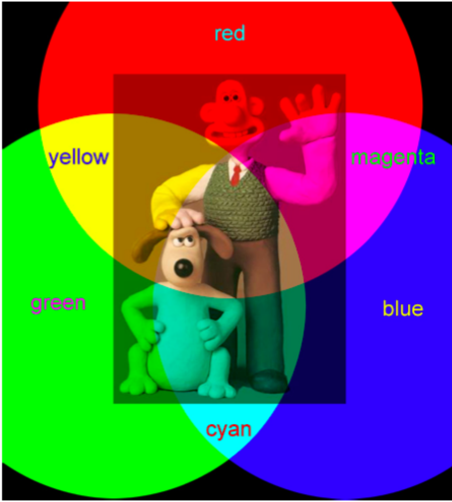
Xử lý ảnh - Điều chỉnh màu
Color Correction

Đỗ Thanh Hà

Bộ môn Tin học
Khoa Toán - Cơ - Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

Ảnh màu

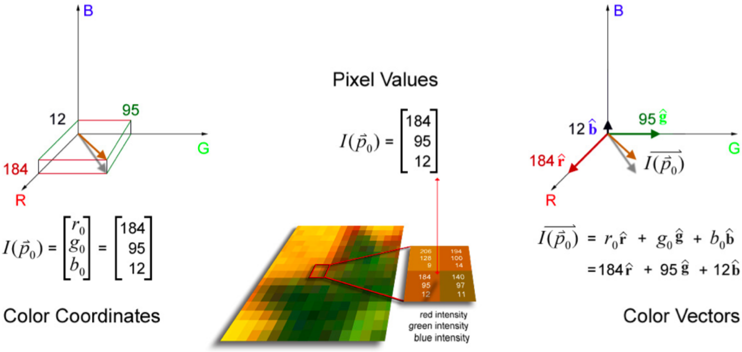
- Được xây dựng từ ba ảnh cường độ (*intensity maps*)
- Chiếu ảnh cường độ qua một bộ lọc màu (ví dụ: R, G, hoặc B; hoặc C, M, hoặc Y) tạo ra ảnh đơn sắc
- Chồng các ảnh cường độ lên nhau tạo thành ảnh màu
- Mỗi pixel trong ảnh màu là một vector 3 thành phần



Ảnh màu

- Mỗi ảnh cường độ biểu diễn cường độ của màu *cơ bản* khác nhau
- Các màu *cơ bản* là 3 vectors mà tạo ra *cơ sở* của không gian màu

Pixels

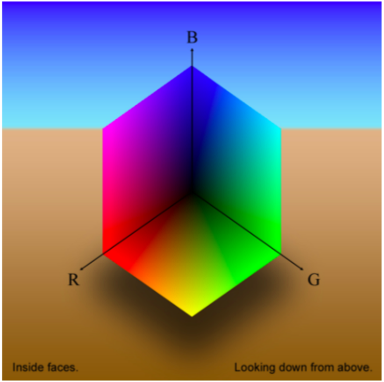


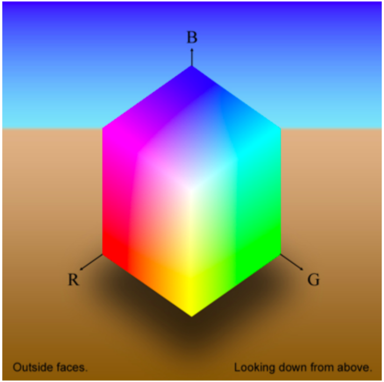
Mỗi màu tương ứng với một điểm trong không gian 3D

Không gian màu (cho ảnh số chuẩn)

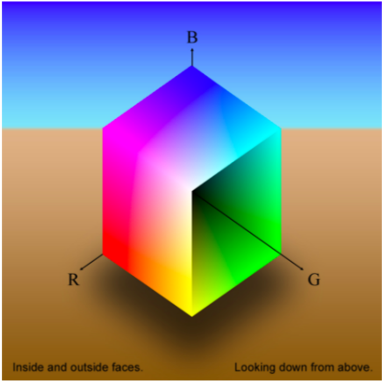
- Các màu cơ bản: đỏ, xanh lá cây và xanh da trời
  - các trục toạ độ R, G và B trong không gian màu
- Mỗi màu có độ phân giải cường độ 8bits
  - các số nguyên từ 0 đến 255 trên các trục tạo độ
- Không có giá trị âm
  - không gian màu trong hình lập phương trong góc phần tám thứ nhất của 3D
- Không gian màu là rời rạc
  - 256^3 màu có thể $= 16,777,216$ thành phần trong hình lập phương

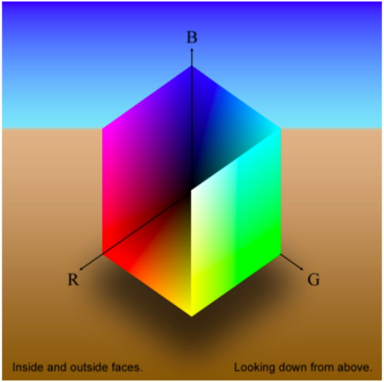
Khối màu: Bề mặt (trong và ngoài)



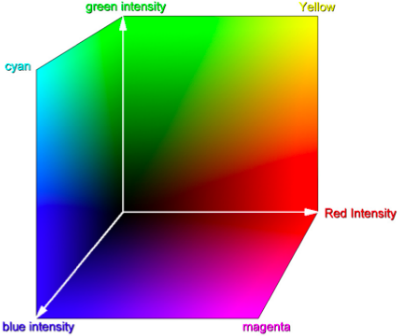


Khối màu: Bề mặt (trong và ngoài)

