CLASE 4 6 de Marzo de 2008

Unidad 2

Redes recurrentes y autónomas

Modelo de Hopfield

Capacidad

Modelo Continuo

Ejemplos

Redes autoasociativas

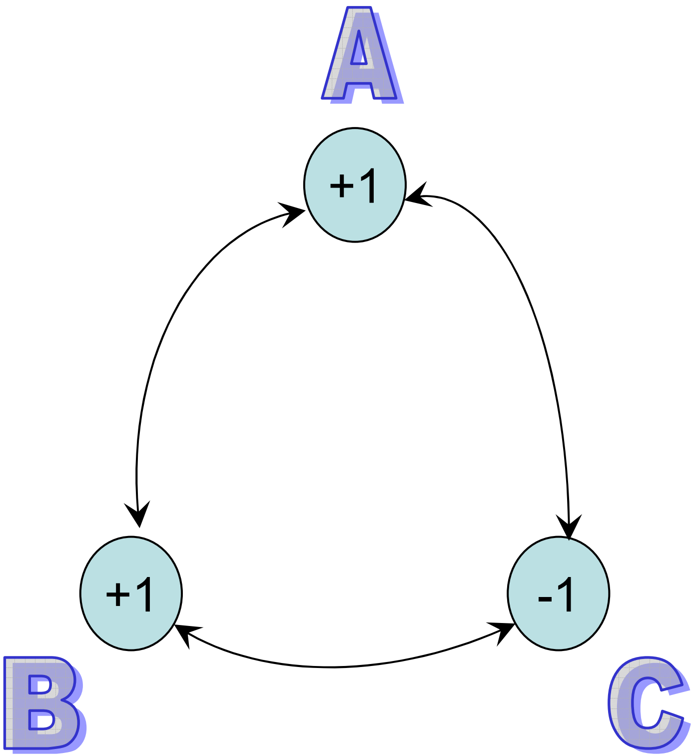
Red de Hopfield

Regla de HEBB

Cte= 1/N

$$\boxed{w_{ij} = cte \ \ S_i \ \ S_j}$$

N: número de neuronas



$$s_i(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{N} w_{ij} s_j(k) > \theta_i \\ s_i(k) & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{N} w_{ij} s_j(k) = \theta_i \\ -1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{N} w_{ij} s_j(k) < \theta_i \end{cases}$$

Auto-asociativa

¿Cómo guardamos más de 1 patrón?

Para 2 patrones y N neuronas:

Patrón 1

Patrón 2

$$w_{AB} = \frac{1}{N}[S_A^1 S_B^1 + S_A^2 S_B^2]$$

eso sináptico
ntre neuronas
 y B

Valor de la componente A del patrón 1

Valor de la componente B del patrón 1

	A	**B**	**C**
P5:	**+1**	**+1**	**-1**
P7:	**+1**	**-1**	**-1**

Para 2 patrones: $$w_{AB} = \frac{1}{3}[S_A^1 S_B^1 + S_A^2 S_B^2]$$

P7: +1 +1 -1

P5: +1 -1 -1

w_{AB}= 1/3 [(+1)*(+1) +(+1)*(-1)]=0

w_{AC}= 1/3 [(+1)*(-1) +(+1)*(-1)]=-1

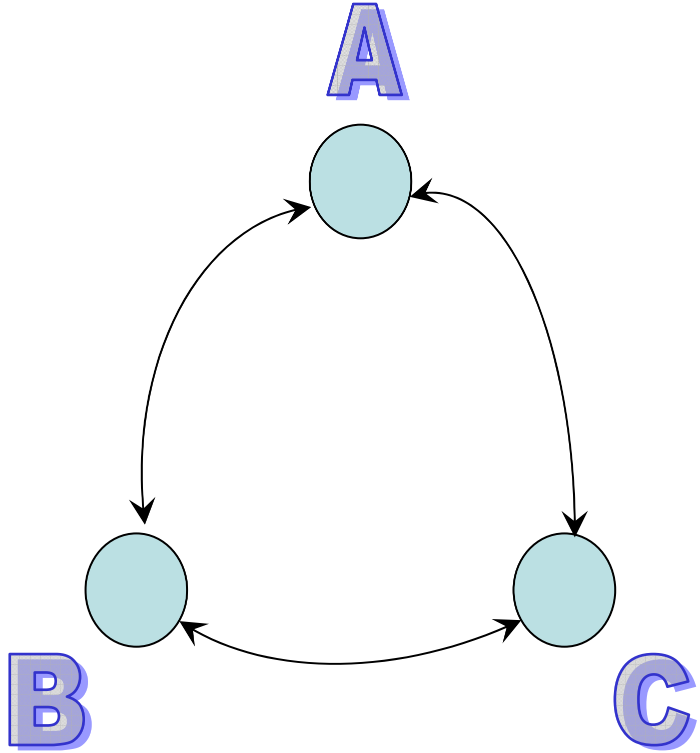
