

力学

電気通信大学
学域一年Ⅲ類
ツンツン

2023 年 11 月 6 日

タイトル等にある*は (多分) 物概第一や既知の知識である範囲を示している、必要であれば各自確認せよ
この PDF を許可なく配布することは認めない。流失等が発覚した場合、公開停止等の対応を行う可能性がある

目次

1	力学の基礎	III
1.1	*位置と速度、加速度の関係	III
1.2	慣性質量	III
1.3	ベクトルを用いた運動方程式	III
1.4	*様々な力	III
1.5	運動方程式の微分方程式を解く	IV
2	減衰振動と強制振動	V
2.1	*バネの力	V
2.2	バネの運動方程式	V
2.3	*減衰振動	VII
2.4	強制振動	VIII
2.5	減衰を伴う強制振動	IX
3	仕事とエネルギー	X
3.1	*仕事	X
3.2	*エネルギー	X
3.3	*力学的エネルギー保存則	XI
3.4	位置エネルギーと力の関係	XI
4	回転運動	XII
4.1	円運動	XII
4.2	角運動量	XII
4.3	角運動量保存則	XIII
4.4	平面運動の極座標表示	XIII
5	万有引力とケプラーの法則	XV
5.1	*万有引力とその位置エネルギー	XV
5.2	*ケプラーの法則と楕円の性質	XVI
5.3	楕円の極座標表示	XVI
5.4	惑星の軌道	XVII
5.5	面積速度	XVIII
5.6	周期	XIX
6	座標系	XIX
6.1	相対運動	XIX

6.2	加速度座標系	XX
6.3	回転座標系	XXI
6.4	角速度ベクトル	XXI
付録 A	斉次方程式と非斉次方程式	XXI
付録 B	ナブラ演算子とは	XXII
付録 C	保存力であるということは?	XXIII
付録 D	三次元空間での極座標変換とそのヤコビアン	XXIII

1 力学の基礎

1.1 *位置と速度、加速度の関係

$\vec{x}(t)$ を物体の位置とし、 $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ はそれぞれ物体の速度、加速度を示す t の関数とする

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad (1)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad (2)$$

1.2 慣性質量

物体の動かしづらさを数値にしたものを”慣性質量”という。ニュートンの運動方程式の質量と一致する。

$$F = m_I \vec{a} \quad (3)$$

ある物体に働く重力による力は”重力加速度”×”質量”と表せる。この質量は慣性質量とは異なるものであるが、重力質量と慣性質量はほぼ一致する。であるから、重力の場合でも共通の質量を扱えばよい。

1.3 ベクトルを用いた運動方程式

ここでは三次元の運動を考える。

x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とすると位置は

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (4)$$

速度は

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (5)$$

力 (加速度) は

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) \quad (6)$$

大切なのは向きという概念。あとは速度は変化しても速さ自体は変化しない可能性があるということ。(ex 円運動)

1.4 *様々な力

・重力

物体が地面にひきつけられる力、重力は万有引力による力であるが、距離の変化は微小であるから、力は一定であるとする。

$$F = mg \quad (\text{ただし正の向きの取り方によっては負になりうる。}) \quad (7)$$

- ・ 摩擦力

- 静止摩擦力

物体が面と接してるときに滑らないようにする力。最大静止摩擦力は垂直抗力 R と静止摩擦係数 μ_s を用いて、

$$F = \mu_s R \quad (8)$$

- 動摩擦力

物体が面と接して動いてるときに働く力、速度と逆向き (減速させる力)。垂直抗力と動摩擦係数 μ_d を用いて、

$$F = \mu_d R \quad (9)$$

一般に動摩擦力は最大静止摩擦力より小さい。

- ・ 粘性抵抗

流体中*1を物体が移動する際に、流体が物体に与える力。

$$F = -kv \quad (10)$$

k は定数であり、半径 a の球の場合 η を粘性率として $k = 6\pi a\eta$ と表すことができる (ストークスの抵抗法則)

1.5 運動方程式の微分方程式を解く

ここでは二つの例についてみていく・粘性抵抗のみ働いてる運動方程式 (重力なし)