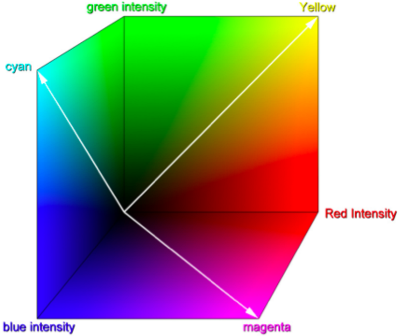




Tập các toạ độ khác nhau trong không gian màu

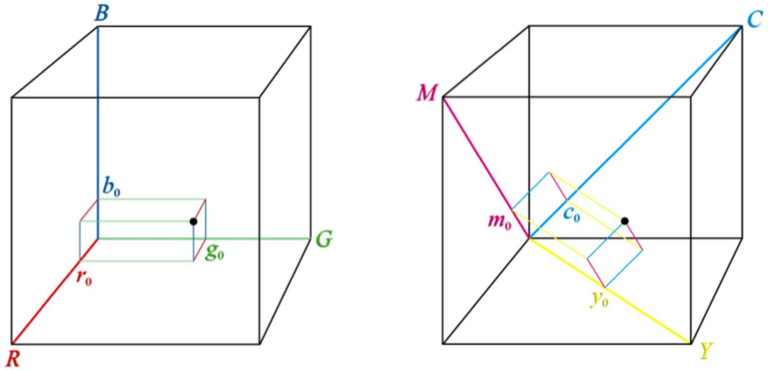


RGB axes



CMY axes

Màu với các toạ độ khác nhau



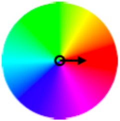
Cùng một màu có các toạ độ RGB và CMY khác nhau

Điều chỉnh màu - *Color Correction*

Thay đổi tổng thể màu sắc của ảnh là thay đổi giá trị gam màu; giá trị hue hoặc saturation của màu trong ảnh trong đó tối thiểu sự thay đổi các tính năng độ sáng của ảnh

Điều chỉnh gamma của các kênh màu

original



red $\gamma = 2$

red $\gamma = 0.5$

giảm R = tăng C

green $\gamma = 2$

green $\gamma = 0.5$

giảm G = tăng M

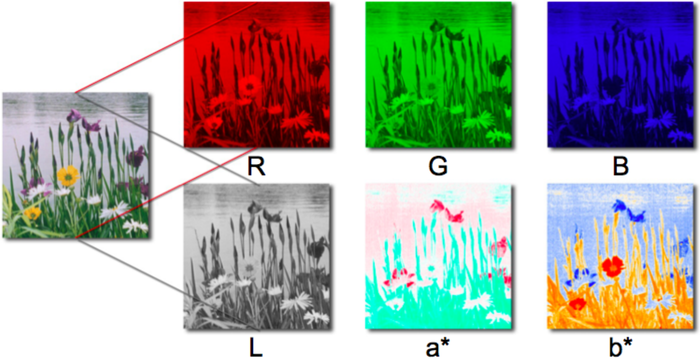
blue $\gamma = 2$

blue $\gamma = 0.5$

giảm B = tăng Y

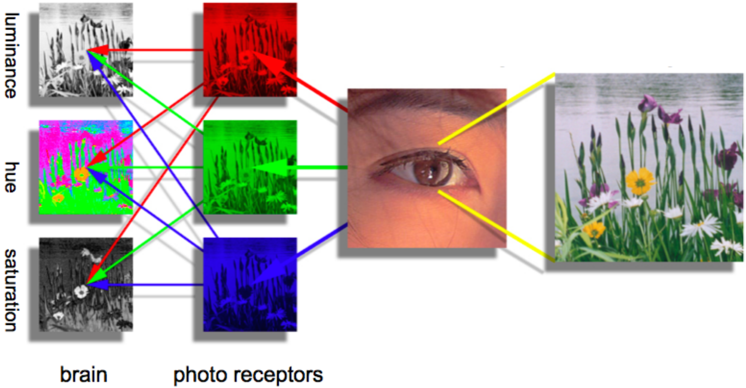
Ảnh màu

Ảnh màu được biểu diễn bởi 3 kênh màu, ví dụ R, G và B hoặc L, a^*, b^*



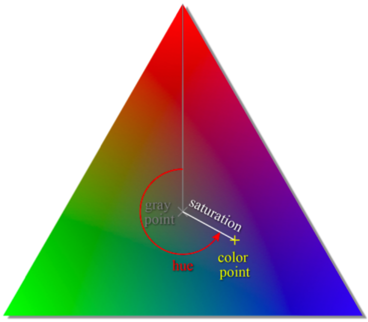
RGB sang LHS: Phép biến đổi thị giác

- Mắt người rất nhạy cảm với ánh sáng R, G và B
- Não bộ chuyển RGB thành các kênh màu và độ sáng khác nhau (*ví dụ*: LHS)



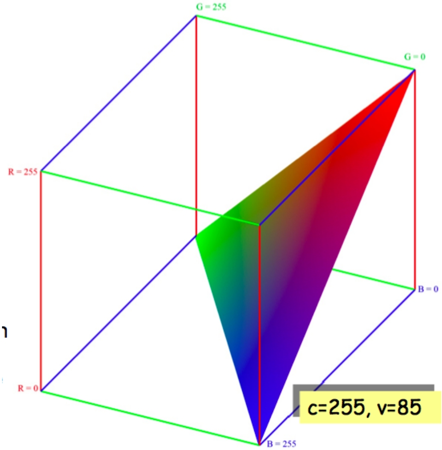
Biểu diễn độ sáng (*Brightness*) và Chrominance

