TOÁN RỜI RẠC

Nguyễn Hữu Điển

Khó Toán – Cơ – Tin học
Đại học ĐHKHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội

14/01/2019

BÀI 2

LÔGIC VỊ TỪ

Nội dung

Nội dung

2.1.1. Định nghĩa vị từ và ví dụ

Định nghĩa 2.1

Một vị từ là một phát biểu $P(x, y, \ldots)$ phụ thuộc theo các biến $x, y, \ldots$ lấy giá trị trên các miền xác định $A, B, \ldots$ nào đó. Khi thay thế các biến trong vị từ bởi các giá trị cụ thể $a, b, \ldots$ thuộc các miền xác định thì ta được một mệnh đề $P(a, b, \ldots)$ có chân trị đúng (1) hoặc sai (0).

Gọi Boole B là tập hợp gồm có hai giá trị : Sai (ký hiệu bởi 0), và Đúng (ký hiệu bởi 1).

2.1.1. Định nghĩa vị từ và ví dụ

Ví dụ 2.1

$P(n) =$ "n là một số nguyên tố" là một vị từ trên tập hợp các số tự nhiên (hoặc trên tập hợp các số nguyên). Ta có thể thấy rằng

- $P(1) = 0$, tức là $P(1) =$"1 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.
- $P(2) = 1$, tức là $P(2) =$"2 là một số nguyên tố" là một mệnh đề đúng.
- $P(12) = 0$, tức là $P(12) =$"12 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.
- $P(17) = 1$, tức là $P(17) =$"17 là một số nguyên tố" là một mệnh đề đúng.

2.1.1. Định nghĩa vị từ và ví dụ

Vị từ "n là một số nguyên tố" có thể được xem là một ánh xạ đi từ tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ vào tập hợp Boole B: $P : \mathbb{N} \to B$

$$P(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n \text{ là nguyên tố,} \\ 0 & \text{khi } n \text{ không là nguyên tố.} \end{cases}$$

Ví dụ 2.2

$P(m, n) =$"m là một ước số của n", với m và n là các biến số tự nhiên, cho ta một vị từ theo 2 biến m và n thuộc tập hợp các số tự nhiên. Ta có

$$P(2, 4) = 1; P(3, 4) = 0.$$

2.1.2. Các phép toán trên vị từ

- Cho $P(x, y, \ldots)$ là một vị từ theo các biến $x, y, \ldots$. *Phủ định* của P, ký hiệu là $\overline{P}$, là một vị từ mà khi thay các biến $x, y, \ldots$ bởi các phần tử cụ thể $a, b, \ldots$ tương ứng thì ta được mệnh đề $\overline{P(a, b, \ldots)}$. Nói một cách khác, vị từ $\overline{P}$ được định nghĩa bởi

$$(\overline{P})(x, y, \ldots) = \overline{P(x, y, \ldots)}.$$

- Cho $P(x, y, \ldots)$ và $Q(x, y, \ldots)$ là các vị từ theo các biến $x, y, \ldots$. *Phép hội* của P và Q, ký hiệu là $P \wedge Q$, là một vị từ mà khi thay các biến $x, y, \ldots$ bởi các phần tử cụ thể $a, b, \ldots$ tương ứng thì ta được mệnh đề $P(a, b, \ldots) \wedge Q(a, b, \ldots)$. Nói một cách khác, vị từ $P \wedge Q$ được định nghĩa bởi

$$(P \wedge Q)(x, y, \ldots) = P(x, y, \ldots) \wedge Q(x, y, \ldots).$$

2.1.2. Các phép toán trên vị từ

Một cách tương tự, các *phép toán tuyển*, *kéo theo* và *tương đương* của 2 vị từ P và Q có thể được định nghĩa như sau:

- $(P \vee Q)(x, y, \dots) = P(x, y, \dots) \vee Q(x, y, \dots)$.
- $(P \rightarrow Q)(x, y, \dots) = P(x, y, \dots) \rightarrow Q(x, y, \dots)$.
- $(P \leftrightarrow Q)(x, y, \dots) = P(x, y, \dots) \leftrightarrow Q(x, y, \dots)$.

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

- Cho $P(n)$ là một vị từ theo biến số tự nhiên n. Phát biểu "với mọi $n \in \mathbb{N}, P(n)$" hay một cách vắn tắt (hiểu ngầm miền xác định) là "với mọi n, $P(n)$" có nghĩa là P có giá trị đúng trên toàn bộ miền xác định. Nói cách khác, P là ánh xạ hằng có giá trị là 1. Ta sẽ dùng ký hiệu "$\forall$" để thay thế cho lượng từ "*với mọi*".
- Phát biểu "Có (ít nhất) một $n \in \mathbb{N}, P(n)$" hay một cách vắn tắt (hiểu ngầm miền xác định) là "Có (ít nhất) một n , $P(n)$" có nghĩa là P có giá trị đúng đối với một hay một số giá trị nào đó thuộc miền xác định. Nói cách khác, P không phải là một ánh xạ hằng 0. Ta sẽ dùng ký hiệu "$\exists$" để thay thế cho lượng từ "có ít nhất một". Lượng từ này còn được đọc một cách khác là "*tồn tại*".

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Định nghĩa 2.2

Giả sử $P(x)$ là một vị từ theo biến x (biến x lấy giá trị thuộc một miền xác định đã biết nào đó và miền xác định này có thể được hiểu ngầm, không cần ghi rõ ra). Các cách viết sau đây:

$$\forall x : P(x) \tag{2.1}$$

$$\exists x : P(x) \tag{2.2}$$

lần lượt được dùng để diễn đạt cho các phát biểu sau đây:
"Với mọi x (thuộc miền xác định) ta có $P(x)$ là đúng"
"Có ít nhất mộ x (thuộc miền xác định) sao cho $P(x)$ là đúng".
Ký hiệu $\forall$ và $\exists$ được gọi là *lượng từ với mọi* và *lượng từ tồn tại*.

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

- Các phát biểu (2.1) và (2.2) có chân trị hoàn toàn xác định. Nói cách khác chúng là những mệnh đề. Chân trị của các mệnh đề này được xác định một cách tự nhiên theo ngữ nghĩa thông thường của các lượng từ.
- Mệnh đề (2.1) là đúng khi và chỉ khi ứng với mỗi giá trị tùy ý x thuộc miền xác định ta đều có mệnh đề $P(x)$ có chân trị đúng.
- Mệnh đề (2.2) là đúng khi và chỉ khi có một giá trị x nào đó thuộc miền xác định mà ứng với giá trị x đó ta có $P(x)$ có chân trị đúng.

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Chú ý.