運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (11)$$

この微分方程式は変数分離法*2を用いると、次のように解くことができる。

$$\frac{dv}{v} = \frac{-k}{m} dt \quad (12)$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-k}{m} dt \quad (13)$$

$$\log v = \frac{-k}{m} t + C \quad (14)$$

$$v = e^{\frac{-k}{m} t + C} \quad (15)$$

$$(16)$$

初速度を $v_0, K = \frac{k}{m}$ とすると

$$v = v_0 e^{-Kt} \quad (17)$$

物体の位置 x は

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-Kt} \quad (18)$$

より、微分方程式を解くと、

$$\int v_0 e^{-Kt} dt = dx \quad (19)$$

$$x = B - \frac{v_0}{K} e^{-Kt} \quad (20)$$

*1 流体とは、液体、気体を指す

*2 微分方程式は解析学の授業でやるはずなので省略する。

初期位置を x_0 とすると

$$x = x_0 + \frac{V_0}{K}(1 - e^{-Kt}) \quad (21)$$

・重力と粘性抵抗がある場合
運動方程式は次のようになる

$$m \frac{dv}{dt} = -kv - mg \quad (22)$$

変形し $V = v + \frac{mg}{k}$ とすると

$$m \frac{dV}{dt} = m \frac{dv}{dt} = -kV \quad (23)$$

あとはこの微分方程式を解けばよい。

2 減衰振動と強制振動

2.1 *バネの力

バネには自然長から伸ばしたり縮めたりすると復元力が働く、バネ定数を k とすると、

$$F = -kx \quad (24)$$

と表すことができる。

2.2 バネの運動方程式

・バネに繋がれたおもりの運動方程式 (重力無視)
次の微分方程式を解く

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (25)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (26)$$

2.2.1 *三角関数を用いた解法

x を二回微分したら、 x に戻ってくるものを考える。
 $x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ とし、代入をすると、

$$-m\omega^2(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = -k(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) \quad (27)$$

よって

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (28)$$

となるので、 $x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ は解である。この式を変形すると

$$x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) \right) \quad (29)$$

ここで $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos \phi$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin \phi$ とすると

$$x = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \phi \sin(\omega t) + \sin \phi \cos(\omega t)) \quad (30)$$

三角関数の加法定理の逆を用いると、

$$x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \phi) \quad (31)$$

よって、 $\sqrt{A^2 + B^2}$ は定数であるから

$$x = C \sin(\omega t + \phi) \quad (32)$$

となる。

このように表すことができる振動を単振動と言い、 C を振幅、 ω は角速度、 ϕ は位相という。

2.2.2 $e^{\lambda t}$ を用いた解法

今度は e^x に着目してこの微分方程式を解いていくご存じの通り、 e^{ax} は二回微分すると $a^2 e^{ax}$ となる、これを用いて解いていく。

$x = e^{\lambda t}$ として、運動方程式に代入すると、式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} \quad (33)$$

これを計算し、 λ を求めると

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega \quad (34)$$

となる。^{*3} (i は虚数単位)

このことから、この微分方程式の特殊解は $e^{\pm i \omega t}$ となる。つまり一般解は定数 C, C' を用いて

$$x = C e^{i \omega t} + C' e^{-i \omega t} \quad (35)$$

これをオイラーの公式 $e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ をもちいて変形を行うと、次のようになる。

$$C e^{i \omega t} + C' e^{-i \omega t} = C(\cos \omega t + i \sin \omega t) + C'(\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (36)$$

$$= (C + C') \cos \omega t + i(C - C') \sin \omega t \quad (37)$$

$(C + C') = A, i(C - C') = B$ とすると

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (38)$$

となり、結果的に三角関数で考えた場合と同じ結論になる。

・重力下でバネにつるされたおもりの運動方程式

おもりはバネと重力の両方を受けるので、変位を x とすると、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx = -k \left(x - \frac{mg}{k} \right) \quad (39)$$

$X = \left(x - \frac{mg}{k} \right)$ とすれば、この式は重力のない時の式と一致する。つまりつり合いの位置を中心に単振動を行う。

