Bài tập chương

2 LÔ GIC VỊ TỪ

▷ **2.1.** Vị từ là gì? Cho ví dụ.

▷ **2.2.** Phát biểu qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ (hay mệnh đề lượng từ hóa) và cho ví dụ cụ thể.

▷ **2.3.** P(n) là vị từ "nếu $4|n$ thì $2|n$". Cho biết chân trị của các mệnh đề sau a) $P(12)$;
b) $P(10)$;
c) $\exists n : P(n)$;
d) $\forall n : P(n)$.

▷ **2.4.** Hãy cho biết chân trị của mỗi mệnh đề dưới đây và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.
a) $\exists x : x + 3 = 5$;
b) $\forall x : x + 3 = 5$;
c) $\exists x, \exists y : x + y = 3$;
d) $\exists x, \forall y : x + y = 3$;
e) $\forall x, \exists y : x + y = 3$;
f) $\forall x, \forall y : x + y = 3$.
Trong các mệnh đề trên các biến x và y là các biến thực.

▷ **2.5.** Hãy cho biết chân trị của mỗi mệnh đề dưới đây và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.
a) $\exists x, \exists y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$;
d) $\exists x, \forall y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$;
e) $\forall x, \exists y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$;
f) $\forall x, \forall y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$.

▷ **2.6.** Hãy sử dụng các ký hiệu toán học và logic để viết lại mệnh đề sau đây:

Với mọi số thực dương x, có một số tự nhiên n sao cho x bằng 2^n hoặc x nằm giữa 2^n và 2^{n+1}.

Cho biết mệnh đề này đúng hay sai, và viết ra mệnh đề phủ định của nó.

▷ **2.7.** Trong bài tập này ký hiệu n chỉ một biến nguyên. Cho các vị từ
$P(n) = "0 < n^2 \leq 4"$
$R(n) = "0 < n^3 \leq 8"$
$S(n) = "0 < n \leq 2"$
a) Ứng với mỗi vị từ trên hãy cho biết tập hợp các giá trị n làm cho vị từ có chân trị đúng ($= 1$).
b) Trong các vị từ trên, những vị từ nào tương đương với nhau.
c) Mệnh đề "$\forall n : R(n) \to P(n)$" là đúng hay sai?

▷ **2.8.** 1) Cho $P(x)$ là "$x + 1 > x$". Xác định giá trị chân lý của $\forall x : P(x)$ trên trường các số thực.

2) Cho $P(x)$ là "$x < 2$". Xác định giá trị chân lý của $\forall x : P(x)$ trên trường các số thực.

3) Cho $P(x)$ là "$x \leq 10$". Xác định giá trị chân lý của $\forall x : P(x)$ trên trường các số tự nhiên không vượt quá 4.

4) Cho $P(x)$ là "$x < 2$". Xác định giá trị chân lý của $\exists x : P(x)$ trên trường các số thực.

5) Cho $P(x)$ là "$x = x + 1$". Xác định giá trị chân lý của $\exists x : P(x)$ trên trường các số thực.

▷ **2.9.** 1) Cho $P(x, y)$ là "$x + y = y + x$" trên trường số thực. Xác định giá trị chân lý của $\forall x : (\forall y : P(x, y))$.

2) Cho $Q(x, y)$ là "$x + y = 0$" trên trường số thực. Xác định giá trị chân lý của $\exists x : (\forall y : Q(x, y))$ và $\forall x : (\exists y : Q(x, y))$.

3) Cho $Q(x, y, z)$ là "$x + y = z$" trên trường số thực. Xác định giá trị chân lý của
$\forall x : (\forall y : (\exists z Q(x, y, z)))$ và $\exists z : (\forall x : (\forall y : Q(x, y, z)))$.

▷ **2.10.** Biểu diễn các câu sau thành biểu thức lôgic

1) "Mọi người đều có chính xác một người bạn rất tốt".

2) "Nếu một người phụ nữ nào đó đã sinh đẻ, thì người đó là mẹ của một người nào đó".

▷ **2.11.** $F(x,y)$ là câu "x yêu y", với x và y trong trường mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a) "Mọi người đều yêu Jerry";

b) "Mọi người đều yêu một người nào đó";

c) "Có một người mà tất cả mọi người đều yêu";

d) "Không có ai yêu tất cả mọi người";

e) "Có một người không ai yêu".

▷ **2.12.** Cho $P(x)$ là câu "x học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần" trên miền xác định các sinh viên. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường.

a) $\exists x : P(x)$;

b) $\forall x : P(x)$;

c) $\exists x : \overline{P}(x)$;

d) $\forall x : \overline{P}(x)$;

▷ **2.13.** Cho $P(x,y)$ là câu "x đã học môn y" với trường của x là tập hợp tất cả sinh viên trong lớp, còn trường của y là tập hợp các môn tin học của khoa đã quy định. Hãy diễn đạt các mệnh đề lượng từ sau thành câu thông thường:

a) $\exists x, \exists y : P(x,y)$;

b) $\exists y, \forall x : P(x,y)$.

▷ **2.14.** Cho $P(x)$, $Q(x)$ và $F(x)$ là các câu tương ứng sau "x là giáo sư", "x là kẻ ngu ngốc" và "x là kẻ vô tích sự". Bằng cách dùng lượng từ, các liên từ lôgic cùng với $P(x), Q(x), F(x)$ để diễn đạt các câu sau trên trường tất cả mọi người:

a) "Không có giáo sư nào là kẻ ngu ngốc";

b) "Mọi kẻ ngu ngốc đều là vô tích sự";

c) "Không có giáo sư nào là vô tích sự".

▷ **2.15.** Chứng minh rằng công thức $\overline{\exists x, \forall y : P(x)}$ có cùng giá trị chân lý với công thức $\forall x, \exists y : \overline{P(x)}$

▷ **2.16.** Chứng minh rằng $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$ và $(\forall x : (P(x) \vee Q(x)))$ là không tương đương lôgic, còn $(\forall x : P(x)) \wedge A$ và $(\forall x : (P(x) \wedge A)$ là tương đương lôgic, với A là mệnh đề không có lượng từ.

▷ **2.17.** Chứng tỏ $(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$ và $(\exists x : (P(x) \wedge Q(x)))$ là không tương đương lôgic.

▷ **2.18.** Xác định giá trị chân lý các biểu thức sau

a) $(\exists x! : P(x)) \rightarrow (\exists x : P(x))$;

b) $(\forall x : P(x)) \rightarrow (\exists x! : P(x))$;

c) $(\exists x! : \overline{P}(x)) \rightarrow \overline{\forall x : P(x)}$.

Ở đây $(\exists x! : P(x))$ là ký hiệu mệnh đề "Tồn tại duy nhất một x sao cho $P(x)$ là đúng" trên trường các số nguyên.