Simulación de Sistemas de Control (66.55)/Laboratorio de Control Automático (86.22)

Controlador PID de tiempo discreto

10 de septiembre de 2018

Introducción

La ecuación de un controlador PID de tiempo discreto está dada por [1][2]:

$$u_k = P_k + I_k + D_k$$

Los términos P_k, I_k y D_k reciben los nombres de proporcional, integral y derivativo y se calculan a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} P_k &= K_p \left(r_k - y_k \right) \\ I_{k+1} &= K_p K_i h \sum_{j=0}^{k} \left(r_j - y_j \right) = I_k + K_i K_p h \left(r_k - y_k \right) \\ D_k &= \frac{\gamma}{\gamma + h} D_{k-1} - \frac{K_p K_d}{\gamma + h} \left(y_k - y_{k-1} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

donde: h es el periodo de muestreo, r_k es la referencia, y_k es la variable medida y K_p, K_i, K_d y N son parámetros del controlador. Por otro lado, $\gamma = K_d/N$.

Algoritmo

Los pasos necesarios para ejecutar este algoritmo se pueden expresar mediante el siguiente pseudocódigo:

```
for
  leer referencia
  leer salida de la planta
  calcular acción de control
  escribir acción de control
  actualizar estados del controlador
end
```

Entre la iteración k y la siguiente $(k+1)$ transcurre un periodo de muestreo h. Estos pasos se corresponden con las funciones de *callback* de las S-Functions (Fig. 1).

Desarrollo del PID en Variables de Estado

Cada uno de los términos del PID en la Ec. (1) se puede expresar en variables de estado (VdeE). Un sistema discreto expresado en VdeE se define como [3]:

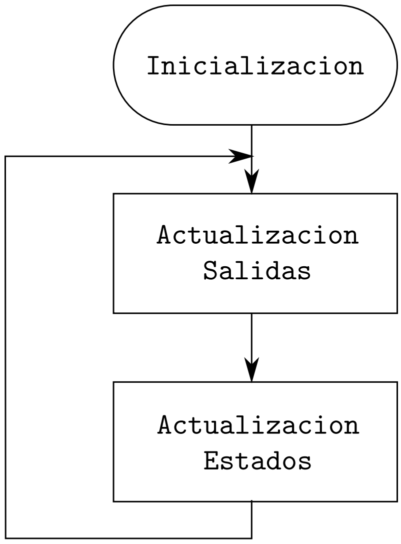

Figura 1: Ejecución de una S-Function.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\
\mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{u}_k
\end{aligned}
\tag{2}
$$

A continuación estudiaremos por separado a cada término, para luego llegar a una representación del controlador PID como una ecuación de estados discreta.

Término proporcional P_k

El término proporcional está dado por:

$$P_k = K_p \left(r_k - y_k\right). \tag{3}$$

Se puede ver que se trata de ecuación algebráica que depende solamente de las entradas r_k e y_k. Es decir, necesitamos los valores de ambas entradas en el instante actual.

Se puede notar que, de acuerdo con la ejecución de la S-Function de la Fig. 1, esta ecuación se debe calcular en el paso `Actualización Salidas`.

Término proporcional I_k

El término integral se calcula como:

$$I_{k+1} = I_k + K_i K_p h \left(r_k - y_k\right). \tag{4}$$

Se puede notar que esta ecuación tiene la forma de una ecuación de estados discreta, donde I_k es el estado. Se observa que el próximo valor del estado se calcula a partir de su valor actual I_k, y de los valores actuales de las entradas r_k e y_k.

Volviendo nuevamente a la ejecución de la S-Function de la Fig. 1, se puede ver que esta ecuación se debe calcular en el paso `Actualización Estados`.

Término proporcional D_k

Finalmente, el término derivativo se calcula como:

$$D_k = \frac{\gamma}{\gamma+h} D_{k-1} - \frac{K_p K_d}{\gamma+h} \left(y_k - y_{k-1}\right) \tag{5}$$

A diferencia de los términos anteriores, se puede ver que no se trata ni de una ecuación de estados ni de una ecuación algebráica. El término D_k se puede descomponer en dos partes, por un lado lo que depende de los valores pasados D_{k-1} e y_{k-1} y, por otro lado, lo que depende del valor actual de la entrada y_k. De este modo:

$$\begin{aligned} D_k &= \left(\frac{\gamma}{\gamma+h} D_{k-1} + \frac{K_p K_d}{\gamma+h} y_{k-1}\right) - \frac{K_p K_d}{\gamma+h} y_k \\ &= \xi_k - \frac{K_p K_d}{\gamma+h} y_k. \end{aligned} \tag{6}$$

donde podemos ver que llamamos ξ_k al término que contiene los valores pasados. De este modo, la Ec. (6) queda como una ecuación algebráica. Por otro lado, definimos:

$$\xi_{k+1} = \frac{\gamma}{\gamma+h} D_k + \frac{K_p K_d}{\gamma+h} y_k \tag{7}$$

Reemplazando la Ec. (6) en esta última tenemos que:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \frac{\gamma}{\gamma+h} \left(\xi_k - \frac{K_p K_d}{\gamma+h} y_k\right) + \frac{K_p K_d}{\gamma+h} y_k \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+h} \xi_k - \frac{K_p K_d}{\gamma+h} \left(\frac{\gamma}{\gamma+h} - 1\right) y_k \end{aligned} \tag{8}$$

Finalmente, podemos notar que la Ec. (8) es una ecuación de estados.

Acción de control u_k

Aquí podemos juntar en una única ecuación de estados las ecuaciones obtenidas en las secciones anteriores, donde los vectores de estados y entradas están dados por $[I_k, \xi_k]^T$ y $[r_k, y_k]^T$ respectivamente. De este modo tenemos que:

$$\begin{bmatrix} I_{k+1} \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma+h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ \xi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_p K_d}{\gamma+h}\left(\frac{\gamma}{\gamma+h} - 1\right) \\ K_i K_p h & -K_i K_p h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ y_k \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$u_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ \xi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p & \frac{K_p K_d}{\gamma+h}\left(\frac{\gamma}{\gamma+h} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ y_k \end{bmatrix} \tag{10}$$

Referencias

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems. Theory and Design.* Prentice Hall, 1997.

[2] A. Zanini, "Discretización de PIDs," Apuntes de Cátedra de Instrumentación y Control de Plantas Químicas (FIUBA).

[3] C.-T. Chen, *Linear system theory and design.* Oxford University Press, Inc., 1998.