Có rất nhiều cách khác nhau để mã hoá màu thành độ sáng 1D và chrominance 2D (**hue** và **satuaration**). Một phép đo độ sáng cho trước định nghĩa một mặt phẳng trong cube màu thoả mãn độ sáng là giá trị hằng số. Trên mặt phẳng này có một điểm xám. Saturation của một màu bất kì với độ sáng cho trước là khoảng cách trên bề mặt từ điểm màu đến điểm xám. Hue là độ lệch góc từ trục R đo trong cùng mặt phẳng



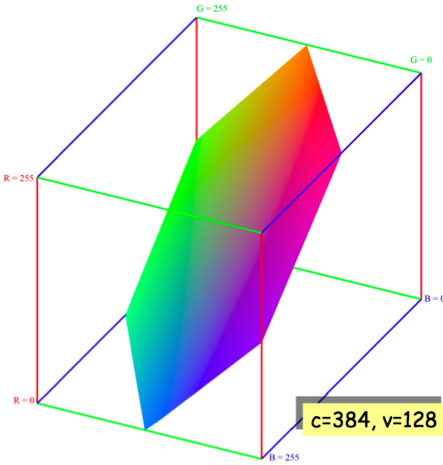
Tam giác màu Equivalue

Mặt phẳng đi qua 3 điểm $(c, 0, 0)$; $(0, c, 0)$; $(0, 0, c)$ tạo thành một tam giác bên trong cube màu nếu $c \leq 255$ hoặc $c \geq 510$, hoặc tạo thành một lục giác nếu $255 < c < 510$. Mọi màu trên mặt phẳng thoả mãn $r + g + b = c$, nên giá trị của nó bằng $c/3$. Các giá trị hue và saturation được tính trên mặt phẳng equivalue này.

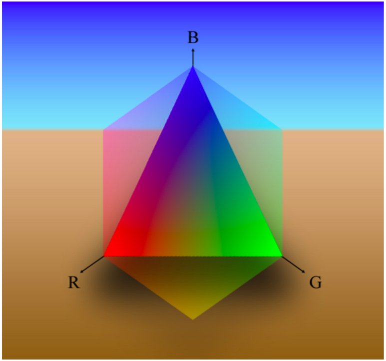


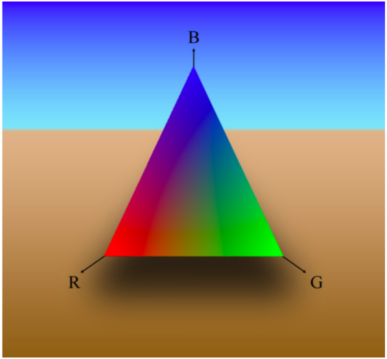
Lục giác màu Equivalue

Mặt phẳng đi qua 3 điểm $(c, 0, 0)$; $(0, c, 0)$; $(0, 0, c)$ tạo thành một tam giác bên trong cube màu nếu $c \leq 255$ hoặc $c \geq 510$, hoặc tạo thành một lục giác nếu $255 < c < 510$. Mọi màu trên mặt phẳng thoả mãn $r + g + b = c$, nên giá trị của nó bằng $c/3$. Các giá trị hue và saturation được tính trên mặt phẳng equivalue này.

