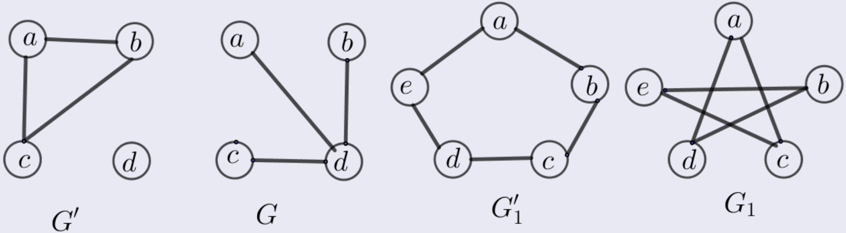
Đơn đồ thị $G' = (V, E')$ được gọi là *đồ thị bù* của đơn đồ thị $G = (V, E)$ nếu G và G' không có cạnh chung nào ($E \cap E' = \emptyset$) và $G \cup G'$ là đồ thị đầy đủ.

Dễ thấy rằng nếu G' là bù của G thì G cũng là bù của G'. Khi đó ta nói hai đồ thị là bù nhau.

6.5. Đồ thị con và đồ thị bao trùm

Ví dụ 6.28

Hình 6.27 hai đồ thị G' và G là bù nhau và hai đồ thị G_1 và G_1' là bù nhau.



Hình 6.27: Đồ thị bù

6.6. Tính liên thông

Định nghĩa 6.18

Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, với n là một số nguyên dương, trong đồ thị (giả đồ thị vô hướng hoặc đa đồ thị có hướng) $G = (V, E)$ là một dãy các cạnh (hoặc cung) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ của đồ thị sao cho $e_1 = (x_0, x_1), e_2 = (x_1, x_2), \ldots, e_n = (x_{n-1}, x_n)$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$. Khi đồ thị không có cạnh (hoặc cung) bội, ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

• Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

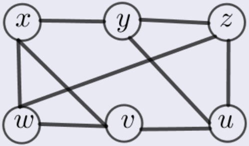
• Đường đi hoặc chu trình gọi là *đơn* nếu nó không chứa cùng một cạnh (hoặc cung) quá một lần.

• Một đường đi hoặc chu trình không đi qua đỉnh nào quá một lần (trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối của chu trình là trùng nhau) được gọi là *đường đi* hoặc *chu trình sơ cấp*. Rõ ràng rằng một đường đi (t.ư. chu trình) sơ cấp là đường đi (t.ư. chu trình) đơn.

6.6. Tính liên thông

Ví dụ 6.29

Hình 6.28 trong đơn đồ thị x, y, z, w, v, y là đường đi đơn (không sơ cấp) độ dài 5; x, w, v, z, y không là đường đi vì (v, z) không là cạnh; y, z, w, x, v, u, y là chu trình sơ cấp độ dài 6.



Hình 6.28: Đường đi và chu trình

6.6. Tính liên thông

Định nghĩa 6.19

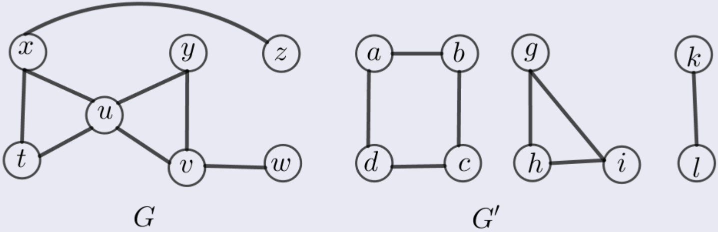
Một đồ thị (vô hướng) được gọi là *liên thông* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

- Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông, mỗi cặp các đồ thị con này không có đỉnh chung.
- Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các thành phần liên thông của đồ thị đang xét.
- Như vậy, một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó chỉ có một thành phần liên thông.

6.6. Tính liên thông

Ví dụ 6.30

Hình 6.29 đồ thị G là liên thông, nhưng đồ thị G' không liên thông và có 3 thành phần liên thông.



Hình 6.29: Đồ thị liên thông

6.6. Tính liên thông

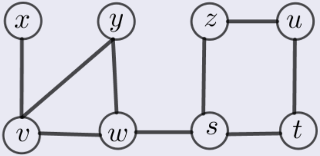
Định nghĩa 6.20

Một đỉnh trong đồ thị G mà khi xoá đi nó và tất cả các cạnh liên thuộc với nó ta nhận được đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị G được gọi là *đỉnh cắt* hay *điểm khớp*. Việc xoá đỉnh cắt khỏi một đồ thị liên thông sẽ tạo ra một đồ thị con không liên thông.
Hoàn toàn tương tự, một cạnh mà khi ta bỏ nó đi sẽ tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn so với đồ thị xuất phát được gọi là *cạnh cắt* hay là *cầu*.

