TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

BÀI 7

DUYỆT ĐỒ THỊ
ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

Nội dung

1. Các thuật toán duyệt đồ thị
   - Mô hình thuật toán duyệt đồ thị
   - Duyệt theo chiều sâu
   - Duyệt theo chiều rộng
2. Một số ứng dụng của thuật toán duyệt đồ thị
   - Bài toán tìm đường đi
   - Bài toán tìm các mảng liên thông
3. Đường đi euler và đồ thị euler
   - Định nghĩa và tính chất của đồ thị Euler
   - Thuật toán xây dựng chu trình Euler
   - Bài toán người phát thư Trung Hoa
   - Đường Euler trong đồ thị định hướng
4. Đường đi và đồ thị Hamilton
   - Định nghĩa và tính chất đồ thị Hamilton
   - Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton
   - Bài toán sắp xếp chỗ ngồi
   - Đồ thị không phải là Hamilton
5. Bài tập

7.1. Các thuật toán duyệt đồ thị

- Phép duyệt đồ thị là một cách liệt kê tất cả các đỉnh của đồ thị này thành một danh sách tuyến tính.
- Hay nói một cách khác, phép duyệt đồ thị cho ta một cách "đi qua" tất cả các đỉnh của đồ thị để truy nhập, thêm bớt thông tin ở các đỉnh của đồ thị đó.
- Phép duyệt đồ thị không phụ thuộc vào hướng của các cạnh. Do vậy, với đồ thị có hướng thì ta vô hướng hoá trước khi duyệt.

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.1. Mô hình thuật toán duyệt đồ thị

Giả sử $\mathcal{G} = (V, E)$ là đồ thị đã cho và v_0 là một đỉnh nào đó của $\mathcal{G}$. Ký hiệu DS là một cấu trúc dữ liệu kiểu danh sách dùng để chứa các đỉnh.

1) Khởi đầu: $DS \leftarrow \{v_0\}$
2) Lấy đỉnh v ra khỏi đầu DS
3) Duyệt đỉnh v
4) Nạp các đỉnh của liền kề vào DS
5) Nếu $DS \neq \emptyset$ thì quay lên bước 2)
6) Dừng.

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

- Nếu trong thuật toán trên, danh sách DS được tổ chức theo kiểu stack (danh sách vào sau - ra trước – LIFO) thì ta có phương pháp duyệt theo chiều sâu.
- Trong phương pháp này mỗi lần duyệt một đỉnh ta duyệt đến tận cùng mỗi nhánh rồi mới chuyển sang duyệt nhánh khác.
- Giả sử $\mathcal{G} = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng.
- Ta bắt đầu duyệt từ một đỉnh v_0 nào đó của đồ thị.
- Sau đó chọn v là đỉnh kề nào đó của v_0 và lặp lại quá trình duyệt đối với đỉnh v.

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

- Giả sử ta đang xét đỉnh v.
- Nếu trong số các đỉnh kề với v, ta tìm được đỉnh w chưa được duyệt thì ta sẽ xét đỉnh này và bắt đầu từ đó ta tiếp tục quá trình duyệt.
- Ngược lại, nếu không còn đỉnh nào kề với v chưa được duyệt thì ta nói rằng đỉnh v đã duyệt xong và quay trở lại tiếp tục duyệt từ đỉnh mà từ đó ta đến được đỉnh v.
- Nếu quay trở lại đúng đỉnh v_0 thì phép duyệt kết thúc.

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

Thuật toán 1: Duyệt đồ thị theo chiều sâu

Dữ liệu: *Biểu diễn mảng DK các danh sách kề của đồ thị vô hướng* $\mathcal{G}$.

Kết quả: *Danh sách các đỉnh của đồ thị* $\mathcal{G}$.

```
procedure DFSearch(v);
 begin
    Tham_dinh (v);
    Duyet[v] := true;
    for u ∈ DK[v] do
        if !Duyet[u] then DFSearch(u);
 end;
```

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

Thuật toán 2: Duyệt đồ thị theo chiều sâu

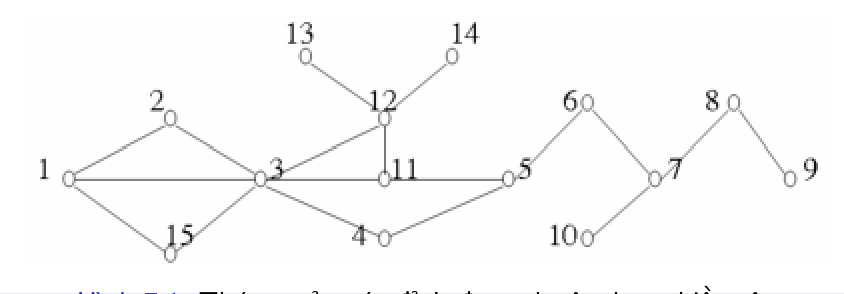
begin // *Chương trình chính*
  for $v \in V$ **do** $Duyet[v] := false$;
  for $v \in V$ **do**
  if $!Duyet[v]$ **then** $DFSearch(v)$;
end .

Độ phức tạp của thật toán là: $O(n+m)$

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

Ví dụ 7.1

Đồ thị được duyệt theo chiều sâu.



Hình 7.1: Thứ tự của các đỉnh được duyệt theo chiều sâu

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

- Trong thuật toán duyệt theo chiều sâu, đỉnh được thăm càng muộn càng sớm trở thành duyệt xong.
- Do vậy việc dùng một ngăn xếp (stack) để lưu trữ các đỉnh đang duyệt là rất thích hợp.
- Ta có thủ tục cải tiến sau đây

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu

Thuật toán 3: Duyệt đồ thị theo chiều sâu dùng ngăn xếp

Dữ liệu: *Biểu diễn mảng DK các danh sách kề của đồ thị vô hướng* $\mathcal{G}$.
Kết quả: *Danh sách các đỉnh của đồ thị* $\mathcal{G}$.

procedure $DFSearch(v)$;
begin
$S := \emptyset$
Tham_dinh (v);
$Duyet[v] := true$;
push v onto S;// *Nạp v lên đỉnh của S*
while $S \neq \emptyset$ **do**
begin
while $\exists u \in DK[top(S)]$ **do**
if $!Duyet[u]$ **then**

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.2. Duyệt theo chiều sâu (tiếp tục)

```
                begin
                    Tham_dinh (u);
                    Duyet[u] := true;
            push u onto S; //Loại bỏ phần tử ở đỉnh của S
                end;
             pop(S);
      end;
  end;
begin // Chương trình chính
    for v ∈ V do Duyet[v] := false;
    for v ∈ V do
    if !Duyet[v] then DFSearch(v);
end.
```

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.3. Duyệt theo chiều rộng

- Nếu trong thuật toán duyệt đồ thị, cấu trúc danh sách *DS* được tổ chức theo kiểu hàng đợi (danh sách vào trước - ra trước – FIFO) thì ta có phương pháp duyệt theo chiều rộng.
- Trong phương pháp này việc duyệt có tính chất "lan rộng".
- Một đỉnh được duyệt xong ngay sau khi ta đã xét hết tất cả các đỉnh kề với nó.
- Đỉnh được xét càng sớm thì sớm trở thành duyệt xong.

