

Xử lý ảnh - Biến đổi Fourier hai chiều của ảnh số

Đỗ Thanh Hà

Bộ môn Tin học
Khoa Toán - Cơ - Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

Nhắc lại: biến đổi Fourier hai chiều của ảnh số

Gọi $I(r, c)$ là một ảnh số (1 kênh màu) với R hàng và C cột. Khi đó $I(r, c)$ có biểu diễn Fourier

$$I(r, c) = \frac{1}{RC} \sum_{u=0}^{R-1} \sum_{v=0}^{C-1} \mathfrak{F}(v, u) e^{+i2\pi(\frac{vr}{R} + \frac{uc}{C})}$$

trong đó

$$\mathfrak{F}(v, u) = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} I(r, c) e^{-i2\pi(\frac{vr}{R} + \frac{uc}{C})}$$

là các hệ số Fourier

Tích chập của các biến đổi fourier

Hàm $f(r, c)$ và $g(r, c)$ có biến đổi Fourier $F(u, v)$ và $G(u, v)$. Khi đó

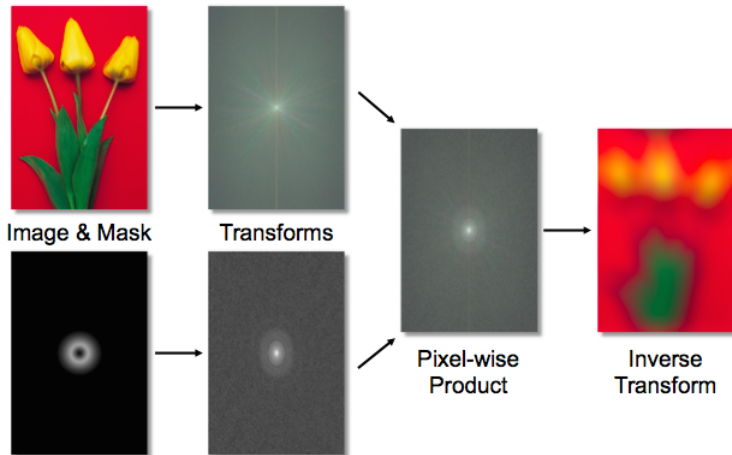
$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F \cdot G$$

Và

$$\mathfrak{F}\{f \cdot g\} = F * G$$

với \cdot là phép nhân và $*$ là phép tích chập

Tích chập thông qua biến đổi Fourier



Làm mờ: Trung bình/Lọc lowpass

Làm mờ là kết quả từ

- Lấy giá trị trung bình của các pixel trong miền không gian
 - Mỗi pixel trong ảnh output là giá trị trung bình của các pixel trong miền hàng xóm của nó
 - Là tích chập của ảnh đầu vào với ma trận trọng số tổng bằng 1
- Lọc lowpass trong miền tần số
 - Tần số cao bị giảm bớt hoặc loại bỏ
 - Thành phần tần số riêng lẻ được nhân với một hàm không tăng của ω : ví dụ $1/\omega = 1/\sqrt{(u^2 + v^2)}$

Làm nét: Sự khác nhau/lọc highpass

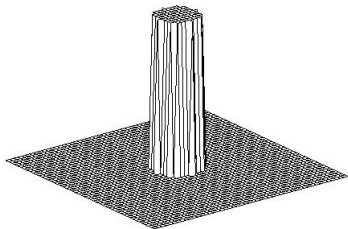
Làm nét là kết quả từ việc cộng ảnh, một bản sao của ảnh ban đầu mà có

- Sự khác nhau pixel trong miền không gian
 - Nó là tích chập của ảnh với ma trận trọng số tổng bằng 0
- Lọc highpass trong miền tần số
 - Tần số cao được tăng cường hoặc khuếch đại
 - Các thành phần tần số riêng lẻ được nhân với một hàng tăng ω : ví dụ $\alpha\omega = \alpha\sqrt{(u^2 + v^2)}$ với α là một hằng số

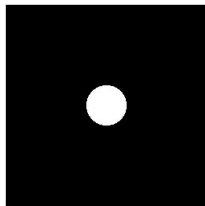
Lọc lowpass lý tưởng

Các thành phần tần số riêng lẻ được nhân với hàm:

$$H_{lp}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \sqrt{u^2 + v^2} \leq d_0 \\ 0 & \text{nếu } \sqrt{u^2 + v^2} > d_0 \end{cases}$$



mesh

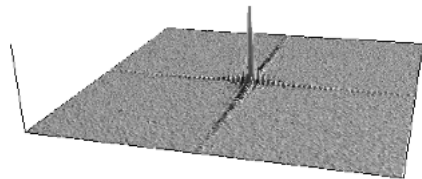
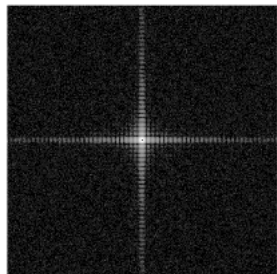
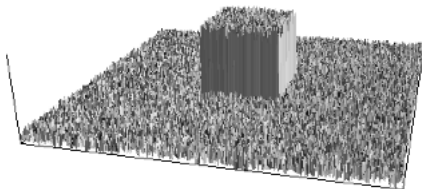
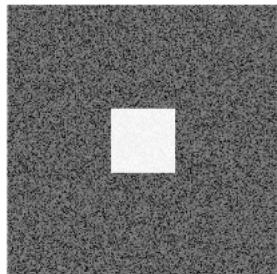


