TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

14/01/2019

BÀI 1

LÔGIC MỆNH ĐỀ

Nội dung

Lịc sử

- Công trình viết về lô gic đầu tiên bởi nhà triết học Hy Lạp Aristotle.
- Công trình là tập hợp những luật suy diễn làm cơ sở cho việc nghiên cứu của mọi ngành nghiên cứu trí thức.
- Đến thế kỷ thứ 17 nhà triết học, toán học Đức, Gottfried Leibniz đã phát triển ý tưởng dùng những ký hiệu để thực hiện những quy trình suy diễn trong ký hiệu đại số, số học và các ngành liên quan.
- Những tư tưởng của Leibniz được thực hiện cụ thể thành ngành lô gic ký hiệu do hai tác giả George Boole và Augustus De Morgan.

Nội dung

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Thực tế phản ảnh mối quan hệ giữa các sự việc bằng những mệnh đề:

- Mệnh đề đưa ra dưới nhiều hình thức: lời nói, câu văn, công thức Toán...

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Thực tế phản ảnh mối quan hệ giữa các sự việc bằng những mệnh đề:

- Mệnh đề đưa ra dưới nhiều hình thức: lời nói, câu văn, công thức Toán...
- Các mệnh đề có mang một ý nghĩa nhất định hay không.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Thực tế phản ảnh mối quan hệ giữa các sự việc bằng những mệnh đề:

- Mệnh đề đưa ra dưới nhiều hình thức: lời nói, câu văn, công thức Toán...
- Các mệnh đề có mang một ý nghĩa nhất định hay không.
- Ta chỉ xét các mệnh đề như sau:

Định nghĩa 1.1

Một mệnh đề phản ánh một sự việc nào đó theo một cách thức nhất định và sự việc đó phản ánh tính chân thực thì được gọi là một *mệnh đề đúng*. Trái lại mệnh đề đó được gọi là *mệnh đề sai.*

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Thực tế phản ảnh mối quan hệ giữa các sự việc bằng những mệnh đề:

- Mệnh đề đưa ra dưới nhiều hình thức: lời nói, câu văn, công thức Toán...
- Các mệnh đề có mang một ý nghĩa nhất định hay không.
- Ta chỉ xét các mệnh đề như sau:

Định nghĩa 1.1

Một mệnh đề phản ánh một sự việc nào đó theo một cách thức nhất định và sự việc đó phản ánh tính chân thực thì được gọi là một *mệnh đề đúng*. Trái lại mệnh đề đó được gọi là *mệnh đề sai.*

- Mỗi một mệnh đề hoặc là đúng hoặc là sai, và không có mệnh đề nào vừa đúng vừa sai.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

- Như vậy ta xét các mệnh đề hoặc là đúng hoặc sai nằm trong hai lớp khác nhau. Giá trị đúng sai của một mệnh đề người ta gọi là *giá trị chân lý*.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

- Như vậy ta xét các mệnh đề hoặc là đúng hoặc sai nằm trong hai lớp khác nhau. Giá trị đúng sai của một mệnh đề người ta gọi là *giá trị chân lý*.
- Một lớp mệnh đề có giá trị chân lý đúng (viết tắt là T hoặc 1) hoặc sai (viết tắt là F hoặc 0).

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

- Như vậy ta xét các mệnh đề hoặc là đúng hoặc sai nằm trong hai lớp khác nhau. Giá trị đúng sai của một mệnh đề người ta gọi là *giá trị chân lý*.
- Một lớp mệnh đề có giá trị chân lý đúng (viết tắt là T hoặc 1) hoặc sai (viết tắt là F hoặc 0).
- Ký hiệu các mệnh đề bằng các chữ cái như một biến $p, q, r, \ldots$..

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

- Như vậy ta xét các mệnh đề hoặc là đúng hoặc sai nằm trong hai lớp khác nhau. Giá trị đúng sai của một mệnh đề người ta gọi là *giá trị chân lý*.
- Một lớp mệnh đề có giá trị chân lý đúng (viết tắt là T hoặc 1) hoặc sai (viết tắt là F hoặc 0).
- Ký hiệu các mệnh đề bằng các chữ cái như một biến $p, q, r, \ldots$..
- Ký hiệu các giá trị chân lý là $\{T, F\}$ hoặc $\{0, 1\}$

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.1

Các phát biểu sau đây là các mệnh đề (toán học).

1. 6 là một số nguyên tố.
2. 5 là một số nguyên tố.
3. $-3 < 2$.
4. Tam giác cân có hai góc bằng nhau.
5. H_2O là một axít.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.1

Các phát biểu sau đây là các mệnh đề (toán học).

1. 6 là một số nguyên tố.
2. 5 là một số nguyên tố.
3. $-3 < 2$.
4. Tam giác cân có hai góc bằng nhau.
5. H_2O là một axít.

- Các mệnh đề 2, 3, và 4 trong ví dụ trên là những mệnh đề đúng. Nói cách khác chân lí của các mệnh đề này là đúng. Các mệnh đề 1, 5 là những mệnh đề chân sai.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.1

Các phát biểu sau đây là các mệnh đề (toán học).

1. 6 là một số nguyên tố.
2. 5 là một số nguyên tố.
3. $-3 < 2$.
4. Tam giác cân có hai góc bằng nhau.
5. H_2O là một axít.

- Các mệnh đề 2, 3, và 4 trong ví dụ trên là những mệnh đề đúng. Nói cách khác chân lí của các mệnh đề này là đúng. Các mệnh đề 1, 5 là những mệnh đề chân sai.
- **Chú ý:** Mỗi mệnh đề hoặc là đúng hoặc là sai nhưng không khẳng định được mỗi mệnh đề ta có thể quyết định được đúng hay không.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.2

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.2

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)
2. Hãy đóng cửa lại đi!

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.2

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)
2. Hãy đóng cửa lại đi!
3. Anh ta rất thông minh.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.2

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)
2. Hãy đóng cửa lại đi!
3. Anh ta rất thông minh.
4. Cho x là một số nguyên dương.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.2

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)
2. Hãy đóng cửa lại đi!
3. Anh ta rất thông minh.
4. Cho x là một số nguyên dương.
5. a là một số chính phương.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.2

Các phát biểu sau đây không phải là các mệnh đề vì tính đúng sai của chúng không xác định.

1. Ai đang đọc sách? (một câu hỏi)
2. Hãy đóng cửa lại đi!
3. Anh ta rất thông minh.
4. Cho x là một số nguyên dương.
5. a là một số chính phương.
6. $x + y = z$.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Trong việc khảo sát các mệnh đề, người ta còn phân ra làm hai loại

Định nghĩa 1.2

Mệnh đề sơ cấp (elementary), mệnh đề phức hợp (compound). Mệnh đề sơ cấp là các "nguyên tử" theo nghĩa là nó không thể được phân tích thành một hay nhiều (từ hai trở lên) mệnh đề thành phần đơn giản hơn.

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Trong việc khảo sát các mệnh đề, người ta còn phân ra làm hai loại

Định nghĩa 1.2

Mệnh đề sơ cấp (elementary), mệnh đề phức hợp (compound). Mệnh đề sơ cấp là các "nguyên tử" theo nghĩa là nó không thể được phân tích thành một hay nhiều (từ hai trở lên) mệnh đề thành phần đơn giản hơn.

Định nghĩa 1.3

Mệnh đề phức hợp là mệnh đề được tạo thành từ một hay nhiều mệnh đề khác 2 bằng cách sử dụng các liên kết logic như từ "không" dùng trong việc phủ định một mệnh đề, các từ nối: "và", "hay", "hoặc", "suy ra", v.v....

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.3

Xét các mệnh đề sau đây.
$p =$ "15 chia hết cho 3".
$q =$ "2 là một số nguyên tố và là một số lẻ".

1.1. Mệnh đề và giá trị chân lý

Ví dụ 1.3

Xét các mệnh đề sau đây.
$p =$ "15 chia hết cho 3".
$q =$ "2 là một số nguyên tố và là một số lẻ".

- Ta có p là một mệnh đề sơ cấp.
- Nhưng q là một mệnh đề phức hợp, vì mệnh đề q được tạo thành từ hai mệnh đề "2 là một số nguyên tố" và "2 là một số lẻ" nhờ vào liên kết logic "và".

Nội dung

1.2. Các phép toán trên mệnh đề

- Điều mà chúng ta quan tâm ở đây không phải là xác định tính đúng hoặc sai của một mệnh đề sơ cấp.

1.2. Các phép toán trên mệnh đề

- Điều mà chúng ta quan tâm ở đây không phải là xác định tính đúng hoặc sai của một mệnh đề sơ cấp.
- Vấn đề mà ta quan tâm ở đây là làm thế nào để tính toán chân lí của các mệnh đề phức hợp theo các mệnh đề sơ cấp nhờ vào các phép toán logic.

1.2. Các phép toán trên mệnh đề

- Điều mà chúng ta quan tâm ở đây không phải là xác định tính đúng hoặc sai của một mệnh đề sơ cấp.
- Vấn đề mà ta quan tâm ở đây là làm thế nào để tính toán chân lí của các mệnh đề phức hợp theo các mệnh đề sơ cấp nhờ vào các phép toán logic.
- Các phép toán logic ở đây là các ký hiệu được dùng thay cho các từ liên kết logic như "không", "và", "hay", "hoặc", "suy ra" hay "nếu ... thì ...", "nếu và chỉ nếu".

1.2. Các phép toán trên mệnh đề

- Các phép toán logic được định nghĩa bằng bảng chân trị (truth table). Bảng chân trị chỉ ra rõ ràng chân trị của mệnh đề phức hợp theo từng trường hợp của các chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành mệnh đề phức hợp.

1.2. Các phép toán trên mệnh đề

- Các phép toán logic được định nghĩa bằng bảng chân trị (truth table). Bảng chân trị chỉ ra rõ ràng chân trị của mệnh đề phức hợp theo từng trường hợp của các chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành mệnh đề phức hợp.
- Bảng chân trị của các phép toán logic tất nhiên là phản ánh ngữ nghĩa tự nhiên của các từ liên kết tương ứng.

1.2. Các phép toán trên mệnh đề

- Các phép toán logic được định nghĩa bằng bảng chân trị (truth table). Bảng chân trị chỉ ra rõ ràng chân trị của mệnh đề phức hợp theo từng trường hợp của các chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành mệnh đề phức hợp.
- Bảng chân trị của các phép toán logic tất nhiên là phản ánh ngữ nghĩa tự nhiên của các từ liên kết tương ứng.
- Các phép toán và các mệnh đề tạo ra Đại số logic. Đại số logic còn đặc biệt quan trọng trong việc thiết kế mạch cho máy tính và nhiều ứng dụng trong tin học sau này.

1.2.1.Phép phủ định

Định nghĩa 1.4

Cho p là một mệnh đề, chúng ta dùng ký hiệu $\overline{p}$ để chỉ mệnh đề phủ định của mệnh đề p. "*Sự phủ định*" được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

1.2.1.Phép phủ định

Định nghĩa 1.4

Cho p là một mệnh đề, chúng ta dùng ký hiệu $\overline{p}$ để chỉ mệnh đề phủ định của mệnh đề p. "*Sự phủ định*" được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

- Ký hiệu $^{-}$ được đọc là "không" .
- Trong một số sách khác, người ta còn dùng các ký hiệu sau đây để chỉ mệnh đề phủ định của một mệnh đề p: $\sim p, \neg p$.