Thuật toán 4: Duyệt đồ thị theo chiều rộng

Dữ liệu: *Biểu diễn mảng DK các danh sách kề của đồ thị vô hướng* $\mathcal{G}$.
Kết quả: *Danh sách các đỉnh của đồ thị* $\mathcal{G}$.

procedure $BFSearch(v)$;
begin
  $Q := \emptyset$;
  enqueue v *into* Q; // *Nạp v vào cuối hàng đợi Q*
  $Duyet[v] := true$;
  while $Q \neq \emptyset$ **do**
  begin
    dequeue z **from** Q; //*Loại z ra khỏi đầu hàng đợi Q*
    Tham_dinh (z);
    for $u \in DK[z]$ **do**

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.3. Duyệt theo chiều rộng (tiếp tục)

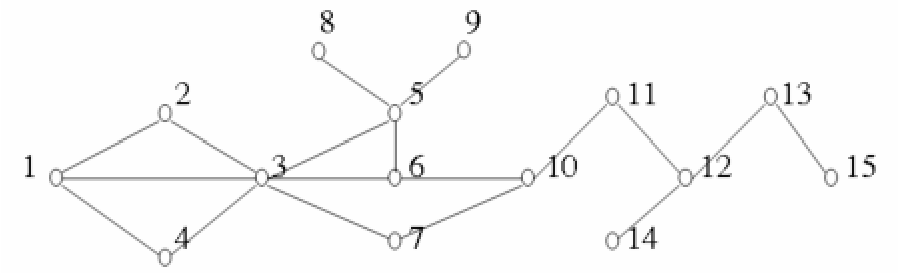
```
    if !Duyet[u] then
     begin
      enqueue u into Q;
      Duyet[u] := true;
     end ;
    end ;
end ;
 begin // Chương trình chính
    for v ∈ V do Duyet[v] := false;
    for v ∈ V do
    if !Duyet[v] then BFSearch(v);
end .
```

7.1. Thuật toán duyệt đồ thị - 7.1.3. Duyệt theo chiều rộng

Thuật toán này cũng có độ phức tạp là $O(n+m)$.

Ví dụ 7.2

Đồ thị trong Ví dụ 7.1 được duyệt theo chiều rộng.



Hình 7.2: Thứ tự của các đỉnh được duyệt theo chiều rộng

7.2. Một số ứng dụng duyệt đồ thị - 7.2.1. Bài toán tìm đường đi

- *Giả sử a và b là hai đỉnh nào đó của đồ thị vô hướng $\mathcal{G}$. Hãy tìm đường đi (nếu có) từ đỉnh a đến đỉnh b.*
- Theo các phương pháp duyệt đồ thị, các lời gọi thủ tục $DFSearch(a)$ hoặc $BFSearch(a)$ cho phép thăm tất cả các đỉnh thuộc cùng thành phần liên thông với đỉnh a.
- Vì vậy, sau khi thực hiện xong thủ tục nếu $Duyet[b] = false$ thì không có đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b ngược lại thì đỉnh b thuộc cùng mảng liên thông với đỉnh a, hay nói một cách khác, có đường đi từ a đến b.

7.2. Một số ứng dụng duyệt đồ thị - 7.2.1. Bài toán tìm đường đi

- Để khôi phục đường đi ta dùng thêm một biến mảng *Truoc*.
- Thành phần $Truoc[u]$ ghi lại đỉnh đến trước đỉnh u trên đường duyệt từ a tới u.
- Khi đó, trong thủ tục $DFSearch(v)$ cần sửa đổi câu lệnh **if** ở dòng lệnh 6 như sau:
- **if** $!Duyet[u]$ **then begin** $Truoc[u] := v; DFSearch(u)$ **end**;
- còn trong thủ tục $BFSearch(v)$ thì cần sửa câu lệnh **if** ở các dòng lệnh

Sửa đoạn mã trong duyệt theo chiều rộng *BFSearch*

```
if !Duyet[u] then
  begin
    enqueue u into Q;
    Duyet[u] := true;  Truoc[u] := z;
  end;
```

7.2. Một số ứng dụng duyệt đồ thị - 7.2.1. Bài toán tìm đường đi

Đường đi cần tìm (nếu có) sẽ được khôi phục như sau

$$b \leftarrow a_1 = Truoc[b] \leftarrow a_2 = Truoc[a1] \leftarrow .... \leftarrow a$$

Chú ý: Đường đi tìm được theo thuật toán duyệt theo chiều rộng là đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b.

7.2. Một số ứng dụng duyệt đồ thị - 7.2.2. Tìm các mảng liên thông

- Cho đồ thị $\mathcal{G}$, hãy tìm số mảng liên thông p của đồ thị này và xác định xem mỗi mảng liên thông bao gồm những đỉnh nào.
- Do các thủ tục $DFSearch(v)$ hoặc $BFSearch(v)$ cho phép duyệt tất cả các đỉnh thuộc cùng mảng liên thông với đỉnh v nên số mảng liên thông p của đồ thị $\mathcal{G}$ chính bằng số lần gọi đến các thủ tục này trong chương trình chính.
- Để ghi nhận các đỉnh trong từng mảng liên thông, ta dùng thêm biến mảng $Mang[v]$ để ghi chỉ số của mảng liên thông chứa đỉnh v. Chỉ số này tăng từ 1 đến p.

7.2. Một số ứng dụng duyệt đồ thị - 7.2.2. Tìm các mảng liên thông

- Ta dùng biến p để đếm số mảng liên thông của đồ thị và gán chỉ số cho các mảng liên thông tìm được.
- Bắt đầu nó được khởi tạo giá trị bằng 0.
- Thủ tục $Tham\_dinh(v)$ trong các thủ tục $DFSearch(v)$ và $BFSearch$) làm thêm nhiệm vụ gán: $Mang[v] := p$;
- Còn chương trình chính của thuật toán duyệt cần được sửa lại như sau

7.2. Một số ứng dụng duyệt đồ thị - 7.2.2. Tìm các mảng liên thông

Sửa đoạn mã trong phần chính

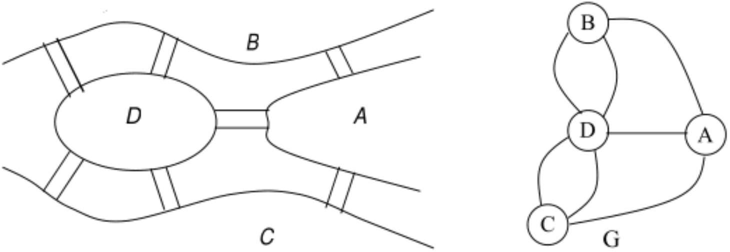
```
begin  // Chương trình chính
    for  v ∈ V  do  Duyet[v] := false;
    p:=0;
    for  v ∈ V  do
    if  !Duyet[v]  then
     begin
        p:=p+1;
        DFSearch(v);  //hoặc BFSearch(v);
     end
end .
```

Khi chương trình kết thúc, biến p sẽ cho số mảng liên thông của đồ thị còn các giá trị của biến mảng $Mang[v]$, $v \in V$ cho phép liệt kê tất cả các đỉnh trong từng mảng liên thông của đồ thị.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

- Có thể coi năm 1736 là năm khai sinh lý thuyết đồ thị, với việc công bố lời giải "bài toán về các cầu ở Konigsberg" của nhà toán học lỗi lạc Euler (1707-1783).
- Thành phố Konigsberg thuộc Phổ (nay gọi là Kaliningrad thuộc Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel, các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel.
- Vào thế kỷ 18, người ta xây bảy chiếc cầu nối các vùng này với nhau.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler



Hình 7.3: Bảy cầu của thành phố Konigsberg

- Dân thành phố từng thắc mắc: "Có thể nào đi dạo qua tất cả bảy cầu, mỗi cầu chỉ một lần thôi không?".
- Nếu ta coi mỗi khu vực A, B, C, D như một đỉnh và mỗi cầu qua lại hai khu vực là một cạnh nối hai đỉnh thì ta có sơ đồ của Konigsberg là một đa đồ thị $\mathcal{G}$ như hình trên.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu chỉ qua một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị $\mathcal{G}$ chứa tất cả các cạnh?

Định nghĩa 7.1

Chu trình (hoặc đường đi) đơn chứa tất cả các cạnh (hoặc cung) của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) $\mathcal{G}$ được gọi là *chu trình (hoặc đường đi) Euler*.