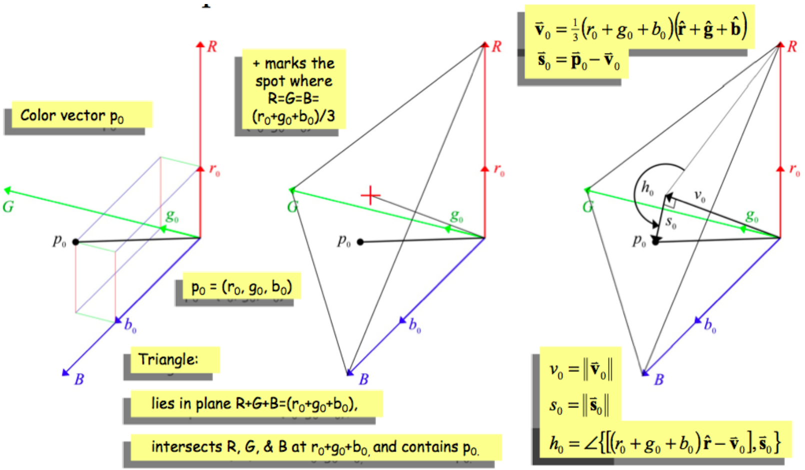


Cube màu: Tam giác Equivalue

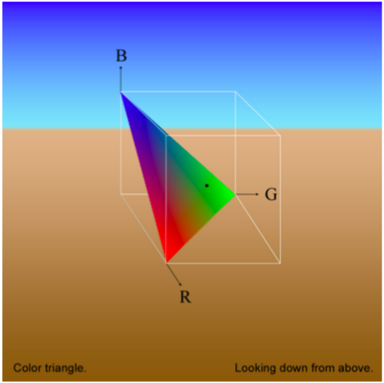


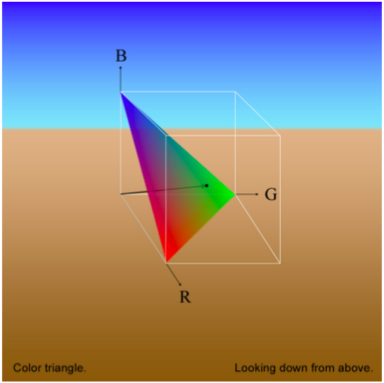


Biểu diễn màu HSV

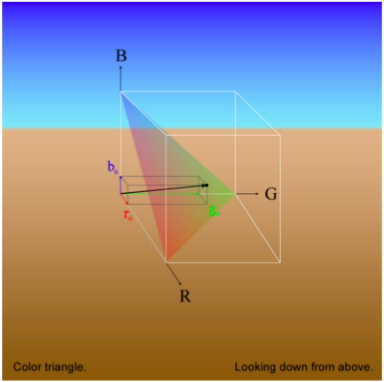


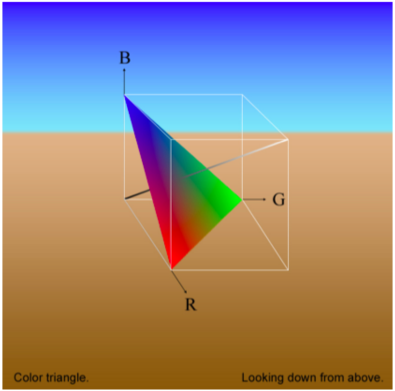
Điểm màu trên tam giác Equivalue và Vector màu liên kết với điểm



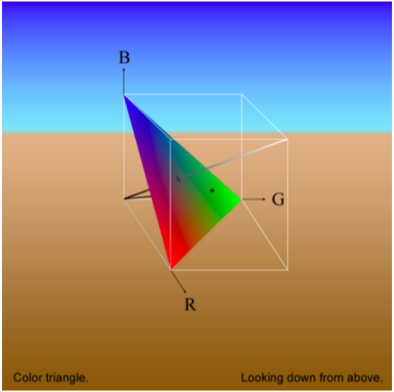


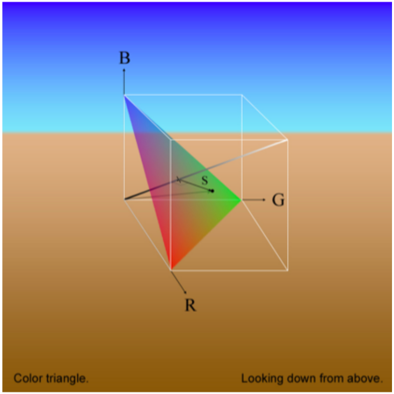
Toạ độ màu và các vector thành phần; cube màu, tam giác Equivalue và đường xám



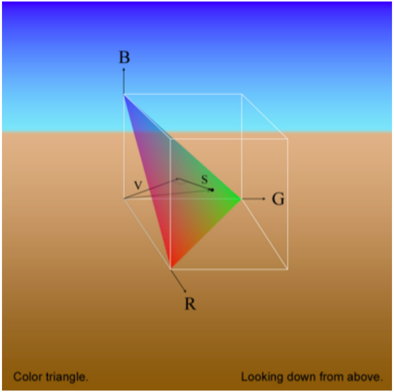


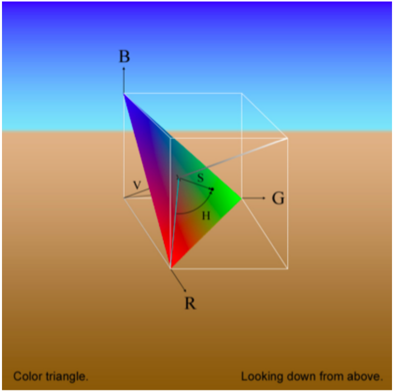
Điểm màu và đường xám; Saturation của vector màu



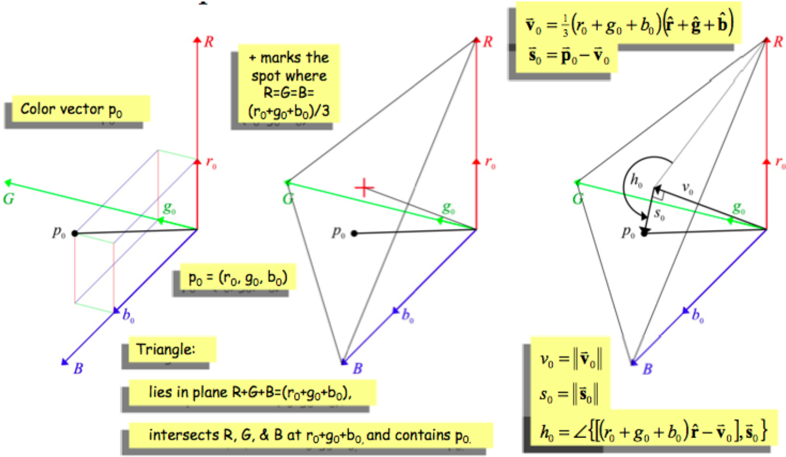


Saturation và Value; HSV và đường xám





Biểu diễn màu HSV



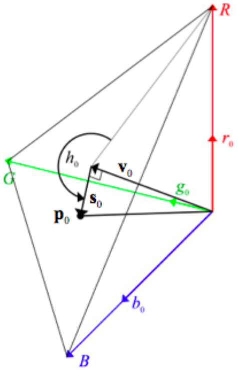
RGB sang HSV

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}, \quad \text{where } c = r_0 + g_0 + b_0.$$

$$v_0 = \frac{1}{3}c, \quad \text{or } v_0 = \|\mathbf{v}_0\| = \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} r_0 - \frac{1}{3}c \\ g_0 - \frac{1}{3}c \\ b_0 - \frac{1}{3}c \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

$$s_0 = \|\mathbf{s}_0\| = \sqrt{(r_0 - \tfrac{1}{3}c)^2 + (g_0 - \tfrac{1}{3}c)^2 + (b_0 - \tfrac{1}{3}c)^2}.$$