^{*3} ここは実際に手を動かして確認してみたい、良い練習になるはず。

2.3 *減衰振動

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2hv = -kx - 2h \frac{dx}{dt} \quad (40)$$

ここの $2h$ の 2 はのちの計算をしやすくするために取り出したもの。^{*4}

$\gamma = \frac{h}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ とし、式を変形させると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (41)$$

この微分方程式を解いていく。

これは $x = e^{\lambda t}$ として代入すると

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (42)$$

この二次方程式の解は

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (43)$$

ここで γ^2, ω_0^2 の大小関係で場合分けを行う。

2.3.1 過減衰

$\gamma^2 > \omega_0^2$ の時

この時 $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ は実数である。

このことから $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sigma$ とすると一般解は

$$x = Ae^{(-\gamma+\sigma)t} + Be^{(-\gamma-\sigma)t} \quad (44)$$

となる。

2.3.2 減衰振動

$\gamma^2 < \omega_0^2$ の時

この時 $\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

つまりこれは複素数であるため、一般解は $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \omega_1$ と置くことにより

$$x = Ae^{(-\gamma+i\omega_1)t} + Be^{(-\gamma-i\omega_1)t} \quad (45)$$

これをオイラーの公式を用いて展開すると、

$$x = e^{-\gamma t}(C \cos \omega_1 t + C' \sin \omega_1 t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (46)$$

となる。

^{*4} 二次方程式の解の公式とかでも 2 の倍数の時 みたいなのがあっただろう、それと似ている。

2.3.3 臨界減衰

$\gamma^2 = \omega_0^2$ の時

この時 $x = \lambda$ 。よって $x = e^{-\lambda t}$ はこの微分方程式の特殊解である。ここで $x = a(t)e^{-\gamma t}$ として ($a(t)$ は t の関数)、微分方程式に代入すると

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\gamma t} \frac{da(t)}{dt} - \gamma a(t) e^{-\gamma t} \quad (47)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\gamma t} \frac{d^2a(t)}{dt^2} - 2\gamma e^{-\gamma t} \frac{da(t)}{dt} + \gamma^2 a(t) e^{-\gamma t} \quad (48)$$

であるから、

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} = 0 \quad (49)$$

したがって $a(t)$ は二回微分して 0 となるような関数であることが分かる。つまり、定数 A, B を用いると、

$$a(t) = At + B \quad (50)$$

と表すことができる。したがって一般解は

$$x = (At + B)e^{-\gamma t} \quad (51)$$

2.4 強制振動

・復元力のほかに、外部から力を与えることでそれに影響されて、特異な振動をする。ちなみにバネの根元を動かすということも強制振動に入る

・例えば $F = F_0 \sin \omega t$ という力を与えるとする。この運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \sin \omega t \quad (52)$$

この微分方程式を解いていく。

この微分方程式の一般解は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (53)$$

という斉次方程式の一般解と

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (54)$$

という非斉次方程式の特殊解の和である。上の斉次方程式の一般解は $x = C \sin(\omega_0 t + \alpha)$ であるので、下の非斉次方程式を解く。非斉次方程式に $x = A \sin \omega t$ として代入すると、

$$-\omega^2 A \sin \omega t + \omega_0^2 A \sin \omega t = f_0 \sin \omega t \quad (55)$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (56)$$

したがって非斉次方程式の特殊解は

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (57)$$

これらのことから、この強制振動の一般解は

$$x = C \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (58)$$

となる。 $\omega = \omega_0$ のとき、 A は非常に大きな値をとり、この現象を共鳴もしくは共振という。この場合の微分方程式は $x = At \cos \omega_0 t$ として計算を行う。

2.5 減衰を伴う強制振動

次の微分方程式を解く。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2h \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t \quad (59)$$

この両辺を m で割り変形をすると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (60)$$

この微分方程式の一般解は、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (61)$$

の一般解と

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (62)$$

の特殊解の和である。

$x = A \sin \omega t$ を代入しても、非斉次方程式は成り立たないため、 $x = A \sin(\omega t - \delta)$ として代入し、計算を行うと、

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \delta) + 2\gamma\omega A \cos(\omega t - \delta) + \omega_0^2 A \sin(\omega t - \delta) = f_0 \sin \omega t \quad (63)$$

