# 物理学概論第一期末対策 PDF

ツンツン

2023 年 7 月 26 日

## 目次

# 1 波の性質

## 1.1 縦波と横波

媒質 (例えばひもや、バイオリンの弦) の振動方向と波の進行方向が**垂直**であるとき、この波を**横波**といい、媒質 (例えばばねや、音波) の振動方向と波の進行方向が**同じ**であるとき、この波を**縦波**という。縦波は媒質がまだらな所 (疎) とつまった所 (密) が生じるため縦波のことを疎密波ともいう。

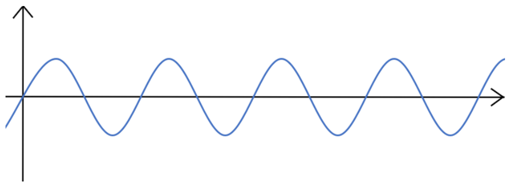

図 1 横波

縦波は、媒質の圧縮 (密) と膨張 (疎) の変化の運搬なので、固体、流体、気体の全ての中を伝わるが、横波では隣り合う部分との接線応力[*1]が必要であるため。横波は固体の中は伝わるが、**流体**[*2]**の中を伝わらない。**

## 1.2 波の速さ

波の速さは、復元力と、慣性つまり媒質の密度で決まる。復元力が大きいほど速さは大きく、密度が小さいほど大きい。[*3]
山なり、谷なり、そういった言葉は解説しない、教科書を参照すること（p132）
さすがに基本的式は乗っけておく

$$T = \frac{1}{f} \tag{1}$$

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \tag{2}$$

$T$ は周期、$f$ は振動数、$v$ は速さ、$\lambda$ は波長

[*1] 物体内の仮想面の単位面積当たりに働く内力（力なので大きさと方向を持つベクトル量）を，その面に垂直な方向と接する方向に分解したとき，接する方向の成分を接線応力と呼ぶ.
[*2] ここでいう流体とは、液体、気体を指す
[*3] これはのちの波動方程式で触れていく

# 2　正弦波の式と波のエネルギー

ここでは正弦波の式[*4]とエネルギーについて見ていく

## 2.1　正弦波の式

次の図のような波の式を考える（振幅 $A$、振動数 $f = \omega/2\pi$, 周期 $T$ の単振動）

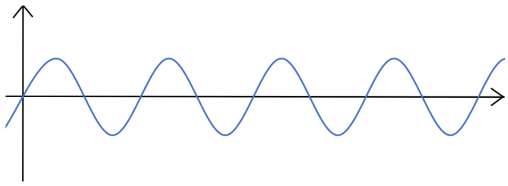

図 2　こんな波（再掲）

この正弦波の原点での式は

$$y = A\sin\omega t = A\sin 2\pi f t = A\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{3}$$

ここで、原点からの距離 $x$ の点 P における正弦波の式を考える、原点から点 P に波が伝わる時間は $x/v$ であるから、点 P での時刻 $t$ における変位 $y$ は、原点の時刻 $t - x/v$ での変位 $y$ と同じである。つまり距離 $x$ の点における正弦波の式は次のように表すことができる。[*5]

$$y = A\sin\omega(t - \frac{x}{v}) = A\sin 2\pi f(t - \frac{x}{v}) = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \tag{4}$$

## 2.2　波のエネルギー

波のエネルギーを考えていく、波が伝わることにより、媒質は振動し運動エネルギーと変形によるポテンシャルエネルギーが生じる。このことから媒質は振動の移動でもありエネルギーの移動でもある。
**波の進行に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー $I$ を波の強さという。**単位は $\mathrm{W/m^2}$ 波の運搬によって、各点の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは一定ではない。密度 $\rho$ の媒質の中を伝わる振幅 $A$、振動数 $f$、速さ $v$ の正弦波の強さは、時間的に平均すると以下の式で表すことができる。

$$I = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \rho v \tag{5}$$

# 3　波動方程式

## 3.1　加速度の導出

長さが L、線密度 (単位当たりの長さの質量のこと)$\mu$ の波が $x$ 軸に沿って張力 S で張っているとする。
この弦の二点 $x$ と $x + \Delta x$ の間の長さ $\Delta x$ における運動方程式を導く。