1.2.1.Phép phủ định

Ví dụ 1.4

Nếu ta ký hiệu p là mệnh đề "$5 < 3$" thì $\overline{p}$ là ký hiệu cho mệnh đề "$5 \geq 3$". Trong trường hợp này p sai, $\overline{p}$ đúng. Ta có thể viết $p = 0$, $\overline{p} = 1$.

1.2.1.Phép phủ định

Ví dụ 1.4

Nếu ta ký hiệu p là mệnh đề "$5 < 3$" thì $\overline{p}$ là ký hiệu cho mệnh đề "$5 \geq 3$". Trong trường hợp này p sai, $\overline{p}$ đúng. Ta có thể viết $p = 0$, $\overline{p} = 1$.

Ví dụ 1.5

Chỉ ra rằng $\overline{\overline{p}}$ và p luôn có cùng chân trị .

1.2.1.Phép phủ định

Ví dụ 1.4

Nếu ta ký hiệu p là mệnh đề "$5 < 3$" thì $\overline{p}$ là ký hiệu cho mệnh đề "$5 \geq 3$". Trong trường hợp này p sai, $\overline{p}$ đúng. Ta có thể viết $p = 0$, $\overline{p} = 1$.

Ví dụ 1.5

Chỉ ra rằng $\overline{\overline{p}}$ và p luôn có cùng chân trị .

Lời giải. Lập bảng chân trị của mệnh đề $\overline{\overline{p}}$:

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$
0	1	0
1	0	1

Trên mỗi dòng ta có chân trị của p và $\overline{\overline{p}}$ đều bằng nhau (so sánh cột 1 và cột 3 trong bảng). Vậy $\overline{\overline{p}}$ và p có cùng chân trị .

1.2.2. Phép hội

Định nghĩa 1.5

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hội q" là $p \wedge q$. Phép "và", ký hiệu là $\wedge$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.2. Phép hội

Định nghĩa 1.5

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hội q" là $p \wedge q$. Phép "và", ký hiệu là $\wedge$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Chân trị của $p \wedge q$ phụ thuộc vào các chân trị của p, q.
- Ta có 4 trường hợp chân trị của $p \wedge q$ ứng với 4 trường hợp chân trị của cặp (p, q) là $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$.
- Trong 4 trường hợp chỉ có một trường hợp mệnh đề $p \wedge q$ đúng, đó là trường hợp p đúng và q đúng.

1.2.1.Phép phủ định

Ví dụ 1.6

Cho các mệnh đề

- $p =$ "$5 > -7$",
- $q =$ "2721 là một số nguyên tố",
- $r =$ "một tam giác đều cũng là một tam giác cân".

1.2.1.Phép phủ định

Ví dụ 1.6

Cho các mệnh đề

- $p =$ "$5 > -7$",
- $q =$ "2721 là một số nguyên tố",
- $r =$ "một tam giác đều cũng là một tam giác cân".

Khi đó ta có

- $p \wedge q = 0$ ($p \wedge q$ sai, tức là có chân trị bằng 0, vì$p = 1$ và $q = 0$),
- $p \wedge r = 1$ ($p \wedge r$ đúng, tức là có chân trị bằng 1, vì $p = 1$ và $r = 1$).

1.2.1.Phép phủ định

Nhận xét. Bằng cách lập bảng chân trị , ta có

1. Các mệnh đề p và $p \wedge p$ luôn có cùng chân trị .

1.2.1.Phép phủ định

Nhận xét. Bằng cách lập bảng chân trị , ta có

1. Các mệnh đề p và $p \wedge p$ luôn có cùng chân trị .
2. Mệnh đề $p \wedge \overline{p}$ luôn có chân trị bằng 0 (tức là một mệnh đề luôn sai).

1.2.1.Phép phủ định

Nhận xét. Bằng cách lập bảng chân trị , ta có

1. Các mệnh đề p và $p \wedge p$ luôn có cùng chân trị .
2. Mệnh đề $p \wedge \overline{p}$ luôn có chân trị bằng 0 (tức là một mệnh đề luôn sai).

Một mệnh đề phức hợp luôn luôn có chân trị là sai trong mọi trường hợp chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành nó sẽ được gọi là *một sự mâu thuẩn*.

1.2.3. Phép tuyển

Định nghĩa 1.6

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hay q" là $p \vee q$. Phép "hay", ký hiệu là $\vee$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.2.3. Phép tuyển

Định nghĩa 1.6

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hay q" là $p \vee q$. Phép "hay", ký hiệu là $\vee$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Chân trị của $p \vee q$ phụ thuộc vào các chân trị của p, q.

1.2.3. Phép tuyển

Định nghĩa 1.6

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hay q" là $p \vee q$. Phép "hay", ký hiệu là $\vee$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Chân trị của $p \vee q$ phụ thuộc vào các chân trị của p, q.
- Trong 4 trường hợp chỉ có một trường hợp mệnh đề $p \vee q$ sai, đó là trường hợp p sai và q sai.

1.2.3. Phép tuyển

Định nghĩa 1.6

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hay q" là $p \vee q$. Phép "hay", ký hiệu là $\vee$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Chân trị của $p \vee q$ phụ thuộc vào các chân trị của p, q.
- Trong 4 trường hợp chỉ có một trường hợp mệnh đề $p \vee q$ sai, đó là trường hợp p sai và q sai.
- Qua định nghĩa trên ta nhận thấy rằng các mệnh đề $p \vee q$ và $q \vee p$ luôn luôn có cùng chân trị , hay tương đương logic.

1.2.3. Phép tuyển

Ví dụ 1.7

Cho các mệnh đề

- $p =$ "$5 > 7$",
- $q =$ "2721 là một số nguyên tố",
- $r =$ "một tam giác đều cũng là một tam giác cân".

Khi đó ta có

- $p \vee q = 0$,
- $p \vee r = 1$.

1.2.3. Phép tuyển

Ví dụ 1.7

Cho các mệnh đề

- $p =$ "$5 > 7$",
- $q =$ "2721 là một số nguyên tố",
- $r =$ "một tam giác đều cũng là một tam giác cân".

Khi đó ta có

- $p \vee q = 0$,
- $p \vee r = 1$.

Nhận xét.

- Cho p là một mệnh đề. Lập bảng chân trị của mệnh đề $p \vee \overline{p}$

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
0	1	1
1	0	1

1.2.3. Phép tuyển

- Người ta còn sử dụng phép "hoặc" trong việc liên kết các mệnh đề. Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hoặc q" là $p \underline{\vee} q$. Phép "hoặc", ký hiệu là $\underline{\vee}$, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \underline{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Phép "hoặc" còn được gọi là "hay loại trừ". chân trị của mệnh đề $p \underline{\vee} q$ phụ thuộc vào các chân trị của 2 mệnh đề p, q : mệnh đề $p \underline{\vee} q$ đúng khi trong 2 mệnh đề p và q có một mệnh đề đúng, một mệnh đề sai.

1.2.4. Phép kéo theo

Phép kéo theo, ký hiệu bởi $\rightarrow$, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện có dạng : "nếu . . . thì . . .".

1.2.4. Phép kéo theo

Phép kéo theo, ký hiệu bởi $\rightarrow$, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện có dạng : "nếu . . . thì . . .".

Định nghĩa 1.7

Cho p và q là 2 mệnh đề, ta sẽ viết $p \rightarrow q$ để diễn đạt phát biểu "nếu p thì q". Phép toán kéo theo $\rightarrow$ được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1.2.4. Phép kéo theo

Mệnh đề $p \to q$, được đọc là "nếu p thì q", còn được phát biểu dưới các dạng khác sau đây

- "q nếu p".
- "p chỉ nếu q".
- "p là điều kiện đủ cho q".
- "q là điều kiện cần cho p".

1.2.5. Phép tương đương

Phép kéo theo 2 chiều hay phép tương đương, ký hiệu bởi $\leftrightarrow$, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện hai chiều có dạng : ". . . nếu và chỉ nếu . . .".

1.2.5. Phép tương đương

Phép kéo theo 2 chiều hay phép tương đương, ký hiệu bởi $\leftrightarrow$, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện hai chiều có dạng : ". . . nếu và chỉ nếu . . .".

Định nghĩa 1.8

Cho p và q là 2 mệnh đề, ta viết $p \leftrightarrow q$ để diễn đạt phát biểu "p nếu và chỉ nếu q". Phép toán tương đương $\leftrightarrow$ được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.6. Độ ưu tiên của các toán tử logic

- Tương tự như đối với các phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán.

1.2.6. Độ ưu tiên của các toán tử logic

- Tương tự như đối với các phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán.
- Ta có 5 toán tử logic
  $\overline{\ }$ (không) , $\wedge$ (và), $\vee$ (hay), $\rightarrow$ (kéo theo), $\leftrightarrow$ (tương đương)

1.2.6. Độ ưu tiên của các toán tử logic

- Tương tự như đối với các phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán.
- Ta có 5 toán tử logic
  $\overline{}$ (không) , $\wedge$ (và), $\vee$ (hay), $\rightarrow$ (kéo theo), $\leftrightarrow$ (tương đương)

$\overline{}$	ưu tiên mức 1 (cao nhất)
$\wedge$, $\vee$	ưu tiên mức 2 (thấp hơn)
$\rightarrow$, $\leftrightarrow$	ưu tiên mức 3 (thấp nhất)

trong đó, các toán tử liệt kê trên cùng dòng có cùng độ ưu tiên.

1.2.6. Độ ưu tiên của các toán tử logic

Ví dụ 1.8

1. $\overline{p} \vee q$ có nghĩa là $((\overline{p}) \vee q)$.
2. $\overline{p} \vee q \to r \vee s$ có nghĩa là $(((\overline{p}) \vee q) \to (r \wedge s))$.
3. $\overline{p} \vee q \wedge r$ là nhập nhằng. Cần phải dùng các dấu ngoặc để chỉ rõ nghĩa.

Nội dung

1.3. Biểu thức logic

- Trong đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ các hằng số, các biến và các phép toán.

1.3. Biểu thức logic

- Trong đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ các hằng số, các biến và các phép toán.
- Khi thay thế các biến trong một biểu thức đại số bởi các hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số.

1.3. Biểu thức logic

- Trong đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ các hằng số, các biến và các phép toán.
- Khi thay thế các biến trong một biểu thức đại số bởi các hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số.

Định nghĩa 1.9

Trong phép tính mệnh đề ta cũng có các *biểu thức logic* được xây dựng từ

- Các mệnh đề hay các giá trị hằng.

1.3. Biểu thức logic

- Trong đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ các hằng số, các biến và các phép toán.
- Khi thay thế các biến trong một biểu thức đại số bởi các hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số.

Định nghĩa 1.9

Trong phép tính mệnh đề ta cũng có các *biểu thức logic* được xây dựng từ

- Các mệnh đề hay các giá trị hằng.
- Các biến mệnh đề.