image

d_0 là tần số loại bỏ và $F = \mathfrak{F}(I)$ là biến đổi Fourier của I

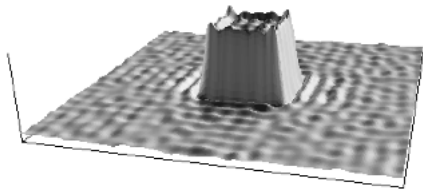
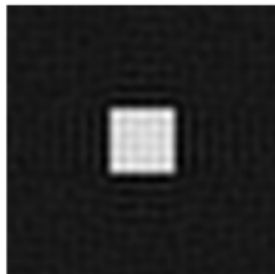
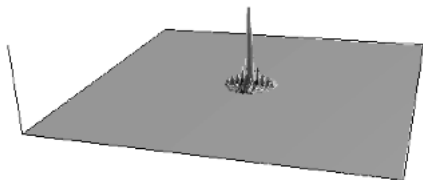
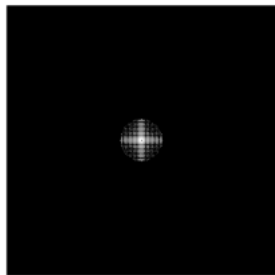
Lọc lowpass lý tưởng: Ví dụ

Ảnh và biến đổi Fourier của nó



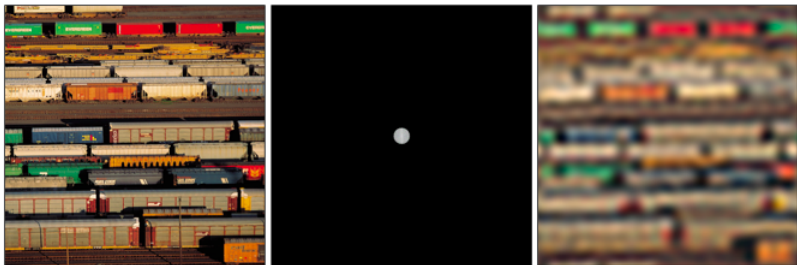
Lọc lowpass lý tưởng: Ví dụ

Kết quả sau khi lọc lowpass và biến đổi Fourier ngược



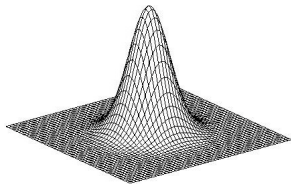
Lọc lowpass lý tưởng: Ví dụ

Ảnh I có kích thước 512×512 và FD filter radius = 16



Một số lọc lowpass khác

- Gaussian: $H_{lp}(u, v) = e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)/d_0^2}$

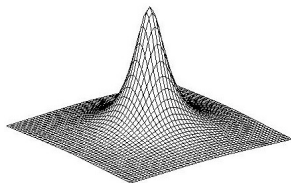


mesh



image

- Butterworth: $H_{lp}(u, v) = \frac{1}{1+[(u^2+v^2)/d_0^2]^n}$



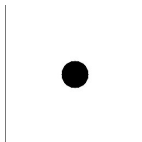
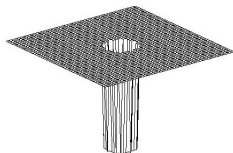
mesh



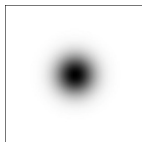
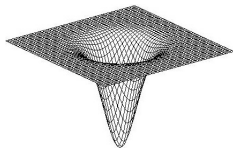
image

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

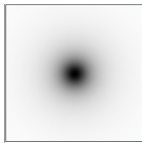
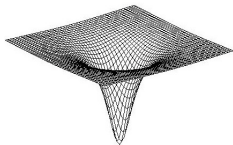
Ideal



Gaussian



Butterworth

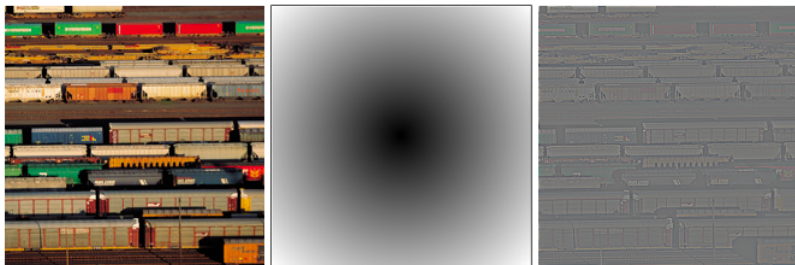


mesh

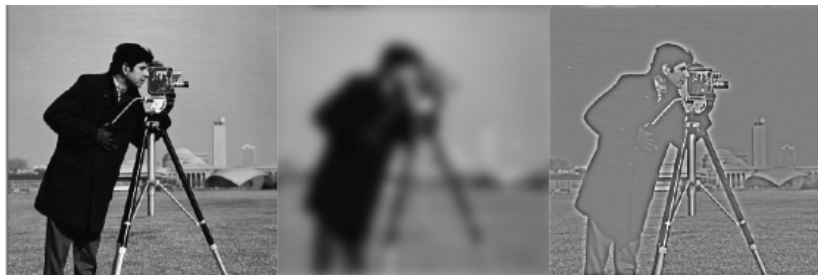
image

Lọc highpass Gaussian: Ví dụ

Ảnh I có kích thước 512×512 và FD filter radius = 16



Lọc lowpass và highpass Gaussian: Ví dụ



Một số bộ lọc lowpass trong miền không gian

- Bộ lọc mean: $\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Bộ lọc Gaussian: $\frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Một số bộ lọc highpass trong miền không gian

- Bộ lọc Laplace: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ hoặc $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$