これは任意の時間 t で成り立つ必要があるため、係数を両辺で一致させる必要がある。ところで、

$$f_0 \sin \omega t = f_0 \sin(\omega t - \delta + \delta) = f_0 \cos(\omega - \delta) \sin \delta + f_0 \sin(\omega - \delta) \cos \delta \quad (64)$$

であるから、これを代入して、係数を比較すると

$$-A\omega^2 + \omega_0^2 A = f_0 \cos \delta \quad (65)$$

$$2\gamma\omega A = f_0 \sin \delta \quad (66)$$

であるから、この連立方程式から $A, \tan \delta$ を求めると、

$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (67)$$

となる。(発散はしない)

振幅が最大になるのは

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (68)$$

3 仕事とエネルギー

3.1 *仕事

物理学での”仕事”とは、物体をどれだけ動かしたのかというのが大切である。なので仕事 W はある地点とある地点の距離 x と力 F , 及び力と進行方向のなす角 θ を用いて、

$$W = Fx \cos \theta \quad (69)$$

またベクトルを用いて表すと、内積を使って

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} \quad (70)$$

と表せる。

力が一定でない場合、微小区間 $d\vec{x}$ を用いて積分を用いればよい。

$$W = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_P^Q (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (71)$$

仕事の単位は $1\text{ J} = 1\text{ N} \cdot \text{m} = 1\text{ kg m}^2/\text{s}^2$

始点と終点の位置だけで仕事が決まる力のことを保存力という。例えば、重力、ばねの弾性力、万有引力である。

力 \vec{F} が保存力であるのならば、その周回積分は 0 となる

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (72)$$

単位時間あたりに行う仕事を仕事率という。

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (73)$$

仕事率の単位は J/t であるが一般に W が使われる。

3.2 *エネルギー

エネルギーとは仕事をするという能力である。

例えば重力が働く場所で、基準点から高さ h の所まで質量 m の物体を持ち上げたとする。この時の仕事は mgh である。逆に物体を高さ h からゆっくり落とした場合、物体は mgh の仕事だけする。

この mgh を仕事を行う、エネルギーと呼ぶ。 mgh のように位置に関するエネルギーを位置エネルギー、またはポテンシャルエネルギーという。またある位置からある位置までに移動する時にする力の仕事は位置エネルギーの差で表すことができる。

再び仕事の定義に戻ると

$$W = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (74)$$

であった。ところで運動方程式から力 \vec{F} は $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ であるのだから、仕事は $d\vec{x} = \vec{v} dt$ を用いて、

$$W = \int_P^Q m \frac{d\vec{v}}{dt} dt \quad (75)$$

$$= \int_P^Q \frac{m}{w} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dt \quad (76)$$

$$= \frac{m}{2} (v_{Qx}^2 + v_{Qy}^2 + v_{Qz}^2) - \frac{m}{2} (v_{Px}^2 + v_{Py}^2 + v_{Pz}^2) \quad (77)$$

したがって力がした仕事は、

$$W = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 \quad (78)$$

と表せ、

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (79)$$

を運動エネルギーという。

3.3 *力学的エネルギー保存則

例えば、重力によって落下する物体を考える。なお物体には重力以外の力が働いていないとする。
P 地点から Q 地点まで移動する間に重力が行う仕事は運動エネルギーの変化と等しいので、

$$mgz_P - mgz_Q = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 \quad (80)$$

このことから、次の関係が成り立つ

$$mgz_P + \frac{1}{2} m v_P^2 = mgz_Q + \frac{1}{2} m v_Q^2 = K + U \quad (81)$$

つまり、運動エネルギーと位置エネルギーが保存されているので、これを力学的エネルギー保存則という。

非保存力の場合、力学的エネルギー保存則は成り立たないが、しかし非保存力のした仕事は、エネルギーに影響を与える。運動エネルギーの差は全ての力がした仕事である。

3.4 位置エネルギーと力の関係

仕事は力×距離であり、位置エネルギーの変化でもある、微小区間 dx の間の仕事は

$$W = F dx = U(x) - U(x + dx) \quad (82)$$

したがって、力は

$$F = \frac{U(x) - U(x + dx)}{dx} = -\frac{dU}{dx} \quad (83)$$

となり、位置エネルギーの微分は力であることが分かる。

このことを三次元に拡張すると

$$F_x = \frac{U(x, y, z) - U(x + dx, y, z)}{dx} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (84)$$