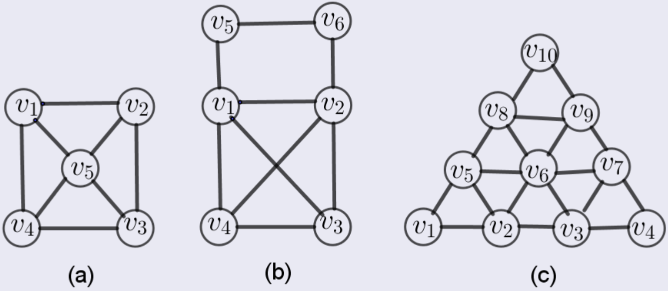
Định nghĩa 7.2

Một đồ thị liên thông (liên thông yếu đối với đồ thị có hướng) có chứa một chu trình (hoặc đường đi) Euler được gọi là *đồ thị Euler (hoặc nửa Euler)*.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

Ví dụ 7.3

Các dạng đồ thị Euler và không Euler vô hướng

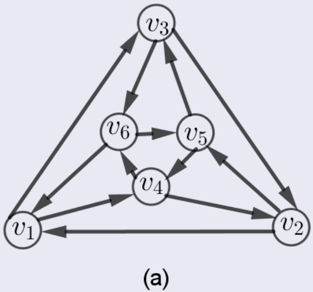


Hình 7.4: (a) Đồ thị không nửa Euler, (b) Đồ thị nửa Euler, (c) Đồ thị Euler

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

Ví dụ 7.4

Các dạng đồ thị Euler và không Euler có hướng



Hình 7.5: (a) Đồ thị nửa Euler, (b) Đồ thị nửa Euler

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Euler được Euler tìm ra vào năm 1736 khi ông giải quyết bài toán hóc búa nổi tiếng thời đó về bảy cái cầu ở Konigsberg và đây là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

Bổ đề 7.1

Nếu bậc của mỗi đỉnh của đồ thị $\mathcal{G}$ không nhỏ hơn 2 thì $\mathcal{G}$ chứa chu trình đơn.

Chứng minh.

- Nếu $\mathcal{G}$ có cạnh bội hoặc có khuyên thì khẳng định của bổ đề là hiển nhiên.
- Vì vậy giả sử $\mathcal{G}$ là một đơn đồ thị. Gọi v là một đỉnh nào đó của $\mathcal{G}$.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler (tiếp tục)

- Ta sẽ xây dựng theo quy nạp đường đi

Hình 7.6: Xây dựng đường đi

trong đó v_1 là đỉnh kề với v, còn với $i \geq 1$, chọn v_{i+1} là đỉnh kề với v_i và $v_{i+1} \neq v_{i-1}$ (có thể chọn như vậy vì $\deg(v_i) \geq 2$), $v_0 = v$.

- Do tập đỉnh của $\mathcal{G}$ là hữu hạn, nên sau một số hữu hạn bước ta phải quay lại một đỉnh đã xuất hiện trước đó.
- Gọi k là số nguyên dương đầu tiên để $v_k = v_i (0 \leq i < k)$. Khi đó, đường đi $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_k (= v_i)$ là một chu trình đơn cần tìm.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

Định lý 7.1

Đồ thị (vô hướng) liên thông $\mathcal{G}$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của $\mathcal{G}$ đều có bậc chẵn.

Chứng minh. a)

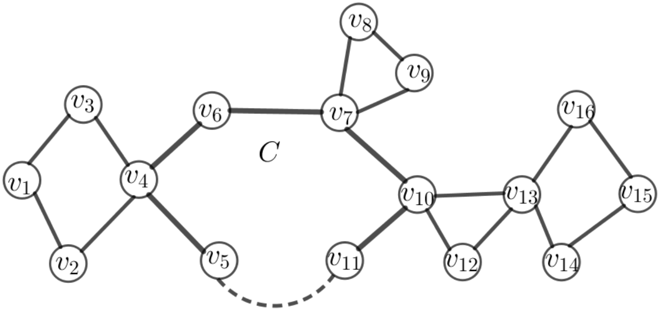
- *Điều kiện cần:* Giả sử $\mathcal{G}$ là đồ thị Euler, tức là tồn tại chu trình Euler P trong $\mathcal{G}$.
- Khi đó cứ mỗi lần chu trình P đi qua một đỉnh nào đó của $\mathcal{G}$ thì bậc của đỉnh đó tăng lên 2.
- Mặt khác, mỗi cạnh của đồ thị xuất hiện trong P đúng một lần.
- Do đó mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

- b) *Điều kiện đủ:* Quy nạp theo số cạnh của $\mathcal{G}$. Do $\mathcal{G}$ liên thông và bậc của mọi đỉnh là chẵn nên mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn 2.
- Từ đó theo Bổ đề 7.1, $\mathcal{G}$ phải chứa một chu trình đơn C.
- Nếu C đi qua tất cả các cạnh của $\mathcal{G}$ thì nó chính là chu trình Euler. Giả sử C không đi qua tất cả các cạnh của $\mathcal{G}$.
- Khi đó loại bỏ khỏi $\mathcal{G}$ các cạnh thuộc C, ta thu được một đồ thị mới H (không nhất thiết là liên thông).
- Số cạnh trong H nhỏ hơn trong $\mathcal{G}$ và rõ ràng mỗi đỉnh của H vẫn có bậc là chẵn.
- Theo giả thiết quy nạp, trong mỗi thành phần liên thông của H đều tìm được chu trình Euler.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler (tiếp tục)

- Do $\mathcal{G}$ liên thông nên mỗi thành phần trong H có ít nhất một đỉnh chung với chu trình C.
- Vì vậy, ta có thể xây dựng chu trình Euler trong $\mathcal{G}$ như sau:



Hình 7.7: Xây dựng chu trình Euler

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

- Bắt đầu từ một đỉnh nào đó của chu trình C, đi theo các cạnh của C chừng nào chưa gặp phải đỉnh không cô lập của H.
- Nếu gặp phải đỉnh như vậy thì ta đi theo chu trình Euler của thành phần liên thông của H chứa đỉnh đó.
- Sau đó lại tiếp tục đi theo cạnh của C cho đến khi gặp phải đỉnh không cô lập của H thì lại theo chu trình Euler của thành phần liên thông tương ứng trong H, ...
- Quá trình sẽ kết thúc khi ta trở về đỉnh xuất phát, tức là thu được chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

Định lý 7.2

Đồ thị liên thông $\mathcal{G}$ là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh bậc lẻ trong $\mathcal{G}$.

Chứng minh.

- Nếu $\mathcal{G}$ là nửa Euler thì tồn tại một đường đi Euler trong $\mathcal{G}$ từ đỉnh u đến đỉnh v.
- Gọi $\mathcal{G}'$ là đồ thị thu được từ $\mathcal{G}$ bằng cách thêm vào cạnh 4.
- Khi đó$\mathcal{G}'$ là đồ thị Euler nên mọi đỉnh trong $\mathcal{G}'$ đều có bậc chẵn (kể cả u và v).
- Vì vậy u và v là hai đỉnh duy nhất trong $\mathcal{G}$ có bậc lẻ.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.1. Định nghĩa đồ thị Euler

- Đảo lại, nếu có đúng hai đỉnh bậc lẻ là u và v thì gọi $\mathcal{G}'$ là đồ thị thu được từ $\mathcal{G}$ bằng cách thêm vào cạnh (u, v).
- Khi đó mọi đỉnh của $\mathcal{G}'$ đều có bậc chẵn hay $\mathcal{G}'$ là đồ thị Euler.
- Bỏ cạnh (u, v) đã thêm vào ra khỏi chu trình Euler trong $\mathcal{G}'$ ta có được đường đi Euler từ u đến v trong $\mathcal{G}$ hay $\mathcal{G}$ là nửa Euler.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler

Dựa trên chứng minh của Định lý 7.1, ta xây dựng thuật toán tìm chu trình Euler cho đồ thị liên thông không có đỉnh bậc lẻ như sau.