1.3. Biểu thức logic

- Trong đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ các hằng số, các biến và các phép toán.
- Khi thay thế các biến trong một biểu thức đại số bởi các hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số.

Định nghĩa 1.9

Trong phép tính mệnh đề ta cũng có các *biểu thức logic* được xây dựng từ

- Các mệnh đề hay các giá trị hằng.
- Các biến mệnh đề.
- Các phép toán logic, và cả các dấu ngoặc "( )" để chỉ rõ thứ tự thực hiện của các phép toán.

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Giả sử E, F là 2 biểu thức logic, khi ấy
$\overline{E}, E \wedge F, E \vee F, E \to F, E \leftrightarrow F$ cũng là các biểu thức logic.

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Giả sử E, F là 2 biểu thức logic, khi ấy
$\overline{E}, E \wedge F, E \vee F, E \to F, E \leftrightarrow F$ cũng là các biểu thức logic.

Ví dụ 1.9

Biểu diễn

$$E(p, q, r) = (((\overline{p}) \vee q) \to (r \wedge s))$$

là một biểu thức logic trong đó p, q, r là các biến mệnh đề.

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Bảng chân trị của biểu thức logic

- Bảng chân trị của một biểu thức logic là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Bảng chân trị của biểu thức logic

- Bảng chân trị của một biểu thức logic là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.
- Với một biến mệnh đề, ta có 2 trường hợp là 0 (sai) hoặc 1 (đúng).

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Bảng chân trị của biểu thức logic

- Bảng chân trị của một biểu thức logic là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.
- Với một biến mệnh đề, ta có 2 trường hợp là 0 (sai) hoặc 1 (đúng).
- Với 2 biến mệnh đề p, q ta 4 trường hợp chân trị của bộ biến (p, q) là các bộ giá trị $(0, 0), (0, 1)$, $(1, 0)$, và $(1, 1)$.

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Bảng chân trị của biểu thức logic

- Bảng chân trị của một biểu thức logic là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.
- Với một biến mệnh đề, ta có 2 trường hợp là 0 (sai) hoặc 1 (đúng).
- Với 2 biến mệnh đề p, q ta 4 trường hợp chân trị của bộ biến (p, q) là các bộ giá trị $(0, 0), (0, 1)$, $(1, 0)$, và $(1, 1)$.
- Trong trường hợp tổng quát, với n biến mệnh đề thì ta có $2n$ trường hợp chân trị cho bộ n biến đó.

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Ví dụ 1.10

Bảng chân trị của các biểu thức logic $p \to q$ và $\overline{p} \vee q$ theo các biến mệnh đề p, q như sau

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

1.3.1. Định nghĩa và bảng chân trị của biểu thức logic

Ví dụ 1.11

Bảng chân trị của các biểu thức logic $p \vee (q \wedge r)$ theo các biến mệnh đề p, q, r như sau

Thứ tự	p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	0	1
8	1	1	1	1	1

1.3.2. Sự tương đương logic

Định nghĩa 1.10

Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic khi E và F luôn luôn có cùng chân trị trong mọi trường hợp chân trị của bộ biến mệnh đề.

1.3.2. Sự tương đương logic

Định nghĩa 1.10

Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic khi E và F luôn luôn có cùng chân trị trong mọi trường hợp chân trị của bộ biến mệnh đề.

- Khi đó ta viết $E \equiv F$, đọc là "E tương đương với F".

1.3.2. Sự tương đương logic

Định nghĩa 1.10

Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic khi E và F luôn luôn có cùng chân trị trong mọi trường hợp chân trị của bộ biến mệnh đề.

- Khi đó ta viết $E \equiv F$, đọc là "E tương đương với F".
- Như vậy, theo định nghĩa ta có thể kiểm tra xem 2 biểu thức logic có tương đương hay không bằng cách lập bảng chân trị của các biểu thức logic.

1.3.2. Sự tương đương logic

Định nghĩa 1.10

Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic khi E và F luôn luôn có cùng chân trị trong mọi trường hợp chân trị của bộ biến mệnh đề.

- Khi đó ta viết $E \equiv F$, đọc là "E tương đương với F".
- Như vậy, theo định nghĩa ta có thể kiểm tra xem 2 biểu thức logic có tương đương hay không bằng cách lập bảng chân trị của các biểu thức logic.

Ví dụ 1.12

Từ bảng chân trị của các biểu thức logic $p \rightarrow q$ và $\overline{p} \vee q$ theo các biến mệnh đề p, q ta có

$$(p \rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$$

1.3.3. Giá trị của biểu thức logic

Một biểu thức logic được tạo thành từ các biến logic kết hợp với phép toán logic, bởi vậy nên giá trị biểu thức logic cũng chỉ nhận 1 trong 2 giá trị là "đúng" (*true* hoặc 1) hay "sai" (*false* hoặc 0) tùy thuộc vào giá trị của các biến logic và quy luật của các phép toán.

1.3.3. Giá trị của biểu thức logic

Một biểu thức logic được tạo thành từ các biến logic kết hợp với phép toán logic, bởi vậy nên giá trị biểu thức logic cũng chỉ nhận 1 trong 2 giá trị là "đúng" (*true* hoặc 1) hay "sai" (*false* hoặc 0) tùy thuộc vào giá trị của các biến logic và quy luật của các phép toán.

Ví dụ 1.13

Xét biểu thức logic $(\overline{p} \vee q)$, nếu thay $p = 1$ và $q = 0$ ta có

$$\overline{1} \vee 0 = 0 \vee 0 = 0.$$

Nội dung

1.4. Các luật logic và sử dụng

- Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước.

1.4. Các luật logic và sử dụng

- Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước.
- Mỗi biểu thức logic cho ta một sự khẳng định về sự tương đương của 2 biểu thức logic.

1.4. Các luật logic và sử dụng

- Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước.
- Mỗi biểu thức logic cho ta một sự khẳng định về sự tương đương của 2 biểu thức logic.
- Ta sẽ sử dụng các qui tắc thay thế và các luật logic đã biết để thực hiện các phép biến đổi tương đương trên các biêu thức logic.

1.4. Các luật logic và sử dụng

- Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước.
- Mỗi biểu thức logic cho ta một sự khẳng định về sự tương đương của 2 biểu thức logic.
- Ta sẽ sử dụng các qui tắc thay thế và các luật logic đã biết để thực hiện các phép biến đổi tương đương trên các biêu thức logic.
- Dưới đây, chúng ta sẽ liệt kê ra một số luật logic thường được sử dụng trong lập luận và chứng minh.

1.4. Các luật logic và sử dụng

- Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước.
- Mỗi biểu thức logic cho ta một sự khẳng định về sự tương đương của 2 biểu thức logic.
- Ta sẽ sử dụng các qui tắc thay thế và các luật logic đã biết để thực hiện các phép biến đổi tương đương trên các biêu thức logic.
- Dưới đây, chúng ta sẽ liệt kê ra một số luật logic thường được sử dụng trong lập luận và chứng minh.
- Các luật này có thể được suy ra trực tiếp từ các bảng chân trị của các biểu thức logic.

1.4.1. Các luật logic

1. Các luật về phép phủ định
   - $\overline{\overline{p}} \equiv p$ (luật phủ định của phủ định);
   - $\overline{1} \equiv 0$;
   - $\overline{0} \equiv 1$.

1.4.1. Các luật logic

1. Các luật về phép phủ định
   - $\overline{\overline{p}} \equiv p$ (luật phủ định của phủ định);
   - $\overline{1} \equiv 0$;
   - $\overline{0} \equiv 1$.
2. Luật giao hoán
   - $p \wedge q \equiv q \wedge p$;
   - $p \vee q \equiv q \vee p$.

1.4.1. Các luật logic

1. Các luật về phép phủ định
    - $\overline{\overline{p}} \equiv p$ (luật phủ định của phủ định);
    - $\overline{1} \equiv 0$;
    - $\overline{0} \equiv 1$.
2. Luật giao hoán
    - $p \wedge q \equiv q \wedge p$;
    - $p \vee q \equiv q \vee p$.
3. Luật kết hợp
    - $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$;
    - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.

1.4.1. Các luật logic

1. Các luật về phép phủ định
   - $\overline{\overline{p}} \equiv p$ (luật phủ định của phủ định);
   - $\overline{1} \equiv 0$;
   - $\overline{0} \equiv 1$.
2. Luật giao hoán
   - $p \wedge q \equiv q \wedge p$;
   - $p \vee q \equiv q \vee p$.
3. Luật kết hợp
   - $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$;
   - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.
4. Luật phân bố
   - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
   - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.4.1. Các luật logic

5. Luật De Morgan

- $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;
- $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.

1.4.1. Các luật logic

5. Luật De Morgan

- $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;
- $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.

6. Luật về phần tử bù

- $p \vee \overline{p} \equiv 1$;
- $p \wedge \overline{p} \equiv 0$.

1.4.1. Các luật logic

5. Luật De Morgan

- $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;
- $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.

6. Luật về phần tử bù

- $p \vee \overline{p} \equiv 1$;
- $p \wedge \overline{p} \equiv 0$.

7. Luật kéo theo

- $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$.

1.4.1. Các luật logic

5. Luật De Morgan
   - $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;
   - $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.
6. Luật về phần tử bù
   - $p \vee \overline{p} \equiv 1$;
   - $p \wedge \overline{p} \equiv 0$.
7. Luật kéo theo
   - $p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$.
8. Luật tương đương
   - $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

1.4.1. Các luật logic

5. Luật De Morgan
- $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;
- $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.

6. Luật về phần tử bù
- $p \vee \overline{p} \equiv 1$;
- $p \wedge \overline{p} \equiv 0$.

7. Luật kéo theo
- $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$.

8. Luật tương đương
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$.

9. Các luật đơn giản của phép tuyển
- $p \vee p \equiv p$ (tính lũy đẳng của phép tuyển);
- $p \vee 1 \equiv 1$ (luật này còn được gọi là luật thống trị);
- $p \vee 0 \equiv p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa);
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ).

1.4.1. Các luật logic

10. Các luật đơn giản của phép hội

- $p \wedge p \equiv p$ (tính lũy đẳng của phép hội);
- $p \wedge 1 \equiv p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa);
- $p \wedge 0 \equiv 0$ (luật này còn được gọi là luật thống trị);
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thu).

1.4.1. Các luật logic

10. Các luật đơn giản của phép hội

- $p \wedge p \equiv p$ (tính lũy đẳng của phép hội);
- $p \wedge 1 \equiv p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa);
- $p \wedge 0 \equiv 0$ (luật này còn được gọi là luật thống trị);
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ).

- Những luật trên được chọn lựa để làm cơ sở cho chúng ta thực hiện các biến đổi logic, suy luận và chứng minh. Tất nhiên là còn nhiều luật logic khác mà ta không liệt kê ra ở đây.

1.4.1. Các luật logic

- Các luật kết hợp trình bày ở trên còn được gọi là tính chất kết hợp của phép toán hội và phép toán tuyển . Do tính chất này, các biểu thức logic hội và các biểu thức tuyển dưới các dạng sau
    - $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$.
    - $E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_m$.