[*4] 受験期はごり押しでやった記憶
[*5] 高校時代の私はあんまりこれを考えるのは苦手だった

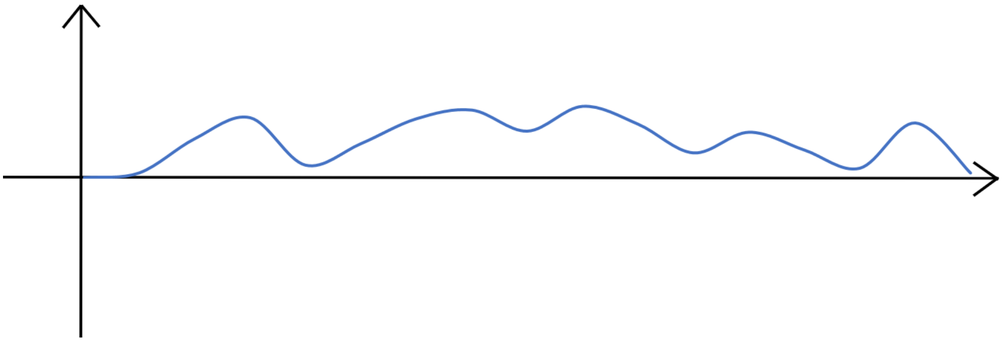

図 3　このような任意の波

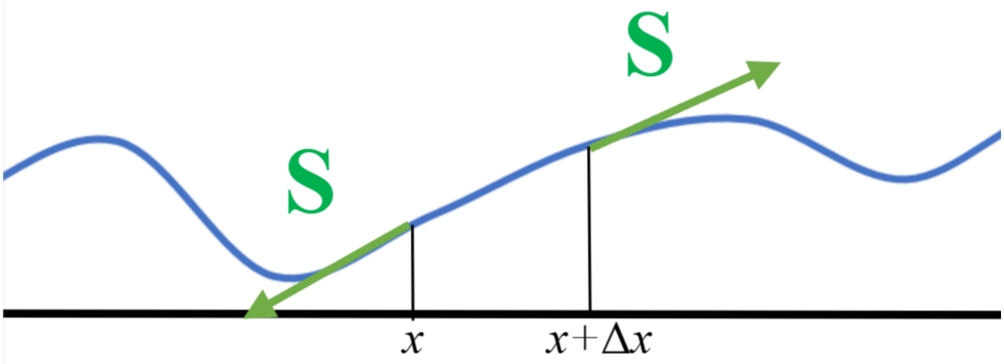


図 4　一部分抜粋, 張力は両端とも同じ大きさ

弦の各点の振動方向は弦に垂直であるから、弦の変位を $y(x,t)$[*6] と表すことができる。弦の加速度は $x$ を一定とし、$y(x,t)$ を $t$ で二回微分、つまり偏微分したものである。これを

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

とする。よって弦の微小区間における「質量」×「加速度」は

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{6}$$

である。

## 3.2　合力の導出

ここで、$y = y(x)$ という関数を考えたとき、点 $x$ での接線の勾配は $\frac{dy}{dx}$ であるから、先ほどの $y(x,t)$ を考えると、点 $x$ における接線の勾配は、$t$ を一定に保ったまま、$x$ で微分、つまり偏微分をした

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

[*6] $x, t$ の 2 変数関数ということ

である。
この時勾配が小さく $\sin\theta \approx \tan\theta$ の場合を考えると、弦の張力 $\overrightarrow{S}$ の $y$ 成分は

$$S\frac{\partial y}{\partial x}$$

となる。したがって微小区間の弦の両端に作用する張力の合力の $y$ 成分は

$$S\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t) - S\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \tag{7}$$

したがって鉛直方向の運動方程式は*7

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{\mu}{S}\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8}$$

ここで

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t)$$

をテイラー展開すると

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + \Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x} + \mathcal{O}(\Delta x^) \tag{9}$$

となり。これを式 (8) に代入すると、次のように変形できる（$\Delta x^2$の項以降は微小量であるから無視する）

$$\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x} = \frac{\mu}{S}\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{10}$$

この時 $v^2 = \mu/s$ とすると*8

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11}$$

## 3.3 波動方程式の一般解

この偏微分方程式の一般解は*9 $f$ と $g$ を任意関数とし 次のようになる

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \tag{12}$$

これが解であることは

$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x} = f'(x-vt), \quad \frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} = -vf'(x-vt) \tag{13}$$

を行うことにより、確かめられる。ただしここでは

$$f'(u) = \frac{df(u)}{du}$$

である。
式 (12) は、時間 $t=0$ における $f(x), g(x)$ の波が速さ

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \qquad \text{(弦を伝わる横波の速さ)} \tag{14}$$