Thuật toán 5: Tìm chu trình Euler

Đầu vào: *Đồ thị liên thông* $G = (V, E)$ *không có đỉnh bậc lẻ biểu diễn bởimảng các danh sách kề* DK.
Đầu ra: *Chu trình Euler với danh sách các đỉnh trong* CE.
begin
  $S := \emptyset; CE := \emptyset;$
  $v :=$ *đỉnh tuỳ ý của đồ thị* ;
  push v onto S ;
  while $S \neq \emptyset$ **do**
   begin
    $v := top(S);$
    if $DK(v) \neq \emptyset$ **then**

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler (tiếp tục)

```
        begin
            u := đỉnh đầu tiên trong danh sách DK[v] ;
            push u onto S ;
            DK[v] := DK[v] \ {u} ;
            DK[u] := DK[u] \ {v} ;
            // Xoá cạnh (v,u) trong đồ thị G
            v := u
        end
    else
        begin
            v := top(S) ;
            push v onto CE
        end
end
```

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler (tiếp tục)

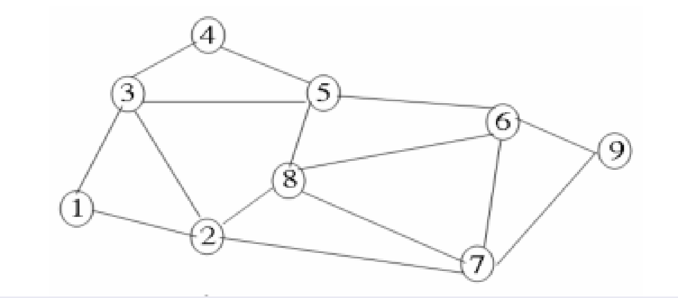
end .

- Ta thấy rằng, mỗi lần lặp của chu trình trong thuật toán hoặc là đặt đỉnh lên stack S và xoá cạnh hoặc chuyển đỉnh từ stack S sang stack CE.
- Số lần lặp của chu trình không vượt quá số cạnh m.
- Vậy độ phức tạp tổng thể của thuật toán là $O(m)$.
- Đây là một thuật toán tối ưu để tìm chu trình Euler.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler

Ví dụ 7.5

Áp dụng thuật toán trên cho đồ thị vô hướng với các đỉnh bậc chẵn dưới đây.



Hình 7.8: Đồ thị vô hướng với các đỉnh bậc chẵn

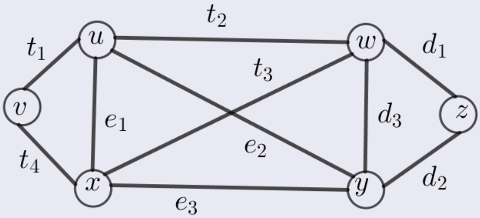
Ta nhận được chu trình Euler là [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 8, 6, 9, 7, 8, 5, 3, 1].

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler

Chú ý 1. Ta có thể sửa đổi thuật toán tìm theo chiều sâu để xây dựng đường đóng các cạnh chưa dùng.

Ví dụ 7.6

Điều quan trọng của thuật toán là mở rộng những đường mòn đóng bằng ghép nối đường đóng thứ hai. Ta xét hai đường đóng $T =< t_1, t_2, t_3, t_4 >$ và $D =< d_1, d_2, d_3 >$ như trong hình 7.9.



Hình 7.9: Thuật toán Euler

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler

Chú ý 2. Một phương pháp khác tìm một chu trình Euler trong đồ thị liên thông $\mathcal{G}$ có bậc của mọi đỉnh là chẵn theo thuật toán Fleury sau đây.

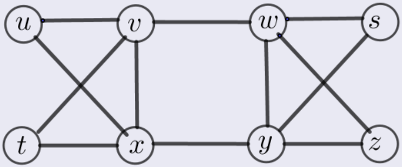
Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của $\mathcal{G}$ và tuân theo hai quy tắc sau

1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xoá nó đi; sau đó xoá đỉnh cô lập (nếu có);
2. Không bao giờ đi qua một cầu, trừ phi không còn cách đi nào khác.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler

Ví dụ 7.7

Tìm chu trình Euler theo thuật toán Fleury đồ thị sau



Hình 7.10: Tìm chu trình Euler

- Xuất phát từ u, ta có thể đi theo cạnh (u, v) hoặc (u, x), giả sử là (u, v) (xoá (u, v)).
- Từ v có thể đi qua một trong các cạnh $(v, w), (v, x), (v, t)$, giả sử (v, w) (xoá (v, w)).

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.2. Xây dựng chu trình Euler (tiếp tục)

- Tiếp tục, có thể đi theo một trong các cạnh $(w, s), (w, y), (w, z)$, giả sử(w, s) (xoá (w, s)).
- Đi theo cạnh (s, y) (xoá (s, y) và s).
- Vì (y, x) là cầu nên có thể đi theo một trong hai cạnh $(y, w), (y, z)$, giả sử (y, w) (xoá (y, w)).
- Đi theo (w, z) (xoá 4 và w) và theo (z, y) (xoá (z, y) và z).
- Tiếp tục đi theo cạnh (y, x) (xoá (y, x) và y).
- Vì (x, u) là cầu nên đi theo cạnh (x, v) hoặc 4, giả sử (x, v) (xoá (x, v)).
- Tiếp tục đi theo cạnh 4(xoá (v, t) và v), theo cạnh 4 (xoá cạnh(t, x) và 4), cuối cung đi theo cạnh (x, u) (xoá (x, u), x và u).

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.3. Bài toán người phát thư

Một nhân viên đi từ Sở Bưu Điện, qua một số đường phố để phát thư, rồi quay về Sở. Người ấy phải đi qua các đường theo trình tự nào để đường đi là ngắn nhất?

- Bài toán được nhà toán học Trung Hoa Guan nêu lên đầu tiên (1960), vì vậy thường được gọi là "bài toán người phát thư Trung Hoa".
- Ta xét bài toán ở một dạng đơn giản như sau.
- *Cho đồ thị liên thông $\mathcal{G}$. Một chu trình qua mọi cạnh của $\mathcal{G}$ gọi là một hành trình trong $\mathcal{G}$. Trong các hành trình đó, hãy tìm hành trình ngắn nhất, tức là qua ít cạnh nhất.*
- Rõ ràng rằng nếu $\mathcal{G}$ là đồ thị Euler (mọi đỉnh đều có bậc chẵn) thì chu trình Euler trong $\mathcal{G}$ (qua mỗi cạnh của $\mathcal{G}$ đúng một lần) là hành trình ngắn nhất cần tìm.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.3. Bài toán người phát thư

- Chỉ còn phải xét trường hợp $\mathcal{G}$ có một số đỉnh bậc lẻ (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn).
- Khi đó, mọi hành trình trong $\mathcal{G}$ phải đi qua ít nhất hai lần một số cạnh nào đó.
- Dễ thấy rằng một hành trình qua một cạnh (u, v) nào đó quá hai lần thì không phải là hành trình ngắn nhất trong $\mathcal{G}$.
- Vì vậy, ta chỉ cần xét những hành trình T đi qua hai lần một số cạnh nào đó của $\mathcal{G}$.
- Ta quy ước xem mỗi hành trình T trong $\mathcal{G}$ là một hành trình trong đồ thị Euler $\mathcal{G}_T$, có được từ $\mathcal{G}$ bằng cách vẽ thêm một cạnh song song đối với những cạnh mà T đi qua hai lần. Bài toán đặt ra được đưa về bài toán sau:
- Trong các đồ thị Euler $\mathcal{G}_T$, tìm đồ thị có số cạnh ít nhất (khi đó chu trình Euler trong đồ thị này là hành trình ngắn nhất).

