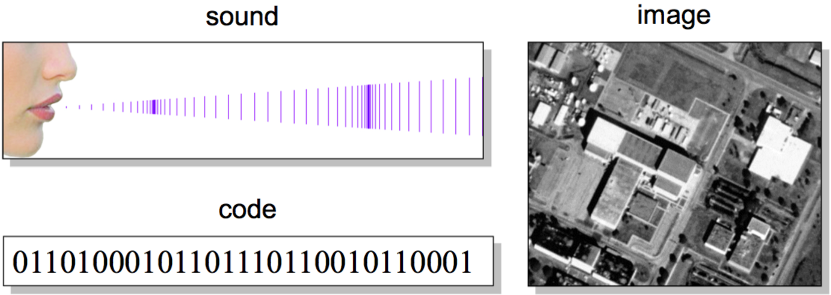
Xử lý ảnh - Biến đổi Fourier 1& 2 chiều

Đỗ Thanh Hà

Bộ môn Tin học
Khoa Toán - Cơ - Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

Tín hiệu

Là hiện tượng có thể đo được và nó có thể thay đổi theo thời gian hoặc không gian



Tín hiệu: biểu diễn không gian - thời gian (*Space - Time*) và biểu diễn miền tần số (*Frequency-Domain*)

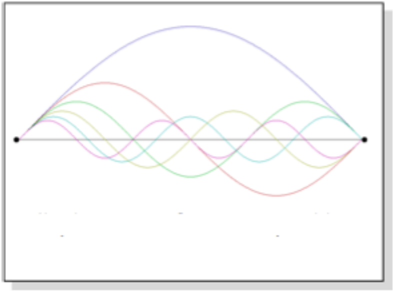
- Biểu diễn không gian/thời gian: là một đồ thị các phép đo tương ứng tại một thời điểm và/hoặc các vị trí trong không gian
- Biểu diễn miền tần số: là mô tả chính xác tín hiệu thông qua sự chuyển động sóng của nó

Nguồn gốc của âm thanh

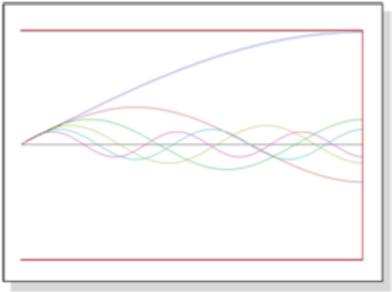
- Các rung động cơ học của đối tượng trong không khí
- Rung động: chuyển động đàn hồi bên trong của vật chất
- Các đối tượng rung động với các kiểu (*mode*) khác nhau
- *Mode* là một mẫu rung với hình dáng đặt biệt

Các mẫu rung: ví dụ

Chú ý rằng các *mode* là các sóng hình sin (*sinusoids*)

