Доказательство. Случай $h{=}0$ очевиден. Для $h{>}0$, соответственно, $h{<}0$, утверждение очевидным образом следует из теоремы 177, соответственно 178, с заменой n на $n{+}1$, так как, по теореме 170,

$$(x^v)^{(n+1)} = 0 \text{ при } 0 \leqslant v \leqslant n$$

и потому

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

Теорема 180 (биномальная теорема). *Для всех целых n>=0*

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-\nu} b^\nu$$

Доказательства. 1) Теорема 179 с

$$f(x) = x^n, \;\; \xi = a, \;\; h = b$$

в силу теоремы 170, дает:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} (\frac{n}{\nu}) a^{n-\nu} b^\nu$$

2) (непосредственно:) для *n=0* — ясно; из n следует $n{+}1$, так как тогда, в силу теоремы 172,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-\nu} b^\nu (a+b) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-+1\nu} b^\nu + \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-\nu} b^{\nu+1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-+1\nu} b^\nu + \sum_{\nu=1}^{n+1} (\frac{n}{\nu-1}) a^{n+1-\nu} b^\nu =$$

$$= a^{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} ((\frac{n}{\nu}) + (\frac{n}{\nu-1})) a^{n+1-\nu} + b^{n+1} =$$

(последнее $\sum$ при $n{=}0$ означает 0)

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} (\frac{n+1}{\nu}) a^{n+1-\nu} b^{\nu}$$

3) В силу теоремы 173 с

$$f(x) = e^{ax}, g(x) = e^{bx}$$

и теоремы 174, имеем:

$$(a+b)^n e^{(a+b)x} = (e^{(a+b)x})^{(n)} = (e^{ax} e^{bx})^{(n)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) (e^{ax})^{(n-\nu)} (e^{bx})^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-\nu} e^{ax} b^{\nu} e^{bx} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\frac{n}{\nu}) a^{n-\nu} b^{\nu} \cdot e^{(a+b)x}$$

Теорема 181. *Для каждого целого $m \geqslant 0$ и $x{>}0$ существует ν* такое, что

$$1 < \nu < 1 + x, \ \sqrt{1+x} = \sum_{\nu=0}^{m} (\frac{\frac{1}{2}}{\nu}) x^{\nu} + (\frac{\frac{1}{2}}{m+1}) \frac{x^{m+1}}{\nu^{m+\frac{1}{2}}}$$

Доказательство. Для

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \ \ (x > 0)$$

при целом $\nu \geqslant 0$ имеем, по теореме 171,

$$f^{(\nu)}(x) = (\frac{\frac{1}{2}}{\nu}) \nu! x^{\frac{1}{2} - \nu}.$$

Следовательно, теорема 177 с $\xi = 1, h = x, n = m+1$ обеспечивает существование ν такого, что

$$1 < \nu < 1 + x,$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{\nu!} () \frac{\frac{1}{2}\nu}{\nu} ! x^{\nu} +$$

$$+ \frac{m^{m+1}}{(m+1)!} (\frac{\frac{1}{2}}{m+1}) (m+1)! \nu^{\frac{1}{2} - m - 1}.$$