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.3. Bài toán người phát thư

Định lý 7.3 (Gooodman và Hedetniemi, 1973)

Nếu $\mathcal{G}$ là một đồ thị liên thông có q cạnh thì hành trình ngắn nhất trong $\mathcal{G}$ có chiều dài $q + m(\mathcal{G})$, trong đó $m(\mathcal{G})$ là số cạnh mà hành trình đi qua hai lần và được xác định như sau:

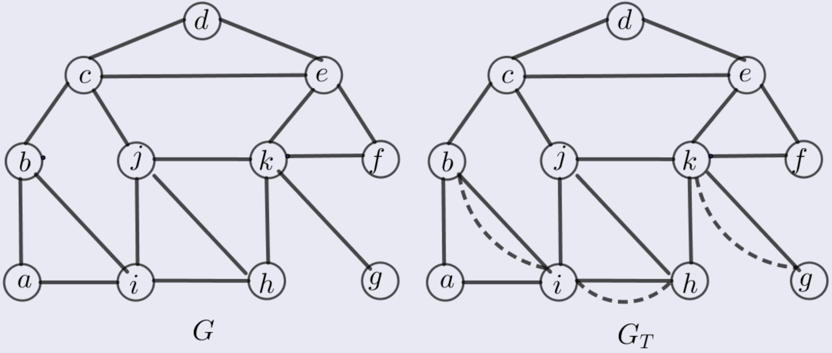
1. *Gọi $V_0(\mathcal{G})$ là tập hợp các đỉnh bậc lẻ (2k đỉnh) của $\mathcal{G}$. Ta phân 2k phần tử của $\mathcal{G}$ thành k cặp, mỗi tập hợp k cặp gọi là một phân hoạch cặp của $V_0(\mathcal{G})$.*
2. *Ta gọi độ dài đường đi ngắn nhất từ u đến v là khoảng cách $d(u, v)$. Đối với mọi phân hoạch cặp P_i, ta tính khoảng cách giữa hai đỉnh trong từng cặp, rồi tính tổng $d(P_i)$. Số $m(\mathcal{G})$bằng cực tiểu của các $d(P_i)$:*

$$m(\mathcal{G}) = \min d(Pi).$$

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.3. Bài toán người phát thư

Ví dụ 7.8

Giải bài toán người phát thư Trung Hoa cho trong đồ thị sau



Hình 7.11: Bài toán người phát thư

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler - 7.3.3. Bài toán người phát thư

Lời giải. Tập hợp các đỉnh bậc lẻ $V_0(\mathcal{G}) = \{b, g, h, k\}$ và tập hợp các phân hoạch cặp là $P = P_1, P_2, P_3$, trong đó

$$P_1 = \{(b,g),(h,k)\} \to d(P_1) = d(b,g) + d(h,k) = 4 + 1 = 5,$$
$$P_2 = \{(b,h),(g,k)\} \to d(p_2) = d(b,h) + d(g,k) = 2 + 1 = 3,$$
$$P_3 = \{(b,k),(g,h)\} \to d(p_3) = d(b,k) + d(g,h) = 3 + 2 = 5.$$

- $m(\mathcal{G}) = \min(d(P_1), d(P_2), d(P_3)) = 3.$
- Do đó $\mathcal{G}_T$ có được từ $\mathcal{G}$ bằng cách thêm vào 3 cạnh: $(b,i),(i,h),(g,k)$ và $\mathcal{G}_T$ là đồ thị Euler.
- Vậy hành trình ngắn nhất cần tìm là đi theo chu trình Euler trong $\mathcal{G}_T$:

$$a, b, c, d, e, f, k, g, k, e, c, j, k, h, j, i, h, i, b, i, a.$$

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler

7.3.4. Đường Euler trong đồ thị định hướng

- Thuật ngữ về đường Euler trong đồ thị định hướng là đường mòn có hướng.
- Các đặc trưng của đồ thị cho hành trình Euler và đường Euler mở vẫn còn đúng trong đồ thị định hướng còn đúng với các đường định hướng này.
- Ta phát biểu các định lí cho đồ thị định hướng, còn chứng minh thì hoàn toàn tương tự.

Định lý 7.4

Đồ thị có hướng liên thông yếu $\mathcal{G}$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của $\mathcal{G}$ đều có bậc vào bằng bậc ra.

Chứng minh. Chứng minh tương tự như chứng minh của Định lý 7.1 và điều kiện đủ cũng cần có bổ đề dưới đây tương tự như ở Bổ đề 7.1.

7.3. Đường đi euler và đồ thị euler

7.3.4. Đường Euler trong đồ thị định hướng

Bổ đề 7.2

Nếu bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh của đồ thị có hướng $\mathcal{G}$ không nhỏ hơn 1 thì $\mathcal{G}$ chứa chu trình đơn.

Hệ quả 7.5

Đồ thị có hướng liên thông yếu $\mathcal{G}$ là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi tồn tại hai đỉnh x và y sao cho

$$\deg_o(x) = \deg_t(x) + 1, \deg_t(y) = \deg_o(y) + 1, \deg_t(v) = \deg_o(v),$$

$\forall v \in V, v \neq x, v \neq y.$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như ở Hệ quả 7.1.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

- Năm 1857, nhà toán học người Ailen là Hamilton(1805-1865) đưa ra trò chơi "đi vòng quanh thế giới" như sau.
- Cho một hình thập nhị diện đều (đa diện đều có 12 mặt, 20 đỉnh và 30 cạnh), mỗi đỉnh của hình mang tên một thành phố nổi tiếng, mỗi cạnh của hình (nối hai đỉnh) là đường đi lại giữa hai thành phố tương ứng.
- Xuất phát từ một thành phố, hãy tìm đường đi thăm tất cả các thành phố khác, mỗi thành phố chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ.
- Trước Hamilton, có thể là từ thời Euler, người ta đã biết đến một câu đố hóc búa về "đường đi của con mã trên bàn cờ".
- Trên bàn cờ, con mã chỉ có thể đi theo đường chéo của hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 ô vuông.
- *Giả sử bàn cờ có 8×8 ô vuông. Hãy tìm đường đi của con mã qua được tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô chỉ một lần rồi trở lại ô xuất phát.*

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

- Bài toán này được nhiều nhà toán học chú ý, đặc biệt là Euler, De Moivre, Vandermonde, ...
- Hiện nay đã có nhiều lời giải và phương pháp giải cũng có rất nhiều, trong đó có quy tắc: mỗi lần bố trí con mã ta chọn vị trí mà tại vị trí này số ô chưa dùng tới do nó khống chế là ít nhất.
- Một phương pháp khác dựa trên tính đối xứng của hai nửa bàn cờ. Ta tìm hành trình của con mã trên một nửa bàn cờ, rồi lấy đối xứng cho nửa bàn cờ còn lại, sau đó nối hành trình của hai nửa đã tìm lại với nhau.
- Trò chơi và câu đố trên dẫn tới việc khảo sát một lớp đồ thị đặc biệt, đó là đồ thị Hamilton.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

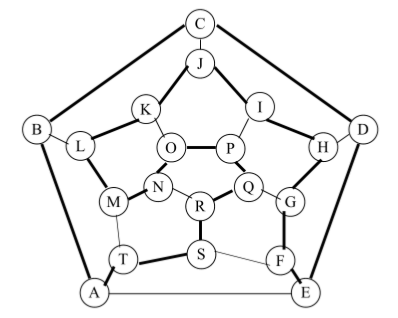
Định nghĩa 7.3

Chu trình (t.ư. đường đi) sơ cấp chứa tất cả các đỉnh của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) $\mathcal{G}$ được gọi là chu trình (t.ư. đường đi) Hamilton. Một đồ thị có chứa một chu trình (t.ư. đường đi) Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton (t.ư. nửa Hamilton).

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Ví dụ 7.9

Đồ thị Hamilton (hình thập nhị diện đều biểu diễn trong mặt phẳng) với chu trình Hamilton A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, A (Hình 7.12 đường tô đậm).



Hình 7.12: Hình thập nhị diện đều

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Ví dụ 7.10

Trong một đợt thi đấu bóng bàn có $n(n \geq 2)$ đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ gặp từng đấu thủ khác đúng một lần. Trong thi đấu bóng bàn chỉ có khả năng thắng hoặc thua.
Chứng minh rằng sau đợt thi đấu có thể xếp tất cả các đấu thủ đứng thành một hàng dọc, để người đứng sau thắng người đứng ngay trước anh (chị) ta.

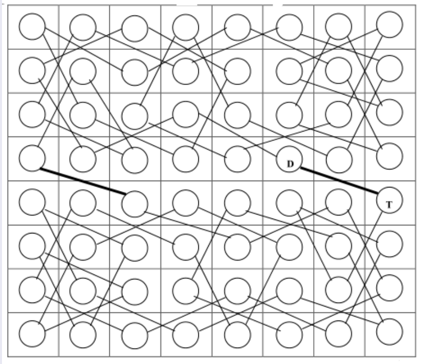
- Xét đồ thị có hướng $\mathcal{G}$ gồm n đỉnh sao cho mỗi đỉnh ứng với một đấu thủ và có một cung nối từ đỉnh u đến đỉnh v nếu đấu thủ ứng với u thắng đấu thủ ứng với v.
- Như vậy, đồ thị $\mathcal{G}$ có tính chất là với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v, có một và chỉ một trong hai cung (u, v) hoặc (v, u), đồ thị như thế được gọi là đồ thị có hướng đầy đủ.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

- Từ Định lý 7.6 dưới đây, $\mathcal{G}$ là một đồ thị nửa Hamilton.
- Khi đó đường đi Hamilton trong $\mathcal{G}$ cho ta sự sắp xếp cần tìm.