w_{BC}= 1/3 [(+1)*(-1) +(-1)*(-1)]= 0

[P1P2]*[P1P2]' = $$\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

W= $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividimos por N y anulamos la diagonal

1	-1 -1 -1
2	-1 -1 +1
3	-1 +1 -1
4	-1 +1 +1
5	+1 -1 -1
6	+1 -1 +1
7	+1 +1 -1
8	+1 +1 +1



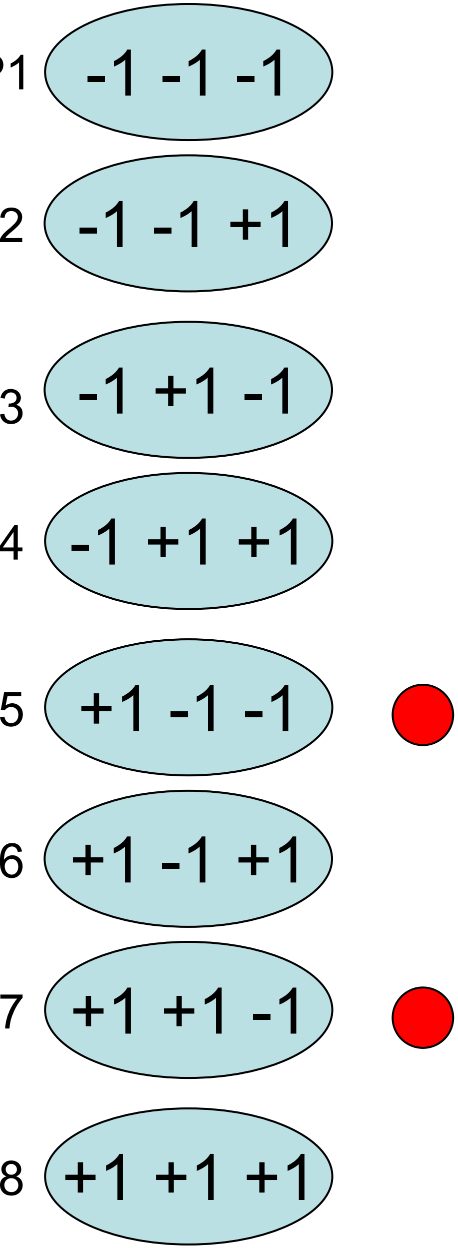
Almacenamos P5 y P7

$$w_{AB} = 1/3\ [\ (+1)*(+1)\ +(+1)*(-1)]=0$$

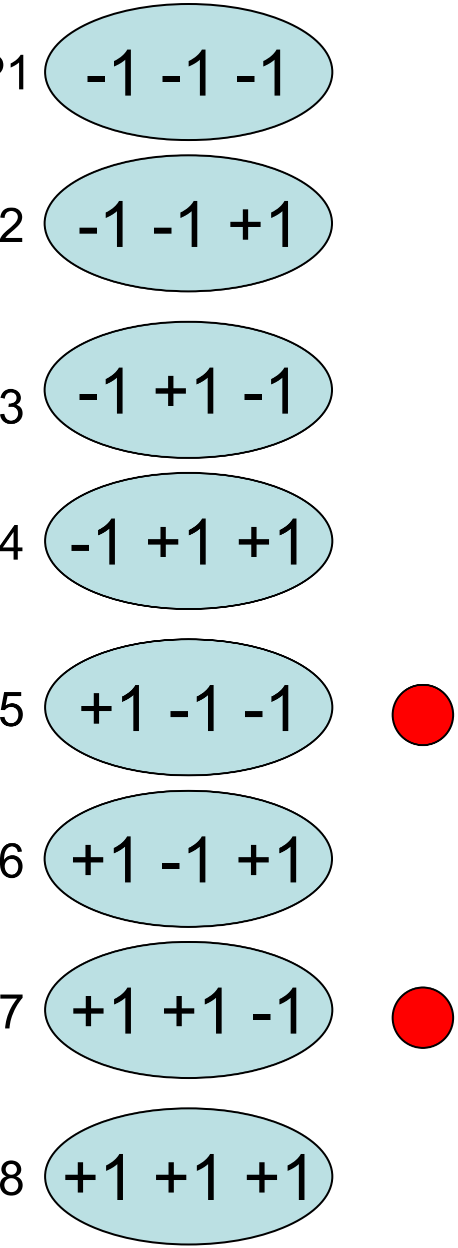
$$w_{AC} = 1/3[\ (+1)*(-1)\ +(+1)*(-1)]= -2/3$$