- Phát biểu "$\forall x : P(x)$" và phát biểu "$\exists x : P(x)$" không phải là vị từ theo biến x nữa mà là các mệnh đề có chân trị xác định là đúng hoặc sai. Trong các phát biểu trên biến x đã được lượng từ hóa và chân trị của phát biểu không phụ thuộc theo biến x nữa. Ta cũng nói rằng biến x bị ràng buộc bởi lượng từ.
- Đối với một vị từ theo nhiều biến thì ta có thể *lượng từ hóa* một số biến nào đó trong vị từ để có một vị từ mới theo các biến còn lại. Chẳng hạn, nếu $P(x, y, \ldots)$ là một vị từ theo các biến $x, y, \ldots$ thì ta có biểu thức

$$Q(y, \ldots) \equiv \forall x : P(x, y, \ldots)$$

sẽ là một vị từ theo các biến $y, \ldots$.

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Nếu tất cả các biến của vị từ đều được lượng từ hóa thì ta sẽ có một mệnh đề.Chẳng hạn, nếu $P(x, y)$ làmột vị từ theo 2 biến x, y thì biểu thức$\forall x, \exists y : P(x, y)$ sẽ là một mệnh đề, tức là có chân trị xác định và không phụ thuộc vào các biến x, y nữa.

- Trong nhiều phát biểu người ta cò dùng cụm từ "tồn tại duy nhất", ký hiệu bởi $\exists!$, như là một sự *lượng từ hóa đặc biệt*.

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Ví dụ 2.3

1. Cho vị từ $P(n) =$"n là một số nguyên tố". Mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n ta có n là nguyên tố" có thể được viết như sau:

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

và mệnh đề này có chân trị là 0 (sai).

2. Mệnh đề "Với mọi số nguyên n ta có $2n-1$ là một số lẻ" có thể được viết dưới dạng ký hiệu như sau

$$\forall n \in \mathbb{Z} : 2n-1 \text{ lẻ}$$

và mệnh đề này có chân trị là 1 (đúng).
Ta ký hiệu một vị từ $P(n) =$"$2n-1$ là một số lẻ", khi đó ta có thể viết

$$\forall n \in \mathbb{Z} : P(n).$$

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Ví dụ 2.3 (tiếp tục)

3. Mệnh đề "Ta có $x^2 > 0$, với mọi số thực x khác 0" có thể được viết là
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x^2 > 0$$
và mệnh đề này có chân trị là 1 (đúng).
Ta cũng có thể ký hiệu $Q(x) =$"$x^2 > 0$", khi đó
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : Q(x).$$

2.1.3. Lượng từ và mệnh đề có lượng từ

Ví dụ 2.4

Chứng minh rằng nếu n là một số chẵn thì n^2 là số chẵn.

Chứng minh. Mệnh đề cần chứng minh (là đúng) được viết dưới dạng

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ chẵn } \rightarrow n^2 \text{ chẵn}.$$

Từ đó ta có thể trình bày chứng minh như sau: Cho n là một số nguyên tùy ý. Ta có n chẵn suy ra $n = 2m$, với m là một số nguyên nào đó suy ra $n^2 = 4m^2$, suy ra n^2 chẵn. Vậy phát biểu trên là đúng.

2.1.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Dựa vào cách xác định chân trị của các mệnh đề có lượng từ theo ngữ nghĩa tự nhiên của các phát biểu, ta có các qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ sau đây

$$\overline{\forall x : P(x)} \equiv \exists x : \overline{P}(x) \tag{2.3}$$

$$\overline{\exists x : P(x)} \equiv \forall x : \overline{P}(x) \tag{2.4}$$

Ví dụ 2.5

Tìm phủ định của mệnh đề "tồn tại một số thực x sao cho $x^2 < 0$".

Lời giải. Đặt $P(x) = "x^2 < 0"$. Mệnh đề đã cho được viết dưới dạng ký hiệu như sau "$\exists x : P(x)$". Áp dụng luật phủ định mệnh đề có lượng từ, ta có mệnh đề phủ định cần tìm có dạng :
"$\forall x : \overline{P}(x)$".
Vậy mệnh đề phủ định là: "Với mọi số thực x, $x^2 \geq 0$". □

2.1.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Chú ý.

Từ các qui tắc trên ta có thể nói chung về qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ như sau: *Nếu trong một mệnh đề có lượng từ ta thay thế lượng từ $\forall$ bởi lượng từ $\exists$, lượng từ $\exists$ bởi lượng từ $\forall$, và biểu thức vị từ được thay thế bởi phủ định của nó thì ta sẽ được mệnh đề phủ định của mệnh đề có lượng từ ban đầu.* Qui tắc này cũng áp dụng được cho các mệnh đề với nhiều lượng từ.

Ví dụ 2.6

Cho $P(x, y, z)$ là một vị từ phụ thuộc vào biến bộ ba $(x, y, z) \in A \times B \times C$. Miền xác định là tích Đê-Cat của 3 tập hợp A, B, C. Trong trường hợp này ta nói vị từ P là một vị từ theo 3 biến x, y, z. Miền xác định tương ứng của 3 biến này là A, B, C. Hãy tìm phủ định của mệnh đề sau

$$\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : P(x, y, z).$$

2.1.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Lời giải. Theo qui tắc chung ta có

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : P(x,y,z)} \equiv$$

$$\exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C : \overline{P}(x,y,z).$$

Thật ra, nếu thực hiện từng bước theo các qui tắc (2.3) và (2.4) ta cũng đạt được mệnh đề phủ định như trên

$$\begin{aligned}
\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : P(x,y,z)} &\equiv \\
\exists x \in A, \overline{\exists y \in B, \exists z \in C : P(x,y,z)} &\equiv \\
\exists x \in A, \forall y \in B, \overline{\exists z \in C : P(x,y,z)} &\equiv \\
\exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C : \overline{P}(x,y,z).
\end{aligned}$$

2.1.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Ví dụ 2.7

Với một hàm số f xác định ở một lân cận của điểm $a \in \mathbb{R}$ (a là một số thực), ta có định nghĩa sự liên tục của f tại a như sau :
f liên tục tại a nếu và chỉ nếu cho một số dương ϵ tùy ý, ta có một số dương δ sao cho $|x - a| < \delta$ suy ra $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.
Như vậy f liên tục tại a khi và chỉ khi mệnh đề sau đây đúng
"cho số dương ϵ tùy ý, ta có một số dương δ sao cho với mọi x ta có $|x - a| < \delta$ suy ra $|f(x) - f(a)| < \epsilon$".
Hãy tìm phủ định của mệnh đề trên.

