TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

BÀI 8

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN ĐỒ THỊ

Nội dung

1. Đồ thị có trọng số và bài toán đường đi ngắn nhất
   - Mở đầu
   - Bài toán tìm đường đi ngắn nhất
   - Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất
   - Thuật toán Floyd
2. Bài toán luồng cực đại
   - Luồng vận tải
   - Bài toán luồng cực đại
3. Một số ứng dụng luồng lớn nhất
   - Bài toán luồng nhỏ nhất
   - Bài toán luồng trên mạng có nhiều đỉnh phát và đỉnh thu
   - Bài toán tìm cặp ghép lớn nhất của đồ thị hai phần
   - Bài toán vận tải thông qua các cạnh và các đỉnh
4. Bài tập

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.1. Mở đầu

- Trong đời sống, chúng ta thường gặp những tình huống như sau: để đi từ địa điểm A đến địa điểm B trong thành phố, có nhiều đường đi, nhiều cách đi;
- có lúc ta chọn đường đi ngắn nhất (theo nghĩa cự ly), có lúc lại cần chọn đường đi nhanh nhất (theo nghĩa thời gian) và có lúc phải cân nhắc để chọn đường đi rẻ tiền nhất (theo nghĩa chi phí), v.v...
- Có thể coi sơ đồ của đường đi từ A đến B trong thành phố là một đồ thị, với đỉnh là các giao lộ (A và B coi như giao lộ), cạnh là đoạn đường nối hai giao lộ.
- Trên mỗi cạnh của đồ thị này, ta gán một số dương, ứng với chiều dài của đoạn đường, thời gian đi đoạn đường hoặc cước phí vận chuyển trên đoạn đường đó, ...

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.1. Mở đầu

Định nghĩa 8.1

Đồ thị có trọng số là đồ thị $G = (V, E)$ mà mỗi cạnh (hoặc cung) $e \in E$ được gán bởi một số thực $c(e)$, gọi là *trọng số* của cạnh (hoặc cung) e.

Trong phần này, trọng số của mỗi cạnh được xét là một số dương và còn gọi là chiều dài của cạnh đó.

Định nghĩa 8.2

Mỗi đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v, có chiều dài là $c(u, v)$, bằng tổng chiều dài các cạnh mà nó đi qua. *Khoảng cách* $d(u, v)$ giữa hai đỉnh u và v là chiều dài đường đi ngắn nhất (theo nghĩa $c(u, v)$ nhỏ nhất) trong các đường đi từ u đến v.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

- Có thể xem một đồ thị G bất kỳ là một đồ thị có trọng số mà mọi cạnh đều có chiều dài 1. Khi đó, khoảng cách $d(u, v)$ giữa hai đỉnh u và v là chiều dài của đường đi từ u đến v ngắn nhất, tức là đường đi qua ít cạnh nhất.
- **Bài toán:** *Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai đỉnh a, b. Tìm đường đi ngắn nhất (nếu có) đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị G.*
- **Ý nghĩa thực tế:** Bài toán này giúp chúng ta chọn các hành trình tiết kiệm nhất (quãng đường, thời gian, chi phí ...) trong giao thông, lập lịch thi công các công trình một cách tối ưu, xử lý trong truyền tin ...
- Thuật toán duyệt đồ thị theo chiều rộng đã cho ta lời giải của bài toán này. Song ta có thêm thuật toán sau đây.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Thuật toán 8.1: Đường đi ngắn nhất duyệt theo chiều rộng

Đầu vào: *Biểu diễn mảng DK các danh sách kề và a, b của $\mathcal{G}$.*
Đầu ra: *Danh sách các đỉnh đường đi ngắn nhất của đồ thị $\mathcal{G}$.*
Bước 1. *Lần lượt gán nhãn cho các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh không quá một lần, như sau:*
- *Đỉnh a được gán nhãn là số 0.*
- *Những đỉnh kề với đỉnh a được gán số 1.*
- *Những đỉnh kề với đỉnh đã được gán nhãn số 1, được gán số 2.*

....

- *Tương tự, những đỉnh kề với đỉnh đã được gán số i được gán nhãn là số $i+1$.*

....

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất (tiếp tục)

Thực hiện cho đến khi gán được nhãn cho đỉnh b hoặc không gán nhãn được nữa.

Bước 2. *Nếu đỉnh b được gán nhãn nào đó là k thì kết luận có đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh b với độ dài k, ngược lại thì trả lời là không có.*

Bước 3. *Khôi phục đường đi: Nếu ở bước 2. chỉ ra b được gán nhãn k nào đó thì ta đi ngược lại theo quy tắc sau đây: Nếu đỉnh y được gán nhãn j với* $j \geq 1$ *thì sẽ cóđỉnh x được gãn nhãn* $j - 1$ *sao cho có cạnh đi từ x tới y. Đi ngược lại cho đến khigặp đỉnh a, ta nhận được đường đi ngắn nhất cần tìm.*

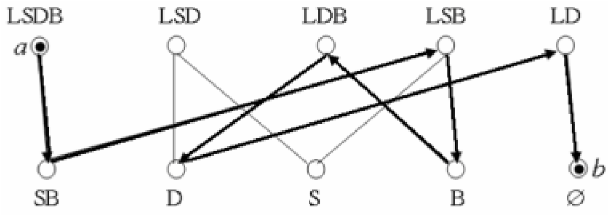
8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Ví dụ 8.1 (*Bài toán con sói, con dê và cái bắp cải*)

Một con sói, một con dê và một cái bắp cải đang ở bờ sông. Người lái đò phải đưa chúng sang sông. Nhưng thuyền quá bé nên mỗi chuyến chỉ chở được một "hành khách" thôi. Vì những lý do mà ai cũng biết, không thể bỏ mặc sói với dê hoặc dê với bắp cải mà không có người trông. Vậy người lái đò phải xử trí thế nào mà vẫn đưa được sói, dê và bắp cải sang bên kia sông.

Lời giải. Xây dựng đồ thị vô hướng với các đỉnh thể hiện các hành khách còn lại bên phía xuất phát tại mỗi thời điểm khác nhau. Cạnh nối hai đỉnh thể hiện một chuyến đò qua sông.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất



Hình 8.1: Hành trình qua sông của sói, dê và bắp cải

Bài toán đưa về việc tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b trên đồ thị. Đường đi như thế được chỉ ra bởi các mũi tên ở hình trên.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

- Với bài toán đường đi tổng quát, ta xét các đồ thị có trọng số. Ta thường ký hiệu đồ thị có trọng số là (G, c).
- Độ dài của đường đi trong đồ thị có trọng số bằng tổng các trọng số của các cạnh trên đường đi đó.
- **Bài toán:** *Cho đồ thị có trọng số (G, c) và hai đỉnh a, b thuộc G. Hãy tìm đường đi có trọng số bé nhất (nếu có) đi từ đỉnh a đến đỉnh b.*
- Độ dài đường đi ngắn nhất từ đi đỉnh a đến đỉnh b còn được gọi là khoảng cách từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị. Nếu không có đường đi từ a đến b thì đặt khoảng cách bằng ∞.
- Năm 1959 E. W. Dijkstra đưa ra một thuật toán rất hiệu quả để giải bài toán đường đi ngắn nhất.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Thuật toán thực hiện việc gán và giảm giá trị của nhãn $l(i)$ tại mỗi đỉnh i của đồ thị G như sau:

Thuật toán 8.2: Tìm đường đi ngắn nhất (E. W. Dijkstra)

Đầu vào: *Biểu diễn mảng C chi phí và a, b của* $\mathcal{G}$.