1.4.1. Các luật logic

- Các luật kết hợp trình bày ở trên còn được gọi là tính chất kết hợp của phép toán hội và phép toán tuyển . Do tính chất này, các biểu thức logic hội và các biểu thức tuyển dưới các dạng sau
  - $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$.
  - $E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_m$.
- Tính toán chân trị có thể được thực hiện dựa trên một sự phân bố các cặp dấu ngoặc vào biểu thức một cách tùy ý để xác định một trình tự thực hiện các phép toán.

1.4.1. Các luật logic

- Các luật kết hợp trình bày ở trên còn được gọi là tính chất kết hợp của phép toán hội và phép toán tuyển . Do tính chất này, các biểu thức logic hội và các biểu thức tuyển dưới các dạng sau
  - $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$.
  - $E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_m$.
- Tính toán chân trị có thể được thực hiện dựa trên một sự phân bố các cặp dấu ngoặc vào biểu thức một cách tùy ý để xác định một trình tự thực hiện các phép toán.

Ví dụ 1.14

Biểu thức $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4$ có thể được tính toán chân trị bởi biểu thức sau

$$(E_1 \wedge E_2) \wedge (E_3 \wedge E_4)$$

hay có thể tính toán theo biểu thức $E_1 \wedge ((E_2 \wedge E_3) \wedge E_4)$.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Dưới đây là các qui tắc để cho ta có thể suy ra những biểu thức logic mới hay tìm ra các biểu thức logic tương đương với một biểu thức logic cho trước.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Dưới đây là các qui tắc để cho ta có thể suy ra những biểu thức logic mới hay tìm ra các biểu thức logic tương đương với một biểu thức logic cho trước.

Qui tắc 1.

Trong một biểu thức logic E, nếu ta thay thế một biểu thức con bởi một biểu thức logic tương đương với biểu thức con đó thì ta sẽ được một biểu thức mới E' tương đương với biểu thức E.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Dưới đây là các qui tắc để cho ta có thể suy ra những biểu thức logic mới hay tìm ra các biểu thức logic tương đương với một biểu thức logic cho trước.

Qui tắc 1.

Trong một biểu thức logic E, nếu ta thay thế một biểu thức con bởi một biểu thức logic tương đương với biểu thức con đó thì ta sẽ được một biểu thức mới E' tương đương với biểu thức E.

Ví dụ 1.15

Cho biểu thức logic $E = q \wedge \overline{p}$. Thay thế q trong biểu thức E bởi biểu thức $\overline{\overline{q}}$ (tương đương với q) ta được một biểu thức mới $E' = \overline{\overline{q}} \vee \overline{p}$. Theo qui tắc thay thế 1 ta có

$$q \vee \overline{p} \equiv \overline{\overline{q}} \vee \overline{p}.$$

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Qui tắc 2.

Giả sử biểu thức logic E là một hằng đúng. Nếu ta thay thế một biến mệnh đề p bởi một biểu thức logic tuỳ ý thì ta sẽ được một biểu thức logic mới E' cũng là một hằng đúng.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Qui tắc 2.

Giả sử biểu thức logic E là một hằng đúng. Nếu ta thay thế một biến mệnh đề p bởi một biểu thức logic tuỳ ý thì ta sẽ được một biểu thức logic mới E' cũng là một hằng đúng.

Ví dụ 1.16

Ta có biểu thức $E(p,q) = (p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ là một hằng đúng. Thay thế biến q trong biểu thức E bởi biểu thức $q \wedge r$ ta được biểu thức logic mới

$$E'(p,q,r) = (p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow (\overline{p} \vee (q \wedge r)).$$

Theo qui tắc thay thế 2 ta có biểu thức $E'(p,q,r)$ cũng là một hằng đúng.

1.4.3. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.17

Chứng minh rằng $(p \to q) \equiv (\overline{q} \to \overline{p})$.

1.4.3. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.17

Chứng minh rằng $(p \to q) \equiv (\overline{q} \to \overline{p})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
(p \to q) &\equiv \overline{p} \vee q \text{ (luật kéo theo)} \\
&\equiv q \vee \overline{p} \text{ (luật giao hoán)} \\
&\equiv \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \text{ (luật phủ định)} \\
&\equiv \overline{q} \to \overline{p} \text{ (luật kéo theo)}
\end{aligned}$$

1.4.3.Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.18

Chứng minh rằng biểu thức $((p \to q) \land p) \to q$ là một hằng đúng.

1.4.3.Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.18

Chứng minh rằng biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là một hằng đúng.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
((p \to q) \wedge p) \to q &\equiv \overline{(p \to q) \wedge p} \vee q \text{ (luật kéo theo)}\\
&\equiv (\overline{p \to q} \vee \overline{p}) \vee q \text{ (luật De Morgan)}\\
&\equiv \overline{p \to q} \vee (\overline{p} \vee q) \text{ (luật kết hợp)}\\
&\equiv \overline{p \to q} \vee (p \to q) \text{ (luật kéo theo)}\\
&\equiv 1 \text{ (luật về phần tử bù)}
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là hằng đúng.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Ví dụ 1.19

Chứng minh rằng biểu thức $p \wedge q \to p$ là một hằng đúng.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Ví dụ 1.19

Chứng minh rằng biểu thức $p \wedge q \to p$ là một hằng đúng.

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to p &\equiv \overline{p \wedge q} \vee p \text{ (luật kéo theo)}\\
&\equiv (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee p \text{ (luật De Morgan)}\\
&\equiv (\overline{q} \vee \overline{p}) \vee p \text{ (luật giao hoán)}\\
&\equiv \overline{q} \vee (\overline{p} \vee p) \text{ (luật kết hợp)}\\
&\equiv \overline{q} \vee 1 \text{ (luật về phần tử bù)}\\
&\equiv 1 \text{ (luật đơn giản)}
\end{aligned}
$$

Vậy mệnh đề $p \wedge q \to p$ là hằng đúng.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Ví dụ 1.20

Chứng minh rằng biểu thức $p \to p \vee q$ là một mệnh đề hằng đúng.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Ví dụ 1.20

Chứng minh rằng biểu thức $p \to p \vee q$ là một mệnh đề hằng đúng.

Lời giải.

$$\begin{aligned} p \to p \vee q &\equiv \overline{p} \vee (p \vee q) \text{ (luật kéo theo)} \\ &\equiv (\overline{p} \vee p) \vee q \text{ (luật kết hợp)} \\ &\equiv 1 \vee q \text{ (luật về phần tử bù)} \\ &\equiv 1 \text{ (luật đơn giản).} \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề $p \to p \vee q$ là hằng đúng.

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Nhận xét.

1. Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề với quan hệ "*suy ra*".

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Nhận xét.

1. Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề với quan hệ "*suy ra*".
2. Khi mệnh đề $p \to q$ là hằng đúng, ta nói rằng p suy ra q (về mặt logic).

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Nhận xét.

1. Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề với quan hệ "*suy ra*".
2. Khi mệnh đề $p \to q$ là hằng đúng, ta nói rằng p suy ra q (về mặt logic).
3. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $\Rightarrow$ để chỉ quan hệ "*suy ra*".

1.4.2. Các quy tắc thay thế

Nhận xét.

1. Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề với quan hệ "*suy ra*".
2. Khi mệnh đề $p \to q$ là hằng đúng, ta nói rằng p suy ra q (về mặt logic).
3. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $\Rightarrow$ để chỉ quan hệ "*suy ra*".
4. Quan hệ suy ra này có tính truyền (hay bắc cầu), nhưng không có tính chất đối xứng.

Nội dung

1.5. Các dạng chuẩn tắc

Bài toán. Cho biểu thức lô gic E bất kỳ. Có hay không một thuật toán mà sau hữu hạn các bước thay đổi mà có thể biết được biểu thức lô gic E là đồng nhất đúng hay không?

- Bài toán này có một thuật toán để biết biểu thức là đồng nhất đúng hay không. Đó là lập bảng.
- Nhưng phương pháp lập bảng khó khăn khi số biến mệnh đề lớn.

1.5.1 Dạng hội sơ cấp và tuyển sơ cấp

Định nghĩa 1.11

Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic F theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được gọi là một *biểu thức hội cơ bản (hội sơ cấp)* nếu nó có dạng sau

$$F = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$$

với $q_j = p_j$ hoặc $q_j = \overline{p}_j (j = 1, \ldots, n)$.

1.5.1 Dạng hội sơ cấp và tuyển sơ cấp

Định nghĩa 1.11

Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic F theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được gọi là một *biểu thức hội cơ bản (hội sơ cấp)* nếu nó có dạng sau

$$F = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$$

với $q_j = p_j$ hoặc $q_j = \overline{p}_j (j = 1, \ldots, n)$.

Ví dụ 1.21

Biểu thức $x \wedge \overline{y} \wedge z$ là một biểu thức hội cơ bản theo 3 biến mệnh đề x, y, z.

1.5.1. Dạng hội sơ cấp và tuyển sơ cấp

Định nghĩa 1.12

Giả sử $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic F theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \dots, p_n$ được gọi là *một biểu thức tuyển cơ bản* (tuyển sơ cấp) nếu nó có dạng sau

$$F = q_1 \vee q_2 \vee \dots q_n$$

với $q_j = p_j$ hoặc $q_j = p_j (j = 1, \dots, n)$.

1.5.1. Dạng hội sơ cấp và tuyển sơ cấp

Định nghĩa 1.12

Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic F theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được gọi là *một biểu thức tuyển cơ bản* (tuyển sơ cấp) nếu nó có dạng sau

$$F = q_1 \vee q_2 \vee \ldots q_n$$

với $q_j = p_j$ hoặc $q_j = p_j (j = 1, \ldots, n)$.

Ví dụ 1.22

Biểu thức $x \vee \overline{y} \vee z$ là một biểu thức tuyển cơ bản theo 3 biến mệnh đề x, y, z.

1.5.1. Dạng hội sơ cấp và tuyển sơ cấp

Định lý 1.1

1) Điều kiện cần và đủ để một Hội sơ cấp đồng nhất sai là trong hội đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.
2) Điều kiện cần và đủ để một Tuyển sơ cấp đồng nhất đúng là trong tuyển đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

1.5.2.Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định nghĩa 1.13

Biểu thức logic $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được nói là có *dạng chính tắc tuyển* khi E có dạng

$$E = E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_m.$$

Trong đó mỗi biểu thức con E_i đều có dạng biểu thức hội cơ bản theo các biến $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

1.5.2.Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định nghĩa 1.13

Biểu thức logic $E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \dots, p_n$ được nói là có *dạng chính tắc tuyển* khi E có dạng

$$E = E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_m.$$

Trong đó mỗi biểu thức con E_i đều có dạng biểu thức hội cơ bản theo các biến $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Ví dụ 1.23

Các biểu thức sau đây có dạng chính tắc tuyển

- $E(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$
- $F(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (p_1 \wedge \overline{p}_2 \wedge p_3 \wedge \overline{p}_4)$.