Lời giải. Mệnh đề trên được viết là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x : |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

2.1.4. Quy tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Theo qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ, phủ của mệnh đề trên là

$$\begin{aligned}
&\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : \overline{\forall x : |x-a| < \delta \to |f(x)-f(a)| < \epsilon} \\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : (\exists x : \overline{|x-a| < \delta \to |f(x)-f(a)| < \epsilon}) \\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : (\exists x : |x-a| < \delta \wedge \overline{|f(x)-f(a)| < \epsilon}) \\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : (\exists x : |x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \epsilon) \\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0 : \exists x : |x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \epsilon
\end{aligned}$$

- Như vậy ta có thể phát biểu mệnh đề phủ định như sau "Tồn tại một số dương ϵ sao cho ứng với số dương δ tùy ý có một số thực x thoả điều kiện $|x-a| < \delta$ và $|f(x)-f(a)| \geq \epsilon$".
- Như vậy ta có thể phát biểu mệnh đề phủ định như sau: "Tồn tại một số dương ϵ sao cho ứng với mỗi số dương δ tùy ý ta có một số thực x thỏa điều kiện $|x-a| < \delta$ và $|f(x)-f(a)| \geq \epsilon$".

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

1. Các lượng từ và các mệnh đề có lượng từ

- Cho $P(x)$ là một vị từ một biến trên miền xác định nào đó (ví dụ như $D = \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n\}$). Khi đó công thức $\forall x : P(x)$ và $\exists x : P(x)$ là các *mệnh đề có lượng từ* hoặc đúng hoặc sai trên miền xác định và theo định nghĩa vị từ và mệnh đề ta có

$$\forall x \in \mathbb{N} : P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n);$$
$$\exists x \in \mathbb{N} : P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(n);$$

- Tuy nhiên nếu ta xét vị từ hai biến $P(x, y)$ trên miền xác định $D = D_1 \times D_2$ thì công thức $\forall x : P(x, y)$ và $\exists x : P(x, y)$ không phải là một mệnh đề có lượng từ nữa mà là vị từ theo biến y. x là biến bị ràng buộc bởi lượng từ, còn biến y là biến tự do. Nhưng biểu thức $\forall x : (\exists y : P(x, y))$ là một mệnh đề hoàn toàn xác định và không phụ thuộc vào x, y.

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

2. Thay đổi thứ tự lượng từ hóa của 2 biến

Cho một vị từ $P(x, y)$ theo 2 biến x, y. Nếu lượng từ hóa cả 2 biến x, y trong đó ta lượng từ hóa biến y trước và lượng từ hóa biến x sau thì sẽ được 4 mệnh sau đây

- $\forall x, \forall y : P(x, y)$;
- $\exists x, \forall y : P(x, y)$;
- $\forall x, \exists y : P(x, y)$;
- $\exists x, \exists y : P(x, y)$;

Tương tự ta cũng có 4 mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $P(x, y)$ trong đó ta lượng từ hóa biến x trước và lượng từ hóa biến y sau

- $\forall y, \forall x : P(x, y)$;
- $\exists y, \forall x : P(x, y)$;
- $\forall y, \exists x : P(x, y)$;
- $\exists y, \exists x : P(x, y)$;

Định lý dưới đây cho ta một số tính chất liên quan đến thứ tự của việc lượng từ hóa các biến trong các mệnh đề có lượng từ.

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

Định lý 2.1

Giả sử $P(x,y)$ *là một vị từ theo 2 biến* x,y *thì các mệnh đề sau là đúng*

- $(\forall x, \forall y : P(x,y)) \equiv (\forall y, \forall x : P(x,y));$
- $(\exists x, \exists y : P(x,y)) \equiv (\exists y, \exists x : P(x,y));$

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

3. Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng

Qui tắc 1. *Giả sử một mệnh đề có lượng từ trong đó biến x với miền xác định là A, được lượng từ hóa và bị ràng buộc bởi lượng từ phổ dụng ∀, và mệnh đề là đúng. Khi đó nếu thay thế x bởi $a \in A$ thì ta sẽ được một mệnh đề đúng.*

Ví dụ 2.8

Biết rằng phát biểu "mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều là số lẻ" là một mệnh đề đúng. Cho a là một số nguyên tố lớn hơn 2 (cố định nhưng tùy ý). Hãy chứng minh rằng a là một số lẻ.

Lời giải. Đặt $P(n) =$"n là số nguyên tố lớn hơn 2", và $Q(n) =$"n là số lẻ". Ta có $P(n)$ và $Q(n)$ là các vị từ theo biến số tự nhiên n, và ta có mệnh đề đúng sau đây

$$\forall n : P(n) \to Q(n)$$

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

Theo qui tắc trên ta suy ra $P(a) \to Q(a) \equiv 1$. Theo giả thiết ta cũng có $P(a) = 1$. Suy ra $Q(a) = 1$ (qui tắc suy diễn Khẳng định). Vậy ta có mệnh đề "a là một số lẻ" là đúng. $\square$

Ví dụ 2.9

Trong các định lý Toán học ta thường thấy các khẳng định là các mệnh đề lượng từ hóa phổ dụng. Ví dụ như các trường hợp bằng nhau của 2 tam giác bất kỳ. Khi áp dụng ta sẽ đặc biệt hóa cho 2 tam giác cụ thể.

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

4. Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng

Qui tắc 2. *Nếu ta thay thế biến x trong vị từ $P(x)$ bởi một phần tử a cố định nhưng tùy ý thuộc miền xác định của biến x mà mệnh đề nhận được có chân trị là đúng, tức là $P(a) = 1$, thì mệnh đề lượng từ hóa*

$$\forall x : P(x)$$

là một mệnh đề đúng.

Nhận xét. Nếu xem vị từ $P(x)$ như là một hàm lấy giá trị Bool trên miền xác định A của biến x thì ta có mệnh đề lượng từ hóa

$$\forall x : P(x)$$

là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi P là hàm hằng 1.

Từ các qui tắc trên ta có thể chứng minh được một số tính chất suy diễn được phát biểu trong các mệnh đề sau đây.

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

Mệnh đề 2.1

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các vị từ theo biến x lấy giá trị trong tập hợp A (miền xác định của biến x là tập hợp A), và a là một phần tử cố định tùy ý thuộc A. Khi ấy ta có qui tắc suy diễn sau đây

$$\begin{array}{l} \forall x : P(x) \to Q(x) \\ P(a) \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

Mệnh đề 2.2

Cho $P(x), Q(x)$ và $R(x)$ là các vị từ theo biến x lấy giá trị trong tập hợp A (miền xác định của biến x là tập hợp A). Ta có qui tắc suy diễn sau đây

$$\begin{array}{c} \forall x : P(x) \to Q(x) \\ \forall x : Q(x) \to R(x) \\ \hline \therefore (\forall x : P(x) \to R(x)) \end{array}$$

2.1.5. Một số quy tắc dùng trong suy luận

Mệnh đề 2.3

Cho a là phần tử bất kỳ trong miền xác định của vị từ $P(x)$, ta có suy diễn tương đương sau

$$\frac{\forall x : P(x)}{\therefore P(a)} \equiv \frac{\forall x : P(x)}{\therefore \exists x : P(x)}$$

Mệnh đề 2.4

$P(x)$ là vị từ xác định trên $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$. Khi đó

$$\begin{array}{l} \forall x \in X_1 : P(x) \\ \forall x \in X_2 : P(x) \\ \ldots \\ \forall x \in X_m : P(x) \\ \hline \therefore \forall x \in X : P(x) \end{array}$$

Nội dung

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Ví dụ 2.10

Mọi sinh viên công nghệ thông tin đều học môn toán rời rạc. An là sinh viên CNTT. Vậy An học môn toán rời rạc.
Chỉ ra suy luận trên là đúng.