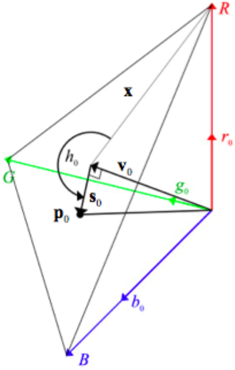


RGB sang HSV

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} - \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = \frac{c}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} r_0 - \frac{1}{3}c \\ g_0 - \frac{1}{3}c \\ b_0 - \frac{1}{3}c \end{bmatrix}.$$

$$h_0 = \angle(\mathbf{s}_0, \mathbf{x}) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{s}_0\|\|\mathbf{x}\|}\right).$$



In summary,

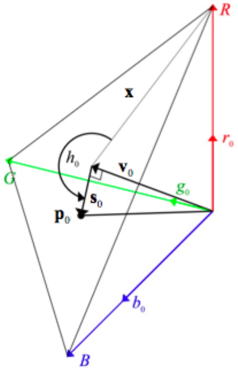
$$v_0 = \tfrac{1}{3}c, \quad \text{or} \quad v_0 = \|\mathbf{v}_0\| = \tfrac{\sqrt{3}}{3}c,$$

where $c = r_0 + g_0 + b_0$,

$$s_0 = \sqrt{\left(r_0 - \tfrac{1}{3}c\right)^2 + \left(g_0 - \tfrac{1}{3}c\right)^2 + \left(b_0 - \tfrac{1}{3}c\right)^2},$$

and

$$h_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{s}_0\|\|\mathbf{x}\|}\right).$$



Thường s_0 được chuẩn hoá trong $(0, 1)$ và $h_0 \in (0, 2\pi)$

Chuẩn hoá Saturation

Giá trị saturation

$$s_0 = \sqrt{(r_0 - \frac{1}{3}c)^2 + (g_0 - \frac{1}{3}c)^2 + (b_0 - \frac{1}{3}c)^2}$$

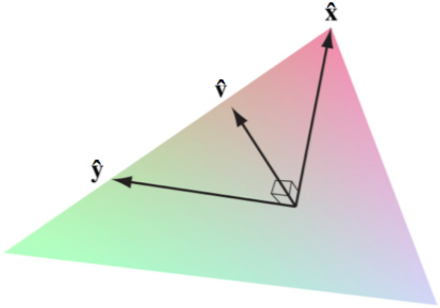
thường được chuẩn hoá trong $(0, 1)$

$$\mathbf{s}_{\max} = [255\ 0\ 0] - \frac{1}{3}[255\ 255\ 255]^T = [170\ \ -85\ \ -85]^T$$

Gọi $s_{\max} = \| \mathbf{s}_{\max} \| \approx 208.2066$
hay s_0 được thay thế bởi $s_0/s_{\max}$

HSV sang RGB

Mặt phẳng equivalue chứa $\mathbf{x}$ là trực giao với $\mathbf{v}$. Do đó, $\mathbf{v}$ trực giao với $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y} = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$ thuộc mặt phẳng.
Nếu ta giữ nguyên hướng và lờ đi độ lớn, thì các vector đơn vị $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)$ và $\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)$ sẽ tạo thành một cơ sở trực chuẩn.



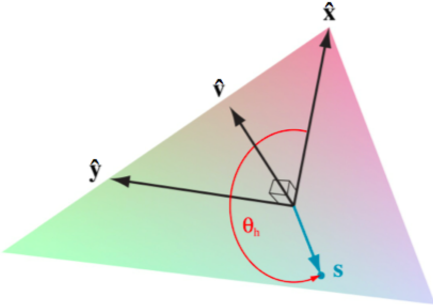
HSV sang RGB

Cho giá trị h, s và v với

$h \in [0, 2\pi), s \in [0, s_{\max}], v \in [0, 255]$

Vector saturation bằng

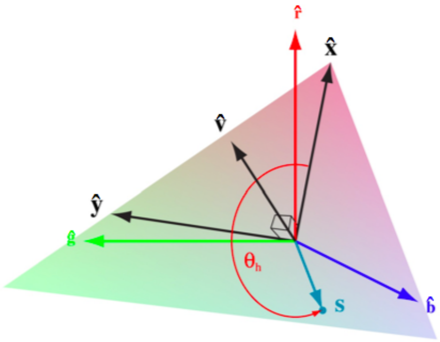
$$\mathbf{s}_{xyv} = \begin{bmatrix} s\cos(h) \\ s\sin(h) \\ 0 \end{bmatrix}_{xyv}$$



$$\mathbf{s} = s\cos(h)\hat{\mathbf{x}} + s\sin(h)\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{v}}$$

HSV sang RGB

$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{v}}$ không cùng hướng với các vector đơn vị $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{g}}$ và $\hat{\mathbf{b}}$
Do đó, $[\mathbf{s}]_{xyv}$, đã biết, không bằng $[\mathbf{s}]_{rgb}$, cái ta cần tìm để xác định màu p_0



$$[\mathbf{s}]_{rgb} = [r_0 \ g_0 \ b_0]^T$$

$$\mathbf{s} \leftrightarrow r_0\hat{\mathbf{r}} + g_0\hat{\mathbf{g}} + b_0\hat{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{s} \leftrightarrow s\cos(h)\hat{\mathbf{x}} + s\sin(h)\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{v}}$$