Đầu ra: *Danh sách các đỉnh đường đi ngắn nhất của đồ thị* $\mathcal{G}$.

Bước 1. *Với đỉnh xuất phát a, gán nhãn* $l(a) := 0$.

Bước 2. *Nếu có cạnh* (i, j) *mà đỉnh i đã được gán nhãn và đỉnh j chưa được gánnhãn hoặc đỉnh j đã được gán nhãn nhưng* $l(i) + c(i, j) < l(j)$ *thì giảm nhãn* $l(j) := l(i) + c(i, j)$.

Bước 3. *Lặp lại bước 2. cho đến khi không gán hoặc giảm nhãn được nữa.*

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Định lý 8.1

Tại mỗi đỉnh b giá trị nhãn $l(b)$ cuối cùng (nếu có) chính là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b.

Chứng minh.

- Sau khi đã thực hiện xong thuật toán trên, nếu giá trị nhãn $l(b)$ xác định thì ta có đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b.
- Ta khôi phục đường đi từ a đến b như sau:
- Xuất phát từ đỉnh b, tìm cạnh có đỉnh cuối là b và đỉnh đầu là i sao cho:

$$l(i) + c(i, b) = l(b).$$

- Đỉnh i như thế chắc chắn phải tồn tại vì xảy ra đẳng thức ở lần gán hoặc giảm giá trị nhãn $l(j)$ cuối cùng. Cứ tiếp tục như thế cho đến khi gặp đỉnh a.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

- Giả sử ta nhận được dãy các cạnh:

$$(a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{k-1}, b)$$

  mà trên đó

$$\begin{aligned} l(a) + c(a, a_1) &= l(a_1) \\ l(a_1) + c(a_1, a_2) &= l(a_2) \\ &\cdots\cdots \\ l(a_{k-1}) + c(a_{k-1}, b) &= l(b). \end{aligned}$$

- Cộng từng vế và khử các giá trị chung ở cả hai vế ta có:

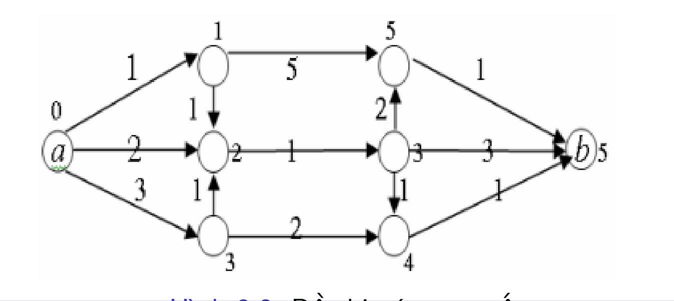
$$c(a, a_1) + c(a_1, a_2) + ... + c(a_{k-1}, b) = l(b).$$

  Vậy giá trị nhãn $l(b)$ chính là độ dài đường đi nói trên.
- Bất kỳ đường đi nào khác từ đỉnh a đến đỉnh b cũng có các hệ thức tương tự nhưng có dấu $\geq$.
- Vậy nhãn $l(b)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Ví dụ 8.2

Xét đồ thị có trọng số sau đây:



Hình 8.2: Đồ thị có trọng số

Độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b là 5.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Để đơn giản việc tính toán, ta xây dựng ma trận trọng số C :

$$C[i,j] = \begin{cases} c(i,j) & \text{nếu } (i,j) \in E \\ \infty & \text{nếu } (i,j) \notin E \\ 0 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

Khi đó, thuật toán Dijkstra được trình bày chi tiết hơn như sau

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Thuật toán 8.3: Dijkstra

Đầu vào: *Biểu diễn mảng C các trọng số và a của $\mathcal{G}$.*
Đầu ra: *Danh sách các đỉnh đường đi ngắn nhất của đồ thị $\mathcal{G}$.*

procedure $dijkstra(a)$;
 begin
 for $j \in V$ **do**
  begin
   $L[j] := C[a, j]; Truoc[j] := a;$
  end ;
 $T := V \setminus \{a\};$
 while $T \neq \emptyset$ **do**
  begin
   chọn đỉnh $i \in T$ *mà* $L[i] = \min\{L[j] | j \in T\};$

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất (tiếp tục)

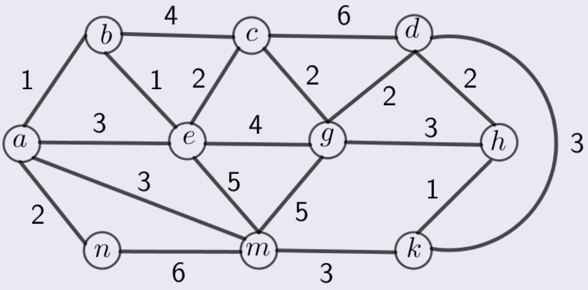
$T := T \setminus \{i\}$;
for $j \in T$ **do**
  if $L[j] > L[i] + C[i, j]$ **then**
  begin
    $L[j] := L[i] + C[i, j]$;
    $Truoc[j] := i$;
  end ;
end ;
end ;

Biến mảng *Truoc* dùng để khôi phục đường đi.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Ví dụ 8.3

Tìm khoảng cách $d(a, v)$ từ a đến mọi đỉnh v và tìm đường đi ngắn nhất từ a đến v cho trong đồ thị G sau.



Hình 8.3: Thuật toán Dijkstra

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Lời giải.

$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(k)$	$L(m)$	$L(n)$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
–	1	∞	∞	3	∞	∞	∞	3	2
–	–	5	∞	2	∞	∞	∞	3	2
–	–	5	∞	2	∞	∞	∞	3	–
–	–	4	∞	–	6	∞	∞	3	–
–	–	4	∞	–	6	∞	6	–	–
–	–	–	10	–	6	∞	6	–	–
–	–	–	8	–	–	9	6	–	–
–	–	–	8	–	–	7	–	–	–
–	–	–	8	–	–	–	–	–	–

Hình 8.4: Lời giải theo thuật toán Dijkstra

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Định lý 8.2

Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất từ một đỉnh cho trước đến một đỉnh tuỳ ý trong đơn đồ thị vô hướng liên thông có trọng số.

