

# Vélabrögð

Helga Ingimundardóttir

10. mars 2015

## 1 Inngangur

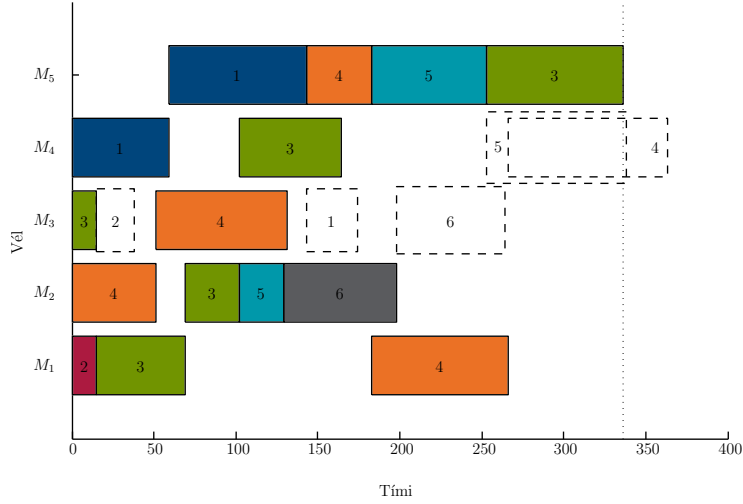
Í stuttu máli snýst verkefnið um að læra að bera kennsl á góðar lausnir. Ég hef einskorðað verkefnið við tilviksrannsókn á verkniðurröðun á vélum (JSP, e. job-shop scheduling problem) sem felst í því að þurfa að gera raðbundnar ákvarðanir um hvaða verk eigi að vera afgreitt næst, þar sem þau eru að keppast um sömu aðföngin. Í raun má útvíkka aðferðafræðina til hvers kyns strjála bestun.

Hugmyndina að rannsókninni kviknaði þegar ég var að vinna í raunhæfu verkefni í aðgerðagreiningu í grunnnámi mínu. Um var að ræða bestun á verkniðurröðun fyrir Össur. Í eðli sínu er verkniðurröðun tiltölulega einfalt verkefni, og skipar stóran sess hjá framleiðslufyrirtækjum en stærðargráðan á vandamálinu gerir það að verkum að oft er erfitt að leysa verkefnið með nákvæmum aðferðum. Þetta voru mín fyrstu kynni af því að þurfa að setta mig við einhverja lausn sem var ekki endilega hin fræðilega „besta“ lausn. Hér koma brjóstvitsaðferðir (e. heuristics) eða „þumalputtareglur“ sterkar inn, en þá er stóra spurningin hvernig má koma á sjálfvirkni í því ferli? Til að geta gert það, þá er gott að hafa skilning á því hvernig einfaldar reglur eru takast á við verkefnið og athuga hvort hægt sé að læra eitthvað á þeim áður en hafist er handa með flóknari reiknirit. Mun því þessi grein fjalla um gæðamæt einföldum brjóstvitsaðferðum úr fræðunum.

## 2 Verkniðurröðun á vélar

Gerum ráð fyrir að við höfum  $n \times m$  JSP, þar sem  $n$  verk,  $\mathcal{J} = \{J_j\}_{j=1}^n$ , eiga að vera afgreidd á  $m$  vélum,  $\mathcal{M} = \{M_a\}_{a=1}^m$ . Verkefnin þurfa að vera afgreidd í tiltekinni röð, þ.e. sérhvert verk  $J_j$  þarf að fylgja runu af  $m$  aðgerðum  $\sigma_j = \{\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \dots, \sigma_{jm}\}$ . Rétt er að taka fram að verk getur ekki hafist handa á næstu vél fyrr en það hefur lokið núverandi aðgerð. Þar að auki getur sérhver vél aðeins meðhöndlað eitt verk í einu. Viðbættar skorður sem eru oft teknar til greina eru sleppitími og útgáfutími, en þeir eru ekki til skoðunar hér. Markfallið er að tímasetja öll verk þannig að lágmarka skal hámarks heildartíma (e. makespan),  $C_{\max}$ .