Lời giải. Đặt $P(x) =$"x là sinh viên CNTT"; $Q(x) =$"x là hoạc môn Toán rời rạc" là hai vị từ một biến trên miền các sinh viên.
Đoạn văn trên tương đương với biểu thức trong loogic vị từ cấp 1. $(\forall x : P(x)) \to Q(x) \wedge P(x) \to Q(a)$ trên miền xác định sinh viên, ở đây a là sinh viên An trong tập hợp các sinh viên.
Mô hình suy diễn của công thức trên là

$$\begin{array}{l} \forall x : P(x) \to Q(x) \\ P(a) \\ \hline \therefore Q(a) \end{array} \tag{2.5}$$

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Theo Bổ đề 2.1 thì mô hình (2.5) là đúng, nghĩa là suy luận trên đúng.

$$P(a) \to Q(a)$$

Chú ý. Sự tương đương suy diễn trên với $\dfrac{P(a)}{\therefore Q(a)}$ trong lôgic mệnh đề là và mô hình suy diễn này đúng theo quy tắc suy diễn khẳng định.

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Ví dụ 2.11

Áp dụng mô hình suy diễn trong Bổ đề 2.2 để chỉ ra cách giải phương trình $4x - 5 = 15$ sau đây là đúng:
" Giả sử $4x - 5 = 15$, khi đó $4x = 20$. Giả sử $4x = 20$, khi đó $x = 5$. Như vậy $4x - 5 = 15$ thì $x = 5$".

Lời giải. Đặt $P(x) = "4x - 5 = 15"$; $Q(x) = "4x - 20 = 0"$; $R(x) = "x = 5"$;
Lý luận trên có thể diễn đạt theo mô hình suy diễn sau

$$\begin{array}{c} \forall x : P(x) \to Q(x) \\ \forall x : Q(x) \to R(x) \\ \hline \therefore (\forall x : P(x) \to R(x)) \end{array}$$

trên miền các số thực. Theo Bổ đề 2.2 ta có cách giải phương trình $4x - 5 = 15$ là đúng.

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Ví dụ 2.12

Mô hình suy diễn dưới đây trên miền D có đúng không?

$$\begin{array}{l} \forall x : (P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))) \\ \forall x : (P(x) \wedge F(x)) \\ \hline \therefore \forall x : (R(x) \wedge F(x)) \end{array} \tag{2.6}$$

Lời giải. Lấy a là phần tử cố định bất kỳ của D, thay $x = a$ vào (2.6) ta được mô hình suy diễn trong loogic mệnh đề là

$$\begin{array}{l} P(a) \to (Q(a) \wedge R(a)) \\ P(a) \wedge F(a) \\ \hline \therefore R(a) \wedge F(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} P(a) \to (Q(a) \wedge R(a)) \\ P(a) \end{cases} \\ F(a) \\ \hline \therefore R(a) \wedge F(a) \end{array} \quad \text{(Kđ)}$$

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

$$\equiv \frac{\begin{array}{l} Q(a) \wedge R(a) \\ F(a) \end{array}}{\therefore R(a) \wedge F(a)} \equiv \frac{Q(a) \wedge R(a) \wedge F(a)}{\therefore R(a) \wedge F(a)} \equiv \mathbf{1}$$

Vậy (2.6) là đúng.

Ví dụ 2.13

Chỉ ra mô hình suy diễn dưới đây là đúng trên miền D.

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x : (P(x) \vee Q(x)) \\ \exists x : \overline{P}(x) \\ \forall x : (\overline{Q}(x) \vee R(x)) \\ \forall x : (F(x) \to \overline{R}(x)) \end{array}}{\therefore \exists x : \overline{F}(x)} \tag{2.7}$$

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Lời giải. Áp dụng quy tắc tổng quát hóa phổ dụng. Lấy $a \in D$ bất kỳ sao cho $\overline{P}(x)$ đúng, thay $x = a$ vào (2.7) ta được mô hình suy diễn sau

$$\frac{\begin{array}{l}\begin{cases} P(a) \vee Q(a)) \\ \overline{P}(a) \end{cases} \\ \overline{Q}(a) \vee R(a) \\ F(a) \to \overline{R}(a)\end{array}}{\therefore \overline{F}(a)} \equiv \frac{\begin{array}{l}\begin{cases} \overline{Q}(a) \\ \overline{Q}(a) \vee R(a) \end{cases} \\ F(a) \to \overline{R}(a)\end{array}}{\therefore \overline{F}(a)} \equiv \frac{\begin{cases} R(a) \\ F(a) \to \overline{R}(a) \end{cases}}{\therefore \overline{F}(a)}$$

$$\equiv \frac{\overline{F}(a)}{\therefore \overline{F}(a)} \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy (2.7) là đúng.

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Ví dụ 2.14

Chỉ ra mô hình sau đây là đúng trong miền xác định D.

$$\begin{array}{l} \forall x : P(x) \to Q(x) \\ \forall x : R(x) \to F(x) \\ \forall x : ((F(x) \wedge Q(x)) \to (P(x) \wedge H(x))) \\ \forall x : H(x) \to \overline{P}(x) \\ \hline \therefore \forall x : (\overline{R}(x) \vee \overline{P}(x)) \end{array} \tag{2.8}$$

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

Lời giải. Với mọi $a \in D$, thay $x = a$ trong (2.8) ta được mô hình suy diễn có dạng

$$\begin{array}{l} P(a) \to Q(a) \\ R(a) \to F(a) \\ (F(a) \wedge Q(a)) \to (P(a) \wedge H(a)) \\ H(a) \to \overline{P}(a) \\ \hline \therefore \overline{R}(a) \vee \overline{P}(a) \end{array} \equiv$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} P(a) \to Q(a) \\ P(a) \end{cases} \\ \begin{cases} R(a) \to F(a) \\ R(a) \end{cases} \\ (F(a) \wedge Q(a)) \to (P(a) \wedge H(a)) \\ H(a) \to \overline{P}(a) \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array} \equiv$$

