物理学概論第一中間試験対策 PDF

ツンツン

公開 2023 年 6 月 9 日

目次

1　位置と速度、加速度の関係

$\overrightarrow{x}(t)$ を物体の位置とし、$\overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{a}(t)$ はそれぞれ物体の速度、加速度を示す t の関数とする

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{x}(t)}{dt} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{x}(t)}{dt^2} \tag{2}$$

微分、積分の公式等は各自で確認してもらいたい。深くは触れないが、速度を積分すると位置になり、加速度を積分すると速度になることは理解しておくとよい。

2　運動の第二法則（運動方程式）

ここで物体にかかる力の総和を $\overrightarrow{F}$ とする

$$m\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{F} \tag{3}$$

これを (2) 式を用いて変形すると

$$m\frac{d^2\overrightarrow{x}(t)}{dt^2} = \overrightarrow{F} \tag{4}$$

運動の第一法則（慣性）、第三法則（作用・反作用）については、各自での確認を求める。

3　円運動について

質点の座標を極座標で表したとき、次のような式で表せる。

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \tag{5}$$

ここで θ は始線となす角、r は長さである。
次に円運動の座標について見ていく、座標は次の式であらわされる

$$x(t) = r\cos(\omega t + \theta_0), y(t) = r\sin(\omega t + \theta_0) \tag{6}$$

ここで ω は角速度であり $\omega = 2\pi f$ を満たすものである。（f=単位時間当たりの回転数）また θ_0 は初期位相である。
これを微分すると x,y 方向の速度がわかる。実際に微分すると（合成関数の微分に注意すること）

$$\frac{d}{dt}x(t) = -r\omega\sin(\omega t + \theta_0), \frac{d}{dt}y(t) = r\omega\cos(\omega t + \theta_0) \tag{7}$$

これは各方向ごとの速度なので、質点としての速さは、三平方の定理を用いて、

$$v = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2} = r\omega \tag{8}$$

ここで $\frac{d}{dt}x(t) = v_x(t)$, $\frac{d}{dt}y(t) = v_y(t)$ とする。また速度と位置は垂直である

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{r} \tag{9}$$

これは実際に内積を計算してみると、値が 0 になることが分かる。つまり垂直である。
次に各方向の加速度について考える、加速度は速度を微分すればいいので、次のように表せられる。

$$\frac{d}{dt}v_x(t) = -r\omega^2\cos(\omega t + \theta_0), \frac{d}{dt}v_y(t) = -r\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) \tag{10}$$

ここで $\frac{d}{dt}v_x(t) = a_x(t)\frac{d}{dt}v_y(t) = a_y(t)$ とする。
速度の時と同様に、質点としての加速度の大きさは

$$a = \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2} = r\omega^2 \tag{11}$$

これも速度と垂直であり、位置の向きと逆向きある、つまり次の式が成り立つ。

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{v}, \overrightarrow{a} = -\omega^2\overrightarrow{r} \tag{12}$$

4　粘性抵抗、慣性抵抗

速さ v に比例する抵抗を粘性抵抗とし、速さの二乗 v^2 に比例する抵抗を慣性抵抗と呼ぶ
以下では粘性抵抗の比例定数を λ，慣性抵抗の比例定数を κ とする また速度を $\overrightarrow{v}$ とする。

$$\text{粘性抵抗の大きさは } F = \lambda|\overrightarrow{v}|, \text{単位ベクトルは} - \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$$

これにより粘性抵抗は次のように表せる。

$$\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v} \tag{13}$$

ここでマイナスが付く理由は、抵抗力は速度と逆向きであるからである。（逆向きだから速度は減速していく）

$$\text{慣性抵抗の大きさは } F = \lambda|\overrightarrow{v}|^2, \text{単位ベクトルは} - \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$$

これにより慣性抵抗は次のように表せる。

$$\overrightarrow{F} = -\kappa\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}| \tag{14}$$

ここで気を付けたいのは $(\overrightarrow{v})^2$ でも $|\overrightarrow{v}|^2$ でもないことである。ベクトルを持つことを意識すれば、なぜ (14) 式のようになるのかが考えられる。

5　力積について

物体の運動の勢いを表す物理量として、次の式で表せる運動量がある。

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \tag{15}$$

これを微分、つまり $\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$ を考えると次のような変形ができる。

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{F} \tag{16}$$

(16) 式を時刻 t_1 を t_2 まで積分すると次のようになる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}\,dt = \overrightarrow{p}(t_2) - \overrightarrow{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,dt \tag{17}$$

力と力の作用した時間の積を表す積分を力積と言い（最右辺）運動量の変化はその間に作用した力の力積に等しい事がわかる。

6　振動について

この部分では振動についてやっていくが高校物理である程度振動について理解しているとは思う。
今回は $F = -kx$ を受ける単振動について考える。運動方程式より次式が成り立つ。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{18}$$