Brjóstvitsaðferðir fyrir tímaáætlanir eru yfirleitt uppbyggingar- eða umbætunaralgrím. Umbætunaralgrím byrja á fullbúinni lausn og reynir að finna sam-



Mynd 1: Gantt rit af ókláraðri JSP stundaskrá eftir 15 aðgerðir: heilir kassar tákna  $\chi$  og kassar með brotalínu tákna  $\mathcal{L}^{(16)}$ . Núverandi heildartími,  $C_{\max}$ , er gefinn upp sem punktalína.

bærilegar, en betri lausnir. Uppbyggingaralgrím byrja aftur á móti með tómri lausn og bæta við einu verki í einu þar til lausnin er fullbúin, og er það sú nálgun sem aðferðafræðin mín gengur út frá. Í þessu tilfelli þá eru yfirleitt röðunarreglur (DR, e. dispatching rules) sem ákvarða hvaða ókláraða verk verður valið næst.

Það er ekki nóg að vita hvaða verkefni ætti að vera valið næst, heldur þarf líka að athuga hvar væri best að staðsetja það. Þar sem við viljum búa til samþjappaðar tímaáætlanir þá setjum við verkið af stað um leið og það er laust. Skoðnum nú Gantt ritið á mynd 1 sem sýnir dæmi um  $6 \times 5$  JSP þar sem verknúmerið er gefið inn í kassa og er breidd þess vinnslutími verksins, vélarnar eru á lóðrétta ásinum og lárétti ásin segir til um tíma aðgerða, þar sem núverandi  $C_{\max}$  gefið sem punktalína. Búið er að setja af stað 15 aðgerðir, nefnilega,

$$\chi = (J_3, J_3, J_3, J_3, J_4, J_4, J_5, J_1, J_1, J_2, J_4, J_6, J_4, J_5, J_3), \quad (1)$$

þar af leiðandi eru ókláruðu verkin eftirfarandi  $\mathcal{L} = \{J_1, J_2, J_4, J_5, J_6\}$ , sem lýsa þeim 5 mögulegu verkum sem geta verið afgreidd á tímapunkti  $k = 16$  (athugið að verk  $J_3$  er fullklárað) – þessi verk eru gefin upp með brotalínu og sýna hvernig staðan gæti breyst með áætlun þeirra. Við sjáum að  $J_2$  getur verið staðsett á  $M_3$  annaðhvort á milli  $J_3$  og  $J_4$ , eða eftir  $J_4$ . Ef  $J_6$  hefði nú þegar verið afgreitt, þá myndi myndast rauf á milli þess og  $J_4$ , þ.a.l. myndast þriðji möguleikinn, þ.e. fyrir  $J_2$  er sett eftir  $J_6$ . Uppbyggingaralgrímið þarf því að ákveða hvert þessara raufa ætti að vera valið fyrir verkið og er það óháð röðunarreglunni sem er notuð. Mismunandi staðsetningaraðferðir geta verið skoðaðar, t.a.m. að velja þá rauf sem er minnsta (en nægjanlega stór) fyrir verkið. Grunnrannsóknir sýndu að

slík nálgun gat í raun útilokað bestu lausn m.t.t. lágmarks heildartíma. En slík staða kom ekki upp ef við afgreiðum verkin um leið og þau berast.