$$w_{BC} = 1/3\ [\ (+1)*(-1)\ +(-1)*(-1)]= 0$$

Evolución secuencial (A→ B → C)



P5→ P5 Estable
P7 → P7 Estable



Evolución síncrona

Actualizamos las neuronas al mismo tiempo, es decir con un patrón de entrada constante.

P5→ P5 Estable
P7 → P7 Estable
P3 → P4 Oscilatorio
P4→P3 Oscilatorio
P1 → Estable espurio (no fue almacenado)

1 -1 -1 -1

2 -1 -1 +1

3 -1 +1 -1

4 -1 +1 +1

5 +1 -1 -1

6 +1 -1 +1

7 +1 +1 -1

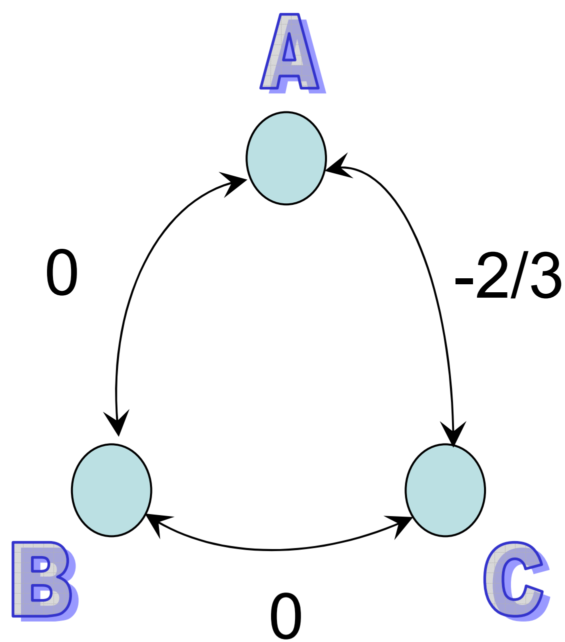
8 +1 +1 +1

Energía

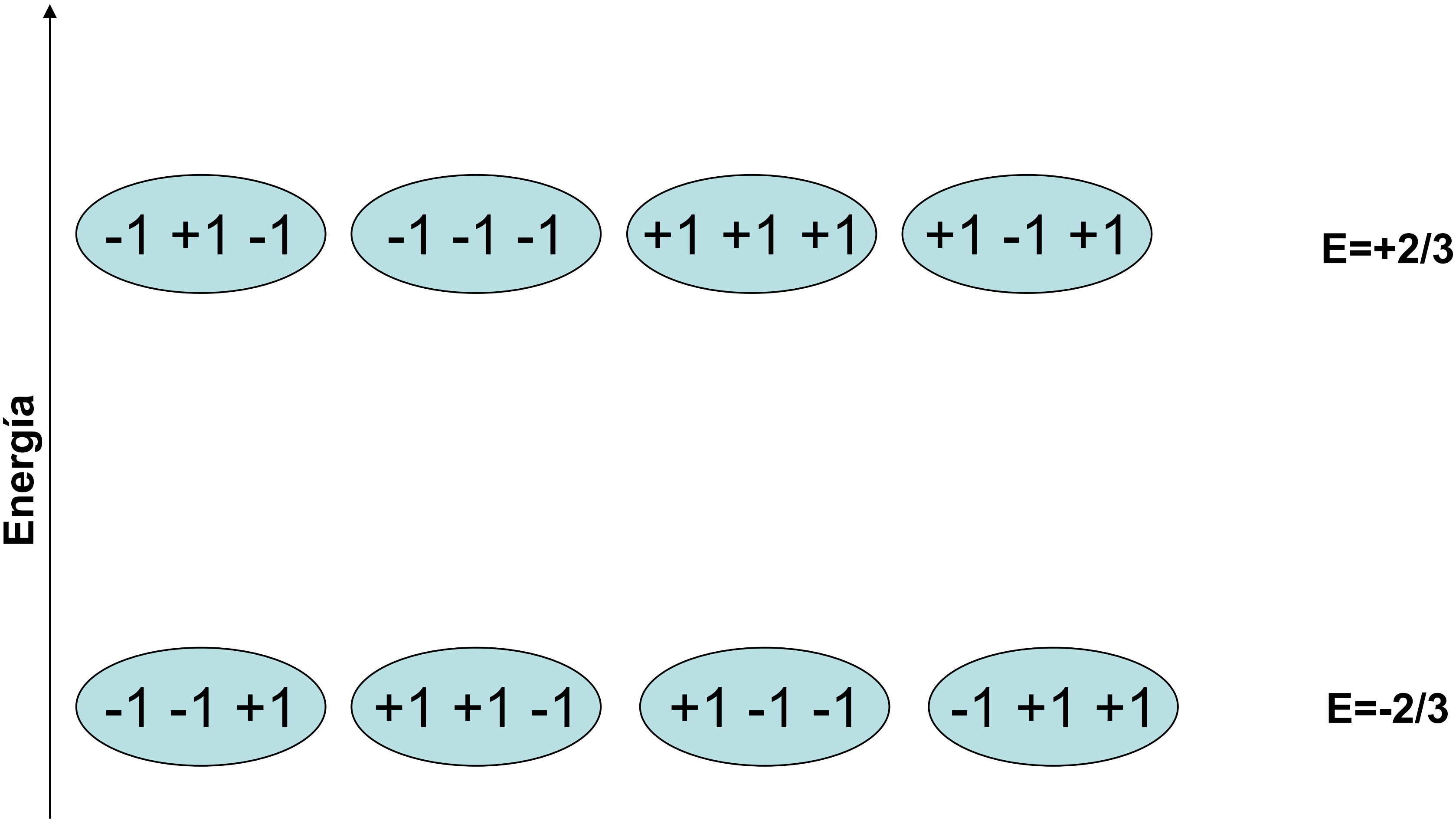
$$E = -\frac{1}{2}\sum_{ij} w_{ij} S_i S_j$$

E(P1) = (-1) x (-2/3) x (-1) x (-1) =+2/3

E(P5) = (-1) x (-2/3) x (+1) x (-1) =-2/3



Energía



Para p patrones y N neuronas

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_p S_i^p S_j^p$$

Suma sobre patrones

Peso sináptico entre neuronas i y j

$$\begin{pmatrix} P & P & P & P \\ a & a & a & a \\ t & t & t & t \\ r & r & r & r \\ ó & ó & ó & ó \\ n & n & n & n \\ & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{P a t r ó n 1} \\ \text{P a t r ó n 2} \\ \text{P a t r ó n 3} \\ \text{P a t r ó n 4} \end{pmatrix}$$