で $x$ 軸の 正の向きと負の向きにそれぞれ進んでいることを示している。

*7 $y$ は鉛直方向の変位なので、運動方程式が立てられる。
*8 ネタバレにも程がある変形...
*9 偏微分方程式の解き方は付録にまとめておく

# 4　弾性体の棒の中を伝わる、縦波と横波の波動方程式とその速さ

## 4.1　縦波の波動方程式

下の図のように、一端を固定した、密度 $\rho$、断面積 $A$ の弾性体の棒を考える。

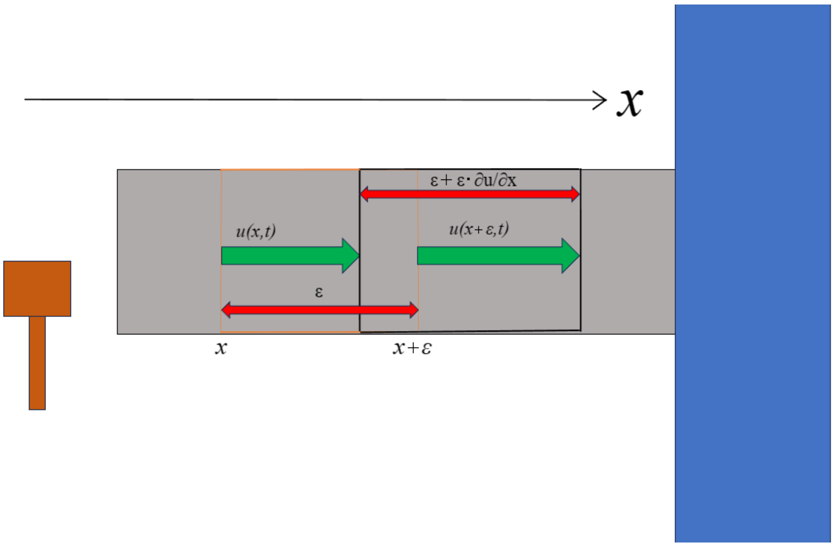


図 5　弾性体の棒の中を伝わる縦波

棒の方向を $x$ 方向とし、静止しているときに点 $x$ にある棒の部分の変位を $u(x,t)$ とする。静止しているときに両端が $x$ と $x+\varepsilon$ の部分の伸びは次のように表すことができる。

$$u(x+\varepsilon,t)-u(x,t)\approx\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \tag{15}$$

ここで時刻 $t$ の時に $x, x+\varepsilon$ における縦波はオレンジの所から黒の所まで行ってるとみて

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

は $x$ が増えるとどの程度 $u(x,t)$ が変化するか、と考えるとわかりやすいかもしれない。[*10]
弾性体のヤング率を $E$ とすると、点 $x$ を含む断面を通して両側の部分が及ぼしあう弾力は[*11]

$$F(x,t)=AE\frac{\Delta L}{L}=AE\frac{1}{\varepsilon}[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)]=AE\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \tag{16}$$

したがって、静止しているときに、両端が $x, x+\Delta x$ の長さ $\Delta x$、質量 $\rho\Delta xA$ の運動方程式から縦波の波動方程式と、その速さは次のように導くことができる。

$$\begin{aligned}\rho\Delta xA\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=F(x+\Delta x,t)-F(x,t)\\&=AE[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)]=AE\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

[*10] 今回の場合だと、$\varepsilon$ だけ $x$ 軸方向に増えてるから、$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ だけ増えたとみれば式の意味が理解出来るだろう。
[*11] ヤング率については付録でまとめる。

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17}$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{18}$$

### 4.2　弾性体の棒を伝わる横波の速さ

縦波のヤング率 $E$ をずれ弾性率 $G$ に置き換えればいいので、

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{19}$$

$E > G$ より縦波の方が、横波より早い
無限に広い弾性体を伝わる波の速さは飛ばす（やってない力学が多く理解が大変なため）

## 5　波の重ね合わせの原理と干渉

### 5.1　波の重ね合わせ

**二つの波が同時に来た時の媒質の変位は、それらの波が単独に来た時の媒質の変位を合成したものになる。**つまり、二つの波 $y_1(\overrightarrow{r}, t), y_2(\overrightarrow{r}, t)$ が波動方程式の解であるとき、ふたつの波を合成した

$$y(\overrightarrow{r}, t) = y_1(\overrightarrow{r}, t) + y_2(\overrightarrow{r}, t) \tag{20}$$

も波動方程式の解である。これを**波の重ね合わせの原理**といい、2 つ以上の波が出会うとき、合成波はそれらの波を重ね合わせたものであり、強めあったり弱めあったりする現象を**波の干渉**という。