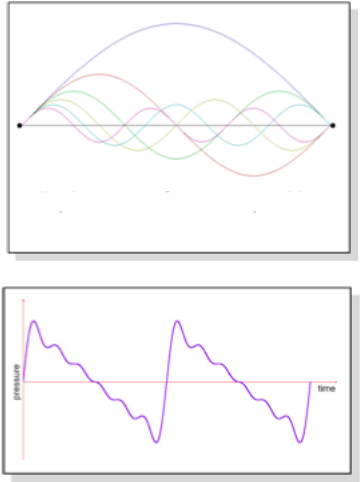


string modes

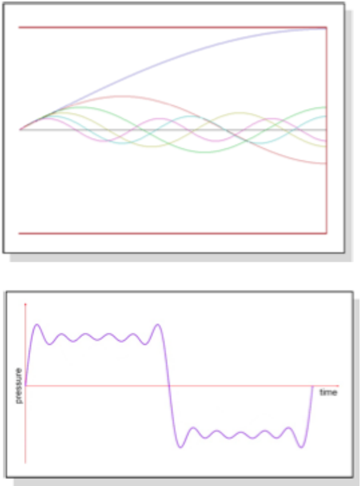


pipe modes

Sóng âm



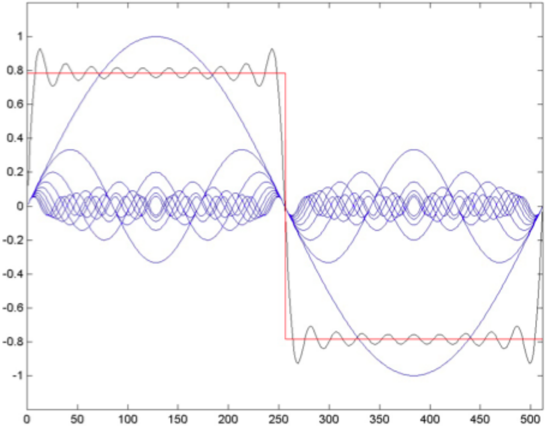
string sound



pipe sound

Mọi tín hiệu nào đều có biểu diễn miền tần số

$$sq(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)t\right]$$



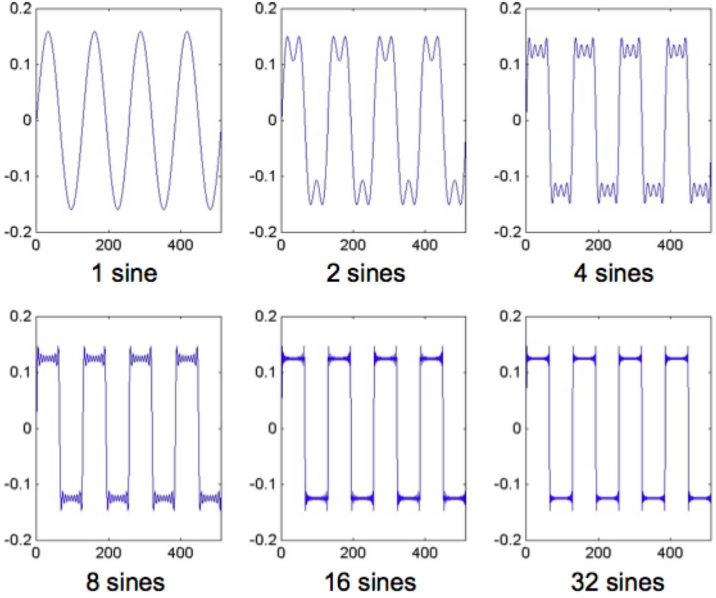
Biểu diễn miền tần số

- Bất kì tín hiệu tuần hoàn nào đều có thể được mô tả bằng tổng các hàm *sinusoids*

$$sq(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)t\right]$$

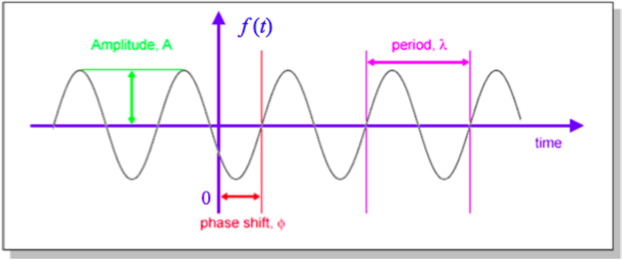
- Các *sinusoids* được gọi là các hàm cơ bản
- Các hệ số nhân gọi là các hệ số Fourier

Ví dụ


0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
200
400
1 sine
2 sines
4 sines
8 sines
16 sines
32 sines

Thành phần trong *sinusoids*

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t - \phi\right)$$



- $\frac{1}{\lambda}$ là tần số của *sinusoids* (Hz)
- $\frac{2\pi}{\lambda}$ là tần số góc (radians/s)

Do độ tương tự

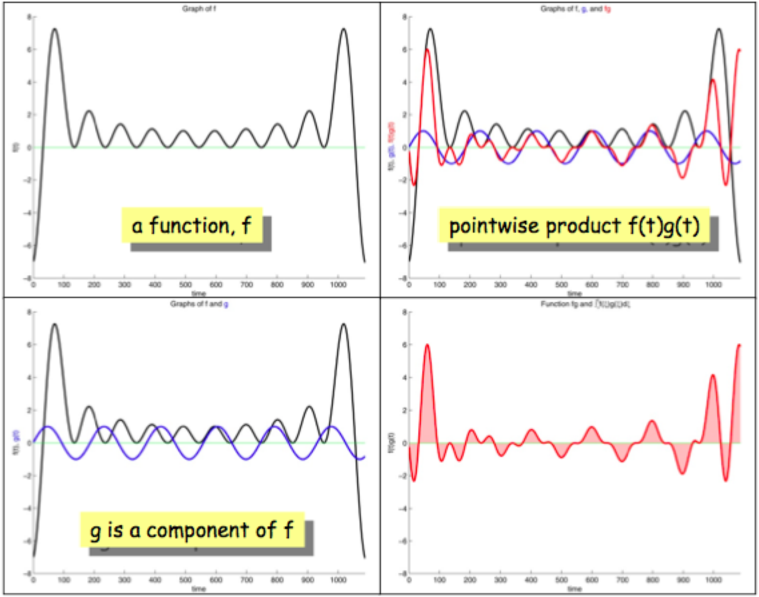
Độ tương tự giữa hai hàm f và g trong khoảng $(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$ được định nghĩa bởi:

$$< f, g >= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)g^*(t)dt$$

với $g^*(t)$ là liên hợp phức của $g(t)$

- $< f, g >$ được xem như một phép chiếu của f lên g
- Nếu f và g có cùng năng lượng, thì $< f, g >$ đạt giá trị lớn nhất khi $f = g$.

Độ tương tự - Ví dụ



Tích của hàm tuần hoàn và hàm *sinusoids*

$$< f, g >= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) dt$$

$$< f, g >= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) dt$$

Các kết quả số thực cho biên độ hay độ lớn (*amplitude*) của hàm *sinusoids* trong hàm

Tích của hàm tuần hoàn và hàm *sinusoids*

$$
\begin{aligned}
< f, g > &= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}t\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t\right)\right]dt \\
&= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}t}dt = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)e^{-i\omega t}dt
\end{aligned}
$$

Các kết quả số phức cho biên độ (*amplitude*) và pha (*phase*) của hàm *sinusoids* trong hàm

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right)$$

Tuần hoàn: $\exists \lambda \in R$ sao cho $f(t \pm n\lambda) = f(t)$

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \varphi_n\right)\right] dt \text{ với } n \geq 0$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \varphi_n\right)\right] dt \text{ với } n \geq 0$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{+i\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right) + |C_n| \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)$$

$$C_n = |C_n| e^{+i\phi_n} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n}{\lambda}t} dt$$

Trong đó: $i = \sqrt{-1}$; $C_n = |C_n|e^{+i\phi_n}$; $e^{\pm ix} = \cos x + i \sin x$ và $f(t+n\lambda) = f(t)$ với mọi số nguyên n

Mối quan hệ giữa chuỗi Fourier thực và phức

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right] \text{ với } \omega_n = \frac{2\pi n}{\lambda} \\
&= \frac{2}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\cos\omega_n\eta d\eta \cos\omega_n t + \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\sin\omega_n\eta d\eta \sin\omega_n t\right] \\
&= \frac{2}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\left[\cos\omega_n\eta\cos\omega_n t + \sin\omega_n\eta\sin\omega_n t)\right] d\eta \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\cos(\omega_n\eta - \omega_n t) d\eta
\end{aligned}
$$

Mối quan hệ giữa chuỗi Fourier thực và phức (tiếp)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right)$$

Nên:

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left[f(\eta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) \right] d\eta = 0$$

Do đó:

$$-i\frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta) \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) d\eta \right] = 0$$

$$f(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta) \cos\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) d\eta \right] - i\frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta) \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) d\eta \right]$$

Chuỗi Fourier

Mối quan hệ giữa chuỗi Fourier ảo và thực (tiếp)

$$f(t) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{\cos(\omega_n\eta-\omega_n t)}\,d\eta\right] - i\frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{\sin(\omega_n\eta-\omega_n t)}\,d\eta\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{[\cos\omega_n(\eta-t) - i\sin\omega_n(\eta-t)]\,d\eta}$$

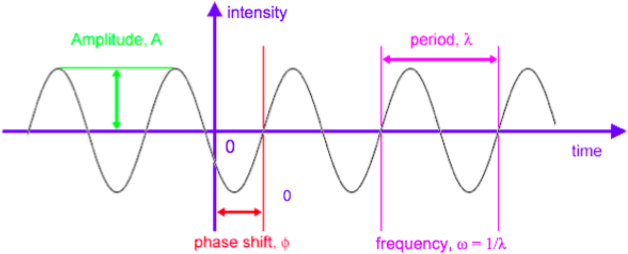
$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{e^{-i\omega_n(\eta-t)}}\,d\eta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)e^{-i\frac{2\pi n}{\lambda}\eta}\,d\eta}\,e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{C_n}e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|e^{i\phi_n}e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|e^{+i\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)}$$