Ví dụ 7.11

Một lời giải về hành trình của con mã trên bàn cờ 8×8:



Hình 7.13: Hành trình của con mã

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

- Đường đi Hamilton tương tự đường đi Euler trong cách phát biểu: Đường đi Euler qua mọi cạnh (cung) của đồ thị đúng một lần, đường đi Hamilton qua mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần.
- Tuy nhiên, nếu như bài toán tìm đường đi Euler trong một đồ thị đã được giải quyết trọn vẹn, dấu hiệu nhận biết một đồ thị Euler là khá đơn giản và dễ sử dụng, thì các bài toán về tìm đường đi Hamilton và xác định đồ thị Hamilton lại khó hơn rất nhiều.
- Đường đi Hamilton và đồ thị Hamilton có nhiều ý nghĩa thực tiễn và đã được nghiên cứu nhiều, nhưng vẫn còn những khó khăn lớn chưa ai vượt qua được.
- Người ta chỉ mới tìm được một vài điều kiện đủ để nhận biết một lớp rất nhỏ các đồ thị Hamilton và đồ thị nửa Hamilton. Sau đây là một vài kết quả.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Định lý 7.6 (**Rédei**)

Nếu $\mathcal{G}$ là một đồ thị có hướng đầy đủ thì $\mathcal{G}$ là đồ thị nửa Hamilton.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{G} = (V, E)$ là đồ thị có hướng đầy đủ và $d = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$là đường đi sơ cấp bất kỳ trong đồ thị $\mathcal{G}$.
– Nếu d đã đi qua tất cả các đỉnh của $\mathcal{G}$ thì nó là một đường đi Hamilton của $\mathcal{G}$.
– Nếu trong $\mathcal{G}$ còn có đỉnh nằm ngoài d, thì ta có thể bổ sung dần các đỉnh này vào d và cuối cùng nhận được đường đi Hamilton.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Thật vậy, giả sử v là đỉnh tuỳ ý không nằm trên d.

- a) Nếu có cung nối v với v_1 thì bổ sung v vào đầu của đường đi d để được $d_1 = (v, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k)$.
- b) Nếu tồn tại chỉ số $i(1 \leq i \leq k-1)$ mà từ v_i có cung nối tới v và từ v có cung nối tới v_{i+1} thì ta chen v vào giữa v_i và v_{i+1} để được đường đi sơ cấp $d_2 = (v_1, v_2, ..., v_i, v, v_{i+1}, ..., v_k)$.
- c) Nếu cả hai khả năng trên đều không xảy ra nghĩa là với mọi $i(1 \leq i \leq k) v_i$ đều có cung đi tới v.
  Khi đó bổ sung v vào cuối của đường đi d và được đường đi $d_3 = (v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k, v)$.
- Nếu đồ thị $\mathcal{G}$ có n đỉnh thì sau $n-k$ bổ sung ta sẽ nhận được đường đi Hamilton.

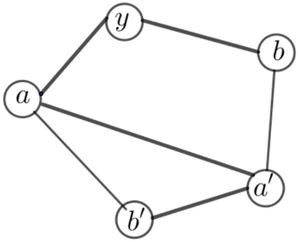
7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Định lý 7.7 **(Dirac, 1952)**

Nếu $\mathcal{G}$ là một đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của $\mathcal{G}$ đều có bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì $\mathcal{G}$ là một đồ thị Hamilton.

Chứng minh.

Định lý được chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\mathcal{G}$ không có chu trình Hamilton. Ta thêm vào $\mathcal{G}$ một số đỉnh mới và nối mỗi đỉnh mới này với mọi đỉnh của $\mathcal{G}$, ta được đồ thị $\mathcal{G}'$. Giả sử $k(> 0)$ là số tối thiểu các đỉnh cần thiết để $\mathcal{G}'$ chứa một chu trình Hamilton. Như vậy, $\mathcal{G}'$ có $n + k$ đỉnh.



Hình 7.14: Chứng minh Định lý Dirac

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

- Gọi P là chu trình Hamilton $ayb...a$ trong $\mathcal{G}'$, trong đó a và b là các đỉnh của $\mathcal{G}$, còn y là một trong các đỉnh mới. Khi đó b không kề với a, vì nếu trái lại thì ta có thể bỏ đỉnh y và được chu trình $ab...a$, mâu thuẫn với giả thiết về tính chất nhỏ nhất của k.
- Ngoài ra, nếu a' là một đỉnh kề nào đó của a (khác với y) và b' là đỉnh nối tiếp ngaya' trong chu trình P thì b' không thể là đỉnh kề với b, vì nếu trái lại thì ta có thể thay P bởi chu trình $aa'...bb'...a$, trong đó không có y, mâu thuẫn với giả thiết về tính chất nhỏ nhất của k.
- Như vậy, với mỗi đỉnh kề với a, ta có một đỉnh không kề với b, tức là số đỉnh không kề với b không thể ít hơn số đỉnh kề với a (số đỉnh kề với a không nhỏ hơn $\frac{n}{2}+k$).

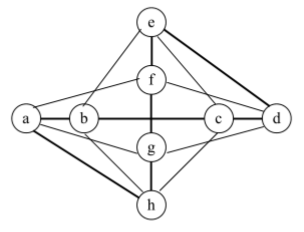
7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

- Mặt khác, theo giả thiết số đỉnh kề với b cũng không nhỏ hơn $\dfrac{n}{2} + k$.
- Vì không có đỉnh nào vừa kề với b lại vừa không kề với b, nên số đỉnh của $\mathcal{G}'$ không ít hơn $2(\dfrac{n}{2} + k) = n + 2k$, mâu thuẫn với giả thiết là số đỉnh của $\mathcal{G}'$ bằng $n + k (k > 0)$.
- Định lý được chứng minh.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Ví dụ 7.12

Xét đồ thị $\mathcal{G} = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
$E =$
$\{(a, b), (a, f), (a, g), (a, h), (b, e), (b, c), (b, h), (e, g), (e, c), (e, d),$
$(e, f), (f, d), (f, g), (g, d), (g, h), (h, c), (c, d)\}$



Hình 7.15: Chu trình Hamilton theo Định lý 7.7

Đồ thị $\mathcal{G}$ (Hình 7.15) có 8 đỉnh, đỉnh nào cũng có bậc 4, nên theo Định lý 7.7, $\mathcal{G}$ là đồ thị Hamilton.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.1. Định nghĩa và tính chất

Hệ quả 7.8

Nếu $\mathcal{G}$ là đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của $\mathcal{G}$ đều có bậc không nhỏ hơn $\dfrac{n-1}{2}$ thì $\mathcal{G}$ là đồ thị nửa Hamilton.

Chứng minh. Thêm vào $\mathcal{G}$ một đỉnh x và nối x với mọi đỉnh của $\mathcal{G}$ thì ta nhận được đơn đồ thị $\mathcal{G}'$ có $n+1$ đỉnh và mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $\dfrac{n+1}{2}$. Do đó theo Định lý 7.7, trong $\mathcal{G}'$ có một chu trình Hamilton. Bỏ x ra khỏi chu trình này, ta nhận được đường đi Hamilton trong $\mathcal{G}$.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

7.4.2. Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton

Định lý 7.9 (Ore, 1960)

Cho $\mathcal{G}$ là một đồ thị n đỉnh đơn với $n \geq 3$ sao cho $\deg(X) + \deg(Y) \geq n$ với mọi cặp hai đỉnh X và Y không cạnh nhau. Khi đó $\mathcal{G}$ là Hamilton.