となる。よって力はナブラ ∇ を使って、

$$\vec{F} = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (85)$$

となる。

4 回転運動

4.1 円運動

半径 R で xy 平面を円運動する物体の位置は、角速度を ω として、

$$(x, y) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t) \quad (86)$$

で表すことができる、この時の速度と力は、

$$(v_x, v_y) = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t) \quad (87)$$

$$(F_x, F_y) = (-mR\omega^2 \cos \omega t, -mR\omega^2 \sin \omega t) = (-m\omega^2 x, -m\omega^2 y) \quad (88)$$

このことから力の方向は中心方向に向かっていることが分かる。このように力の方向が常にある一点の方向に向かう力を中心力という。

円運動している物体は、円の中心に向かう中心力を受けている。原点から物体の位置に向かう位置ベクトルを \vec{r} とし \vec{r} 方向の単位ベクトルを \vec{e}_r とすると、中心力は

$$\vec{F}_r = f(r) \vec{e}_r \quad (89)$$

4.2 角運動量

運動量 \vec{p} とは

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (90)$$

で表すことができる量である。この式から単位時間当たりの運動量の変化が力になるということが分かる。このことから運動量の変化が大きいものは力も大きいということが分かる。

角運動量 \vec{L} とは次のように定義できる量である。

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (91)$$

これは物体の位置ベクトルと運動量の外積である。^{*5}位置ベクトルと速度のなす角を ϕ とすると、角運動量の絶対値は、

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r m v \sin \phi \quad (92)$$

ここで $|\vec{r} \times \vec{p}|$ は $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ となることを用いて計算をした。 $(\theta$ はなす角)

このことから原点に対する向きと速度の向きが一致しているとき角運動量は 0 となる。つまり角運動量は原点に対して回転運動の勢いを示している。

^{*5} いっもの積ではなく外積であるということに気を付けてほしい。

4.3 角運動量保存則

単位時間当たりの角運動量の変化について考えていこう。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (93)$$

この $\vec{r} \times \vec{F}$ は位置ベクトルと力の外積である。このことから力と位置の方向が同じであれば 0 であり、垂直であれば最大である。このことからこれは原点に対して回転の加速度を与える作用の大きさといえる。これを力のモーメントという。

中心力について考えていこう。中心力は位置の方向と力の方向が一致しているので力のモーメントは 0 である。つまり角運動量は増減しない (変化量は 0)、よって中心力のとき、角運動量は一定に保存される。これは角運動量保存則という

4.4 平面運動の極座標表示

ある位置 (x, y) にある物体の運動を表すとき、原点からの距離とそのなす角度を使って表すことができる。この場合の微分方程式は

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (94)$$

と表すことができる。ところでこの時力はどうやって表すことができるのだろうか。

位置の関数の時間微分について

(x, y) 座標系のとき

$r = (x, y)$ で表すことができるベクトルは、 x 方向の単位ベクトルを \vec{i} , y 方向の単位ベクトルを \vec{j} とすると、 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ となる。これの時間微分は、

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} \quad (95)$$

ところで、基底ベクトルは時間依存しないものであるから、この値は次のようになる

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad (96)$$

では極座標系ではどうであろうか

r 方向の単位ベクトルを \vec{e}_r , θ 方向の単位ベクトルを \vec{e}_θ とし、それを \vec{i} と \vec{j} を使って表す、 $\vec{r} = r\vec{e}_r$ であることと \vec{e}_r と \vec{e}_θ は垂直であることを使うと、

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (97)$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad (98)$$