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định lý 1.2

Mọi biểu thức logic $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ đều có thể viết dưới dạng chính tắc tuyển (chuẩn tắc tuyển) duy nhất, không kể sự sai khác về thứ tự trước sau của các biểu thức hội cơ bản trong phép tuyển). Nói một cách khác, ta có duy nhất một tập hợp các biểu thức hội cơ bản $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ sao cho biểu thức $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tương đương logic với biểu thức

$$E = E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_m.$$

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định nghĩa 1.14

Biểu thức logic $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được nói là có *dạng chính tắc hội* khi E có dạng

$$E = E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$$

Trong đó mỗi biểu thức con E_i đều có dạng chính tắc tuyển theo các biến $p_1, p_2, \ldots, p_n$

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định nghĩa 1.14

Biểu thức logic $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được nói là có *dạng chính tắc hội* khi E có dạng

$$E = E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$$

Trong đó mỗi biểu thức con E_i đều có dạng chính tắc tuyển theo các biến $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Ví dụ 1.24

Các biểu thức sau đây có dạng chuẩn tắc hội (chính tắc hội)

- $E(x, y, z) = (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \wedge y \wedge z)$.
- $F(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (p_1 \vee \overline{p}_2 \vee p_3 \vee \overline{p}_4)$.

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định lý 1.3

Mọi biểu thức logic $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *đều có thể viết dưới dạng chính tắc hội duy nhất, không kể sự sai khác về thứ tự trước sau của các biểu thức tuyển cơ bản trong phép hội). Nói một cách khác, ta có duy nhất một tập hợp các biểu thức tuyển cơ bản* $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ *sao cho biểu thức* $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *tương đương logic với biêu thức* $E_1 \vee E_2 \vee \ldots E_m$.

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Ví dụ 1.25

Cho $E = p_3 \to (p_2 \to p_1)$ tìm dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển.

Lời giải. Ta có $E = p_3 \to (p_2 \to p_1) \equiv \overline{p}_3 \vee \overline{p}_2 \vee p_1$ là dạng chuẩn tắc hội. Nhưng nó cũng có dạng chuẩn tắc tuyển với các hội cơ sở là $\overline{p}_3, \overline{p}_2, p_1$.

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Định lý 1.4

1) Điều kiện cần và đủ để biểu thức lôgic E đồng nhất đúng là trong dạng chuẩn tắc hội của E mỗi tuyển sơ cấp chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.
2) Điều kiện cần và đủ để biểu thức lôgic E đồng nhất sai là trong dạng chuẩn tắc tuyển của E mỗi hội sơ cấp chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó.

Chứng minh.
1) Điều kiện cần. Giả sử E là công thức đồng nhất đúng. Theo Định lý 5 thì E có dạng chuẩn tắc hội

$$E = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m.$$

1.5.2. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

- Vì E là đồng nhất đúng nên F_i, $i = 1, \dots, n$, là đồng nhất đúng. Theo Định lý 1 thì trong mỗi $F_i, (i = 1, \dots, n)$ có chứa một mệnh đề cơ cấp đồng thời với phủ định của nó.
- Điều kiện đủ. Giả sử F có dạng chuẩn tắc hội

$$E = F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_m$$

trong đó mỗi $F_i, (i = 1, \dots, n)$ có chứa một mệnh đề cơ cấp đồng thời với phủ định của nó.
- Theo Định lý 1 thì mỗi $F_i, (i = 1, \dots, n)$ là đồng nhất đúng và do đó E là công thức đồng nhất đúng.

2) Chứng minh tương tự.

1.5.3. Thuật toán nhận biết hằng đúng, hằng sai

Thuật toán.
Đầu vào: E là biểu thức lôgic bất kỳ.
Đầu ra: Dạng chuẩn tắc hội, dạng chuẩn tắc tuyển của E; E là Hằng đúng; Hằng sai.

- *Bước 1.* Khử phép toán kéo theo $(\rightarrow)$ trong E bằng cách sử dụng $p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$ ta được công thức tương đương $E_1 \equiv E$.
- *Bước 2.* Đưa phép toán phủ định $(-)$ trong E_1 về trực tiếp với các mệnh đề sơ cấp có mặt trong E_1 bằng áp dụng (luật De Norgan), $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ và $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ ta được biểu thức lôgic mới $A_2 \equiv E_1 \equiv E$

1.5.3. Thuật toán nhận biết hằng đúng, hằng sai

- *Bước 3.* Đưa E_2 về dạng chuẩn tắc hội bằng cách dùng luật phân phối
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
ta được biểu thức lôgic $E_3 \equiv E_2$, ở đây E_3 bao gồm hội những hội sơ cấp.
    - Nếu trong mỗi tuyển sơ cấp có chứa một biến mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó thì E_3 hằng đúng, nghĩa là E đúng.
    - Ngược lại, Nếu một tuyển sơ cấp không chứa một biến mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó thì E_3 hằng không đúng, nghĩa là E không đúng.

1.5.3. Thuật toán nhận biết hằng đúng, hằng sai

- *Bước 4.* Đưa E_2 về dạng chuẩn tắc tuyển bằng cách dùng luật phân phối
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
ta được biểu thức lôgic $E_3' \equiv E_2$, ở đây E_3' bao gồm hội những tuyển sơ cấp.
    - Nếu trong mỗi hội sơ cấp có chứa một biến mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó thì E_3' hằng sai, nghĩa là E sai.
    - Ngược lại, Nếu một hội sơ cấp không chứa một biến mệnh đề sơ cấp đồng thời với phủ định của nó thì E_3' hằng không sai, nghĩa là E biểu thức thực hiện được.
- **Chú ý.** Biểu thức E thực hiện được khi và chỉ khi trong E có tồn tại một bộ giá trị đúng, sai của mệnh đề sơ cấp trong E sao cho với bộ giá trị đúng, sai đó thì E nhận giá trị đúng.

1.5.3. Thuật toán nhận biết hằng đúng, hằng sai

Nội dung

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
2. Các tiên đề được giả định là đúng.

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
2. Các tiên đề được giả định là đúng.
3. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có.

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
2. Các tiên đề được giả định là đúng.
3. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có.
4. Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề.

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
2. Các tiên đề được giả định là đúng.
3. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có.
4. Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề.
5. Trong một hệ toán học chúng ta có thể suy ra được các định lý.

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
2. Các tiên đề được giả định là đúng.
3. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có.
4. Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề.
5. Trong một hệ toán học chúng ta có thể suy ra được các định lý.
6. Một định lý là một khẳng định được chứng minh là đúng.

1.6. Quy tắc suy diễn

1. Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
2. Các tiên đề được giả định là đúng.
3. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có.
4. Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề.
5. Trong một hệ toán học chúng ta có thể suy ra được các định lý.
6. Một định lý là một khẳng định được chứng minh là đúng.
7. Một số loại định lý được xem là các bổ đề, các hệ quả.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

1. Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là *chứng minh*.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

1. Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là *chứng minh*.
2. Logic là một công cụ cho việc phân tích các chứng minh.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

1. Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là *chứng minh*.
2. Logic là một công cụ cho việc phân tích các chứng minh.
3. Trong phần này chúng ta sẽ đề cập đến việc xây dựng một chứng minh toán học. Để thực hiện được một lập luận hay một chứng minh chúng ta cần hiểu các kỹ thuật và các công cụ được sử dụng để xây dựng một chứng minh.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

1. Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là *chứng minh*.
2. Logic là một công cụ cho việc phân tích các chứng minh.
3. Trong phần này chúng ta sẽ đề cập đến việc xây dựng một chứng minh toán học. Để thực hiện được một lập luận hay một chứng minh chúng ta cần hiểu các kỹ thuật và các công cụ được sử dụng để xây dựng một chứng minh.
4. Thông thường một chứng minh sẽ bao gồm nhiều bước suy luận mà ở mỗi bước ta đi đến (hay suy ra) một sự khẳng định mới từ những khẳng định đã biết.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.26

Một bước suy diễn đúng và sai

(A) Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì danh sách L là rỗng nên theo sự khẳng định trên ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.

(B) Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.26

Một bước suy diễn đúng và sai

(A) Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì danh sách L là rỗng nên theo sự khẳng định trên ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.

(B) Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

- Trong 2 suy diễn ở ví dụ trên thì suy diễn (B) là một suy luận đúng, nhưng suy diễn (A) là không đúng.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.26

Một bước suy diễn đúng và sai

(A) Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì danh sách L là rỗng nên theo sự khẳng định trên ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.

(B) Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách.Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

- Trong 2 suy diễn ở ví dụ trên thì suy diễn (B) là một suy luận đúng, nhưng suy diễn (A) là không đúng.
- Vậy làm thế nào để biết được một suy diễn là đúng hay sai ? Một bước suy luận như thế phải dựa trên một qui tắc suy diễn hợp lý nào đó để nó được xem là một suy luận đúng.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các qui tắc suy diễn là cơ sở để ta biết được một lập luận hay một chứng minh là đúng hay sai.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các qui tắc suy diễn là cơ sở để ta biết được một lập luận hay một chứng minh là đúng hay sai.
- Trong các mục tiếp theo chúng ta sẽ xem xét chi tiết hơn về các qui tắc suy diễn và giới thiệu một số qui tắc suy dẫn cơ bản thường được dùng trong việc suy luận và chứng minh.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các qui tắc suy diễn là cơ sở để ta biết được một lập luận hay một chứng minh là đúng hay sai.
- Trong các mục tiếp theo chúng ta sẽ xem xét chi tiết hơn về các qui tắc suy diễn và giới thiệu một số qui tắc suy dẫn cơ bản thường được dùng trong việc suy luận và chứng minh.

Định nghĩa qui tắc suy diễn

Tuy có nhiều kỹ thuật, nhiều phương pháp chứng minh khác nhau, nhưng trong chứng minh trong toán học ta thường thấy những lý luận dẫn xuất có dạng

$$\text{Nếu } P_1 \text{ và } P_2 \text{ và } \ldots \text{ và } P_n$$

$$\text{thì } Q.$$

Dạng lý luận này được xem là hợp lý (được chấp nhận là đúng) khi ta có biểu thức $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ là *hằng đúng*.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Ta gọi dạng lý luận trên là một luật suy diễn và người ta cũng thường viết luật suy diễn trên theo các cách sau đây

1. *Cách* 1. Biểu thức hằng đúng

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q \equiv 1.$$

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Ta gọi dạng lý luận trên là một luật suy diễn và người ta cũng thường viết luật suy diễn trên theo các cách sau đây

1. *Cách* 1. Biểu thức hằng đúng
$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q \equiv 1.$$

2. *Cách* 2. Dòng suy diễn
$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q.$$

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Ta gọi dạng lý luận trên là một luật suy diễn và người ta cũng thường viết luật suy diễn trên theo các cách sau đây

1. *Cách* 1. Biểu thức hằng đúng
$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q \equiv 1.$$
2. *Cách* 2. Dòng suy diễn
$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q.$$
3. *Cách* 3. Mô hình suy diễn
$$\begin{array}{c} P_1 \\ \ldots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các biểu thức logic $P_1, P_2, \ldots, P_n$ trong luật suy diễn trên được gọi là *giả thiết* (hay tiền đề), và biểu thức Q được gọi là *kết luận*.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các biểu thức logic $P_1, P_2, \ldots, P_n$ trong luật suy diễn trên được gọi là *giả thiết* (hay tiền đề), và biểu thức Q được gọi là *kết luận*.
- Chúng ta cũng cần lưu ý rằng lý luận trên đúng không có nghĩa là ta có Q đúng và cũng không khẳng định rằng $P_1, P_2, \ldots, P_n$ đều đúng.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các biểu thức logic $P_1, P_2, \ldots, P_n$ trong luật suy diễn trên được gọi là *giả thiết* (hay tiền đề), và biểu thức Q được gọi là *kết luận*.
- Chúng ta cũng cần lưu ý rằng lý luận trên đúng không có nghĩa là ta có Q đúng và cũng không khẳng định rằng $P_1, P_2, \ldots, P_n$ đều đúng.
- Lý luận chỉ muốn khẳng định rằng nếu như ta có $P_1, P_2, \ldots, P_n$ là đúng thì ta sẽ có Q cũng phải đúng.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

- Các biểu thức logic $P_1, P_2, \ldots, P_n$ trong luật suy diễn trên được gọi là *giả thiết* (hay tiền đề), và biểu thức Q được gọi là *kết luận*.
- Chúng ta cũng cần lưu ý rằng lý luận trên đúng không có nghĩa là ta có Q đúng và cũng không khẳng định rằng $P_1, P_2, \ldots, P_n$ đều đúng.
- Lý luận chỉ muốn khẳng định rằng nếu như ta có $P_1, P_2, \ldots, P_n$ là đúng thì ta sẽ có Q cũng phải đúng.