### 5.2　波の干渉の具体例

2 つの例を見ていこう。
点 A,B からある点までの長さを $l_1, l_2$, 波長を $\lambda$ とする。距離 $l_1, l_2$ の差が半波長の偶数倍であるとき（波長の整数倍）

$$|l_1 - l_2| = \frac{\lambda}{2} \cdot 2n = n\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{21}$$

を満たすところでは, 山と山, 谷と谷というように、二つ波の位相が同じなので、振幅が二倍になる。
逆に距離の差が半波長の奇数倍であるとき

$$|l_1 - l_2| = \frac{\lambda}{2}(2n + 1) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{22}$$

のところでは, 山と谷、谷と山のように二つの波の位相は常に打ち消しあう、よって振動しない. この場合二つの波の位相は逆である (逆位相)

## 6　波の反射と屈折

波面　空間を波が伝わるときに、波の位相が同じ点を連ねて出来る面を**波面**という。この波面が平面の時は**平面波**, 球面の時は**球面波**という. 波面は波の速さ $v$ で伝わり、波面上の各点の波の進行方向は波面に垂直である。

## 6.1 反射の法則

入射角と反射角等しいこと法則を**反射の法則**という。[*12]

$$入射角\ \theta_{\mathrm{i}} = 反射角\ \theta_{\mathrm{r}} \tag{23}$$

## 6.2 屈折の法則

波が速さの異なる所へ進むときに波の進行方向が変わる現象を**波の屈折**という。

一般に波が二種類の媒質の境界面に入射すると、一部分が境界面で反射し、残りは境界面を透過し、波は屈折する。また波が屈折するときは振動数が変化することはない。このことから、波長は波の速さに比例する。屈折波の進行方向と、境界面の法線とのなす角を屈折角という。波が媒質 1(波の速さ $v_1$, 波長 $\lambda_1$) から媒質 2(波の速さ $v_2$, 波長 $\lambda_2$) へ屈折して進むとき、次の屈折の法則が成り立つ。

$$\frac{\sin\theta_{\mathrm{i}}}{\sin\theta_{\mathrm{t}}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{1\to 2} \qquad (一定) \tag{24}$$

# 7 固定端, 自由端での反射

反射波の位相　波が媒質の境界面に来ると, 入射波のエネルギーの一部がは反射されて反射波のエネルギーとなり、残りは境界面で吸収または通り過ぎていく。媒質が境界面で固定されてるとき (**固定端**) と媒質が境界面で自由に振動できるとき (**自由端**) には入射波のエネルギーは完全に反射し、これらの場合には、入射波と反射波の振幅が等しい。

## 7.1 固定端での反射

固定端による媒質の変位は 0 である。媒質の固定端に速さ $v$ の入射波が届いて、固定単が媒質から力を受けると、媒質は逆向きで同じ大きさの力 (反作用) を受ける。そのため入射波と逆向きで速さ $v$ の反射波が発生する。入射波と反射波は重ね合わせの原理に従う。

入射波を $y_{\mathrm{I}}(vt-x)$, 反射波を $y_{\mathrm{R}}(vt+x)$ とすると、合成波は $y(x,t) = y_{\mathrm{I}}(vt-x) + y_{\mathrm{R}}(vt+x)$ である. 固定端の位置を $x=0$ とすると、固定端では変位 $y(0,t)=0$ なので、これにより $y_{\mathrm{I}}(vt) = -y_{\mathrm{R}}(vt)$ を満たし、したがって固定端によって発生する反射波は、次の式で表すことができる

$$y_{\mathrm{R}}(vt+x) = -y_{\mathrm{I}}(vt+x) \tag{25}$$

つまり、反射波は固定端に関して入射波を点対称に移したものである。

## 7.2 自由端での反射

波が自由端に向かって速さ $v$ で進んでいって自由端に届いたときに、自由端は自由端の右側の部分から力を受けない。そこで、自由端の付近での媒質の変位が一定になるように速さ $v$ の反射波が発生し、力が作用しないように変形する。そのため**自由端における波形の勾配は** 0 である

[*12] これは高校で既知の内容であるはずだから詳細は省く

このような条件を満たす反射波は、入射波が自由端を超えて進んで行くと仮定した波を、境界面に関して対称に移した波である。入射波を $y_{\mathrm{I}}(vt-x)$, 反射波を $y_{\mathrm{R}}(vt+x)$ とすると、反射波は次のように表せる。

$$y_{\mathrm{R}}(vt+x) = y_{\mathrm{I}}(vt+x) \tag{26}$$

# 8　定在波と弦の固有振動

## 8.1　定在波とは

波長も振動数も振幅も等しい二つの正弦波が反対向きに重なり合い、その結果として発生する同じところで振動して進まない波を**定在波** (または定常波) という。定在波の振動の大きい所を**腹**、全く振動しない部分を**節**という。ここで固定端は節、自由端は腹になる。進まない定在波に対し、進んで行く波を進行波という。腹と腹、節と節の間は半波長である。[*13]