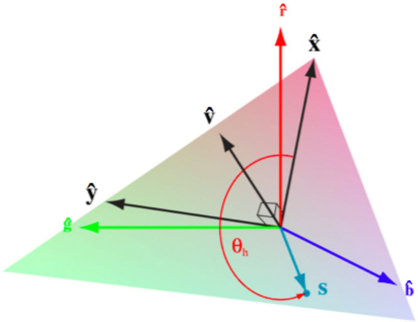
HSV sang RGB

Vector $\mathbf{s}$ viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{b}}$ và $\mathbf{s}$ viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{v}}$ đều biểu diễn cùng một điểm trong mặt phẳng equivalue

$$\mathbf{s} \leftrightarrow r_0\hat{\mathbf{r}} + g_0\hat{\mathbf{g}} + b_0\hat{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{s} \leftrightarrow s\cos(h)\hat{\mathbf{x}} + s\sin(h)\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{v}}$$

Tuy nhiên, các số cụ thể trong $[\mathbf{s}]_{rgb}$ và $[\mathbf{s}]_{xyv}$ là khác nhau



$$[\mathbf{s}]_{rgb} = [r_0 \;\; g_0 \;\; b_0]^T \text{ và}$$

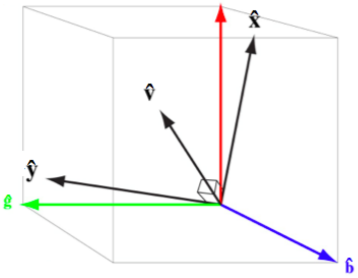
$$[\mathbf{s}]_{xyv} = [s\cos(h) \;\; s\sin(h) \;\; 0]^T \text{ tuy nhiên } [\mathbf{s}]_{rgb} \neq [\mathbf{s}]_{xyv}$$

HSV sang RGB

Ta có thể tìm được r_0, g_0 và b_0 từ h_0, s_0, v_0 nếu ta biết biểu diễn của $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{v}}$ qua $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{b}}$. Quan hệ này có dạng ma trận quay A, thoả mãn

$$[\hat{\mathbf{x}}]_{rgb} = A[\hat{\mathbf{x}}]_{xyv}, [\hat{\mathbf{y}}]_{rgb} = A[\hat{\mathbf{y}}]_{xyv},$$

$$[\hat{\mathbf{v}}]_{rgb} = A[\hat{\mathbf{v}}]_{xyv}$$



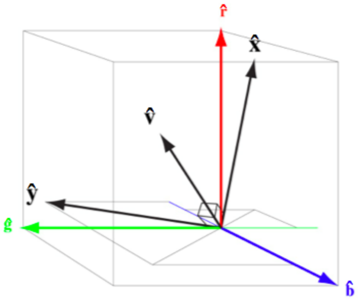
Khi đó,

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}]_{rgb} &= A[\mathbf{s}]_{xyv} \\ &= A[s\cos(h)[\hat{\mathbf{x}}]_{xyv} + s\sin(h)[\hat{\mathbf{y}}]_{xyv} + 0[\hat{\mathbf{v}}]_{xyv}] \\ &= s\cos(h)A[\hat{\mathbf{x}}]_{xyv} + s\sin(h)A[\hat{\mathbf{y}}]_{xyv} + 0A[\hat{\mathbf{v}}]_{xyv} \\ &= s\cos(h)[\hat{\mathbf{x}}]_{rgb} + s\sin(h)[\hat{\mathbf{y}}]_{rgb} + 0[\hat{\mathbf{v}}]_{rgb} \end{aligned} \quad (1)$$

HSV sang RGB

Khi viết trong hệ trục *xyv*, ta có

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



do đó,

$$[\hat{\mathbf{x}}]_{rgb} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\hat{\mathbf{y}}]_{rgb} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\hat{\mathbf{v}}]_{rgb} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hay

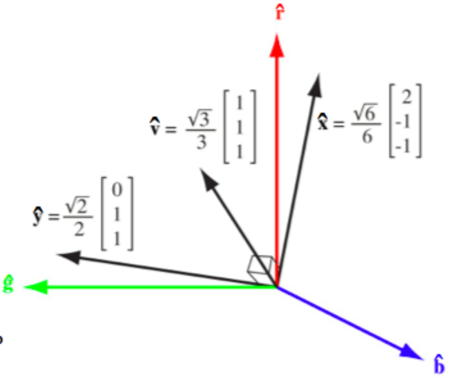
$$A = [[\hat{\mathbf{x}}]_{rgb} \; [\hat{\mathbf{y}}]_{rgb} \; [\hat{\mathbf{v}}]_{rgb}]$$

HSV sang RGB

$$[\hat{\mathbf{v}}]_{\mathrm{rgb}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$[\hat{\mathbf{x}}]_{\mathrm{rgb}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$[\hat{\mathbf{y}}]_{\mathrm{rgb}} = [\hat{\mathbf{v}}]_{\mathrm{rgb}} \times [\hat{\mathbf{x}}]_{\mathrm{rgb}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$



Do đó ma trận quay là:

$$A = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

và

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}]_{rgb} &= s\frac{\sqrt{6}}{6}\cos(h)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(h)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= s\frac{\sqrt{6}}{6}\cos(h)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(h)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Cuối cùng ta có

$$\mathbf{p}_0 = [\mathbf{p}]_{rgb} = [\mathbf{s}]_{rgb} + [\mathbf{v}]_{rgb} \text{ với } \mathbf{s}_0 = [\mathbf{s}]_{rgb}, [\mathbf{v}]_{rgb} = \mathbf{v}_0$$

Bài tập

Điều chỉnh màu thông qua các phép biến đổi

- là một phép biến đổi điểm ảnh

$$\mathrm{J}(r,c) = \Phi[\mathrm{I}(r,c)], \forall (r,c) \in \mathsf{supp}(\mathrm{I})$$