Ví dụ 1.27

Giả sử p và q là các biến logic. Xác định xem mô hình sau đây có phải là một luật suy diễn hay không?

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\quad p \quad} \\ \therefore q \end{array}$$

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Lời giải. Lập bảng chân trị ta có

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Lời giải. Lập bảng chân trị ta có

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- Bảng chân trị cho thấy biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là hằng đúng. Do đó, mô hình suy luận trên đúng là một luật suy diễn.

1.6.1. Đại cương về quy tắc suy diễn

Lời giải. Lập bảng chân trị ta có

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- Bảng chân trị cho thấy biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là hằng đúng. Do đó, mô hình suy luận trên đúng là một luật suy diễn.
- Thật ra, ta chỉ cần nhìn vào các cột chân trị của p, q, và $p \to q$ trong bảng chân trị là ta có thể kết luận được rồi, vì từ bảng chân trị trên ta thấy rằng nếu các giả thiết $p \to q$ và p đúng (có giá trị bằng 1) thì kết luận q cũng đúng.

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

- Để kiểm tra một suy luận cụ thể là đúng hay không, tức là có "hợp logic" hay không, ta có thể căn cứ vào các qui tắc suy diễn (luật suy diễn).

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

- Để kiểm tra một suy luận cụ thể là đúng hay không, tức là có "hợp logic" hay không, ta có thể căn cứ vào các qui tắc suy diễn (luật suy diễn).
- Phép suy luận cụ thể có thể được xem như sự suy diễn trên các mệnh đề phức hợp. Các mệnh đề sơ cấp cụ thể (mà chân trị có thể đúng hoặc sai) trong phép suy luận sẽ được trừu tượng hóa (thay thế) bởi các biến logic.

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

- Để kiểm tra một suy luận cụ thể là đúng hay không, tức là có "hợp logic" hay không, ta có thể căn cứ vào các qui tắc suy diễn (luật suy diễn).
- Phép suy luận cụ thể có thể được xem như sự suy diễn trên các mệnh đề phức hợp. Các mệnh đề sơ cấp cụ thể (mà chân trị có thể đúng hoặc sai) trong phép suy luận sẽ được trừu tượng hóa (thay thế) bởi các biến logic.
- Như thế phép suy luận được trừu tượng hóa thành một qui tắc suy diễn trên các biểu thức logic mà ta có thể kiểm tra xem qui tắc suy diễn là đúng hay không.

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

- Để kiểm tra một suy luận cụ thể là đúng hay không, tức là có "hợp logic" hay không, ta có thể căn cứ vào các qui tắc suy diễn (luật suy diễn).
- Phép suy luận cụ thể có thể được xem như sự suy diễn trên các mệnh đề phức hợp. Các mệnh đề sơ cấp cụ thể (mà chân trị có thể đúng hoặc sai) trong phép suy luận sẽ được trừu tượng hóa (thay thế) bởi các biến logic.
- Như thế phép suy luận được trừu tượng hóa thành một qui tắc suy diễn trên các biểu thức logic mà ta có thể kiểm tra xem qui tắc suy diễn là đúng hay không.
- Đây chính là biện pháp để ta biết được một suy luận cụ thể là đúng hay sai

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.28

Xét sự suy luận sau đây

Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách. Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.28

Xét sự suy luận sau đây
Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách. Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

Lời giải.

- Ta có các mệnh đề sơ cấp $p =$"*danh sách L là khác rỗng*", $q =$"*ta có thể lấy ra phần tử đầu (từ danh sách L)*".

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.28

Xét sự suy luận sau đây
Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách. Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

Lời giải.

- Ta có các mệnh đề sơ cấp $p =$"*danh sách L là khác rỗng*", $q =$"*ta có thể lấy ra phần tử đầu (từ danh sách L)*".
- Thay thế các mệnh đề sơ cấp này bởi các biến logic p, q tương ứng thì phép suy luận cụ thể trên sẽ được trừu tượng hóa thành một suy diễn trên các biểu thức logic như sau

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.28

Xét sự suy luận sau đây

Nếu một danh sách L là khác rỗng thì ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách. Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

Lời giải.

- Ta có các mệnh đề sơ cấp $p =$"*danh sách L là khác rỗng*", $q =$"*ta có thể lấy ra phần tử đầu (từ danh sách L)*".
- Thay thế các mệnh đề sơ cấp này bởi các biến logic p, q tương ứng thì phép suy luận cụ thể trên sẽ được trừu tượng hóa thành một suy diễn trên các biểu thức logic như sau

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{p} \\ \hline \therefore \overline{p} \end{array}$$

Mô hình suy diễn này chính là qui tắc suy diễn Modus Tollens, đã được biết là đúng. Vậy phép suy luận trên là suy luận đúng.

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.29

Xét xem suy luận sau đây có đúng hay không?
Nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tĩ thì phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m, n. Nếu phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m,n thì ta có mâu thuẫn. Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tĩ.

1.6.2. Kiểm tra một quy tắc suy diễn

Ví dụ 1.29

Xét xem suy luận sau đây có đúng hay không?
Nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tĩ thì phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m, n. Nếu phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m,n thì ta có mâu thuẫn. Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tĩ.

Lời giải. Trừu tượng hóa các mệnh đề sơ cấp $p =$"$\sqrt{2}$ là số hữu tĩ", $q =$" phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m, n " thành các biến logic p, q tương ứng thì phép suy luận trên có dạng mộ hình suy diễn

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to 0 \\ \hline \therefore \overline{p} \end{array}$$

Kiểm tra mô hình suy diễn này ta sẽ thấy là đúng. Như thế phép suy luận trên là đúng.

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Một số qui tắc suy diễn (đúng) thường được sử dụng mà ta có thể kiểm tra chúng bằng các phương pháp đã được trình bày.

1. **Qui tắc rút gọn:** Cơ sở của qui tắc là hằng đúng

$$(P \wedge Q) \to P$$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to P$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

2. **Qui tắc suy diễn cộng:** Cơ sở của qui tắc là hằng đúng

$$P \to (P \vee Q)$$

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$$\frac{P}{\therefore P \vee Q}$$

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

3. **Qui tắc khẳng định:** Cơ sở của qui tắc là hằng đúng

$$(P \to Q) \wedge P \to Q$$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Ví dụ 1.30

Chứng minh công thức sau là hằng đúng

$$(p_1 \vee p_2) \wedge ((p_1 \vee p_2) \to \overline{p_3 \wedge p_4}) \to \overline{p_3 \wedge p_4}$$

Lời giải. Mô hình suy diễn của công thức trên

$$\frac{\begin{array}{l} p_1 \vee p_2 \\ (p_1 \vee p_2) \to \overline{p_3 \wedge p_4} \end{array}}{\therefore\ p_3 \vee p_4} \text{ (Kđ)} \equiv \frac{\overline{p_3 \wedge p_4}}{\therefore\ p_3 \wedge p_4} \equiv \mathbf{1}$$

Vậy, biểu thức trên là hằng đúng.

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Ví dụ 1.31

Chỉ ra biểu thức sau là hằng đúng

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

Lời giải. Ta có mô hình suy diễn

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p \vee q} \equiv \frac{\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \wedge q \rightarrow p \end{array}}{\therefore p \vee q} (\text{Kđ}) \equiv \frac{p}{\therefore p \vee q} \equiv \mathbf{1}$$

Vậy, biểu thức trên là hằng đúng.

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

4. **Qui tắc phủ định:** Cơ sở của qui tắc là hằng đúng

$$(P \to Q) \wedge \overline{Q} \to \overline{P}$$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \overline{Q} \\ \hline \therefore \overline{P} \end{array}$$

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Ví dụ 1.32

Nếu được thưởng cuối năm An sẽ đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An sẽ thăm Thiền Viện. Mà Anh kgồn thăm thiền Viện. Vậy An không được thưởng cuối năm.
Suy luận của đoạn văn trên có đúng không?

Lời giải. Đặt
p_1 ="An được thưởng cuối năm";
p_2 ="An sẽ đi Đà Lạt";
p_3 ="An sẽ thăm Thiền Viện".
Đoạn văn trên được mô tả

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

$$\frac{\begin{matrix} p_1 \rightarrow p_2 \\ \begin{cases} p_2 \rightarrow p_3 \\ \overline{p}_3 \end{cases} \end{matrix}}{\therefore \overline{p}_1} (\text{Pđ}) \equiv \frac{\begin{matrix} p_1 \rightarrow p_2 \\ \overline{p}_2 \end{matrix}}{\therefore \overline{p}_1} (\text{Pđ}) \equiv \frac{\overline{p}_1}{\therefore \overline{p}_1} \equiv \mathbf{1}$$

Suy luận của đoạn văn trên là đúng.

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

5. **Tam đoạn luận:** Cơ sở của qui tắc là hằng đúng

$$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge (P \to R)$$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline \therefore (P \to R) \end{array}$$

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Ví dụ 1.33

Chỉ ra biểu thức dưới đây là hằng đúng

$$(p_1 \wedge (p_1 \to p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4) \wedge (p_4 \to \overline{p}_2)) \to (p_3 \vee p_4).$$

Lời giải.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} p_1 \\ p_1 \to p_2 \end{cases} \\ p_3 \vee p_4 \\ p_4 \to \overline{p}_2 \\ \hline \therefore\ p_3 \vee p_5 \end{array} (\text{Kđ}) \equiv \begin{array}{l} p_3 \vee p_4 \\ \begin{cases} p_4 \to \overline{p}_2 \\ p_2 \end{cases} \\ \hline \therefore\ p_3 \vee p_5 \end{array} (\text{Pđ}) \equiv$$

$$\begin{array}{l} p_3 \vee p_4 \\ \overline{p}_4 \\ \hline \therefore\ p_3 \vee p_5 \end{array} (\text{Tđlr}) \equiv \begin{array}{l} p_3 \\ \hline \therefore\ p_3 \vee p_5 \end{array} (\text{Suy diễn cộng}) \equiv \mathbf{1}$$

Vậy suy luận đúng

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

6. **Qui tắc phủ định (phản chứng):** Cơ sở của qui tắc là đồng nhất
$$P \to Q \equiv (P \wedge \overline{Q}) \to 0$$
Qui tắc này cho phép ta chứng minh $(P \wedge \overline{Q}) \to 0$ thay cho $P \to Q$. Nói cách khác, nếu ta thêm giả thiết phụ vào tiền đề P mà chứng minh được có sự mâu thuẫn thì ta có thể kết luận Q từ tiền đề P.