## 8.2　弦の固有振動について

長さ $L$ の弦[*14]をはじくと、一般に $n\lambda = 2L$(n=1,2,$\cdots$ ) という条件を満たす両端が節の $n$ 個の腹を持つ定在波を重ね合わせた振動が生じる。この時この定在波の波長は

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{27}$$

である。この定在波の振動を**固有振動**、その振動数を**固有振動数**という。$f_n\lambda_n = v$ より、次式が成り立つ。

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{28}$$

$n = 1$ のときの振動を基本振動といい、同様に $n = 2, 3$ のときそれぞれ 2 倍振動,3 倍振動という。

# 付録 A　式 (5) の導出

単振動のエネルギーを考える、$v = A\omega$ を用いれば

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \tag{A,1}$$

単位長あたりの質量 (=媒質の密度)$\rho$ である、単位長当たりのエネルギー $\epsilon$ は

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \tag{A,2}$$

**波の進行に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー $I$ を波の強さという。**

ので速度を $v$ とすると

$$I = \epsilon v = \frac{1}{2}\omega^2 A^2\rho v \tag{A,3}$$

となり式 (5) が導出された。[*15]

---

[*13] 高校でやった記憶がある
[*14] バイオリンの弦とか言ってるが何故にバイオリンなのかよくわかんね、多分張力があるからかな
[*15] 単位時間に通過する範囲は $v \times 1$ であるよねってこと。電流でも同じような考え方をした記憶。

# 付録 B　式 (9) の導出,(テイラー展開について)

この部分ではテイラー展開について説明し、それを用いて式 (9) の導出を行う。

## B.1　1 変数関数のテイラー展開

$C^\infty$ 級の $x$ の関数 $f(x)$ を考える。これの $x = a$ 点周りの n 次までのテイラー展開は次のように表すことができる。

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (B,1)$$

$x = 0$ 周りのテイラー展開を考える時は、マクローリン展開という。この式は次のように表せる。(n 次までのテイラー展開)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (B,2)$$

## B.2　多変数関数のテイラー展開

次に多変数のテイラー展開について触れていく。
多変数関数のテイラー展開は次のように偏微分を用いて表すことができる。

$$f(x+a, y+b) = f(x,y) + \frac{1}{1!}(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})f(x,y) + \frac{1}{2!}(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x,y) \cdots \qquad (B,3)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})^k f(x,y) \qquad (B,4)$$

三変数以上の関数であっても、次のように表すことができる。

$$f(x+a, y+b, z+c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z})^k f(x,y,z) \qquad (B,5)$$

$$g(x+\Delta x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x, t) \qquad (B,6)$$

とし、式 (B,4) において、$b = 0$ とするとこの $g(x+\Delta x, y)$ の 2 次までのテイラー展開は次のように表すことができる。

$$g(x+\Delta x, t) = g(x,t) + \frac{1}{1!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + 0 \times \frac{\partial}{\partial y})g(x,t) \qquad (B,7)$$

これを元に戻すと、

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + \Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x} \qquad (B,8)$$

となり式 (9) が導出された。

## 参考文献


[1] 高校 物理 ICT 教材,http://physics7.starfree.jp/phy/index.html

[2] 原 康夫, 学術図書出版社, 第 5 版物理学基礎

[3] 波のエネルギー,http://physics-butsuri.com/wave/wave_energy.html

[4] 波動方程式とその解法 波の速さと固有振動数の導出,https://yomoriki.com/mechanics/15785/

[5] 超分かるテイラー展開,https://controlabo.com/taylor-series/#toc3

[6] 多変数関数のテイラー展開,https://eman-physics.net/math/taylor_multi.html

[7] 固体中の縦波〜波動方程式の導出,http://mincat.iobb.net/Text/public/Physics/wave/wave/waveEq/derivation/bar.htm


## あとがき

今回の期末の範囲は波動、意外と高校範囲でもどうにかなる部分があるので、何とか頑張ってください、あと過去問は何年もやりましょう、それが高得点への道です。頑張ってください、私も頑張ります。
それでは後期でまた会いましょう。