- mỗi pixel là một vector, do đó phép biến đổi là phép toán trên không gian vector

$$\mathrm{I}(r,c) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathrm{I}}(r,c) \\ \mathbf{G}_{\mathrm{I}}(r,c) \\ \mathbf{B}_{\mathrm{I}}(r,c) \end{bmatrix}, \mathrm{J}(r,c) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathrm{J}}(r,c) \\ \mathbf{G}_{\mathrm{J}}(r,c) \\ \mathbf{B}_{\mathrm{J}}(r,c) \end{bmatrix} = \Phi\{\mathrm{I}(r,c)\} = \Phi(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathrm{I}}(r,c) \\ \mathbf{G}_{\mathrm{I}}(r,c) \\ \mathbf{B}_{\mathrm{I}}(r,c) \end{bmatrix})$$

Phép toán trên không gian vector màu

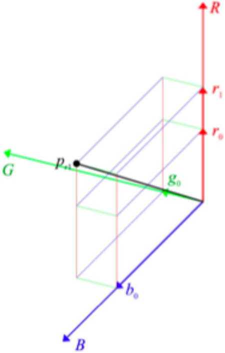
- Các phép toán tuyến tính là nhân ma trận

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

- Ví dụ về một phép toán không tuyến tính: điều chỉnh gamma

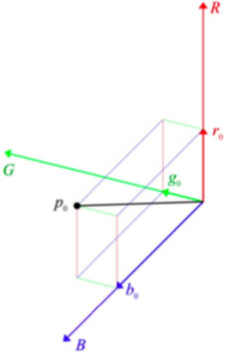
$$\begin{bmatrix} r_1 \\ g_r \\ b_1 \end{bmatrix} = 255 \begin{bmatrix} (r_0/255)^{1/\gamma_r} \\ (g_0/255)^{1/\gamma_g} \\ (b_0/255)^{1/\gamma_b} \end{bmatrix}$$

Biến đổi tuyến tính của màu

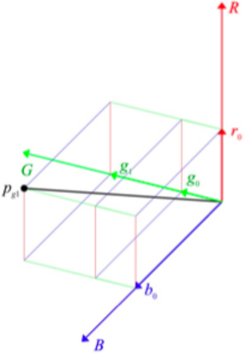


$$\begin{bmatrix} r_1 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1/r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 175 \\ 75 \\ 175 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} 125 \\ 75 \\ 175 \end{bmatrix}$$

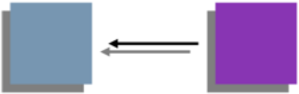


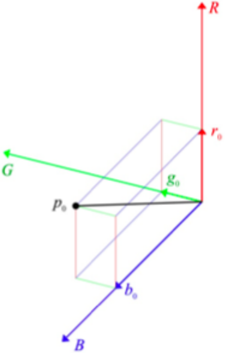
Biến đổi tuyến tính của màu



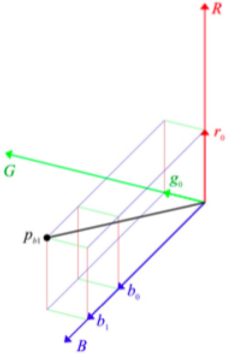
$$\begin{bmatrix} r_0 \\ g_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1/g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 125 \\ 150 \\ 175 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} 125 \\ 75 \\ 175 \end{bmatrix}$$



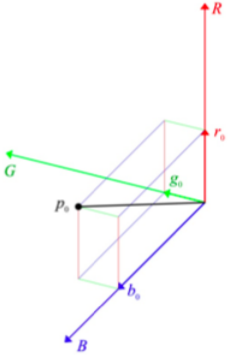


Biến đổi tuyến tính của màu

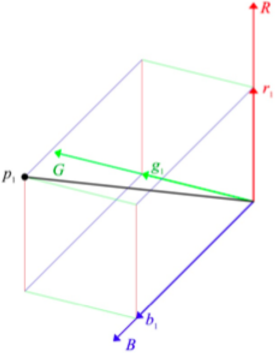


$$\begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1/b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 125 \\ 75 \\ 225 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} 125 \\ 75 \\ 175 \end{bmatrix}$$

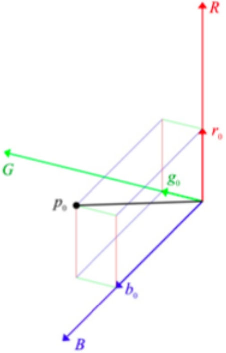


Biến đổi tuyến tính của màu



$$\begin{bmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1/r_0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1/g_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1/b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 175 \\ 150 \\ 225 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} 125 \\ 75 \\ 175 \end{bmatrix}$$



Biến đổi màu

- Giả sử $\mathrm{J} = \Phi[\mathrm{I}]$. Nếu Φ là tuyến tính thì Φ được biểu diễn bằng ma trận 3×3, A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- khi đó $\mathrm{J} = A\mathrm{I}$ hoặc chính xác hơn $\mathrm{J}(r, c) = A\mathrm{I}(r, c)$ với mọi vị trí pixel (r, c) trong ảnh I.