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

Ví dụ 1.34

Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An được tăng lương. An được tăng lương thì An mua xe máy. Mà An không mua được xe máy. Vậy An không được lên chức hay An không làm việc nhiều.
Suy luận trên có đúng không?

Lời giải. Đặt
p_1 ="An được lên chức";
p_2 ="An làm việc nhiều";
p_3 ="An được tăng lương";
p_4 ="An mua xe máy";
Suy luận trên tương đương với

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

$$\begin{array}{l} (p_1 \wedge p_2) \to p_3 \\ p_3 \to p_4 \\ \overline{p}_4 \\ \hline \therefore \overline{p}_1 \vee \overline{p}_2 \end{array} \text{(pc)} \equiv \begin{array}{l} (p_1 \wedge p_2) \to p_3 \\ \begin{cases} p_3 \to p_4 \\ \overline{p}_4 \end{cases} \\ p_1 \wedge p_2 \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \text{(Pđ)} \equiv$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} (p_1 \wedge p_2) \to p_3 \\ \overline{p}_3 \end{cases} \\ p_1 \wedge p_2 \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \text{(Pđ)} \equiv \begin{array}{l} \overline{p_1 \wedge p_2} \\ p_1 \wedge p_2 \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \mathbf{1}$$

1.6.3. Các quy tắc suy diễn cơ bản

7. Qui tắc từng trường hợp: Cơ sở của qui tắc là đồng nhất

$$(P_1 \to Q) \wedge (P_2 \to Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \to Q) \equiv (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} P_1 \to Q \\ P_2 \to Q \\ \ldots \\ P_n \to Q \\ \hline \therefore (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \to Q \end{array}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

▷ 1.1

Chỉ ra biểu thức sau đây là hằng đúng

$$((a \to b) \wedge (b \to c) \wedge (d \vee \overline{c}) \wedge (\overline{d} \vee e) \wedge \overline{e}) \to \overline{a}$$

▷ **1.1. Lời giải.** Thay $d \vee \overline{c} \equiv c \to d$ và $\overline{d} \vee e \equiv d \to e$. Công thức trên có mô hình suy diễn sau

$$\frac{\begin{cases} a \to b \\ b \to c \\ c \to d \\ d \to e \end{cases} \\ \overline{e}}{\therefore \overline{a}} \text{(TđI)} \equiv \frac{\begin{matrix} a \to e \\ \overline{e} \end{matrix}}{\therefore \overline{a}} \text{(Pđ)} \equiv \frac{\overline{a}}{\therefore \overline{a}} \equiv \mathbf{1}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

▷ 1.2

Chỉ ra công thức dưới đây là hằng đúng

$$((A \to B) \wedge (\overline{A} \to C) \wedge (C \to D)) \to (\overline{B} \to D)$$

Lời giải. Vì $\overline{\overline{B} \to D} \equiv \overline{B} \wedge \overline{D}$nên áp dụng quy tắc mâu thuẫn ta có suy luân sau

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \overline{A} \to C \\ C \to D \\ \hline \therefore \overline{B} \to D \end{array} \equiv \begin{array}{l} A \to B \\ \overline{A} \to C \\ C \to D \\ \overline{B} \\ \overline{D} \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A \to B \\ \overline{B} \end{array} \right. \\ \overline{A} \to C \\ \left\{ \begin{array}{l} C \to D \\ \overline{D} \end{array} \right. \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \overline{A} \\ \overline{A} \to C \end{array} \right. \\ C \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \text{(Kđ)} \equiv$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng II

$$\equiv \frac{\begin{array}{c}\overline{C}\\ C\end{array}}{\therefore\ \mathbf{0}} \equiv \frac{C \wedge \overline{C}}{\therefore\ \mathbf{0}} \equiv \frac{\mathbf{0}}{\therefore\ \mathbf{0}} \equiv \mathbf{1}$$

Vậy công thức trên là hằng đúng.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

▷ 1.3

Chỉ ra suy luận dưới đây là đúng

$$\begin{array}{c} x \rightarrow y \\ \overline{x} \rightarrow z \\ z \rightarrow w \\ \hline \therefore \overline{y} \rightarrow w \end{array}$$

Lời giải. Dùng quy tắc mâu thuẫn ta có biểu thức tương đương

1.6.4. Các ví dụ áp dụng II

$$\begin{array}{l} x \to y \\ \begin{cases} \overline{x} \to z \\ z \to w \end{cases} \\ \overline{y} \wedge \overline{w} \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \text{(Tđl)} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} x \to y \\ \overline{y} \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{x} \to w \\ \overline{w} \end{cases} \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \text{(Pđ)} \equiv$$

$$\equiv \begin{array}{c} \overline{x} \\ x \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \overline{x} \wedge x \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv \mathbf{1}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

▷ 1.4

Suy luận dưới đây có đúng không? "Nếu muốn đi họp sáng thứ ba thì An phải dậy sớm. Nếu An đi nghe nhạc tối thứ hai thì An sẽ về muộn. Nếu An về muộn và thức dậy sớm thì An phải đi họp sáng thứ ba và chỉ được ngủ dưới 7 giờ trong ngày. Nhưng An không thể đi họp nếu chỉ đi ngủ dưới 7 giờ trong ngày. Vậy hoặc An không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc An phải bỏ họp sáng thứ ba."

Lời giải. Đặt
p_1 ="An muốn đi họp sáng thứ ba";
p_2 ="An phải dậy sớm";
p_3 ="An đi nghe nhạc tối thứ hai";
p_4 ="An sẽ về muộn";
p_5 ="An nghỉ dưới 7 giờ trong một ngày".

1.6.4. Các ví dụ áp dụng II

Khi đó suy luận trên tương đương với

$$\begin{array}{l} p_1 \to p_2 \\ p_3 \to p_4 \\ (p_4 \wedge p_2) \to (p_1 \wedge p_5) \\ p_5 \to \overline{p}_1 \\ \hline \therefore \overline{p}_3 \vee \overline{p}_1 w \end{array} \text{(Mt)} \equiv \begin{array}{l} p_1 \to p_2 \\ p_3 \to p_4 \\ (p_4 \wedge p_2) \to (p_1 \wedge p_5) \\ \underline{p_5 \to \overline{p}_1} \\ \overline{p}_3 \vee \overline{p}_1 \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv$$

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} p_1 \to p_2 \\ p_1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} p_3 \to p_4 \\ p_3 \end{array}\right. \\ (p_4 \wedge p_2) \to (p_1 \wedge p_5) \\ p_5 \to \overline{p}_1 \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \text{(Kđ)} \equiv \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \\ p_4 \wedge p_2 \\ (p_4 \wedge p_2) \to (p_1 \wedge p_5) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} p_5 \to \overline{p}_1 \\ p_1 \equiv \overline{\overline{p}_1} \end{array}\right. \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng III

$$\text{(Kđ và phủ định)} \equiv \frac{\begin{array}{l} p_1 \wedge p_5 \\ \overline{p}_5 \end{array}}{\therefore \mathbf{0}} \equiv \frac{p_5 \wedge \overline{p}_5}{\therefore \mathbf{0}} \equiv \frac{\mathbf{0}}{\therefore \mathbf{0}} \equiv \mathbf{1}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

▷ 1.5

"Nếu An đi làm về muộn thì vợ An sẽ rất giận dữ. Nếu Bình thường xuyên vắng nhà thì vợ Bình cũng sẽ rất giận dữ. Nếu vợ Bình hoặc vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ nhận được than phiền, mà cô Hà không hề nhận được lời than phiền. Vậy An đi làm về sớm và Bình rất ít khi vắng nhà."
Dùng quy tắc suy diễn để chỉ ra suy luận trên là đúng.

Lời giải. Đặt
p_1 ="An đi làm về muộn";
p_2 ="Vợ An sẽ rất giận dữ";
p_3 ="Bình thường xuyên vắng nhà";
p_4 ="Vợ Bình cũng rất giận dữ";
p_5 ="Cô Hà bạn họ nhận được lời than phiền".

1.6.4. Các ví dụ áp dụng II

Suy luận trên tương đương với

$$\frac{\begin{array}{l} p_1 \to p_2 \\ p_3 \to p_4 \\ \begin{cases} (p_2 \vee p_4) \to p_5 \\ \overline{p}_5 \end{cases} \end{array}}{\therefore\ \overline{p}_1 \vee \overline{p}_3} \text{(Pđ)} \equiv \frac{\begin{array}{l} p_1 \to p_2 \\ \begin{cases} \dfrac{p_3 \to p_4}{(p_2 \vee p_4)} \end{cases} \end{array}}{\therefore\ \overline{p}_1 \vee \overline{p}_3} \equiv$$

$$\frac{\begin{array}{l} \begin{cases} p_1 \to p_2 \\ \overline{p}_2 \end{cases} \\ \begin{cases} p_3 \to p_4 \\ \overline{p}_4 \end{cases} \end{array}}{\therefore\ \overline{p}_1 \vee \overline{p}_3} \text{(Pđ)} \equiv \frac{\overline{p}_1 \vee \overline{p}_3}{\therefore\ \overline{p}_1 \vee \overline{p}_3} \equiv \mathbf{1}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

▷ 1.6

Chỉ ra suy luận dưới đây là sai
"Ông minh đã khẳng định rằng, nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ xin nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông Minh nghỉ việc mà vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe máy. Biết rằng, nếu vợ ông Minh hay đi làm muộn thì sẽ mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương. Vậy nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta không đi làm muộn."