Chứng minh. Định lý được chứng minh bằng quy nạp. Tại bước k ta có giả thiết quy nạp là
(i) Nhãn của đỉnh v không thuộc S là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh này;
(ii) Nhãn của đỉnh v trong S là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh này và đường đi này chỉ chứa các đỉnh (ngoài chính đỉnh này) không thuộc S.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

- Khi $k = 0$, tức là khi chưa có bước lặp nào được thực hiện, $S = V \setminus \{a\}$, vì thế độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới các đỉnh khác a là ∞ và độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới chính nó bằng 0 (ở đây, chúng ta cho phép đường đi không có cạnh). Do đó bước cơ sở là đúng.
- Giả sử giả thiết quy nạp là đúng với bước k.
- Gọi v là đỉnh lấy ra khỏi S ở bước lặp $k+1$, vì vậy v là đỉnh thuộc S ở cuối bước k có nhãn nhỏ nhất (nếu có nhiều đỉnh có nhãn nhỏ nhất thì có thể chọn một đỉnh nào đó làm v).
- Từ giả thiết quy nạp ta thấy rằng trước khi vào vòng lặp thứ $k+1$, các đỉnh không thuộc S đã được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a.
- Đỉnh v cũng vậy phải được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất (tiếp tục)

- Nếu điều này không xảy ra thì ở cuối bước lặp thứ k sẽ có đường đi với độ dài nhỏ hơn $L_k(v)$ chứa cả đỉnh thuộc S (vì $L_k(v)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới v chứa chỉ các đỉnh không thuộc S sau bước lặp thứ k).
- Gọi u là đỉnh đầu tiên của đường đi này thuộc S. Đó là đường đi với độ dài nhỏ hơn $L_k(v)$ từ a tới u chứa chỉ các đỉnh không thuộc S. Điều này trái với cách chọn v.
- Do đó (i) vẫn còn đúng ở cuối bước lặp $k+1$.
- Gọi u là đỉnh thuộc S sau bước $k+1$. Đường đi ngắn nhất từ a tới u chứa chỉ các đỉnh không thuộc S sẽ hoặc là chứa v hoặc là không.
- Nếu nó không chứa v thì theo giả thiết quy nạp độ dài của nó là $L_k(v)$.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất (tiếp tục)

- Nếu nó chứa v thì nó sẽ tạo thành đường đi từ a tới v với độ dài có thể ngắn nhất và chứa chỉ các đỉnh không thuộc S khác v, kết thúc bằng cạnh từ v tới u.
- Khi đó độ dài của nó sẽ là $L_k(v) + m(v, u)$. Điều đó chứng tỏ (ii) là đúng vì $L_{k+1}(u) = min(L_k(u), L_k(v) + m(v, u))$.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.3. Bài toán Đường đi có trọng số bé nhất

Mệnh đề 8.1

Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh cho trước đến một đỉnh tuỳ ý trong đơn đồ thị vô hướng liên thông có trọng số có độ phức tạp là $O(n^2)$.

Chứng minh.

- Thuật toán dùng không quá $n - 1$ bước lặp.
- Trong mỗi bước lặp, dùng không hơn $2(n - 1)$ phép cộng và phép so sánh để sửa đổi nhãn của các đỉnh.
- Ngoài ra, một đỉnh thuộc S_k có nhãn nhỏ nhất nhờ không quá $n - 1$ phép so sánh.
- Do đó thuật toán có độ phức tạp $O(n^2)$.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

- Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng, có trọng số.
- Để tìm đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của G, ta có thể áp dụng thuật toán Dijkstra nhiều lần hoặc áp dụng thuật toán Floyd được trình bày dưới đây.
- Giả sử $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và có ma trận trọng số là $W = W_0$.
- Thuật toán Floyd xây dựng dãy các ma trận vuông cấp n là $W_k (0 \leq k \leq n)$ như sau:

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

Thuật toán 8.4: Thuật toán Floyd

---

procedure $Xac\_dinh\ W_n$

for $i := 1$ **to** n

for $j := 1$ **to** n

$W[i,j] := m(v_i, v_j)$ *//W[i,j] là phần tử dòng i cột j của ma trận* W_0

for $k := 1$ **to** n

if $W[i,k] + W[k,j] < W[i,j]$ **then**

$W[i,j] := W[i,k] + W[k,j]$

//W[i,j] là phần tử dòng i cột j của ma trận W_k

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

Định lý 8.3

Thuật toán Floyd cho ta ma trận $W^* = W_n$ là ma trận khoảng cách nhỏ nhất của đồ thị G.

Chứng minh.

- Ta chứng minh bằng quy nạp theo k mệnh đề sau:
- *$W_k[i,j]$ là chiều dài đường đi ngắn nhất trong những đường đi nối đỉnh v_i với đỉnh v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$.*
- Trước hết mệnh đề hiển nhiên đúng với $k = 0$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

Xét $W_k[i,j]$. Có hai trường hợp:

1. Trong các đường đi chiều dài ngắn nhất nối v_i với v_j và đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, có một đường đi γ sao cho $v_k \in \gamma$. Khi đó γ cũng là đường đi ngắn nhất nối v_i với v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$, nên theo giả thiết quy nạp,

$$W_{k-1}[i,j] = \text{ chiều dài } \gamma \leq W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j].$$

Do đó theo định nghĩa của W k thì $W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j]$.

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd (tiếp tục)

2. Mọi đường đi chiều dài ngắn nhất nối v_i với v_j và đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, đều chứa v_k . Gọi $\gamma = v_i...v_k...v_j$ là một đường đi ngắn nhất như thế thì $v_1...v_k$ và $v_k...v_j$ cũng là những đường đi ngắn nhất đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$ và

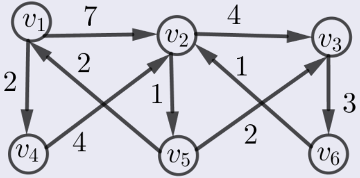
$$\begin{aligned} W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j] &= \text{ chiều dài } (v_1...v_k) + \text{ chiều dài } (v_k...v_j) \\ &= \text{ chiều dài } \gamma < W_{k-1}[i,j]. \end{aligned}$$

Do đó theo định nghĩa của W_k thì ta có

$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j].$$

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

Ví dụ 8.4



Hình 8.5: Lời giải theo thuật toán Floyd

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

Lời giải. Áp dụng thuật toán Floyd, ta tìm được (các ô trống là ∞).

$$W = W_0 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 9 & 2 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 11 & 2 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & \infty \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & \infty \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd (tiếp tục)

$$W_3 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 11 & 2 & 8 & 14 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & 11 \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & 5 \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & 8 \end{pmatrix}, W_4 = \begin{pmatrix} \infty & 6 & 10 & 2 & 7 & 13 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & 11 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$W_5 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 9 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, W_6 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

8.1. Đồ thị có trọng số - 8.1.4. Thuật toán Floyd

- Thuật toán Floyd có thể áp dụng cho đồ thị vô hướng cũng như đồ thị có hướng.
- Ta chỉ cần thay mỗi cạnh vô hướng (u, v) bằng một cặp cạnh có hướng (u, v) và (v, u) với $m(u, v) = m(v, u)$.
- Tuy nhiên, trong trường hợp này, các phần tử trên đường chéo của ma trận W cần đặt bằng 0.
- Đồ thị có hướng G là liên thông mạnh khi và chỉ khi mọi phần tử nằm trên đường chéo trong ma trận trọng số ngắn nhất W^* đều hữu hạn.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.1. Luồng vận tải