- Nếu vị trí pixel (r, c), $\mathrm{I}(r, c) = \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{I}} \\ \gamma_{\mathrm{I}} \\ \beta_{\mathrm{I}} \end{bmatrix}$ và $\mathrm{J}(r, c) = \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{J}} \\ \gamma_{\mathrm{J}} \\ \beta_{\mathrm{J}} \end{bmatrix}$
- thì $\mathrm{J}(r, c) = A\mathrm{I}(r, c)$ hoặc ảnh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{J}} \\ \gamma_{\mathrm{J}} \\ \beta_{\mathrm{J}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{I}} \\ \gamma_{\mathrm{I}} \\ \beta_{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}\rho_{\mathrm{I}} & a_{12}\gamma_{\mathrm{I}} & a_{13}\beta_{\mathrm{I}} \\ a_{21}\rho_{\mathrm{I}} & a_{22}\gamma_{\mathrm{I}} & a_{23}\beta_{\mathrm{I}} \\ a_{31}\rho_{\mathrm{I}} & a_{32}\gamma_{\mathrm{I}} & a_{33}\beta_{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Biến đổi màu

Biến đổi ngược Φ^{-1} (nếu tồn tại) ánh xạ ảnh J thành ảnh I: $\mathrm{I} = \Phi^{-1}[\mathrm{J}]$. Nếu Φ là tuyến tính thì nó được biểu diễn bởi ma trận nghịch đảo của ma trận A

$$A^{-1} = \left[a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\right]^{-1}$$

- $$\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{33} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

Điều chỉnh màu

Giả sử ta biết n màu trong ảnh J, mà tương ứng với tập n màu của ảnh ban đầu I (ta đã biết)

$$\begin{bmatrix}\rho_{\mathrm{J},k}\\ \gamma_{\mathrm{J},k}\\ \beta_{\mathrm{J},k}\end{bmatrix}_{k=1}^{n} \qquad \begin{bmatrix}\rho_{\mathrm{J},k}\\ \gamma_{\mathrm{J},k}\\ \beta_{\mathrm{J},k}\end{bmatrix}_{k=1}^{n} \leftrightarrow \begin{bmatrix}\rho_{\mathrm{I},k}\\ \gamma_{\mathrm{I},k}\\ \beta_{\mathrm{I},k}\end{bmatrix}_{k=1}^{n} \qquad \begin{bmatrix}\rho_{\mathrm{I},k}\\ \gamma_{\mathrm{I},k}\\ \beta_{\mathrm{I},k}\end{bmatrix}_{k=1}^{n}$$

Màu sai   Sự tương ứng đã biết   Màu đúng

Điều chỉnh màu

Mục tiêu: remap ảnh J sao cho kết quả *trùng* với ảnh ban đầu theo cách tối ưu tuyến tính

Có nghĩa là ta phải tìm một ma trận A, sao cho tối thiểu giá trị ϵ sau

$$\epsilon^2 = \sum_{k=1}^{n} \| \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{I},k} \\ \gamma_{\mathrm{I},k} \\ \beta_{\mathrm{I},k} \end{bmatrix} - A^{-1} \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{J},k} \\ \gamma_{\mathrm{J},k} \\ \beta_{\mathrm{J},k} \end{bmatrix} \|^2$$

Để tìm được nghiệm cho bài toán này, giả sử

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{I},1} \\ \gamma_{\mathrm{I},1} \\ \beta_{\mathrm{I},1} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{I},n} \\ \gamma_{\mathrm{I},n} \\ \beta_{\mathrm{I},n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{J},1} \\ \gamma_{\mathrm{J},1} \\ \beta_{\mathrm{J},1} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{J},n} \\ \gamma_{\mathrm{J},n} \\ \beta_{\mathrm{J},n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Khi đó **X** và **Y** là các ma trận cỡ $3 \times n$ sao cho

$$\mathbf{Y} \approx A^{-1}\mathbf{X}$$

với A là ma trận cỡ 3×3 ta muốn tìm

Nghiệm tối ưu tuyến tính cho bởi

$$\mathbf{B} = A^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}$$

với $\mathbf{X}^T$ là ma trận chuyển vị của ma trận $\mathbf{X}$

Chú ý:

1. n, số các cặp màu, phải ≥ 3,
2. $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ có thể lấy nghịch đảo được
3. nếu $n = 3$, thì $\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1} = \mathbf{X}^{-1}$

Điều chỉnh màu tuyến tính - ví dụ

I

J

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 17 & 222 & 240 & 240 \\ 121 & 222 & 171 & 230 \\ 171 & 218 & 160 & 166 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 17 & 222 & 240 & 236 \\ 122 & 222 & 171 & 227 \\ 114 & 185 & 103 & 106 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{Y}$$

Ta cần phải tìm Φ^{-1} mà ánh xạ ngược lại

$$\mathbf{Y} = \Phi^{-1} \mathbf{X}$$

Điều chỉnh màu - sử dụng 3 mappings

$$\mathbf{B} = A^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$$

J

J′

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 222 & 17 & 240 \\ 222 & 122 & 171 \\ 185 & 114 & 103 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 222 & 17 & 240 \\ 222 & 121 & 171 \\ 218 & 171 & 160 \end{bmatrix}$$

Điều chỉnh màu - sử dụng 3 mappings

$$\mathbf{B} = A^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$$

I

J′

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 222 & 17 & 240 \\ 222 & 122 & 171 \\ 185 & 114 & 103 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 222 & 17 & 240 \\ 222 & 121 & 171 \\ 218 & 171 & 160 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = A^{-1} = \mathbf{YX}^T(\mathbf{XX}^T)^{-1}$$

J

J′

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 17 & 222 & 240 & 240 \\ 121 & 222 & 171 & 230 \\ 171 & 218 & 160 & 166 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 17 & 222 & 240 & 236 \\ 122 & 222 & 171 & 227 \\ 114 & 185 & 103 & 106 \end{bmatrix}$$

Điều chỉnh màu - sử dụng 4 mappings

$$\mathbf{B} = A^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}$$

I

J′

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 17 & 222 & 240 & 240 \\ 121 & 222 & 171 & 230 \\ 171 & 218 & 160 & 166 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 17 & 222 & 240 & 236 \\ 122 & 222 & 171 & 227 \\ 114 & 185 & 103 & 106 \end{bmatrix}$$

Điều chỉnh màu - sử dụng 128 mappings

$$\mathbf{B} = A^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}$$

I

J′