このことから、単位ベクトルの向きは時間依存であることが分かる。

位置の微分について考える、上記より $\vec{r} = r\vec{e}_r$ であるのだから、時間微分は

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad (99)$$

である。ここで、 \vec{e}_r の時間微分は、

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) \quad (100)$$

$$= -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \quad (101)$$

$$= \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \quad (102)$$

$$= \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad (103)$$

このことから、時間微分は

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad (104)$$

となり $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ であることから

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (105)$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (106)$$

と表すことができるここからさらに時間微分を行い、加速度を求めると

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) \quad (107)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad (108)$$

ここで、 \vec{e}_θ の時間微分は

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \quad (109)$$

$$= -\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \quad (110)$$

$$= -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r \quad (111)$$

である。これはどちらも θ を微分したものが出てくることを知っておくと、確認しやすいだろう

(ex. 円運動なら角度の時間による関数は ωt であるから時間微分すると ω が出てくる)

これにより、二回微分は

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r \quad (112)$$

$$= \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \vec{e}_r + \left\{ r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right\} \vec{e}_\theta \quad (113)$$

$$= \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta \quad (114)$$

となる。運動方程式は $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta$ であることを利用して、

$$F_r = m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \quad (115)$$

$$F_\theta = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (116)$$

となる。極座標で表して解くというのも必要であるので、しっかりと理解し使えるようにしてほしい。

中心力である場合

中心力の場合 $F_\theta = 0$ であるのだから、運動方程式より、

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (117)$$

よって

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (118)$$

である。ここで角運動量の大きさを考えると

$$|\vec{L}| = rmv_\theta = rm \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (119)$$

つまり、中心力であれば角運動量は定数つまり一定であることがわかる。このことから中心力であれば、角運動量保存則は確かに成り立つことが分かる。

この式から角度の時間微分を求めると

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{mr^2} \quad (120)$$

である。これを中心力方向の運動方程式に代入すると

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r + \frac{L^2}{mr^3} \quad (121)$$

と表すことができる (ここでの L はベクトルではなくスカラーである。) 円運動の場合 $\frac{L^2}{mr^3}$ は $mr\omega^2$

5 万有引力とケプラーの法則

5.1 *万有引力とその位置エネルギー

質量のある物体では、互いに引き寄せあう力を及ぼしあっている。その力は、それぞれの物体の質量と、物体間の距離に依存し、次のように表すことができる。(距離の二乗に反比例)

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (122)$$

G は万有引力定数である。またポテンシャルエネルギーは次のように表せる。

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (123)$$

5.2 *ケプラーの法則と楕円の性質

ケプラーの法則とは惑星の軌道や周期に関する三つの法則である。

- ・ 惑星の軌道は太陽を一つの焦点とした楕円軌道である。
- ・ 単位時間あたりに描く面積は常に一定である。(面積速度一定)
- ・ 楕円の長半径の3乗と周期の2乗の比は、全ての惑星に共通の値を持つ。