Định nghĩa 8.3

Mạng vận tải là một đồ thị có hướng, không có khuyên và có trọng số $G = (V, E)$ với $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ thoả mãn

1. Mỗi cung $e \in E$ có trọng số $m(e)$ là một số nguyên không âm và được gọi là khả năng thông qua của cung e.
2. Có một và chỉ một đỉnh v_0 không có cung đi vào, tức là $\deg_t(v_0) = 0$. Đỉnh v_0 được gọi là lối vào hay đỉnh phát của mạng.
3. Có một và chỉ một đỉnh v_n không có cung đi ra, tức là $\deg_o(v_n) = 0$. Đỉnh v_n được gọi là lối ra hay đỉnh thu của mạng.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.1. Luồng vận tải

Định nghĩa 8.4

Để định lượng khai thác, tức là xác định lượng vật chất chuyển qua mạng vận tải $G = (V, E)$, người ta đưa ra khái niệm luồng vận tải và nó được định nghĩa như sau.
Hàm φ xác định trên tập cung E và nhận giá trị nguyên được gọi là luồng vận tải của mạng vận tải G nếu φ thoả mãn

1) $\varphi(e) \geq 0, \forall e \in E$.
2) $\sum\limits_{e\in\Gamma^-(v)} \varphi(e) = \sum\limits_{e\in\Gamma^+(v)} \varphi(e), v \neq v_0, v \neq v_n,$
   $\Gamma^-(v) = \{e \in E | e \text{ có đỉnh cuối là } v\}$
   $\Gamma^+(v) = \{e \in E | e \text{ có đỉnh đầu là } v\}$
3) $\varphi(e) \leq c(e), \forall e \in E$.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.1. Luồng vận tải

- Ta xem $\varphi(e)$ như là lượng hàng chuyển trên cung $e = (u, v)$ từ đỉnh u đến đỉnh v và không vượt quá khả năng thông qua của cung này.
- Ngoài ra, từ điều kiện 2) ta thấy rằng nếu v không phải là lối vào v_0 hay lối ra v_n, thì lượng hàng chuyển tới v bằng lượng hàng chuyển khỏi v.
- Từ quan hệ 2) suy ra

$$4)\quad \sum_{e\in\Gamma^-(v_0)} \varphi(e) = \sum_{e\in\Gamma^+(v_0)} \varphi(e) =: \varphi_{v_n}.$$

Đại lượng φ_{v_n} (ta còn ký hiệu là φ_n) được gọi là *luồng qua mạng*, hay *cường độ luồng* tại điểm v_n hay giá trị của luồng φ. Bài toán đặt ra ở đây là tìm φ để φ_{v_n} đạt giá trị lớn nhất, tức là tìm giá trị lớn nhất của luồng.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.1. Luồng vận tải

Định nghĩa 8.5

Cho mạng vận tải $G = (V, E)$ và $A \subset V$. Ký hiệu

$$\Gamma^{-}(A) = \{(u, v) \in E | v \in A, u \notin A\},$$

$$\Gamma^{-}(A) = \{(u, v) \in E | u \in A, v \notin A\}.$$

Đối với tập cung M tuỳ ý, đại lượng $\varphi(M) = \sum\limits_{e \in M} \varphi(e)$ được gọi là *luồng của tập cung* M.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.1. Luồng vận tải

Từ điều kiện 2) dễ dàng suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 8.4

Cho φ là luồng của mạng vận tải $G = (V, E)$ và $A \subset V \setminus \{v_0, v_n\}$. Khi đó

$$\varphi(\Gamma^-(A)) = \varphi(\Gamma^+(A)).$$

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

Cho mạng vận tải $G = (V, E)$. Hãy tìm luồng φ để đạt φ_{v_n} max trên mạng G.
Nguyên lý của các thuật toán giải bài toán tìm luồng cực đại là như sau.

Định nghĩa 8.6

Cho $A \subset V$ là tập con tuỳ ý không chứa lối vào v_0 và chứa lối ra v_n. Tập $\Gamma^-(A)$ được gọi là một thiết diện của mạng vận tải G. Đại lượng $m(\Gamma^-(A)) = \sum\limits_{e \in \Gamma^-(A)} c(e)$ được gọi là khả năng thông qua của thiết diện $\Gamma^-(A)$.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

- Từ định nghĩa thiết diện và khả năng thông qua của nó ta nhận thấy rằng:
- mỗi đơn vị hàng hoá được chuyển từ v_0 đến v_n ít nhất cũng phải một lần qua một cung nào đó của thiết diện $\Gamma^-(A)$.
- Vì vậy, dù luồng φ và thiết diện $\Gamma^-(A)$ như thế nào đi nữa cũng vẫn thoả mãn quan hệ

$$\varphi_n \leq m(\Gamma^-(A)).$$

- Do đó, nếu đối với luồng φ và thiết diện W mà có:

$$\varphi_n = m(W)$$

thì chắc chắn rằng luồng φ đạt giá trị lớn nhất và thiết diện W có khả năng thông qua nhỏ nhất.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

Định nghĩa 8.7

Cung e trong mạng vận tải G với luồng vận tải φ được goi là *cung bão hoà* nếu $\varphi(e) = m(e)$.

- Luồng φ của mạng vận tải G được gọi là luồng đầy nếu mỗi đường đi từ v_0 đến v_n đều chứa ít nhất một cung bão hoà.
- Từ định nghĩa trên ta thấy rằng, nếu luồng φ trong mạng vận tải G chưa đầy thì nhất định tìm được đường đi α từ lối vào v_0 đến lối ra v_n không chứa cung bão hoà.
- Khi đó ta nâng luồng φ thành φ' như sau

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e) + 1 & \text{khi } e \in \alpha \\ \varphi(e) & \text{khi } e \notin \alpha \end{cases}$$

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại (tiếp tục)

- Khi đó φ' cũng là một luồng, mà giá trị của nó là

$$\varphi'(e) = \varphi_n 1 > \varphi_n.$$

- Như vậy, đối với mỗi luồng không đầy ta có thể nâng giá trị của nó và nâng cho tới khi nhận được một luồng đầy.
- Tuy vậy, thực tế cho thấy rằng có thể có một luồng đầy, nhưng vẫn chưa đạt tới giá trị cực đại.
- Bởi vậy, cần phải dùng thuật toán Ford-Fulkerson để tìm giá trị cực đại của luồng.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

Thuật toán Ford-Fulkerson

Để tìm luồng cực đại của mạng vận tải G, ta xuất phát từ luồng tuỳ ý φ của G, rồi nâng luồng lên đầy, sau đó áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson hoặc ta có thể áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson trực tiếp đối với luồng φ.

Thuật toán gồm 3 bước

Bước 1 (đánh dấu ở đỉnh của mạng). Lối vào v_0 được đánh dấu bằng 0.