Ý nghĩa các hệ số

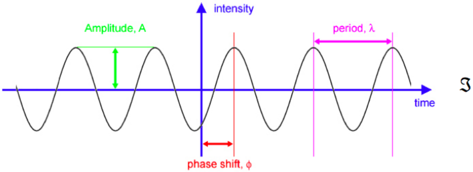
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} \text{ với } C_n = |C_n| e^{+i\phi_n}$$

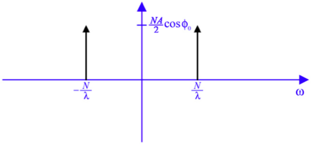


$$A = |C_n|, \text{ và } \omega_n = 2\pi n/\lambda$$

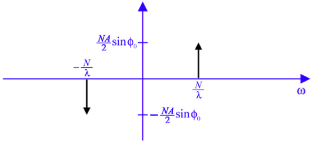
Phần thực + Phần ảo?

$$f(n) = A\cos[(2\pi n/\lambda) - \phi_0] \text{ với n} = 0, \ldots., \text{N-1}$$





$Re\{F(\omega)\}$

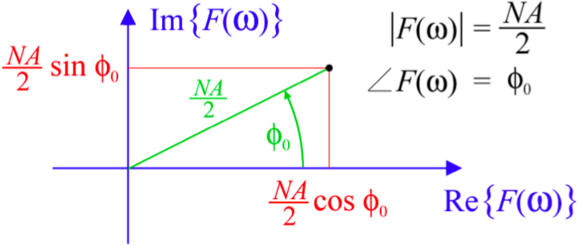


$Im\{F(\omega)\}$

$$F(\omega) = (\frac{NA}{2}\cos\varphi)\left[\delta(\omega + N/\lambda) + \delta(\omega - N/\lambda)\right] + i(\frac{NA}{2}\sin\varphi)[-\delta(\omega + N/\lambda) + \delta(\omega - N/\lambda)]$$

Phần thực + Phần ảo đến Biên độ & Pha

$$F(\omega = +N/\lambda) = \frac{NA}{2}\cos\phi_0 + i\frac{NA}{2}\sin\phi_0$$

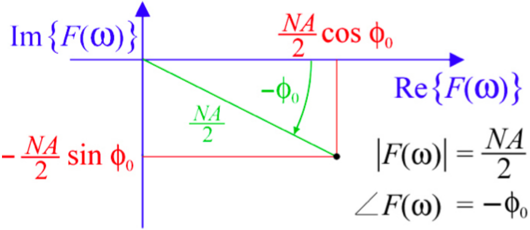


$$|F(\omega)| = \frac{NA}{2}$$

$$\angle F(\omega) = \phi_0$$

Phần thực + phần ảo đến Biên độ & Pha

$$F(\omega = -N/\lambda) = \frac{NA}{2}\cos\phi_0 - i\frac{NA}{2}\sin\phi_0$$



Biến đổi Fourier

là phép biến đổi một tín hiệu không tuần hoàn thành tổng liên tục của các *simusoids*

$$F(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{i\Phi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\cos(2\pi\omega t) + i \sin(2\pi\omega t)\right] dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right| e^{-i(2\pi\omega t + \Phi(\omega))} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\cos(2\pi\omega t) - i \sin(2\pi\omega t)\right] d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right| \left[\cos(2\pi\omega t + \Phi(\omega)) - i \sin(2\pi\omega t + \Phi(\omega))\right] d\omega$$

Biến đổi Fourier rời rạc

Tín hiệu rời rạc, $\{h_k | k = 0, 1, ..., N-1\}$, có chiều dài N hữu hạn, có thể biểu diễn thành tổng có trọng số của N *simusoids*, $\{e^{-i2\pi kn/N} | n = 0, ..., N-1\}$ như sau:

$$h_k = \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-i2\pi kn/N}$$

trong đó tập $\{H_n | n = 0, 1, ..., N-1\}$ là các hệ số Fourier

$$H_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{+i2\pi kn/N}$$

Bài tập