楕円とは二つの焦点からの距離が一定である曲線と定義できる。

$$r + r' = 2a \quad (124)$$

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (125)$$

この式から変形をすることで

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (126)$$

が導くことができる。

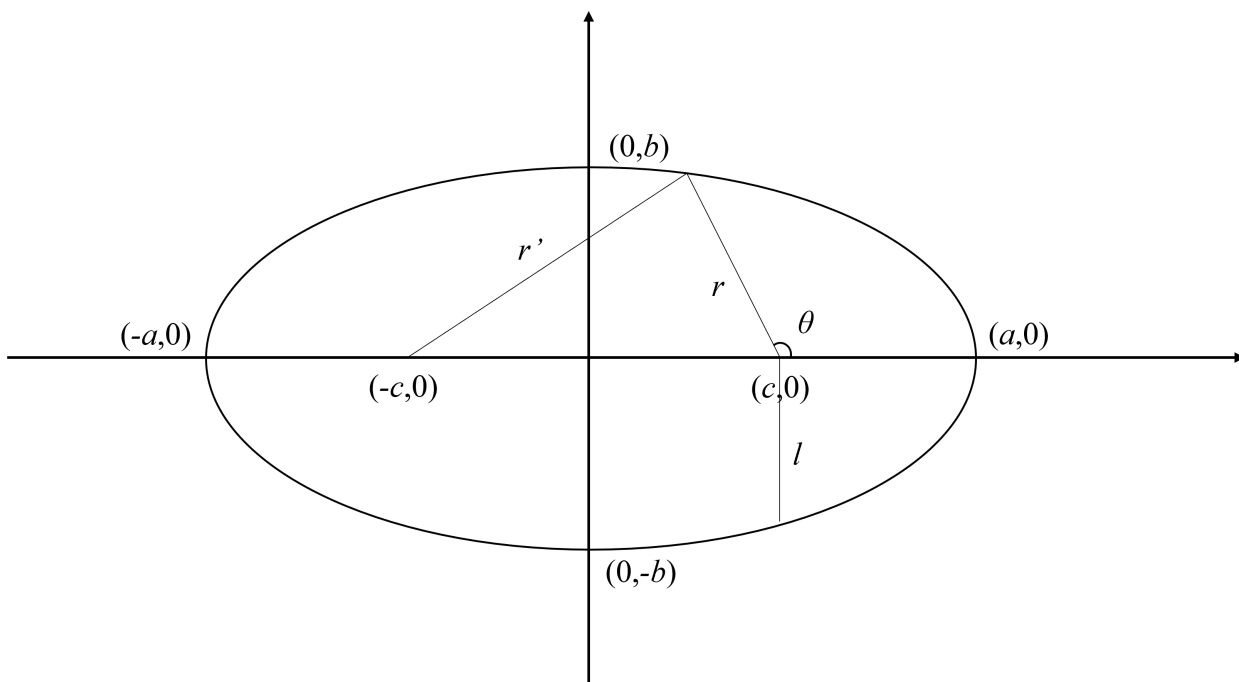


図1 楕円の例

5.3 楕円の極座標表示

楕円的一方の焦点を原点とすると、もう一方の焦点と楕円上の点までの距離は次のように表すことができる。

$$r'^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos(\pi - \theta) = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\theta \quad (127)$$

ここで、 $r' = 2a - r$ であるから、これを代入して、

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\theta \quad (128)$$

さらにこれを変形すると

$$a^2 - c^2 = r(a + c \cos \theta) \quad (129)$$

これに離心率 $e = \frac{c}{a}$ と、 $a^2 - c^2 = b^2$ を用いて変形すると、

$$b^2 = ra(1 + e \cos \theta) \quad (130)$$

ここで半直弦 $l = \frac{b^2}{a}$ を用いると、

$$l = r(1 + e \cos \theta) \quad (131)$$

よって r は、

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \quad (132)$$

となる。

5.4 惑星の軌道

極座標表示での運動方程式から、中心力を万有引力として、惑星の軌道を導出する。

極座標表示での中心力の運動方程式から

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \quad (133)$$

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L \quad (134)$$

となる。 $h = \frac{L}{m}$ とすると、この式は次のように変形できる。

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} \quad (135)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (136)$$

と書ける。ところで、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \quad (137)$$

であるので、代入をすると

$$\frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} \quad (138)$$

となる。これを変形して $\frac{1}{l} = \frac{GM}{h^2}$ とすると、この式は次のように変形できる。

$$\frac{h^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} \quad (139)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{1}{r^2 l} + \frac{1}{r^3} \quad (140)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{1}{l} + \frac{1}{r} \quad (141)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{l} \quad (142)$$

さらに $\frac{1}{r} = u$ とするとこの式は

$$\frac{d}{d\theta} \left(u^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) \right) - u = -\frac{1}{l} \quad (143)$$

ここで合成関数の微分を使って

$$u^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) = u^2 \frac{du}{d\theta} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) = u^2 \left(-\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta} \quad (144)$$

が成り立つので、式は

$$\frac{d}{d\theta} \left(u^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) \right) - u = -\frac{d^2 u}{d\theta^2} - u = -\frac{1}{l} \quad (145)$$

となり、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(u - \frac{1}{l} \right) = - \left(u - \frac{1}{l} \right) \quad (146)$$