1. Nếu đỉnh v_i đã được đánh dấu thì ta dùng chỉ số $+i$ để đánh dấu cho mọi đỉnh y chưa được đánh dấu mà $(v_i, y) \in E$ và cung này chưa bão hoà $(\varphi(v_i, y) < m(v_i, y))$.
2. Nếu đỉnh v_i đã được đánh dấu thì ta dùng chỉ số $-i$ để đánh dấu cho mọi đỉnh z chưa được đánh dấu mà $(z, v_i) \in E$ và luồng của cung này dương $(\varphi(z, v_i) > 0)$.

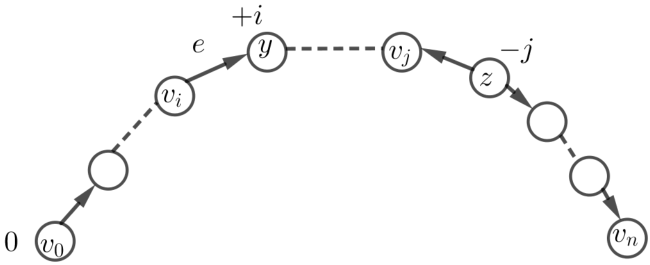
8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại (tiếp tục)

Nếu với phương pháp này ta đánh dấu được tới lối ra v_n thì trong G tồn tại giữa v_0 và v_n một xích α, mọi đỉnh đều khác nhau và được đánh dấu theo chỉ số của đỉnh liền trước nó (chỉ sai khác nhau về dấu). Khi đó chắc chắn ta nâng được giá trị của luồng.

Bước 2 (nâng giá trị của luồng). Để nâng giá trị của luồng φ, ta đặt

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e) & \text{nếu } e \notin \alpha, \\ \varphi(e)+1 & \text{nếu } e \in \alpha \text{ được định hướng theo} \\ & \qquad \text{chiều của xích } \alpha \text{ đi từ } v_0 \text{ đến } v_n, \\ \varphi(e)-1 & \text{nếu } e \in \alpha \text{ được định hướng ngược} \\ & \qquad \text{với chiều của xích } \alpha \text{ đi từ } v_0 \text{ đến } v_n. \end{cases}$$

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại (tiếp tục)



Hình 8.6: Nâng giá trị luồng

φ' thoả mãn các điều kiện về luồng, nên φ' là một luồng và ta có

$$\varphi'_n = \varphi_n + 1.$$

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại (tiếp tục)

Như vậy, ta đã nâng được luồng lên một đơn vị. Sau đó lặp lại một vòng mới. Vì khả năng thông qua của các cung đều hữu hạn, nên quá trình phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.
Bước 3. Nếu với luồng φ^0 bằng phương pháp trên ta không thể nâng giá trị của luồng lên nữa, nghĩa là ta không thể đánh dấu được đỉnh v_n, thì ta nói rằng quá trình nâng luồng kết thúc và φ^0 đã đạt giá trị cực đại, đồng thời gọi φ^0 là luồng kết thúc.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

- Khi mạng vận tải $G = (V, E)$ đạt tới luồng φ^0, thì bước tiếp theo ta không thể đánh dấu được tới lối ra v_n.
- Trên cơ sở hiện trạng được đánh dấu tại bước này, ta sẽ chứng minh rằng luồng φ^0 đã đạt được giá trị cực đại.

Bổ đề 8.1

Cho luồng φ của mạng vận tải $G = (V, E)$ và $A \subset V$, chứa lối ra v_n và không chứa lối vào v_0. Khi đó

$$\varphi_{v_n} = \varphi(\Gamma^-(A)) - \varphi(\Gamma^+(A)).$$

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

Chứng minh. Đặt $A_1 = A \setminus \{v_n\}$. Theo Hệ quả 8.4, ta có

$$\varphi(\Gamma^-(A_1)) = \varphi(\Gamma^+(A_1)). \tag{8.1}$$

Đặt $C_1 = \{(a, v_n) \in E | a \notin A\}$. Khi đó $\Gamma^-(A) = \Gamma^-(A_1) \cup C_1$ và $\Gamma^-(A_1) \cap C_1 = \emptyset$, nên

$$\varphi(\Gamma^-(A)) = \varphi(\Gamma^-(A_1)) + \varphi(C_1). \tag{8.2}$$

Đặt $C_2 = \{(b, v_n) \in E | b \in A_1\}$. Khi đó $\Gamma^+(A_1) = \Gamma^+(A) \cup C_2$ và $\Gamma^+(A_1) \cap C_2 = \emptyset$, nên

$$\varphi(\Gamma^+(A)) = \varphi(\Gamma^+(A_1)) + \varphi(C_2). \tag{8.3}$$

Ngoài ra, $\Gamma^-(v_n) = C_1 \cup C_2$ và $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, nên

$$\varphi_{v_n} = \varphi(\Gamma^-(v_n)) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2). \tag{8.4}$$

Từ (8.1), (8.2), (8.3) và (8.4), ta có

$$\varphi_{v_n} = \varphi(\Gamma^-(A)) - \varphi(\Gamma^+(A)).$$

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại

Định lý 8.5 (**Ford-Fulkerson**)

Trong mạng vận tải $G = (V, E)$, giá trị lớn nhất của luồng bằng khả năng thông qua nhỏ nhất của thiết diện, nghĩa là

$$\max_{\varphi} \varphi_{v_n} = \min_{A \subset V, v_0 \notin A, v_n \in A} m(\Gamma^{-}(A)).$$

Chứng minh.

- Giả sử trong mạng vận tải G, φ^0 là luồng cuối cùng, mà sau đó bằng phương pháp đánh dấu của thuật toán Ford-Fulkerson không đạt tới lối ra v_n.
- Trên cơ sở hiện trạng được đánh dấu lần cuối cùng này, ta dùng B để ký hiệu tập gồm các đỉnh của G không được đánh dấu.

8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại (tiếp tục)

- Khi đó $v_0 \in B$, $v_n \in B$. Do đó $\Gamma^-(B)$ là một thiết diện của mạng vận tải G và theo Bổ đề 8.4, ta có

$$\varphi^0_{v_n} = \varphi^0(\Gamma^-(B)) - \varphi^0(\Gamma^+(B)). \tag{8.5}$$

- Đối với mỗi cung $e = (u, v) \in \Gamma^-(B)$ thì $u \notin B$ và $v \in B$, tức là u được đánh dấu và v không được đánh dấu, nên theo nguyên tắc đánh dấu thứ nhất, e đã là cung bão hoà

$$\varphi^0(e) = m(e).$$

- Do đó,

$$\varphi^0(\Gamma^-(B)) = \sum_{e\in\Gamma^-(B)} \varphi^0(e) = \sum_{e\in\Gamma^-(B)} m(e) = \varphi^0(\Gamma^+(B)). \tag{8.6}$$

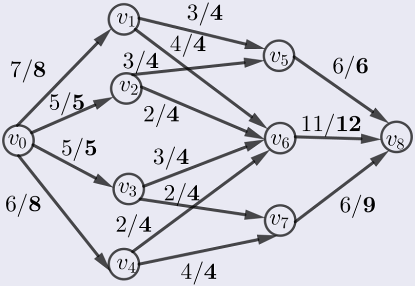
8.2. Bài toán luồng cực đại - 8.2.2. Luồng cực đại (tiếp tục)

- Đối với mỗi cung $e = (s, t) \in \Gamma^+(B)$ thì $s \in B$ và $t \notin B$, tức là s được đánh dấu và t được đánh dấu, nên theo nguyên tắc đánh dấu thứ hai
$$\varphi^0(e) = 0.$$
- Do đó,
$$\varphi^0(\Gamma^+(B)) = \sum_{e \in \Gamma^+(B)} \varphi^0(e) = 0. \qquad (8.7)$$
- Từ (8.5), (8.6) và (8.7) ta suy ra
$$\varphi^0_{v_n} = m(\Gamma^-(B)).$$
- Vì vậy, $\varphi^0_{v_n}$ là giá trị lớn nhất của luồng đạt được, còn $m(\Gamma^-(B))$ là giá trị nhỏ nhất trong các khả năng thông qua của các thiết diện thuộc mạng vận tải G.