6.6. Tính liên thông

Ví dụ 6.31

Hình 6.30 đồ thị có các đỉnh cắt là v, w, s và các cầu là $(x, v), (w, s)$.



Hình 6.30: Đỉnh cắt và cầu

6.6. Tính liên thông

Mệnh đề 6.4

Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị liên thông luôn có đường đi sơ cấp.

Chứng minh.

- Giả sử u và v là hai đỉnh phân biệt của một đồ thị liên thông G.
- Vì G liên thông nên có ít nhất một đường đi giữa u và v.
- Gọi $x_0, x_1, \dots, x_n$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$, là dãy các đỉnh của đường đi có độ dài ngắn nhất.
- Đây chính là đường đi sơ cấp cần tìm.
- Thật vậy, giả sử nó không là đường đi đơn, khi đó $x_i = x_j$ với $0 \leq i < j$.
- Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh u và v có đường đi ngắn hơn qua các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_n$ nhận được bằng cách xoá đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, \dots, x_{j-1}$.

6.6. Tính liên thông

Mệnh đề 6.5

Mọi đơn đồ thị n đỉnh ($n \geq 2$) có tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý không nhỏ hơn n đều là đồ thị liên thông.

Chứng minh.

- Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh ($n \geq 2$) và thoả mãn yêu cầu của bài toán.
- Giả sử G không liên thông, tức là tồn tại hai đỉnh u và v sao cho không có đường đi nào nối u và v.
- Khi đó trong đồ thị G tồn tại hai thành phần liên thông là G_1 có n_1 đỉnh và chứa u, G_2 chứa đỉnh v và có n_2 đỉnh.
- Vì G_1, G_2 là hai trong số các thành phần liên thông của G nên $n_1 + n_2 \leq n$. ta có:

  $$\deg(u) + \deg(v) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2 < n.$$

- Điều mâu thuẫn ở trên dẫn đến kết luận là đồ thị G phải liên

6.6. Tính liên thông

Hệ quả 6.2

Đơn đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn một nửa số đỉnh là đồ thị liên thông.

Mệnh đề 6.6

Nếu một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông, tức là có một đường đi nối chúng.

Chứng minh. Cho $G = (V, E)$ là đồ thị thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ là u và v. Giả sử u và v không liên thông với nhau. Khi đó chúng phải thuộc hai thành phần liên thông nào đó của đồ thị G, G_1 chứa u và G_2 chứa v.

Bậc của đỉnh u trong G_1 cũng chính là bậc của u trong G, nên trong G_1 đỉnh u vẫn có bậc lẻ và G_1 có duy nhất một đỉnh bậc lẻ. Điều này mâu thuẫn. Vậy hai đỉnh u và v phải liên thông.

6.6. Tính liên thông

Mệnh đề 6.7

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông. Khi đó một đỉnh của G là điểm khớp khi và chỉ khi trong G tồn tại hai đỉnh u và v sao cho mỗi đường đi nối u và v đều phải đi qua đỉnh này.

Chứng minh. *Điều kiện cần:* Giả sử đỉnh x là điểm khớp trong đồ thị G. Khi đó đồ thị con G_1 của G nhận được bằng cách xoá x và các cạnh liên thuộc với nó là không liên thông. Giả sử G_2, G_3 là hai trong các thành phần liên thông của G_1. Lấy u là đỉnh trong G_2 và v là đỉnh trong G_3. Do u, v thuộc hai thành phần liên thông khác nhau, nên trong G_1 các đỉnh u, v không liên thông. Nhưng trong G các đỉnh u, v lại liên thông, nên mọi đường đi nối u, v đều phải đi qua đỉnh x.
Điều kiện đủ: Giả sử mọi đường đi nối u, v đều đi qua đỉnh x, nên nếu bỏ đỉnh x và các cạnh liên thuộc với x thì đồ thị con G_1 nhận được từ G chứa hai đỉnh u, v không liên thông. Do đó G_1 là đồ thị không liên thông hay đỉnh x là điểm khớp của G.

6.6. Tính liên thông

Định lý 6.3

Cho G là một đơn đồ thị có n đỉnh, m cạnh và k thành phần liên thông. Khi đó

$$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Chứng minh.