ここで、$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ とおき、(18) 式に代入すると。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x \tag{19}$$

この微分方程式を満たす x の関数の一つは $x(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$ である。(他にもあるが今回はわかりやすいものを採用した。)
ここで A は振動の振幅で、ω は角振動数である。また $\omega t+\theta_0$ を位相と言い、 θ_0 を初期位相という。周期を T とすると $\omega T=2\pi$ であるから次式が成り立つ。

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{20}$$

また振動数 f は次の式で表せられる。

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21}$$

次に単振り子について見ていくが、ここは高校のレベルを大きく超えないので、そこまで深くは触れない

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}},T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{22}$$

ここで L は糸の長さで、g は重力加速度である。

7　減衰振動

　時間が経過すると、振幅が減少していく振動を減衰振動という。
減衰振動の例として、復元力 $-kx=-m\omega^2x$ を受けて単振動をする質量 m の物体に、速さに比例する抵抗 (粘性抵抗) $-2m\gamma v$ を考える (γ は正の定数とする)
実際に減衰振動の運動方程式を解くと次のようなものになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-2m\gamma\frac{dx}{dt}=-m\omega^2x-2m\gamma\frac{dx}{dt} \tag{23}$$

これを変形すると

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0 \tag{24}$$

ここで次のように x を定める。

$$x=ye^{-\gamma t} \tag{25}$$

ここで y は変数である (つまり微分の際考慮が必要である。)
微分を行うと

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t}-\gamma ye^{-\gamma t} \tag{26}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}e^{-\gamma t}-2\gamma\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t}+\gamma^2ye^{-\gamma t} \tag{27}$$

これらを (24) 式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\omega^2-\gamma^2)y=0 \tag{28}$$

となる。
ここで ω と γ の大小関係について場合分けを行う。
（Ｉ）$\omega > \gamma$ のとき（減衰振動）
(28) 式は角振動数 $\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$ の単振動の方程式であるので、その一般解は $y = A\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\theta_0)$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\theta_0) \tag{29}$$

（Ⅱ）$\omega=\gamma$ のとき（臨界減衰）
$\omega^2-\gamma^2=0$ より、(28) 式は $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ この方程式の一般解は、$y=A+Bt$ なので（二回微分したら 0 になる関数だから）一般解は次の式で表せられる。

$$x=(A+Bt)e^{-\gamma t}(A,B \text{ は任意定数}) \tag{30}$$

（Ⅲ）$\omega < \gamma$ のとき（過減衰）
このとき $p=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ とおくと、(28) 式は $\frac{d^2y}{dt^2}=p^2y$ となる。この一般解は、$y=Ae^{pt}+Be^{-\,pt}$ となり、つまり x は

$$x=Ae^{-\,(\gamma-\,p)t}+Be^{-\,(\gamma+p)t}(A,B \text{ は任意定数}) \tag{31}$$

強制振動は各自の理解に任せる。教科書の p.60 を参照すること。

8　エネルギーと仕事

力 F がする仕事 W は力 F の作用点の移動方向成分 $F_t=F\cos\theta$ と移動距離 s の積で表せる。よって次式が成り立つ（θ はなす角）

$$W=F_ts=F\cos\theta s \tag{32}$$

物体の変位（出発を始点とし、到達点を終点とするベクトル）を $\overrightarrow{s}$ とすると、一定の力 $\overrightarrow{F}$ が仕事するのは次式で表せる。

$$W=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{s} \tag{33}$$

これは内積であり、内積の図形的意味を考えると、(32) 式と同値であることがわかると思う。
次に力が一定ではない時の仕事について考える。
仕事を次のように解釈する、「（全体としての）仕事とは微小な区間での仕事の総和である」微小区間での力 F は一定し、物体の動く道筋 A → B を N 個の区間に分けて、i 番目の区間の力を $\overrightarrow{F_i}$ 変位を $\overrightarrow{\Delta s_i}$ とすると、次の式が成り立つ

$$\Delta W_i=\overrightarrow{F_i}\cdot\overrightarrow{\Delta s_i}=F_i\Delta s_i\cos\theta_i=F_{it}\Delta s_i \tag{34}$$

これの総和を考えるので

$$W_{A\rightarrow B}=\lim_{N\rightarrow\infty}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}\cdot\overrightarrow{\Delta s_i}=\int_A^B\overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{s}=\int_A^B F_t\,ds \tag{35}$$

で与えられる。ここで F_t は力 $\overrightarrow{F}$ の道筋の接線方向成分である。
仕事率は単位時間当たりの仕事を表すので、次式で（平均の）仕事率 P は表せる。

$$\overline{P}=\frac{W}{t} \tag{36}$$

次に瞬間の仕事率は次式で表せる。

$$P = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\overrightarrow{F}\frac{\Delta\overrightarrow{s}}{\Delta t} = \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{v} \tag{37}$$