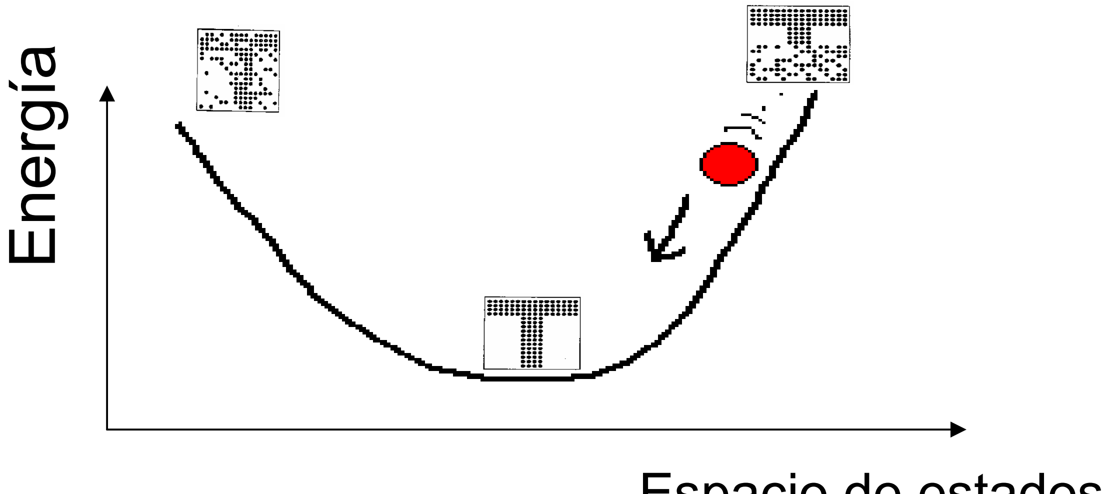
podemos calcular la matriz de pesos usando el producto entre matrices

Diferencias entre actualización síncrona y actualización secuencial

Hay diferencias entre la dinámica síncrona y secuencial.

Ambas convergen y son estables pero en el caso síncrono aparecen oscilaciones entre estados.

Podemos interpretar el comportamiento mirando la superficie de energía



Capacidad de almacenamiento

- ¿Qué ocurre con un patrón No Memorizado?
- Memorizamos un único patrón y analizamos que sucede con otro patrón que difiere en n entradas del patrón memorizado.

$$r_i = \begin{cases} -s_i & i = 1,2,\ldots,n \\ s_i & i = n+1, n+2, \ldots, N \end{cases}$$

$$S_i(1) = \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{N} w_{ij} S_j(0)\right] = \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{N} w_{ij} r_j\right] = \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-s_j) + \sum_{j=n+1}^{N} w_{ij} s_j\right]$$

$$= \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{N} s_i s_j\right)(-s_j) + \sum_{j=n+1}^{N} \left(\frac{1}{N} s_i s_j\right) s_j\right] = \operatorname{sgn}\left[\frac{-1}{N}\sum_{j=1}^{n} s_i + \frac{1}{N}\sum_{j=n+1}^{N} s_i\right]$$

$$= \operatorname{sgn}\left[\frac{-n}{N} s_i + \frac{N-n}{N} s_i\right] = \operatorname{sgn}\left[\left(1 - \frac{2n}{N}\right) s_i\right]$$

$$r_i = \begin{cases} -s_i & i = 1,2,\ldots,n \\ s_i & i = n+1, n+2, \ldots, N \end{cases}$$

$$S_i(1) = \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{N} w_{ij} S_j(0)\right] = \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{N} w_{ij} r_j\right] = \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-s_j) + \sum_{j=n+1}^{N} w_{ij} s_j\right]$$

$$= \operatorname{sgn}\left[\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{N} s_i s_j)(-s_j) + \sum_{j=n+1}^{N} (\frac{1}{N} s_i s_j) s_j\right] = \operatorname{sgn}\left[\frac{-1}{N}\sum_{j=1}^{n} s_i + \frac{1}{N}\sum_{j=n+1}^{N} s_i\right]$$

$$= \operatorname{sgn}\left[\frac{-n}{N} s_i + \frac{N-n}{N} s_i\right] = \operatorname{sgn}\left[(1 - \frac{2n}{N}) s_i\right]$$

$$S_i(1) = \begin{cases} -s_i & \text{si} \quad n > N/2 \\ s_i & \text{si} \quad n \le N/2 \end{cases}$$

Recuperaremos el patrón guardado si:

$$n \le \frac{N}{2}$$

- ¿Funciona igual de bien cuando queremos memorizar varios patrones?