2.1.6. Một số ví dụ sử dụng vị từ

$$\dfrac{\begin{array}{l}\begin{cases} F(a) \wedge Q(a) \\ (F(a) \wedge Q(a)) \to (P(a) \wedge H(a)) \end{cases} \\ H(a) \to \overline{P}(a)\end{array}}{\therefore \mathbf{0}} \equiv$$

$$\dfrac{\begin{array}{l} P(a) \\ \begin{cases} H(a) \\ H(a) \to \overline{P}(a) \end{cases}\end{array}}{\therefore \mathbf{0}} \equiv \dfrac{\begin{array}{l} P(a) \\ \overline{P}(a) \end{array}}{\therefore \mathbf{0}} \equiv \dfrac{\mathbf{0}}{\therefore \mathbf{0}} \equiv \mathbf{1}.$$

Nội dung

2.3.1. Khái niệm về chứng minh

- Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa, và những khái niệm không được định nghĩa.
- Các tiên đề được giả định là đúng. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng hay đưa ra những khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có.
- Một số thuật ngữ, khái niệm sẽ không được định nghĩa rõ ràng nhưng được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề.
- Trong một hệ toán học chúng ta có thể suy ra được các định lý. Một định lý là một mệnh đề được chứng minh là đúng. Một số loại định lý được xem là các bổ đề, các hệ quả.

2.3.1. Khái niệm về chứng minh

Một lập luận (hay lý luận) chỉ ra được tính đúng đắn của mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là chứng minh.

- Logic là cơ sở để thực hiện việc chứng minh, đặc biệt là các luật logic và các luật suy diễn.
- Trong phần này chúng ta sẽ đề cập đến việc xây dựng một chứng minh toán học.
- Các cấu trúc chứng minh thường được sử dụng là *chứng minh trực tiếp, chứng minh bằng cách phân chia trường hợp (phân chứng), phản chứng, phản ví dụ, và chứng minh qui nạp.*

2.3.2. Chứng minh trực tiếp

Chứng minh trực tiếp là phương pháp chứng minh suy diễn trực tiếp dẫn từ giả thiết đến kết luận thông qua việc áp dụng các luật suy diễn (hay qui tắc suy diễn), các định lý, các nguyên lý và các kết quả đã biết.

Đây là một kiểu tư duy giải bài toán rất tự nhiên và người ta thường xuyên sử dụng. Trong khi suy nghĩ để tìm ra cách chứng minh theo phương pháp này người ta thường phải tự trả lời các câu hỏi sau đây

- Ta sẽ dùng luật suy diễn nào?
- Các định lý nào, các kết quả nào có thể sử dụng được đề ta suy ra được một điều gì đó từ những sự kiện, những yếu tố hiện đang có?
- Việc áp dụng định lý có khả năng sẽ dẫn đến kết luận hay kết quả mong muốn hay không?

2.3.2. Chứng minh trực tiếp

- Trong trường hợp ở một bước suy diễn nào đó có nhiều định lý hay nhiều luật nào đó có thể áp dụng được và cũng có khả năng sẽ dẫn đến kết luận hay kết quả mong muốn thì ta sẽ chọn cái nào?
- Đến một giai đoạn nào đó, khi gặp phải sự bế tắc thì ta sẽ phải tự hỏi rằng phải chăng bài toán không có lời giải, hay vì kiến thức của ta chưa đủ, hay ta phải sử dụng một phương pháp chứng minh nào khác?

Quả thật là không thể trả lời được các câu hỏi một cách đầy đủ và chính xác. Nó phụ thuộc chủ yếu vào kiến thức, kinh nghiệm của người giải bài toán và cả sự nhạy bén, tính năng động sáng tạo của họ.

2.3.2. Chứng minh trực tiếp

Ví dụ 2.15

Giả sử p, r, s, t, u là các mệnh đề sao cho ta có các mệnh đề sau đây là đúng

(1) $p \to r$
(2) $r \to s$
(3) $t \vee \overline{s}$
(4) $\overline{t} \vee u$
(5) $\overline{u}$.

Hãy chứng minh mệnh đề p là sai (tức là chứng minh mệnh đề $\overline{p}$ là đúng).

2.3.2. Chứng minh trực tiếp

Lời giải. Luật suy diễn tam đoạn luận, từ (1) và (2) ta suy ra
(6) $p \to s$.
Luật logic về phép toán kéo theo ta có thể viết lại (3) dưới dạng
(7) $s \to t$.
Áp dụng luật suy diễn tam đoạn luận, từ (6) và (7) ta suy ra
(8) $p \to t$.
Luật logic về phép toán kéo theo ta có thể viết lại (4) dưới dạng
(9) $t \to u$.
Áp dụng luật suy diễn tam đoạn luận, từ (8) và (9) ta suy ra
(10) $p \to u$.
Áp dụng luật suy diễn Modus Tollens, từ (10) và (5) ta suy ra
(11) $\overline{p}$.
Vậy mệnh đề $\overline{p}$ là đúng.

2.3.2. Chứng minh trực tiếp

Ví dụ 2.16

Cho $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ là các vị từ theo biến $x(x \in A)$, và a là một phần tử cố định nhưng tùy ý của tập hợp A. Giả sử ta có các mệnh đề sau đây là đúng

(1) $\forall x \in A : P(x) \to Q(x)$

(2) $\forall x \in A : Q(x) \to R(x)$

(3) $P(a)$

Chứng minh rằng mệnh đề $R(a)$ là đúng.

Lời giải. Áp dụng kết quả trong Bổ đề 2.2, từ (1) và (2) ta suy ra

(4) $\forall x \in A : P(x) \to R(x)$.

Áp dụng kết quả trong Bổ đề 2.1, từ (3) và (4) ta suy ra

(5) $R(a)$.

Vậy mệnh đề $R(a)$ là đúng.

2.3.3. Chứng minh phản chứng

- Phương pháp chứng minh trực tiếp không phải bao giờ cũng sử dụng được trong việc chứng minh ngay cả đối với những bài toán khá đơn giản như bài toán sau đây
- **Bài toán.** Chứng minh rằng không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.
- Bằng cách suy nghĩ để tìm một cách chứng minh trực tiếp ta sẽ gặp phải bế tắc: Với $q = \dfrac{m}{n}$ là một số hữu tỉ cho trước (m và n là các số nguyên dương) ta không biết làm thế nào để suy ra một cách trực tiếp rằng $q^2 \neq 2$.