仕事と運動エネルギーの関係は次式で表せる。

$$W_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{F}\,dx = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{38}$$

この証明は、教科書の p65,66 そして付録を参照してもらいたい。ここで

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt} \tag{39}$$

が成り立つことに注意する（v^2 を変数とするということ）

保存力と非保存力

保存力とは、力の行う仕事が途中の道筋によらず一定な力なことであり、重力が例の一つである。

例えば、地面からある高さ h までを考えるとき一度 h から上に上げてから、h まで行っても結局直接 h に行って起こる仕事と変わらないということである。

逆に非保存力は、力の行う仕事が、道筋によるということである。例としては摩擦力である。

道筋 A → r → B である保存力による仕事を $W^{保}_{A\to B}$とすると 次のような式で表せる

$$W^{保}_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B}\overrightarrow{F_{保}}\,d\overrightarrow{s} = \int_A^r \overrightarrow{F_{保}}\,d\overrightarrow{s} + \int_r^B \overrightarrow{F_{保}}\,d\overrightarrow{s} \tag{40}$$

質点に非保存力が働かない時に、力学的エネルギーが保存される。つまり、「力学的エネルギー」＝「運動エネルギー」＋「ポテンシャル（位置）エネルギー」が成り立つ。

非保存力が働くときは、非保存力がする仕事 $W^{非}$ だけ力学的エネルギーは増加（または減少する)。

9　あとがき

ある程度物理学概論第一の中間試験範囲についてまとめたが、大事なのは実際に使ってみることである。しっかりと過去問演習を行い、自分で理解することが大切である。まだ時間はあるのでしっかりと対策すれば今からでも点数は伸ばせるだろう。皆さんが高得点を取ることを楽しみにしています。頑張ってね。

付録 A　減衰振動の別の導出

次のような運動方程式を考える

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \tag{41}$$

ここで $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,$\gamma = \frac{b}{2m}$ とし式を変形すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\gamma\frac{dx}{dt} = 0 \tag{42}$$

ここで x を次のようにする

$$x(t) = e^{\lambda t}(\lambda は任意の定数) \tag{43}$$

ただし $e^{\lambda t} \neq 0$ とする。これを (42) 式に代入して

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \tag{44}$$

ここで $e^{\lambda t} \neq 0$ であるから、両辺を $e^{\lambda t}$ で割り。

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{45}$$

これは λ の二次方程式としてみて、この方程式を解くと

$$\lambda = -r \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{46}$$

となり、$\lambda_1 = -r + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$,$\lambda_2 = -r - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ これを用いて $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$（$A, B$ は任意定数）となる。

以下では減衰振動と過減衰の二つの場合分けを行う（臨界減衰はこちらで理解するよりも、本文の方が理解しやすいからである。）

（Ⅰ）$\gamma < \omega_0$ のとき

$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ は虚数になるため $\phi = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ と置くと、λ は

$$\lambda = -\gamma \pm i\phi \tag{47}$$

と表せ、これを代入すると

$$x(t) = Ae^{-(\gamma + i\phi)t} + Be^{-(\gamma - i\phi)t} \tag{48}$$

ここでオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて、ϕt が角度を表すことに注意すると。

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}(\cos\phi t + i\sin\phi t) + Be^{-\gamma t}(\cos\phi t - i\sin\phi t) \tag{49}$$

これを変形して一般解である次式が出る。

$$x(t) = e^{-\gamma t}\{(A+B)\cos\phi t + i(A-B)\sin\phi t\} \tag{50}$$

（Ⅱ）$\gamma > \omega_0$ のとき

この場合 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ は実数であるから。そのまま代入してよい、したがって次式が一般解である。

$$x(t) = Ae^{(-r + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-r - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \tag{51}$$

以上でこの方法における減衰振動、過減衰の一般解の導出を終わる。

臨界減衰は外積、線形結合を理解していないとできないため今回は省かせていただいた。

付録 B　(38) 式の証明

まず直線運動の時を証明する。運動方程式より

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{52}$$

が成り立ち、両辺に、$v = \frac{dx}{dt}$ を掛けて時刻 t_Aから t_B まで積分すると

$$m\int_{t_A}^{t_B} v\frac{dv}{dt}\,dt = \frac{m}{2}\int_{t_A}^{t_B} \frac{d^2v}{dt}\,dt = \frac{mv^2}{2}\Big|_{t_A}^{t_B} = \int_{t_A}^{t_B} F\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{x_A}^{x_B} F\,dx = W_{A\to B} \tag{53}$$

となる。三次元運動の証明はベクトルで考えて次式に注意すると

$$v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{dt} \tag{54}$$

二次元と同じ証明ができる。