Estado inicial:

$$h_i^p = \sum_j w_{ij} S_j^p = S_i^p + \frac{1}{N} \sum_{q \neq p} S_i^q \sum_j S_j^q S_j^p =$$

$$h_i^p = S_i^p + ruido$$

Para patrones no correlacionados y
con probabilidad 50% de +1's y -1's

$$h_i^p = S_i^p + \mathcal{O}(\sqrt{(\frac{p-1}{N}})) $$

De donde si p<<N todos los patrones son estables

- ¿ Es capaz la red de recuperar un patrón distorsionado (con ruido) ? Modifiquemos en un patrón n componentes

$$h_i^p = (1 - \frac{2n}{N})S_i^p + \mathcal{O}(\sqrt{(\frac{p-1}{N}}))$$

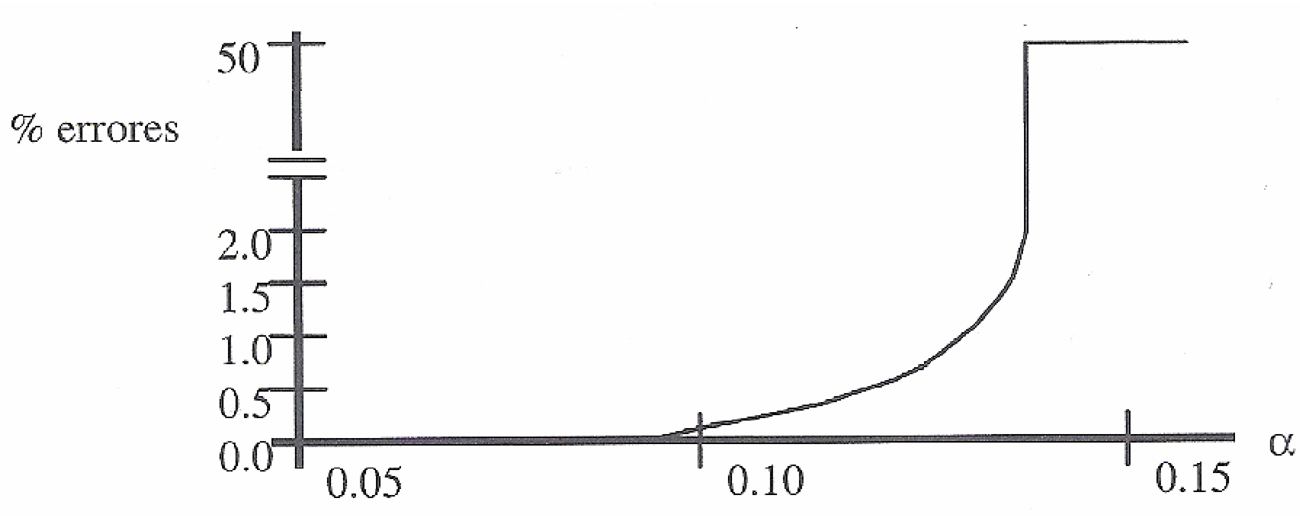
n: componentes modificadas
N: número de componentes = número de neuronas
p: patrones almacenados

De donde si p<<N y n << M los patrones son estables y podremos recuperarlos aún si los modificamos con cierto nivel de ruido

Capacidad de almacenamiento de la red de Hopfield

– Considerando patrones almacenados (p) y total de neuronas (N)

$$C = \frac{p}{N} \quad = 0.138$$



Porcentaje de errores en la red de Hopfield en función del nivel de almacenamiento (Patrones aleatorios, 50% de 1 , 50% de -1)

Capacidad

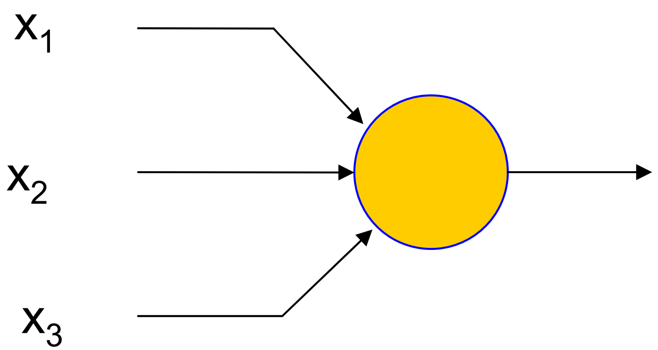
- Si los patrones se escogen ortogonales, el estado de la neurona se mantiene. Por tanto, la red se estabiliza y nos devuelve el patrón correcto.

- Otra posibilidad es utilizar un número de neuronas (N) muy elevado en comparación con el número de patrones que queremos memorizar (p). Esto no nos asegura resultados excentos de error, pero sí “aceptables”.