### 3 Röðunarreglur

Einfaldar röðunarreglur (SDR, e. single-based priority dispatching rule), er fall af sérkennum verka og/eða véla tímaáætlunarinnar. Sérkennin geta verið fastar eða breyst í takti við ákvarðanaferlið. Til dæmis getur forgangurinn byggst á eiginleikum vinnslutíma verkanna, til dæmis,

**Minnsti vinnslutími (SPT, e. shortest immediate processing time)**

gráðug aðferð sem klárar verk með minnsta vinnslutíma fyrst,

**Stærsti vinnslutími (LPT, e. longest immediate processing time)**

gráðug aðferð sem klárar verk með stærsta vinnslutíma fyrst,

**Minnsta heildarvinna (LWR, e. least work remaining)**

þar sem ásetningurinn er að klára verk sem eru komin langt á veg í framvindu sinni, þ.e. að lágmarka verklistann  $\mathcal{L}$ ,

**Stærsta heildarvinna (MWR, e. most work remaining)**

þar sem ásetningurinn er að flýta fyrir framvindu verka sem krefjast mikinn vinnslutíma, og gefur því af sér jafnari framvindu fyrir öll verk.

Þetta eru þær algengustu röðunarreglur í starfi vegna einfaldleika þeirra og skilvirkni, en ótal fleiri reglur koma líka til greina. Yfirlit yfir 100 sígildar röðunarreglur má finna í Panwalkar and Iskander [1977], en einnig er greinargóð lýsing á SDR eftir Haupt [1989].

### 4 Tilraunir

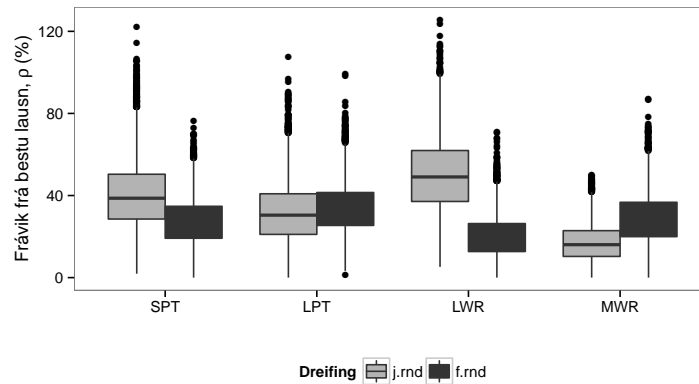
Við skulum skoða nú tvær gagnadreifingar fyrir JSP, nefnilega með slembinni uppröðun, kallað `j.rnd`, og einsleitri uppröðun, kallað `f.rnd`. Vinnslutíminn í báðum tilfellum er fengin með jafnri dreifingu á bilinu [1, 99]. Við höfum  $N_{\text{train}} = 500$  af hvorri dreifingu, og vitum bestu lausn með því að besta með hugbúnaði fyrir línuleg bestunarverkefni [Gurobi Optimization, Inc., 2014].

Þar sem vinnslutíminn er mismunandi þá munum við styðjast við að lágmarka frávík frá bestu lausn með eftirfarandi hætti,

$$\rho = \frac{C_{\max}^{\text{DR}} - C_{\max}^{\text{opt}}}{C_{\max}^{\text{opt}}} \cdot 100\% \quad (2)$$

þar sem  $C_{\max}^{\text{DR}}$  er fengið með DR og  $C_{\max}^{\text{opt}}$  er besta lausn.

Beitum nú þeim SDR sem við kynntum áðan, á gagnasettin okkar. Kassarit fyrir  $\rho$  er gefið upp í mynd 2. Við sjáum að það er greinilegur munur á því hvaða SDR er beitt á gögnin, t.a.m. er MWR mjög hentug regla fyrir `j.rnd`, aftur



Mynd 2: Kassarit fyrir SDR

á móti er það ekki tilvikið fyrir `f.rnd` þar sem gagnstæð regla, LWR, kemur umtalsvert betur út.