2.3.3. Chứng minh phản chứng

- Để chứng minh bằng phản chứng một khẳng định hay một mệnh đề nào đó, ta tìm cách rút ra từ mệnh đề đó một điều rõ ràng là vô lý hay một sự mâu thuẫn.
  Về mặt kỹ thuật ta thường giả sử rằng mệnh đề cần chứng minh là sai rồi từ đó suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay các tiền đề của bài toán, từ đó đi đến kết luận rằng mệnh đề là đúng.
- Ngoài ra phép chứng minh phản chứng còn có thể được thực hiện như sau:

Ta giả sử mệnh đề cần chứng minh là sai, kết hợp với giả thiết đã cho để suy ra được một điều mâu thuẫn nào đó rồi từ đó kết luận rằng mệnh đề là đúng.

Cơ sở cho phương pháp chứng minh này là qui tắc chứng minh phản chứng

$$p \to q \leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \to 0.$$

2.3.3. Chứng minh phản chứng

Ví dụ 2.17

Chứng minh rằng không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Lời giải. *Chứng minh phản chứng*. Giả sử ta có mệnh đề ngược lại của điều cần phải chứng minh, tức là giả sử rằng:
(1) Có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.
Vì một phân số có thể viết dưới dạng tối giản, nên ta có thể giả thiết thêm rằng các số dương m và n trong mệnh đề (1) nguyên tố cùng nhau, tức là: m và n không có ước số chung lớn hơn 1.
Do $\dfrac{m}{m} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$, từ (1) ta suy ra
(2) Có hai số nguyên dương m và n nguyên tố cùng nhau mà $m^2 = 2n^2$.

2.3.3. Chứng minh phản chứng

Với m và n là hai số nguyên dương thỏa mãn trong mệnh đề (2) ở trên thì ta dễ dàng lần lượt suy ra được các khẳng định sau đây
(3) m và n nguyên tố cùng nhau.
(4) $m^2 = 2n^2$.
(5) m là số chẵn.
(6) m là số chẵn, tức là $m = 2k$ với k là một số nguyên dương.
(7) $n^2 = 2k^2$.
(8) n^2 là số chẵn.
(9) n là số chẵn.
(10) 2 là một ước số chung của m và n, và $2 > 1$.
Sự mâu thuẫn do (3) và (10).
Từ lập luận trên ta đi đến kết luận:
Không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.

2.3.4. Chứng minh bằng cách chia trường hợp

- *Trong phương pháp chứng minh bằng cách chia trường hợp, để chứng minh một sự khẳng định nào đó ta xem xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra đối với các sự kiện hay các yếu tố liên quan trong giả thiết và chứng minh rằng trong mỗi trường hợp ta đều có mệnh đề cần chứng minh là đúng, và từ đó đi đến kết luận rằng từ giả thiết ta có mệnh đề cần chứng minh là đúng.*
- Cơ sở cho phương pháp chứng minh này là qui tắc chứng minh theo trường hợp

  $$(p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \ldots \land (p_n \to q) \Rightarrow (p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to q$$
- Để chứng minh khẳng định q (là đúng), chúng ta phân tích giả thiết để có được một sự khẳng định đúng dưới dạng:

  $$p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n$$

  rồi tìm cách chứng minh rằng từ mệnh đề p_k suy ra được mệnh đề q, ứng với mỗi k từ 1 tới n.

2.3.4. Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Ví dụ 2.18

Cho một số nguyên n, hãy chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Lời giải. Tóm tắt chứng minh: Với một số nguyên n, gọi r là dư số trong phép chia n cho 3, ta có 3 trường hợp
Trường hợp 1. $r = 0$
Trường hợp 1. $r = 1$
Trường hợp 1. $r = 2$
Nói cách khác ta có $(r = 0) \vee (r = 1) \vee (r = 2)$.

Trong mỗi trường hợp ta đều suy ra được $n^3 + 2n$ chia hết cho 3. Ở đây không trình bày lại chi tiết việc tính toán suy diễn trong mỗi trường hợp.
Từ đó đi đến kết luận $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

2.3.5.Phản ví dụ

- *Nói một cách tổng quát, phản ví dụ là việc chỉ ra một tình huống hay trường hợp sai của một khẳng định phổ quát để chứng tỏ rằng khẳng định phổ quát đó là sai.*
- Chẳng hạn như để chứng minh mệnh đề

$$x \in A : P(x)$$

  là sai ta chỉ cần đưa ra một phần tử a cụ thể thuộc tập hợp A mà $P(a)$ là sai.
- Thật ra làm như vậy tức là ta đã chứng minh mệnh đề

$$\exists x \in A : \overline{P}(x)$$

  (có cùng chân trị với mệnh đề $\overline{\forall x \in A : P(x)}$ là đúng).

2.3.5.Phản ví dụ

- Chúng ta có thể nêu lên một bài toán khác mà đối với nó ta phải dùng phản ví dụ. Đó là bài toán chứng minh một phép suy diễn từ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ suy ra q là sai.
- Để chứng minh phép suy diễn là sai ta phải chứng minh rằng

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$$

không phải là hằng đúng.
- Để làm điều này chúng ta chỉ cần tìm và chỉ ra một trường hợp cụ thể của các biến mệnh đề mà ứng với chúng ta có các tiền đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ đều đúng nhưng kết luận q là sai.

2.3.5.Phản ví dụ

Ví dụ 2.19

Hãy kiểm tra suy luận sau đây

$$\begin{array}{l} p \to r \\ p \\ \overline{r} \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- Về mặt kỹ thuật ta sẽ tìm p, q, và r thỏa mãn các đẳng thức sau đây
  $p \to r = 1$
  $p = 1$
  $\overline{r} \to q = 1$
  $q = 0.$
- Dễ dàng tìm thấy một trường hợp phản ví dụ là $p = 1, q = 0, r = 1$. Vậy suy luận đã cho là không đúng.

Nội dung

2.4.1. Tập hợp số tự nhiên

- Tập hợp gồm tất cả các số tự nhiên (hay các số đếm) được ký hiệu là $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Các phép toán.

- Trên tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ ta có phép toán cộng (ký hiệu là $+$), và phép toán nhân (ký hiệu là .).
- Phép toán cộng 2 số tự nhiên a và b cho ta tổng số cũng là một số tự nhiên được viết là $a + b$;
- Phép toán nhân 2 số tự nhiên a và b cho ta tích số cũng là một số tự nhiên được viết là $a.b$.

2.4.1.Tập hợp số tự nhiên

1. Phép cộng (+) và phép nhân (.) có tính giao hoán và kết hợp, nghĩa là với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:
   - $a + b = b + a$
   - $(a + b) + c = a + (b + c)$
   - $a.b = b.a$
   - $(a.b).c = a.(b.c)$
2. Phép nhân (.) phân phối đối với phép cộng (+), nghĩa là với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:
   - $a.(b + c) = a.b + a.c$

     Ở đây, phép toán nhân có độ ưu tiên cao hơn phép toán cộng.
3. Phép cộng và phép nhân lần lượt nhận 0 và 1 là phần tử trung hòa, nghĩa là ta có:
   - $\forall a \in \mathbb{N} : a + 0 = 0 + a = a$
   - $\forall a \in \mathbb{N} : a.1 = 1.a = a$

2.4.1.Tập hợp số tự nhiên

Thứ tự trên $\mathbb{N}$.