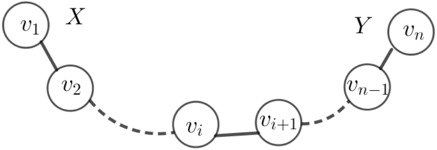
Chứng minh.

- Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử rằng định lí sai và cho $\mathcal{G}$ là đồ thị lớn nhất theo n có thể mà định lí sai.
- Nghĩa là $\mathcal{G}$ không có đường Hamilton và vẫn thỏa mãn các điều kiện của định lí, và ta thêm một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau của $\mathcal{G}$ tạo thành một đồ thị Hamilton.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

7.4.2. Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton

- Cho X và Y là hai đỉnh không cạnh nhau của $\mathcal{G}$ (vì $\mathcal{G}$ không đầy đủ và $n \geq 3$). Để chứng minh có điều vô lí, ta cần chỉ ra $\deg(X) + \deg(Y) \leq n - 1$ là đủ.
- Thật vậy, từ đồ thị $\mathcal{G} + XY$ chứa chu trình Hamilton, $\mathcal{G}$ chứa đường dẫn Hamilton, mà các điểm cuối của nó là X và Y. Đặt $< X = v_1, v_2, ..., v_n = Y >$ là đường dẫn (hình 7.16)

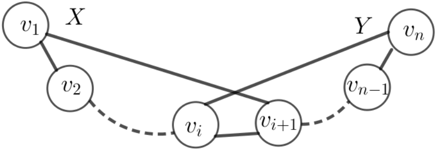


Hình 7.16: Đường dẫn Hamilton trong $\mathcal{G}$

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

7.4.2. Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton

Với mỗi $i = 2, 3, ..., n - 1$ ít nhất một trong các cặp v_1, v_{i+1} và v_i, v_n không kề nhau, vì nếu ngược lại thì $v_1, v_2, ..., v_i, v_n, v_{n-1}, ..., v_{i+1}, v_1 >$ sẽ là chu trình Hamilton trong $\mathcal{G}$ (hình 7.17).



Hình 7.17: Đường dẫn Hamilton trong $\mathcal{G}$

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton
7.4.2. Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton

Điều này nghĩa là nếu (a_{ij}) là ma trận kề cho $\mathcal{G}$, thì $a_{1,i+1} + a_{i,n} \leq 1$ với $i = 2, 3, \ldots, n-2$. Như vậy,

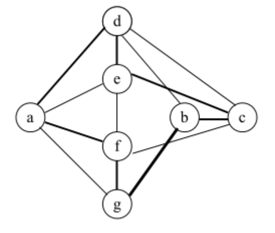
$$\begin{aligned}
\deg(X) + \deg(Y) &= \sum_{i=2}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} \\
&= a_{1,2} + \sum_{i=3}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{i,n} + a_{n-1,n} \\
&= 1 + \sum_{i=3}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{i,n} + 1 \\
&= 2 + \sum_{i=3}^{n-1} (a_{1,i} + a_{i,n}) \\
&\leq 2 + n - 3 = n - 1.
\end{aligned}$$

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

7.4.2. Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton

Ví dụ 7.13

Đồ thị $\mathcal{G}'$ (Hình 7.18) có 5 đỉnh bậc 4 và 2 đỉnh bậc 2 kề nhau nên tổng số bậc của hai đỉnh không kề nhau bất kỳ bằng 7 hoặc 8, nên theo Định lý 7.9, $\mathcal{G}'$ là đồ thị Hamilton.



Hình 7.18: Chu trình Hamilton theo Định lý 7.9.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton

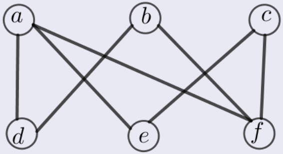
7.4.2. Điều kiện đủ cho đồ thị là Hamilton

Định lý 7.10

Nếu $\mathcal{G}$ là đồ thị phân đôi với hai tập đỉnh là V_1, V_2 có số đỉnh cùng bằng $n (n \geq 2)$ và bậc của mỗi đỉnh lớn hơn $\frac{n}{2}$ thì $\mathcal{G}$ là một đồ thị Hamilton.

Ví dụ 7.14

Đồ thị phân đôi này có bậc của mỗi đỉnh bằng 2 hoặc $3(> 3/2)$, nên theo Định lý 7.10, nó là đồ thị Hamilton.



Hình 7.19: Chu trình Hamilton theo Định lý 7.9.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.3. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

Có n đại biểu từ n nước đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi ngày họp một lần ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải bố trí bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người có hai người kế bên là bạn mới. Lưu ý rằng n người đều muốn làm quen với nhau.

- Xét đồ thị gồm n đỉnh, mỗi đỉnh ứng với mỗi người dự hội nghị, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu tương ứng muốn làm quen với nhau. Như vậy, ta có đồ thị đầy đủ K_n .
- Đồ thị này là Hamilton và rõ ràng mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp như yêu cầu của bài toán.
- Bái toán trở thành tìm các chu trình Hamilton phân biệt của đồ thị đầy đủ K_n (hai chu trình Hamilton gọi là phân biệt nếu chúng không có cạnh chung).

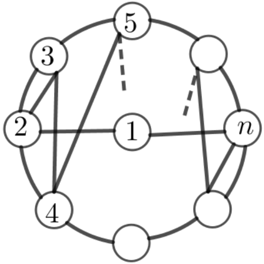
7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.3. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

Định lý 7.11

Đồ thị đầy đủ K_n với n lẻ và $n \geq 3$ có đúng $\dfrac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton phân biệt.

Chứng minh. K_n có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh và mỗi chu trình Hamilton có n cạnh, nên số chu trình Hamilton phân biệt nhiều nhất là $\dfrac{n-1}{2}$.(Hình 7.20)

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.3. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi



Hình 7.20: Chu trình Hamilton.

- Giả sử các đỉnh của K_n là $1, 2, \ldots, n$.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.3. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi (tiếp tục)

- Đặt đỉnh 1 tại tâm của một đường tròn và các đỉnh $2, \dots, n$ đặt cách đều nhau trên đường tròn (mỗi cung là $\dfrac{360^\circ}{n-1}$ sao cho đỉnh lẻ nằm ở nửa đường tròn trên và đỉnh chẵn nằm ở nửa đường tròn dưới.
- Ta có ngay chu trình Hamilton đầu tiên là $1, 2, \dots, n, 1$.
- Các đỉnh được giữ cố định, xoay khung theo chiều kim đồng hồ với các góc quay:

$$\frac{360^\circ}{n-1}, 2.\frac{360^\circ}{n-1}, 3.\frac{360^\circ}{n-1}, \dots, \frac{n-3}{2}.\frac{360^\circ}{n-1},$$

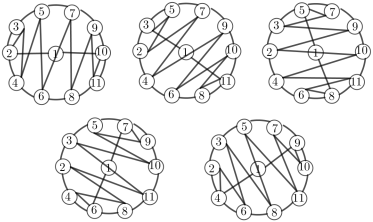
  ta nhận được $\dfrac{n-3}{2}$ khung phân biệt với khung đầu tiên.
- Do đó ta có $\dfrac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton phân biệt.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.3. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

Ví dụ 7.15

Giải bài toán sắp xếp chỗ ngồi với $n = 11$.

Lời giải. Có $\dfrac{11-1}{2} = 5$ cách sắp xếp chỗ ngồi phân biệt như sau



Hình 7.21: Bài toán sắp xếp chỗ ngồi.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.3. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
1	3	5	2	7	4	9	6	11	8	10	1
1	5	7	3	9	2	11	4	10	6	8	1
1	7	9	5	11	3	10	2	8	4	6	1
1	9	11	7	10	5	8	3	6	2	4	1

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.4. Đồ thị không là Hamilton

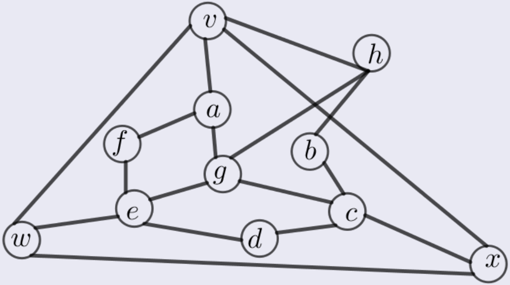
Các quy tắc sau đây như các định lí là cơ sở chỉ ra rằng mọi chu trình Hamilton phải chứa đúng hai cạnh gắn liền với mỗi đỉnh.