- Bất đẳng thức $n - k \leq m$ được chứng minh bằng quy nạp theo m.
- Nếu $m = 0$ thì $k = n$ nên bất đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng đến $m - 1$, với $m \geq 1$.
- Gọi G' là đồ thị con bao trùm của G có số cạnh m_0 là nhỏ nhất sao cho nó có k thành phần liên thông.

6.6. Tính liên thông (tiếp tục)

- Do đó việc loại bỏ bất cứ cạnh nào trong G' cũng tăng số thành phần liên thông lên 1 và khi đó đồ thị thu được sẽ có n đỉnh, $k+1$ thành phần liên thông và $m_0 - 1$ cạnh.
- Theo giả thiết quy nạp, ta có $m_0 - 1 \geq n - (k+1)$ hay $m_0 \geq n - k$. Vậy $m \geq n - k$.
- Bổ sung cạnh vào G để nhận được đồ thị G'' có m_1 cạnh sao cho k thành phần liên thông là những đồ thị đầy đủ.
- Ta có $m \leq m_1$ nên chỉ cần chứng minh

$$m_1 \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Giả sử G_i và G_j là hai thành phần liên thông của G'' với n_i và n_j đỉnh và $n_i \geq n_j > 1(*)$.

6.6. Tính liên thông (tiếp tục)

- Nếu ta thay G_i và G_j bằng đồ thị đầy đủ với $n_i + 1$ và $n_j - 1$ đỉnh thì tổng số đỉnh không thay đổi nhưng số cạnh tăng thêm một lượng là

$$\left[\frac{(n_i+1)n_i}{2} - \frac{n_i(n_i-1)}{2}\right] - \left[\frac{n_j(n_j-1)}{2} - \frac{(n_j-1)(n_j-2)}{2}\right] = n_i - n_j + 1.$$

- Thủ tục này được lặp lại khi hai thành phần nào đó có số đỉnh thoả (*).
- Vì vậy m_1 là lớn nhất (n, k là cố định) khi đồ thị gồm $k-1$ đỉnh cô lập và một đồ thị đầy đủ với $n-k+1$ đỉnh.
- Từ đó suy ra bất đẳng thức cần tìm.

6.6. Tính liên thông

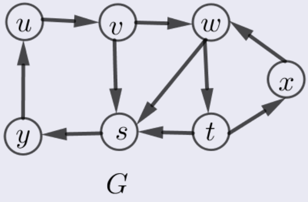
Định nghĩa 6.21

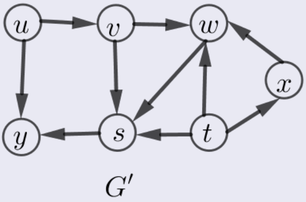
- Đồ thị có hướng G được gọi là *liên thông mạnh* nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v của G đều có đường đi từ u tới v và đường đi từ v tới u.
- Đồ thị có hướng G được gọi là *liên thông yếu* nếu đồ thị vô hướng nền của nó là liên thông.
- Đồ thị có hướng G được gọi là *liên thông một chiều* nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v của G đều có đường đi từ u tới v hoặc đường đi từ v tới u.

6.6. Tính liên thông

Ví dụ 6.32

Hình 6.31 đồ thị G là liên thông mạnh nhưng đồ thị G' là liên thông yếu (không có đường đi từ u tới x cũng như từ x tới u).





Hình 6.31: Đồ thị có hướng liên thông

6.6. Tính liên thông

Mệnh đề 6.8

Cho G là một đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) với ma trận liền kề A theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Khi đó số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử dòng i cột j của ma trận A^r.

Chứng minh.

- Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo r.
- Số các đường đi khác nhau độ dài 1 từ v_i tới v_j là số các cạnh (hoặc cung) từ v_i tới v_j, đó chính là phần tử dòng i cột j của ma trận A; nghĩa là, mệnh đề đúng khi $r = 1$.
- Giả sử mệnh đề đúng đến r; nghĩa là, phần tử dòng i cột j của A^r là số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j.

6.6. Tính liên thông (tiếp tục)

- Vì $A^{r+1} = A^r.A$ nên phần tử dòng i cột j của A^{r+1} bằng

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj},$$

  trong đó b_{ik} là phần tử dòng i cột k của A^r.
- Theo giả thiết quy nạp b_{ik} là số đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_k.
- Đường đi độ dài $r+1$ từ v_i tới v_j sẽ được tạo nên từ đường đi độ dài r từ v_i tới đỉnh trung gian v_k nào đó và một cạnh (hoặc cung) từ v_k tới v_j.
- Theo quy tắc nhân số các đường đi như thế là tích của số đường đi độ dài r từ v_i tới v_k, tức là b_{ik}, và số các cạnh (hoặc cung) từ v_k tới v_j, tức là a_{kj}.
- Cộng các tích này lại theo tất cả các đỉnh trung gian v_k ta có mệnh đề đúng đến $r+1$.