8.2. Mạng vận tải - 8.2.2. Thuật toán Ford - Fulkerson luồng lớn nhất

Ví dụ 8.5

Cho mạng vận tải như Hình 8.7 với khả năng thông qua được đặt dưới dấu /, luồng được ghi trên dấu này. Tìm luồng cực đại của mạng này.



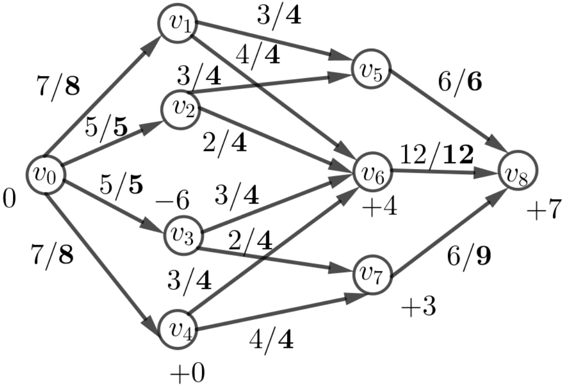
Hình 8.7: Luồng φ

Lời giải.

- Luồng φ có đường đi $(v_0, v_4), (v_4, v_6), (v_6, v_8)$ gồm các cung chưa bão hoà nên nó chưa đầy.
- Do đó có thể nâng luồng của các cung này lên một đơn vị, để được φ^1 (Hình 8.8).
- Do mỗi đường xuất phát từ v_0 đến v_8 đều chứa ít nhất một cung bão hoà, nên luồng φ^1 là luồng đầy. Song nó chưa phải là luồng cực đại.

8.2. Mạng vận tải - 8.2.2. Thuật toán Ford - Fulkerson luồng lớn nhất

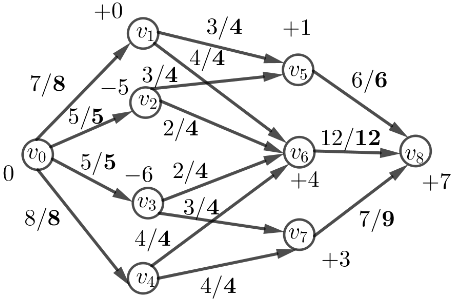
Áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson để nâng luồng φ^1.



Hình 8.8: Luồng φ^1

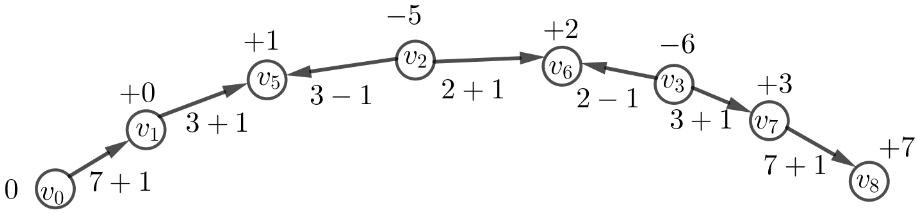
8.2. Mạng vận tải - 8.2.2. Thuật toán Ford - Fulkerson luồng lớn nhất

- Xét xích $\beta = (v_0, v_1, v_5, v_2, v_6, v_3, v_7, v_8)$.
- Quá trình đánh dấu từ v_0 đến v_8 để có thể nâng luồng φ^2 lên một đơn vị bằng cách biến đổi luồng tại các cung thuộc xích β được đánh dấu.



Hình 8.9: Luồng φ^2

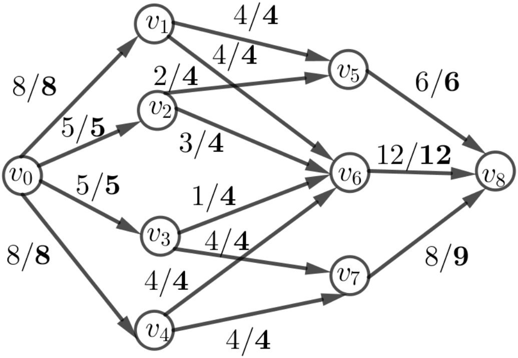
8.2. Mạng vận tải - 8.2.2. Thuật toán Ford - Fulkerson luồng lớn nhất



Hình 8.10: Xích β

Sau đó ta có luồng φ^3 (Hình 8.11).

8.2. Mạng vận tải - 8.2.2. Thuật toán Ford - Fulkerson luồng lớn nhất



Hình 8.11: Luồng φ^3

8.2. Mạng vận tải - 8.2.2. Thuật toán Ford - Fulkerson luồng lớn nhất

- Tiếp theo ta chỉ có thể đánh dấu được đỉnh v_0 nên quá trình nâng luồng kết thúc và ta được giá trị của luồng cực đại là
$$\varphi^3_{v_g} = 6 + 12 + 8 = 26.$$
- Mặt khác, thiết diện nhỏ nhất $W^-(B)$ với $B = \{v_1, v_2, ..., v_8\}$ là
$$W^-(B) = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4)\}.$$

8.3. Ứngng dụng luồng lớn nhất - 8.3.1. Bài toán luồng nhỏ nhất

- Bài toán luồng lớn nhất có rất nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán khác nhau của lý thuyết đồ thị.
- Ngược lại với bài toán luồng lớn nhất, chúng ta xét bài toán sau đây:
  Bài toán: *Cho mạng* (G, c). *Tìm luồng t qua mạng có giá trị tz nhỏ nhất và thoả mãn điều kiện a') thay cho điều kiện a) như sau*
- a') $\forall e \in E, t(e) \geq c(e)$.