- Ngoài các phép toán, trên N còn có *một quan hệ thứ tự* $\leq$ được định nghĩa như sau:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b.$$

- Đây là một quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{N}$, và theo quan hệ thứ tự này ta có:

$$0 < 1 < 2 < ... < n < n + 1 < ...$$

0 là phần tử nhỏ nhất của tập $\mathbb{N}$, nhưng tập $\mathbb{N}$ không có phần tử lớn nhất.

2.4.1. Tập hợp số tự nhiên

Thứ tự $\leq$ trên tập hợp $\mathbb{N}$ có một tính chất rất quan trọng được phát biểu trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.5

Cho A là một tập hợp các số tự nhiên khác rỗng. Khi đó A có phần tử nhỏ nhất, nghĩa là tồn tại $a \in A$ sao cho $\forall x \in A, a \leq x$.

Chú ý. Phần tử a trong mệnh đề trên là duy nhất và được ký hiệu là $\min(A)$. Tính chất được phát biểu trong mệnh đề là cơ sở cho tính đúng đắn của các qui tắc chứng minh qui nạp sẽ được trình bày trong mục sau.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

- Cho n_0 là một số tự nhiên, và $P(n)$ là một vị từ theo biến tự nhiên $n \geq n_0$. Vấn đề được đặt ra là chứng minh tính đúng đắng của mệnh đề sau đây:

$$\forall n \geq n_0 : P(n).$$

- Phương pháp chứng minh qui nạp thường được sử dụng để chứng minh khẳng định trên. Phép chứng minh qui nạp được thực hiện dựa vào các nguyên lý qui nạp.
- Chúng ta sẽ nêu lên hai dạng nguyên lý qui nạp thường được sử dụng. Trong các áp dụng nguyên lý qui nạp, n_0 thường là 0 hoặc 1.
- Hai dạng nguyên lý qui nạp, được gọi là dạng qui nạp yếu và dạng qui nạp mạnh sẽ được viết dưới dạng mô hình của các luật suy diễn.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

Định lý 2.2 (**Nguyên lý qui nạp dạng yếu**)

$$\begin{array}{ll} \textit{(cơ sở)} & P(n_0) \\ \textit{(qui nạp)} & \forall k \geq n_0 : P(k) \to P(k+1) \\ \hline & \therefore \forall n \geq n_0 : P(n) \end{array}$$

Chứng minh.

- Đặt A là tập hợp các số tự nhiên $n \geq n_0$ mà $P(n)$ sai.
- Ta chỉ cần chứng minh rằng $A = \emptyset$ (tập hợp rỗng) với giả thiết rằng ta có hai khẳng định trong phần cơ sở và phần qui nạp trong nguyên lý trên.
- Ta sẽ chứng minh điều này bằng phương pháp phản chứng.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

- Giả sử $A \neq \emptyset$. Theo tính chất của thứ tự trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ (xem mệnh đề ở mục trên), A có phần tử nhỏ nhất.
- Gọi a là phần tử nhỏ nhất của tập hợp A. Vì $P(n_0)$ đúng nên $a \geq n_0 + 1$, hay $a - 1 \geq n_0$.
- Do $a = \min(A)$, nên $a - 1 \notin A$ và do đó $P(a - 1)$ đúng. Vì $P(a - 1)$ đúng nên ta cũng có $P(a)$ đúng theo khẳng định ở phần qui nạp, nghĩa là ta cũng có $a \notin A$.
- Điều này cho ta một sự mâu thuẫn (vì $a = \min(A)$).
- Vậy $A = \emptyset$. Ta có điều cần chứng minh.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

Định lý 2.3 (**Nguyên lý qui nạp dạng mạnh**)

$$\begin{array}{ll} \textit{(cơ sở)} & P(n_0) \\ \textit{(qui nạp)} & \forall k \geq n_0 : P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1) \\ \hline & \therefore \forall n \geq n_0 : P(n) \end{array}$$

Theo các nguyên lý trên, chứng minh qui nạp bao gồm 2 bước :

- *Bước cơ sở.* Ở bước cơ sở, ta phải kiểm chứng để khẳng định $P(n_0)$ là đúng.
- *Bước qui nạp.* Ở bước qui nạp, ứng với một số tự nhiên k tùy ý, ta phải chứng minh một mệnh đề kéo theo. Giả thiết trong mệnh đề kéo theo ở bước 2 được gọi là **giả thiết qui nạp**. Giả thiết qui nạp ở dạng qui nạp yếu là $P(k)$, và ở dạng mạnh là $P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(k)$.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

- Nguyên lý qui nạp có rất nhiều biến thể trong việc vận dụng. Chẳng hạn, từ hai nguyên lý trên ta có thể rút ra một nguyên lý qui nạp có dạng sau đây:

$$\begin{array}{ll} \text{(cơ sở)} & P(0) \wedge P(1) \\ \text{(qui nạp)} & \forall k \geq 1 : P(k-1) \wedge P(k) \wedge P(k+1) \\ \hline & \therefore \forall n \geq 0 : P(n) \end{array}$$

- Trong chứng minh mệnh đề sau đây, ta sử dụng dạng qui nạp biến thể này.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

Ví dụ 2.20

Cho dãy số

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

được định nghĩa bởi
$x_0 = 0$; $x_1 = 1$; và $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.
Khi đó ta có: $x_n = 2^n - 1$, với mọi $n \geq 0$.

Lời giải.

- Đặt $P(n) =$ "$x_n = 2^n - 1$".
- Dễ thấy rằng $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Bây giờ, ta chỉ cần thực hiện bước qui nạp để hoàn thành phép chứng minh qui nạp.
- Giả sử $P(k-1)$ và $P(k)$ đúng với một số tự nhiên (tùy ý) $k \geq 1$.
- Thế thì $x_{k-1} = 2^{k-1} - 1$ và $x_k = 2^k - 1$.

2.4.2.Các nguyên lý quy nạp thường dùng

- Do đó

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_k - 2x_{k-1} \\ &= 3(2^k - 1) - 2(2^{k-1} - 1) \\ &= 3 * 2^k - 3 - 2^k - 2 \\ &= 2 * 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

- Suy ra $P(k+1)$ đúng. $\square$
- Vậy theo nguyên lý qui nạp (dạng biến thể được phá biểu ở trên) ta kết luận: $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 0$.