Lời giải. Đặt

p_1 ="Ông Minh được tăng lương";
p_2 ="Ông Minh xin nghỉ việc";
p_3 ="Vợ ông Minh bị mất việc";
p_4 ="Ông Minh phải bán xe";
p_5 ="Vợ ông Minh đi làm muộn";

1.6.4. Các ví dụ áp dụng II

Đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn sau

$$\begin{array}{l} \overline{p}_1 \to p_2 \\ (p_2 \wedge p_3) \to p_4 \\ p_5 \to p_3 \\ p_1 \\ \hline \therefore \overline{p}_4 \to p_5 \end{array}$$

Chọn $p_4 = 0$ và $p_5 = 1$ thì kết luận sai.
Từ $p_4 = 0$ và $p_5 = 1$ ta có $p_3 = 1, p_2 = 0$ và $p_1 = 1$. Với những giá trị nàythì giả thiết đúng. Vậy giả thiết đúng kết luận sai thì mô hình trên là sai. Hay đoạn văn trên là sai.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

▷ 1.7

Tìm phản ví dụ cho ví dụ dưới đây

a) $$\begin{array}{l} X \equiv Y \\ Y \to Z_1 \\ Z_1 \vee \overline{Z}_2 \\ \overline{Z}_2 \to Y \\ \hline \therefore Z_2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} X_1 \\ X_1 \to X_2 \\ X_1 \to (X_3 \vee \overline{X}_2) \\ \overline{X}_3 \vee \overline{X}_4 \\ \hline \therefore X_4 \end{array}$$

Lời giải. a) Chọn $X \equiv Y = 1$ ta suy ra $Z_1 = 1$ và $Z_2 = 0$. Như vậy giả thiết đúng kết luận sai. Hay suy luận trên không đúng.
b) Suy luận này sai vì chọn $X_1 = X_2 = X_3 = 1$ và $X_4 = 0$. Khi đó giả thiết đúng kết luận sai.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng I

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Dưới đây ta trình bày chứng minh của một số mệnh đề mà không nêu lên một cách chi tiết về các qui tắc suy diễn đã được áp dụng. Người đọc có thể tìm thấy các qui tắc suy diễn được sử dụng trong chứng minh một cách dễ dàng.

Ví dụ 1.35

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Dưới đây ta trình bày chứng minh của một số mệnh đề mà không nêu lên một cách chi tiết về các qui tắc suy diễn đã được áp dụng. Người đọc có thể tìm thấy các qui tắc suy diễn được sử dụng trong chứng minh một cách dễ dàng.

Ví dụ 1.35

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Lời giải. *Phân tích.*

- Suy nghĩ đầu tiên là ta thấy rằng không thể tìm thấy một thừa số 3 trong biểu thức $n^3 + 2n$.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Dưới đây ta trình bày chứng minh của một số mệnh đề mà không nêu lên một cách chi tiết về các qui tắc suy diễn đã được áp dụng. Người đọc có thể tìm thấy các qui tắc suy diễn được sử dụng trong chứng minh một cách dễ dàng.

Ví dụ 1.35

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Lời giải. *Phân tích.*

- Suy nghĩ đầu tiên là ta thấy rằng không thể tìm thấy một thừa số 3 trong biểu thức $n^3 + 2n$.
- Nhưng khi phân tích ra thừa số thì $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$. Phát biểu "$n^3 + 2n$ chia hết cho 3" sẽ đúng nếu n là bội số của 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Dưới đây ta trình bày chứng minh của một số mệnh đề mà không nêu lên một cách chi tiết về các qui tắc suy diễn đã được áp dụng. Người đọc có thể tìm thấy các qui tắc suy diễn được sử dụng trong chứng minh một cách dễ dàng.

Ví dụ 1.35

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Lời giải. *Phân tích.*

- Suy nghĩ đầu tiên là ta thấy rằng không thể tìm thấy một thừa số 3 trong biểu thức $n^3 + 2n$.
- Nhưng khi phân tích ra thừa số thì $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$. Phát biểu "$n^3 + 2n$ chia hết cho 3" sẽ đúng nếu n là bội số của 3.
- Còn các trường hợp khác thì sao?. Ta thử phương pháp phân chứng.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Chứng minh.
Ta có $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$, và số tự nhiên n có một trong 3 dạng ứng với 3 trường hợp dưới đây

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Chứng minh.
Ta có $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$, và số tự nhiên n có một trong 3 dạng ứng với 3 trường hợp dưới đây

- *Trường hợp 1.* $n = 3k$, với k là một số nguyên.

$$n^3 + 2n = 3k(9k^2 + 2) \text{ chia hết cho 3.}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Chứng minh.
Ta có $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$, và số tự nhiên n có một trong 3 dạng ứng với 3 trường hợp dưới đây

- *Trường hợp 1.* $n = 3k$, với k là một số nguyên.

$$n^3 + 2n = 3k(9k^2 + 2) \text{ chia hết cho } 3.$$

- *Trường hợp 2.* $n = 3k + 1$, với k là một số nguyên.

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k + 1)((3k + 1)2 + 2) \\ &= (3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) \\ &= (3k + 1)3(3k2 + 2k + 1) \text{ chia hết cho } 3. \end{aligned}$$

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

- *Trường hợp 3.* $n = 3k + 2$, với k là một số nguyên.

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k+2)((3k+2)^2+2) \\ &= (3k+1)(9k^2+12k+6) \\ &= (3k+1)3(3k^2+4k+2) \text{ chia hết cho 3.} \end{aligned}$$

Trong mọi trường hợp (có thể có) ta đều có $n^3 + 2n$ đều chia hết cho 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

- *Trường hợp 3.* $n = 3k + 2$, với k là một số nguyên.

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k+2)((3k+2)^2+2) \\ &= (3k+1)(9k^2+12k+6) \\ &= (3k+1)3(3k^2+4k+2) \text{ chia hết cho } 3. \end{aligned}$$

Trong mọi trường hợp (có thể có) ta đều có $n^3 + 2n$ đều chia hết cho 3.
Nhận xét. Chứng minh trên có thể được trình bày ngắn gọn hơn bằng cách sử dụng phép đồng dư modulo 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.36

Chứng minh rằng nếu n^2 là một số chẳn thì n cũng là một số chẳn.Nếu n^2 là một số chẳn thì n cũng là một số chẳn.

Lời giải. *Phân tích.* Giả sử $n^2 = 2k$ (là số chẳn). Ta thấy khó suy ra n là số chẳn. Nếu biết thông tin gì đó về n thì suy ra điều gì đó về n^2 thì dễ hơn. Ta thử phương pháp phản chứng.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.36

Chứng minh rằng nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.Nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

Lời giải. *Phân tích.* Giả sử $n^2 = 2k$ (là số chẵn). Ta thấy khó suy ra n là số chẵn. Nếu biết thông tin gì đó về n thì suy ra điều gì đó về n^2 thì dễ hơn. Ta thử phương pháp phản chứng.

Chứng minh.

- Ta hãy chứng minh mệnh đề "Nếu n lẻ thì n^2 lẻ".

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.36

Chứng minh rằng nếu n^2 là một số chẳn thì n cũng là một số chẳn.Nếu n^2 là một số chẳn thì n cũng là một số chẳn.

Lời giải. *Phân tích.* Giả sử $n^2 = 2k$ (là số chẳn). Ta thấy khó suy ra n là số chẳn. Nếu biết thông tin gì đó về n thì suy ra điều gì đó về n^2 thì dễ hơn. Ta thử phương pháp phản chứng.
Chứng minh.

- Ta hãy chứng minh mệnh đề "Nếu n lẻ thì n^2 lẻ".
- Cho n là một số lẻ, ta có $n = 2k + 1$ (k là một số nguyên).

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.36

Chứng minh rằng nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.Nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

Lời giải. *Phân tích.* Giả sử $n^2 = 2k$ (là số chẵn). Ta thấy khó suy ra n là số chẵn. Nếu biết thông tin gì đó về n thì suy ra điều gì đó về n^2 thì dễ hơn. Ta thử phương pháp phản chứng.
Chứng minh.

- Ta hãy chứng minh mệnh đề "Nếu n lẻ thì n^2 lẻ".
- Cho n là một số lẻ, ta có $n = 2k + 1$ (k là một số nguyên).
- Do đó $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ là một số lẻ.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.36

Chứng minh rằng nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.Nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

Lời giải. *Phân tích.* Giả sử $n^2 = 2k$ (là số chẵn). Ta thấy khó suy ra n là số chẵn. Nếu biết thông tin gì đó về n thì suy ra điều gì đó về n^2 thì dễ hơn. Ta thử phương pháp phản chứng.
Chứng minh.

- Ta hãy chứng minh mệnh đề "Nếu n lẻ thì n^2 lẻ".
- Cho n là một số lẻ, ta có $n = 2k + 1$ (k là một số nguyên).
- Do đó $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ là một số lẻ.
- Mệnh đề trong cặp nháy kép là đúng nên mệnh đề phản đảo của nó cũng đúng. Vậy, nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.37

Chứng minh rằng nếu $p > 3$ và p nguyên tố thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.37

Chứng minh rằng nếu $p > 3$ và p nguyên tố thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Lời giải.

- Ta có $(p-1), p, (p+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp. Trong 3 số nguyên này có một số chia hết cho 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.37

Chứng minh rằng nếu $p > 3$ và p nguyên tố thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Lời giải.

- Ta có $(p-1), p, (p+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp. Trong 3 số nguyên này có một số chia hết cho 3.
- Nhưng số đó không phải là p vì p là số nguyên tố lớn hơn 3. Do đó $(p-1)$ chia hết cho 3 hoặc

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.37

Chứng minh rằng nếu $p > 3$ và p nguyên tố thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Lời giải.

- Ta có $(p-1), p, (p+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp. Trong 3 số nguyên này có một số chia hết cho 3.
- Nhưng số đó không phải là p vì p là số nguyên tố lớn hơn 3. Do đó $(p-1)$ chia hết cho 3 hoặc
- $(p+1)$ chia hết cho 3. Suy ra $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3, tức là $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Lời giải.

- Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương).

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Lời giải.

- Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương).
- Ký hiệu k số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$, ở đây k là số nguyên dương.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Lời giải.

- Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương).
- Ký hiệu k số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$, ở đây k là số nguyên dương.
- Đặt $n = p^1 p^2 \ldots p_k + 1$.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Lời giải.

- Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương).
- Ký hiệu k số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$, ở đây k là số nguyên dương.
- Đặt $n = p^1 p^2 \ldots p_k + 1$.
- Số n lớn hớn tất cả k số nguyên tố nên n không nguyên tố.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Lời giải.

- Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương).
- Ký hiệu k số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots \ldots, p_k$, ở đây k là số nguyên dương.
- Đặt $n = p^1 p^2 \ldots p_k + 1$.
- Số n lớn hớn tất cả k số nguyên tố nên n không nguyên tố.
- Do đó, từ định lý cơ bản của số học, n phải có một ước số nguyên tố p. p phải là một trong k số nguyên tố. Do đó $p|(p_1 p_2 \ldots p_k)$.

1.6.4. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.38

Chứng minh rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn.

Lời giải.

- Giả sử phát biểu trong mệnh đề là sai. Tức là chỉ có một số hữu hạn, k, số nguyên tố (dương).
- Ký hiệu k số nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$, ở đây k là số nguyên dương.
- Đặt $n = p^1 p^2 \ldots p_k + 1$.
- Số n lớn hớn tất cả k số nguyên tố nên n không nguyên tố.
- Do đó, từ định lý cơ bản của số học, n phải có một ước số nguyên tố p. p phải là một trong k số nguyên tố. Do đó $p|(p_1 p_2 \ldots p_k)$.
- Suy ra $p|(n - p_1 p_2 \ldots p_k)$, hay $p|1$.

Như thế, ta có p là một số nguyên tố và $p|1$. Điều này là không thể, hay nói cách khác, ta có một mâu thuẩn.