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất - 8.3.1. Bài toán luồng nhỏ nhất

Thuật toán 8.5: Tìm luồng bé nhất

+ Ta dùng phương pháp cải tiến luồng giống như phương pháp giải bài toánluồng lớn nhất.
+ Xuất phát từ một luồng t nào đó thoả mãn điều kiện c), ta dùng phươngpháp sau đây để giảm giá trị của luồng t.
Bước 1: *Đánh dấu các đỉnh của mạng.*
- Đầu tiên đánh dấu cho đỉnh thu z số 0.
- Nếu đỉnh y đã được đánh dấu, có cạnh (x, y) với đỉnh đầu chưa được đánh dấu và $t((x, y)) > c((x, y))$ thì đánh dấu cho đỉnh x là $+y$.
- Nếu đỉnh x đã được đánh dấu, có cạnh (x, y) thì đánh dấu cho đỉnh y là $-x$.
Với cách đánh dấu này mà đi tới được đỉnh phát x_0 thì ta đã tìm được mộtđường đi vô hướng từ z tới x_0 được đánh dấu.
Bước 2: *Giảm luồng.*

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất - 8.3.1. Bài toán luồng nhỏ nhất (tiếp tục)

- Bây giờ ta có thể giảm luồng đi 1 bằng cách chọn luồng mới t' như sau
- Nếu cạnh e không thuộc đường đi trên thì giữ nguyên luồng, nghĩa là

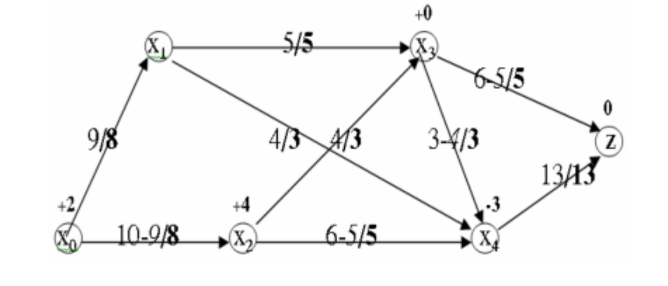
$$t'(e) := t(e)$$

- Nếu cạnh e thuộc đường đi này và cùng chiều với chiều từ x_0 *tới z thì đặt*$t'(e) := t(e) - 1$ *(vì trên cạnh đó* $t(e) > c(e)$*) còn nếu cạnh e ngược chiều thì đặt*$t'(e) := t(e) + 1$ *.*
- Lặp lại quá trình giảm luồng trên cho đến khi không đánh dấu được tới đỉnhphát x_0 *. Khi đó luồng nhận được có giá trị nhỏ nhất.*

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất - 8.3.1. Bài toán luồng nhỏ nhất

Ví dụ 8.6

Xét mạng vận tải sau đây.



Hình 8.12: Mạng vận tải và luồng đã giảm

Luồng cũ có giá trị là $tz = 19$. Luồng mới sau khi cải tiến có giá trị là $tz' = 18$ và là luồng nhỏ nhất.

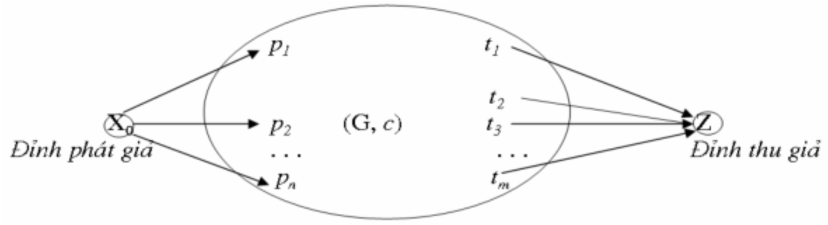
8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất

8.3.2. Bài toán luồng trên mạng có nhiều đỉnh phát và đỉnh thu

- Giả sử (G, c) là một mạng vận tải với n đỉnh phát: $p_1, p_2, .., p_n$ và m đỉnh thu: $q_1, q_2, .., q_m$.
- Bài toán tìm luồng lớn nhất từ nhiều đỉnh phát tới nhiều đỉnh thu có thể đưa về bài toán luồng lớn nhất từ một đỉnh phát tới một đỉnh thu
- bằng cách thêm vào một *đỉnh phát giả* X_0 , một đỉnh thu giả Z, các cạnh nối X_0 với tất cả các đỉnh phát và các cạnh nối tất cả các đỉnh thu với Z.

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất

8.3.2. Bài toán luồng trên mạng có nhiều đỉnh phát và đỉnh thu



Hình 8.13: Mạng vận tải có nhiều đỉnh phát và nhiều đỉnh thu

Khả năng thông qua của các cạnh mới như sau:

- - Nếu lượng phát của đỉnh p_i bị hạn chế bởi l_i thì đặt $c(X_0, p_i) = l_i$, còn nếu không bị hạn chế thì đặt bằng ∞.
- - Tương tự như thế, giới hạn của lượng thu của đỉnh t_j sẽ là khả năng thông qua của cạnh (t_j, Z).

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất

8.3.3. Bài toán tìm cặp ghép lớn nhất của đồ thị hai phần

- Bài toán này là một dạng đặc biệt của bài toán mạng với nhiều đỉnh phát và nhiều đỉnh thu. Ta đưa bài toán này về bài toán luồng lớn nhất qua mạng.
- Giả sử đồ thị $G = (V_1, V_2, F)$ là đồ thị hai phần. Ta xây dựng mạng vận tải như sau:
- Các đỉnh của mạng là các đỉnh của đồ thị G và thêm vào đỉnh phát x_0 và đỉnh thu z.
- Mạng sẽ gồm tất cả các cạnh của G có hướng từ V_1 sang V_2 .
- Ngoài ra còn nối x_0 với tất cả các đỉnh trong V_1 và nối tất cả các đỉnh trong V_2 với z.
- Trên mọi cạnh e của mạng đều đặt $c(e) = 1$.
- Khi đó mỗi luồng t qua mạng sẽ ứng với một cặp ghép W của G mà:

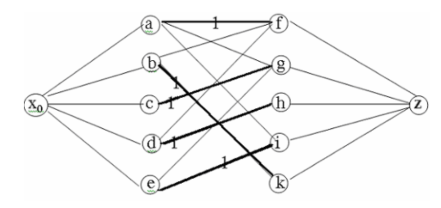
$$e \in W \Leftrightarrow t(e) = 1.$$

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất
8.3.3. Bài toán tìm cặp ghép lớn nhất của đồ thị hai phần

Ngược lại, mỗi cặp ghép W sẽ ứng với một luồng t qua mạng của G cũng theo quy tắc trên. Vậy tz đạt lớn mhất khi W có nhiều cạnh nhất.