- **Quy tắc 1:** Nếu đỉnh V có bậc 2, thì cả hai cạnh gắn với nó phải là một phần của chu trình Hamilton bất kì.
- **Quy tắc 2:** Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, không có chu trình có thể tạo thành cho tới khi tất cả các đỉnh đã được ghé qua.
- **Quy tắc 3:** Nếu trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton hai trong số các cạnh gắn liền với 1 đỉnh V được chỉ ra, thì tất cả các cạnh gắn liền khác có thể bỏ đi được.

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.4. Đồ thị không là Hamilton

Ví dụ 7.16

Chứng minh rằng đồ thị dưới đây không phải là đồ thị Hamilton (hình 7.22)



Hình 7.22: Đồ thị không là đồ thị Hamilton

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.4. Đồ thị không là Hamilton

Chứng minh.

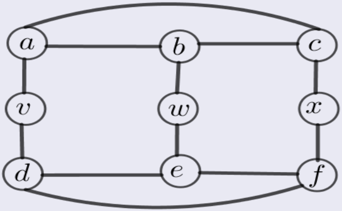
- Quy tắc 1 áp dụng cho các đỉnh b, d, f suy ra các cạnh bh, bc, dc, de, ef và fa phải nằm trên mọi chu trình Hamilton.
- Theo nguyên tắc 3 áp dụng cho đỉnh c và e loại trừ các cạnh cg, cx, eg và ew.
- Kết quả còn lại của đồ thị lại sử dụng quy tắc 1 suy ra các cạnh wv, vx và xw phải nằm trên mọi chu trình Hamilton.
- Nhưng điều đó tạo ra một 3-chu trình, mà nó vô lí với quy tắc 2.
- Điều đó kéo theo tồn tại hai chu trình con tách biệt, mà nó lại trái với quy tắc 2.

$\square$

7.4. Đường đi và đồ thị Hamilton - 7.4.4. Đồ thị không là Hamilton

Ví dụ 7.17

Chứng minh rằng đồ thị sau không phải là Hamilton (hình 7.23)



Hình 7.23: Đồ thị không là đồ thị Hamilton

Chứng minh.

- Quy tắc 1 áp dụng cho v, w, x kéo theo tất cả sáu cạnh đứng phải là một phần chu trình *H*amilton bất kì.
- Quy tắc 1 và 3 áp dụng cho đỉnh b kéo theo đúng một trong các cạnh ab và bc là một Phần của chu trình Hamilton.
- Nếu ab nằm trên chu trình và bc không thì theo quy tắc 3 áp dụng cho đỉnh a kéo theo ac không nằm trên chu trình.
- Nhưng khi đó cx chỉ là cạnh trên chu trình này mà nó gắn liền với c.
- Như vậy theo quy tắc 1 không có chu trình tồn tại trong trường hợp này, vô lí.
- Theo tính đối xứng, tương tự cho kết quả với nếu bc trên chu trình còn ab thì không.

$\square$

7.5. Bài tập

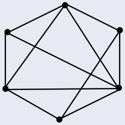
▷ 7.1

Hãy cho một đồ thị nào đó. Duyệt theo chiều sâu, rồi duyệt theo chiều rộng trên đồ thị này.

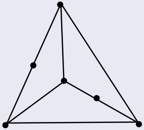
7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.2

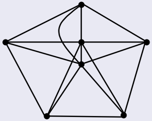
Duyệt theo chiều sâu, rồi duyệt theo chiều rộng trên các đồ thị sau đây.



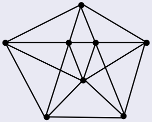
(a)



(b)



(c)



(d)

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.3

Đồ thị mà kết quả duyệt theo chiều sâu và duyệt theo chiều rộng luôn trùng nhau, có những tính chất gì?

7.5. Bài tập

▷ 7.4

Với giá trị nào của n các đồ thị sau đây có chu trình Euler ? a) Kn, b) Cn, c) Wn, d) Qn.

▷ 7.5

Với giá trị nào của m và n các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có
a) chu trình Euler ? b) đường đi Euler ?

▷ 7.6

Với giá trị nào của m và n các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton ?

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.7

Chứng minh rằng đồ thị lập phương Q_n là một đồ thị Hamilton. Vẽ cây liệt kê tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị lập phương Q_3 .

▷ 7.8

Trong một cuộc họp có 15 người mỗi ngày ngồi với nhau quanh một bàn tròn một lần. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho mỗi lần ngồi họp, mỗi người có hai người bên cạnh là bạn mới, và sắp xếp như thế nào ?

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.9

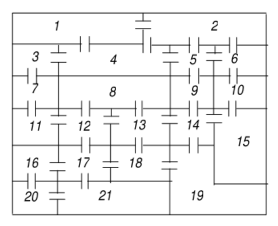
Hiệu trưởng mời $2n(n \geq 2)$ sinh viên giỏi đến dự tiệc. Mỗi sinh viên giỏi quen ít nhất n sinh viên giỏi khác đến dự tiệc. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp tất cả các sinh viên giỏi ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà sinh viên đó quen.

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.10

Một ông vua đã xây dựng một lâu đài để cất báu vật. Người ta tìm thấy sơ đồ của lâu đài (hình sau) với lời dặn: muốn tìm báu vật, chỉ cần từ một trong các phòng bên ngoài cùng (số 1, 2, 6, 10, ...), đi qua tất cả các cửa phòng, mỗi cửa chỉ một lần; báu vật được giấu sau cửa cuối cùng.

Hãy tìm nơi giấu báu vật

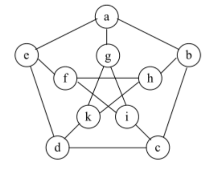


Hình 7.24: Lâu đài bí mật

7.5. Bài tập

▷ 7.11

Đồ thị cho trong hình sau gọi là đồ thị Peterson P (Hình 7.25).



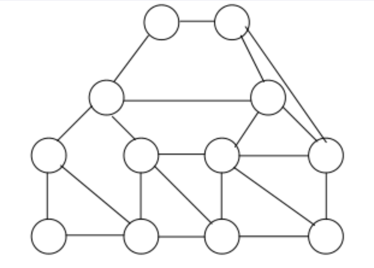
Hình 7.25: Đồ thị Peterson P

a) Tìm một đường đi Hamilton trong P.
b) Chứng minh rằng$P \setminus \{v\}$, với v là một đỉnh bất kỳ của P, là một đồ thị Hamilton.

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.12

Giải bài toán người phát thư Trung Hoa với đồ thị cho trong hình sau:

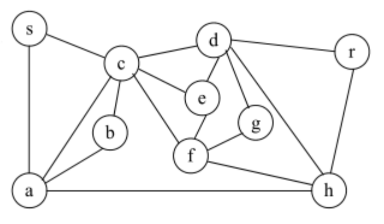


Hình 7.26: Bài toán người phát thư P

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.13

Chứng minh rằng đồ thị $\mathcal{G}$ cho trong hình sau có đường đi Hamilton (từ s đến r) nhưng không có chu trình Hamilton.



Hình 7.27: Không có chu trình

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.14

Cho thí dụ về:
1) Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton;
2) Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton, nhưng hai chu trình đó không trùng nhau;
3) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton, nhưng không phải là đồ thị Euler;
4) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler, nhưng không phải là đồ thị Hamilton.

▷ 7.15

Chứng minh rằng con mã không thể đi qua tất cả các ô của một bàn cờ có 4×4 hoặc 5×5 ô vuông, mỗi ô chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ.

7.5. Bài tập (tiếp tục)

▷ 7.16

Chứng minh rằng các đồ thị sau đây có chu trình Hamilton hoặc không phải là đồ thị Hamilton.