6.7. Bài tập

▷ 6.1

Cho G là đồ thị có v đỉnh và e cạnh, còn M, m tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của G. Chứng tỏ rằng

$$m \leq \frac{2e}{v} \leq M.$$

▷ 6.2

Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị phân đôi có v đỉnh và e cạnh, khi đó $e \leq \dfrac{v^2}{4}$.

6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.3

Trongmột phương án mạng kiểu lưới kết nối $n = m^2$ bộ xử lý song song, bộ xử lý $P(i, j)$ được kết nối với 4 bộ xử lý $(P(i \pm 1) \mod m$, j), $P(i, (j \pm 1) \mod m)$, sao cho các kết nối bao xung quanh các cạnh của lưới. Hãy vẽ mạng kiểu lưới có 16 bộ xử lý theo phương án này.

▷ 6.4

Hãy vẽ các đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi ma trận liền kề sau:

$$a)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&4\\3&4&0\end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&0&3&0\\0&3&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix}0&1&3&0&4\\1&2&1&3&0\\3&1&1&0&1\\0&3&0&0&2\\4&0&1&2&3\end{pmatrix}.$$

6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.5

Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng (t.ư. cột) của một ma trận liền kề đối với một đồ thị vô hướng ? Đối với đồ thị có hướng ?

▷ 6.6

Tìm ma trận liền kề cho các đồ thị sau

a) K_n, b) C_n, c) W_n, d) $K_{m,n}$, e) Q_n.

▷ 6.7

Có bao nhiêu đơn đồ thị không đẳng cấu với n đỉnh khi

a) $n = 2$, b) $n = 3$, c) $n = 4$.

6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.8

Hai đơn đồ thị với ma trận liền kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.9

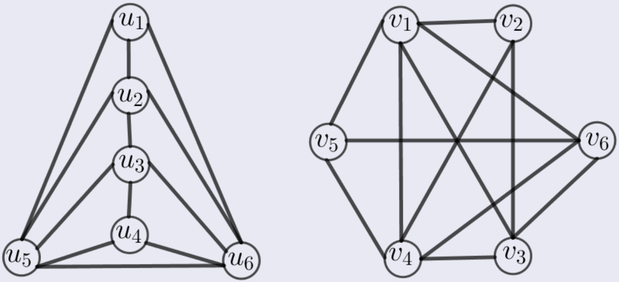
Hai đơn đồ thị với ma trận liền kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

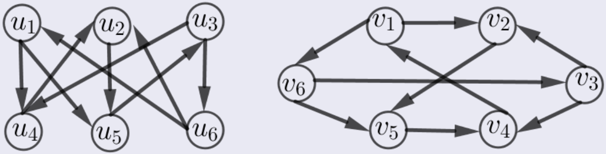
6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.10

Các đồ thị G và G' sau có đẳng cấu với nhau không?



a)



b)

6.7. Bài tập

▷ 6.11

Cho $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và E là tập hợp các cặp phần tử (u, v) của V sao cho $u < v$ và u, v nguyên tố cùng nhau. Hãy vẽ đồ thị có hướng $G = (V, E)$. Tìm số các đường đi phân biệt độ dài 3 từ đỉnh 2 tới đỉnh 8.

▷ 6.12

Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh liền kề (t.ư. không liền kề) tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của n sau
a) $n = 2$, b) $n = 3$, c) $n = 4$, d) $n = 5$.

6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.13

Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp được một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

▷ 6.14

Một lớp học có ít nhất 4 sinh viên. Mỗi sinh viên thân với ít nhất 3 sinh viên khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn sinh viên ngồi quanh một cái bàn tròn để mỗi sinh viên ngồi giữa hai sinh viên mà họ thân.

6.7. Bài tập (tiếp tục)

▷ 6.15

Trong một cuộc họp có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu này có một số lẻ người quen đến dự. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi người ngồi giữa hai người mà anh ta quen.

▷ 6.16

Một thành phố có n ($n \geq 2$) nút giao thông và hai nút giao thông bất kỳ đều có số đầu mối đường ngầm tới một trong các nút giao thông này đều không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng từ một nút giao thông tuỳ ý ta có thể đi đến một nút giao thông bất kỳ khác bằng đường ngầm.