Ví dụ 8.7

Từ một đồ thị hai phần gồm tập đỉnh a. b, c, d, e, f, g, h, i, k ta xây dựng mạng vận tải như sau



Hình 8.14: Mạng vận tải trên đồ thị hai phần

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất

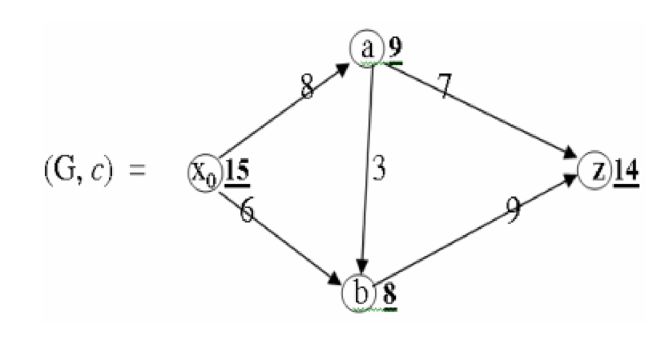
8.3.4. Bài toán vận tải thông qua các cạnh và các đỉnh

- Giả sử trong đồ thị G, ngoài khả năng thông qua của các cạnh thì với mỗi đỉnh $x \in V$ còn có khả năng thông qua của đỉnh là $d(x)$ và đòi hỏi tổng luồng đi vào đỉnh x không được vượt quá $d(x)$, nghĩa là:
$$t(W^{-}(x)) \leq d(x).$$
- Hãy tìm luồng lớn nhất giữa x_0 và z trong mạng này.
- Để đưa bài toán này về bài toán luồng lớn nhất, chúng ta xây dựng mạng G' sao cho: Mỗi đỉnh x trong G tương ứng với hai đỉnh x^{-} và x^{+} trong G', cạnh (x^{-}, x^{+}) thuộc G' và $c((x^{-}, x^{+})) = d(x)$.
- Mỗi cạnh (x, y) trong G ứng với cạnh (x^{+}, y^{-}) trong G'.

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất
8.3.4. Bài toán vận tải thông qua các cạnh và các đỉnh

Ví dụ 8.8

Xét mạng vận tải sau đây

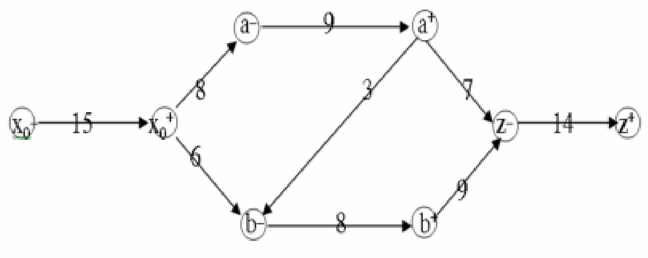


Hình 8.15: Mạng vận tải với khả năng thông qua cạnh và đỉnh

8.3. Ứng dụng luồng lớn nhất

8.3.4. Bài toán vận tải thông qua các cạnh và các đỉnh

Xây dựng mạng (G', c) như sau



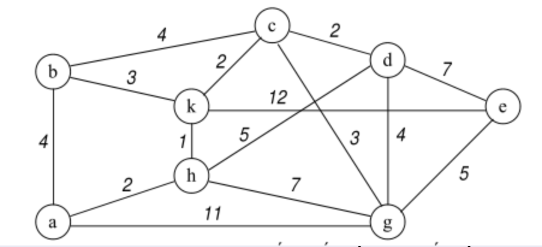
Hình 8.16: Mạng vận tải tương ứng

Do luồng đi vào đỉnh x^- phải đi qua cạnh (x^-, x^+) với khả năng thông qua $d(x)$ nên luồng lớn nhất trong G' sẽ bằng luồng lớn nhất trong G và thoả mãn các điều kiện về khả năng thông qua của các cạnh và các đỉnh.

8.4. Bài tập

▷ 8.1

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến các đỉnh khác trong đồ thị sau

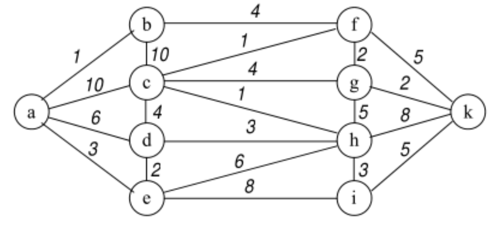


Hình 8.17: Tìm đường đi ngắn nhất từ *a* đến các đỉnh

8.4. Bài tập (tiếp tục)

▷ 8.2

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến các đỉnh khác trong đồ thị sau

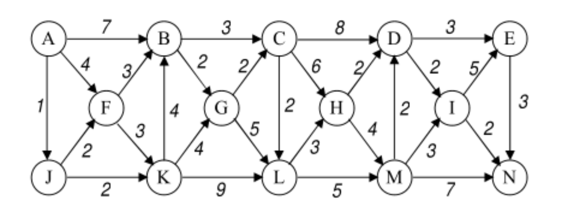


Hình 8.18: Tìm đường đi ngắn nhất từ *a* đến các đỉnh

8.4. Bài tập (tiếp tục)

▷ 8.3

Cho đồ thị có trọng số như hình dưới đây. Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh N.



Hình 8.19: Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến N

8.4. Bài tập (tiếp tục)

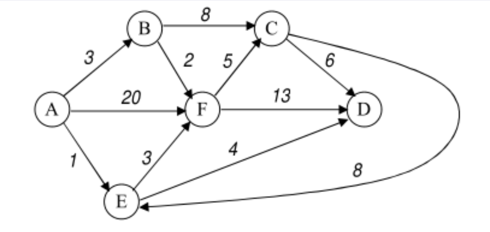
▷ 8.4

Tìm đường đi ngắn nhất từ B đến các đỉnh khác của đồ thị có ma trận trọng số là

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 2 & \infty & 1 & 4 & 2 & \infty \\ \infty & 4 & 1 & \infty & 2 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 4 & 2 & \infty & 2 & 1 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 1 & 4 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

8.4. Bài tập (tiếp tục)

▷ 8.5

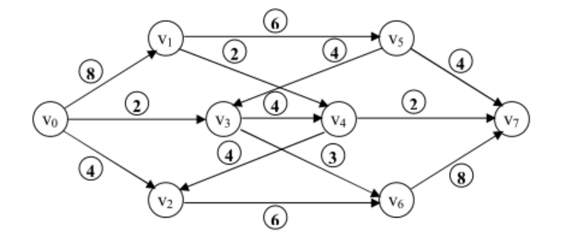
Tìm $W^* = W_n$  vào đồ thị sau

Hình 8.20: Tìm ma trận khoảng cách nhỏ nhất của đồ thị G

8.4. Bài tập (tiếp tục)

▷ 8.6

Giải bài toán mạng vận tải sau bằng thuật toán Ford-Fulkerson với luồng vận tải khởi đầu bằng 0.

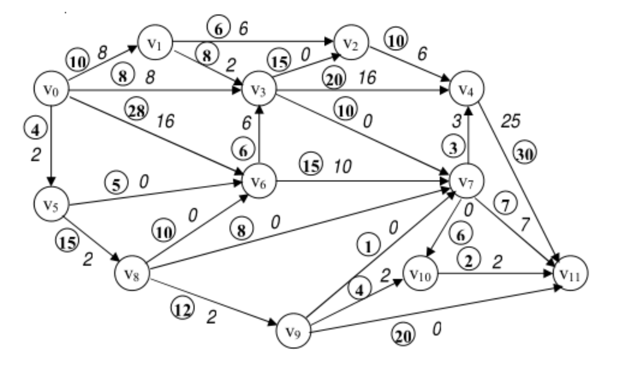


Hình 8.21: Tìm luồng vận tải tối ưu

8.4. Bài tập (tiếp tục)

▷ 8.7

Giải bài toán mạng vận tải sau bằng thuật toán Ford-Fulkerson với luồng vận tải khởi đầu được cho kèm theo.



Hình 8.22: Tìm luồng vận tải tối ưu