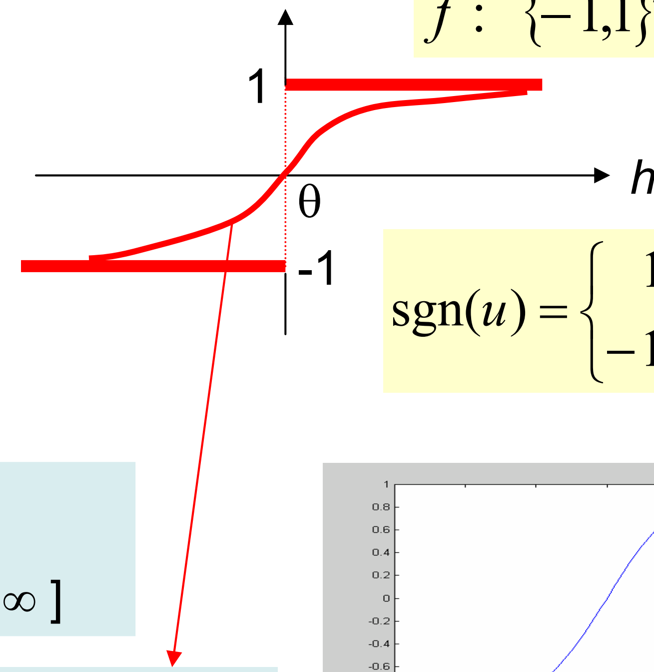
- Utilizar otras reglas de aprendizaje, como la regla de la pseudoinversa.

El modelo de Hopfield continuo

- Estado discreto $s_i \in \{-1, 1\}$
- Tiempo (actualización) discreto, $k = 1,2,3,\ldots$



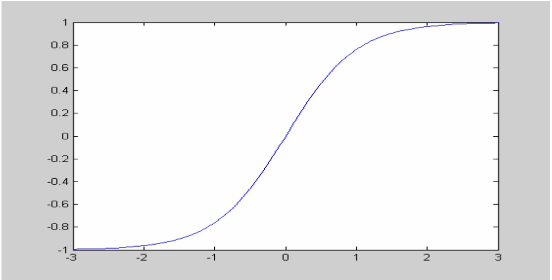
$$f: \{-1,1\}^n \rightarrow \{-1,1\}$$



$$\mathrm{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & u \geq 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$$

- Estado continuo $x_i \in [-1, 1]$
- Tiempo (actualización) continuo, $t \in (0,\infty]$

$$f(u) = \frac{e^{\beta u} - e^{-\beta u}}{e^{\beta u} + e^{-\beta u}}$$



El modelo de Hopfield continuo

Dinámica de la computación

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_i(t)=1 \text{ y } f\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j(t)-\theta_i\right)>0 \\ 0 & \text{si} \quad x_i(t)=-1 \text{ y } f\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j(t)-\theta_i\right)<0 \\ \eta f\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j(t)-\theta_i\right) & \text{si} \quad x_i(t)\in(-1,1) \end{cases}$$

Función de energía computacional

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_i(t)x_j(t)+\sum_{i=1}^{N}\theta_i x_i(t)$$

Diferencias entre el modelo de Hopfield discreto y continuo.

Cualitativamente hay pocas diferencias.

Ambos modelos convergen a mínimos y son estables.

Puede definirse la función energía en ambos casos.

El modelo continuo es útil para posibles implementaciones en circuitos digitales y es biológicamente más realista.

El modelo continuo tiene una superficie de energía más suave, con menos estados espurios y por lo tanto la convergencia es mejor.

Resumen Red de Hopfield

Modelo de red recurrente para memoria asociativa

Podemos almacenar patrones y recuperarlos usando la regla de Hebb

La definición de una función energía es útil para demostrar la convergencia de la dinámica

La capacidad de almacenamiento no es demasiado elevada ($p=0.138$ N) pero puede mejorarse (usando otras reglas, patrones ortogonales)

Existen estados espurios no deseados.

Calendario

Semana próxima: Semana Cultural: posible cambio de horario 18:30 → 20:30

Después de Semana Santa comienzan los laboratorios.

Ejercicio para entregar próxima semana

Prueba de control: 1era semana de Abril