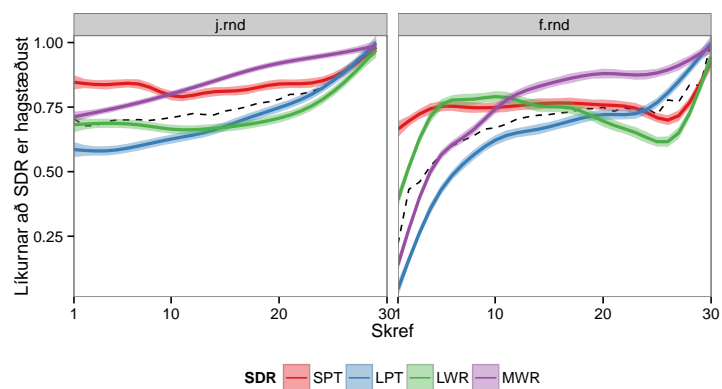
Í mörgum tilfellum þá er látið staðar numið við þessar niðurstöður og sú DR sem kom best út er valin fyrir verkefnið. En það sem við viljum vita er hvað aðgreinir þessar reglur? Af hverju er svona mikill munur á niðurstöðum? Sérstaklega í ljósi þess að innblástur þeirra virðist ekki vera svo ólíkur; SPT svipar til LWR og LPT til MWR. Einnig er SPT andstæða LPT og LWR fyrir MWR. Af hverju er einsleit verkumröðun `f.rnd` að velja LWR fram yfir MWR og öfugt? Einnig hvenær fer að greina á gæði lausnanna með þessum aðferðum?

Ef við skoðum bestu lausnir fyrir verkefnin og athuga hvenær þær væru jafngildar að beita SDR, líkt og mynd 3 sýnir, þá fyrir `j.rnd` má sjá að oftar en ekki er LWR og LPT verri en að velja verk að handahófi sé best (brotalína), sem útskýrir slakar niðurstöður þeirra. Einnig má sjá að SPT sýnir hegðun sem er líklegri til að hagstæðri en MWR – en aðeins til að byrja með. Eftir það fer MWR að vera líklegri til vinnings. En því miður er ekki hægt að beita SPT fyrst (segjum frá skrefi 1-10) og láta svo MWR taka svo við, því þá erum við nú þegar búin að stilla tímaáætluna á þann veg að MWR nær ekki að rétta sig af.

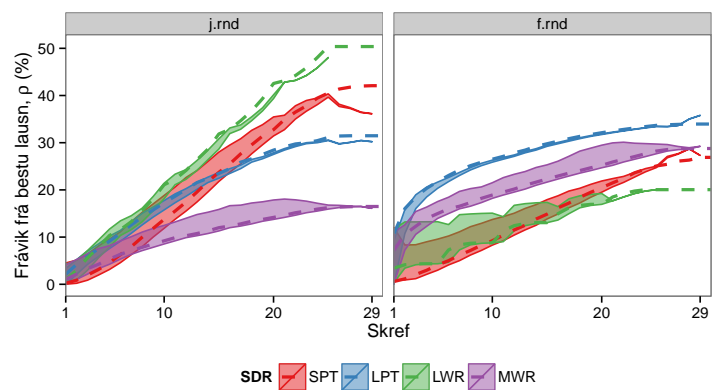
Spyrjum okkur nú, hvernig eru reglurnar að breytast frá öðrum verkum? Mynd 4 sýnir hvernig frávikið  $\rho$  er að breytast sem fall af ákvörðunarskrefi með því að fylgja ákveðinni SDR (brotalína). Einnig er skoðað hvernig væru besta og versta frávik frá þeirri sömu stöðu, þ.e. ef við fylgdum ekki reglunni. Þá sést glögglega að MWR er stöðugri í að koma sér í betri stöðu en SPT, jafnvel þótt bestu lausnirnar virtust fylgja SPT hegðun til að byrja með.

## Heimildir

S. S. Panwalkar and Wafik Iskander. A survey of scheduling rules. *Operations Research*, 25(1):45–61, 1977.



Mynd 3: Líkurnar að SDR sé hagstæðust, brotalínan lýsir að verk að handhófi sé hagstæðast.



Mynd 4: Breyting frávik sem fall af áætlunarskrefi fyrir gefið SDR.

- R. Haupt. A survey of priority rule-based scheduling. *OR Spectrum*, 11:3–16, 1989.
- Gurobi Optimization, Inc. Gurobi optimization (version 6.0.0) [software], 2014.  
URL <http://www.gurobi.com/>.