2.4.4. Các ví dụ quy nạp

Ví dụ 2.21

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1 (n \in N)$ ta có

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1 (n \in N)$, đặt

$$P(n) = "1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}"$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề $\forall n \geq 1 : P(n)$ bằng phương pháp qui nạp (dạng yếu), nghĩa là thực hiện 2 bước chứng minh trong phép chứng minh qui nạp.

2.4.4. Các ví dụ quy nạp

- *Bước cơ sở*: Khi $n = 1$ thì $P(1)$ là mệnh đề "$1 = \frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6}$". Vế phải của đẳng thức trong mệnh đề tính ra bằng 1, nên ta có $P(1)$ đúng.
- *Bước qui nạp*: Cho n là một số tự nhiên túy ý lớn hơn 0, nghĩa là $n \geq 1$, và giả sử rằng $P(n)$ đúng, tức là ta có (GTQN)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng, tức là chứng minh rằng

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

2.4.4. Các ví dụ quy nạp

- Thật vậy, từ (GTQN) ta suy ra

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6)) \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}
$$

  Tức là ta đã suy ra được $P(n+1)$ cũng đúng.
- Hai phần (phần cơ sở và phần qui nạp) trong phép chứng minh qui nạp đã được chứng minh.
- Vậy theo nguyên lý qui nạp ta kết luận rằng với mọi $n \geq 1 (n \in \mathbb{N})$ ta có

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.4.4. Các ví dụ quy nạp

Ví dụ 2.22

Chứng minh định lý sau đây:
Cho a và b là 2 số nguyên tự nhiên, với $b \geq 0$. Khi đó, có duy nhất 2 số tự nhiên q và r thỏa 2 điều kiện sau đây
(1) $a = q.b + r$
(2) $0 \leq r < b$

Chứng minh.

- Tính duy nhất của q và r trong định lý trên có thể kiểm chứng dễ dàng. Ở đây ta sẽ chứng minh sự tồn tại của q và r. Cho b là một số tự nhiên khác 0 tùy ý nhưng cố dịnh.
- Đặt $P(a) =$"Tồn tại các số tự nhiên q và r thỏa mãn 2 điều kiện (1) và (2)"

2.4.4. Các ví dụ quy nạp

Ta sẽ chứng minh mệnh đề sau đây là đúng

$$\forall a \in \mathbb{N} : P(a)$$

bằng cách sử dụng nguyên lý qui nạp dạng mạnh.
Bước cơ sở: Xét trường hợp $a = 0$, ta thấy với $q = 0$ và $r = 0$ thì các điều kiện (1) và (2) được thỏa mãn. Vậy ta có $P(0)$ đúng.
Bước qui nạp: Cho a là một số tự nhiên t y ý và giả sử rằng các mệnh đề $P(0), P(1), ..., P(a)$ đều đúng (GTQN). Ta sẽ chứng minh $P(a+1)$ cũng đúng bằng cách xét 2 trường hợp.

- Trường hợp 1: $a + 1 < b$.
  Ta chọn $q = 0$ và $r = a + 1$ thì ta có q và r thỏa các điều kiện
  (1) $a + 1 = q.b + r$
  (2) $0 \leq r < b$
  Vậy trong trường hợp 1 này thì $P(a + 1)$ đúng.

2.4.4. Các ví dụ quy nạp

- Trường hợp 2: $a+1 \geq b$.
  Đặt $a' = a+1-b$, ta có $0 \leq a' \leq a$. Từ (GTQN) ta suy ra $P(a')$ đúng, tức là có các số tự nhiên q' và r' sao cho
  $a' = q'.b + r'$, và $0 \leq r' < b$.
  Suy ra các số tự nhiên $q = q' + 1$ và $r = r'$ sẽ thỏa mãn 2 điều kiện
  (1) $a + 1 = q.b + r$
  (2) $0 \leq r < b$
  Vậy ta cũng có $P(a+1)$ đúng.

Tóm lại, ta đã chứng minh phần cơ sở và phần qui nạp trong nguyên lý qui nạp. Từ đó có thể kết luận rằng

$$\forall a \in \mathbb{N} : P(a).$$

2.4.4. Các ví dụ quy nạp I

Ví dụ 2.23

Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi $n \geq 1$

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Ví dụ 2.24

Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $n > 1, a > -1$ và $a \neq 0$

$$(1+a)^n > 1 + na.$$

Ví dụ 2.25

Chứng minh rằng tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6.

2.4.4. Các ví dụ quy nạp II

Ví dụ 2.26

Tính tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên
$T(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.

Ví dụ 2.27

Tính tổng

$$T(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nội dung

2.5. Bài tập

▷ 2.1

Vị từ là gì? Cho ví dụ.

▷ 2.2

Phát biểu qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ (hay mệnh đề lượng từ hóa) và cho ví dụ cụ thể.

▷ 2.3

P(n) là vị từ "nếu $4|n$ thì $2|n$". Cho biết chân trị của các mệnh đề sau a) $P(12)$;
b) $P(10)$;
c) $\exists n : P(n)$;
d) $\forall n : P(n)$.

2.5. Bài tập

▷ 2.4

Hãy cho biết chân trị của mỗi mệnh đề dưới đây và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.
a) $\exists x : x + 3 = 5$;
b) $\forall x : x + 3 = 5$;
c) $\exists x, \exists y : x + y = 3$;
d) $\exists x, \forall y : x + y = 3$;
e) $\forall x, \exists y : x + y = 3$;
f) $\forall x, \forall y : x + y = 3$.
Trong các mệnh đề trên các biến x và y là các biến thực.

2.5. Bài tập

▷ 2.5

Hãy cho biết chân trị của mỗi mệnh đề dưới đây và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.
a) $\exists x, \exists y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$;
d) $\exists x, \forall y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$;
e) $\forall x, \exists y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$;
f) $\forall x, \forall y : (x^2 = y^2) \to (x = y)$.

▷ 2.6

Hãy sử dụng các ký hiệu toán học và logic để viết lại mệnh đề sau đây:
Với mọi số thực dương x, có một số tự nhiên n sao cho x bằng 2^n hoặc x nằm giữa 2^n và 2^{n+1}.
Cho biết mệnh đề này đúng hay sai, và viết ra mệnh đề phủ định của nó.

2.5. Bài tập

▷ 2.7

Trong bài tập này ký hiệu n chỉ một biến nguyên. Cho các vị từ
$P(n) = "0 < n^2 \leq 4"$
$R(n) = "0 < n^3 \leq 8"$
$S(n) = "0 < n \leq 2"$
a) Ứng với mỗi vị từ trên hãy cho biết tập hợp các giá trị n làm cho vị từ có chân trị đúng $(= 1)$.
b) Trong các vị từ trên, những vị từ nào tương đương với nhau.
c) Mệnh đề "$\forall n : R(n) \rightarrow P(n)$" là đúng hay sai?