と表すことができる。

これは単振動の微分方程式と同じ形であるから、 A, α を定数として

$$u - \frac{1}{l} = A \cos(\theta - \alpha) \quad (147)$$

さらに変形すると

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \quad (148)$$

と表すことができる。座標系を適切に取ることににより α は 0 に出来るので、楕円の極座標表示と同じ形になる。このことから運動方程式から導いた軌道が楕円のものと同じになる。つまり軌道は楕円である。よってケプラーの第一法則が成り立つことが分かる。

5.5 面積速度

面積速度 $\frac{dS}{dt}$ は次のように表すことができる。(図を参照)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta \quad (149)$$

ところで

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (150)$$

であるから、これを代入して変形を行うと

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (151)$$

となる (式 134 参照)。

このことから中心力について考える時には角運動量が保存されるのだから、面積速度は一定となる。

5.6 周期

周期は面積を面積速度で割ったものである。楕円の面積は πab であるので、次のように表すことができる。^{*6}

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{dS}{dt}} = \frac{2\pi abm}{L} \quad (152)$$

ここで半直弦 $l = \frac{b^2}{a}$ を用いると $b = \sqrt{al}$ であるから、この式は

$$T = \frac{2m\pi a\sqrt{al}}{L} \quad (153)$$

ところで式 135 は r を l とすることで次のように変形できる。

$$0 = -\frac{GM}{l^2} + \frac{h^2}{l^3} \quad (154)$$

$$GMl = h^2 \quad (155)$$

$$h = \sqrt{GMl} \quad (156)$$

また $\frac{m\sqrt{l}}{L}$ は $h = \frac{L}{m}$ を用いて、 $\frac{\sqrt{l}}{h}$ となるので、代入をすると

$$\frac{m\sqrt{l}}{L} = \frac{\sqrt{l}}{h} = \frac{1}{\sqrt{GM}} \quad (157)$$

よって周期の式は

$$T = T = \frac{2m\pi a\sqrt{al}}{L} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (158)$$

とあわせ、これを変形することで、

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.} \quad (159)$$

となる。このことからケプラーの第三法則が導かれる。

6 座標系

6.1 相対運動

いままでは座標系は移動しないとして考えてきたが、物体の運動は観測者の運動によって変化する。運動している物体、または座標系から見た運動を相対運動という。

具体例を見ていこう、一定速度 \vec{V} で動いている物体 (例えば電車) の内部でボールを落としたとき、物体の中の観測者から見た運動と物体の外から見た物体の運動 (静止座標系) について考える。

静止座標系から見た物体の位置ベクトルを \vec{r} とし、移動する物体から見た物体の位置ベクトルを \vec{r}' , 静止座標系の原点から移動する座標系の原点までの位置ベクトルを \vec{R} とすると

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \quad (160)$$

^{*6} ところで楕円の面積はどうやって求めるのだろうか、 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ を解くことにより求めることができる、是非やってみてほしい。

と表すことができる。

これを時間微分すると

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (161)$$

ここで静止座標系から見た物体の速度を \vec{v} , 移動する座標系から見た物体の移動速度を \vec{v}' とするとこの式は

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (162)$$

となる

さらに時間微分して加速度を求める。静止座標系から見た物体の加速度を \vec{a} , 動いている座標系から見た物体の加速度を \vec{a}' として、 \vec{V} は定数であることを考えると、次のように表すことができる。

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (163)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (164)$$

このことから、どちらの座標系で見ても、加速度は等しいため、運動方程式は一致する。

また一定速度で移動する座標系の時、時間 t を用いて \vec{r} は次のように表すことができる。

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \quad (165)$$

このような変換をガリレイ変換という。運動方程式は変わらないが、初速度は変化する。

6.2 加速度座標系

今度は座標系が加速しているとして先ほどの状況について考えていく。静止座標系から見た運動している物体までの位置ベクトルは

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \quad (166)$$

と表すことができる。そうすると速度も先ほどと同様に

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (167)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (168)$$

と表すことができる。

さらに時間微分する、ここで加速している座標系の加速度を \vec{A} とすると、静止座標系から見た運動している物体の加速度は

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (169)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \quad (170)$$

となる。先ほどの例とは異なり、移動する座標系の速度は一定ではないのだから、時間微分しても加速度が残る。つまり、加速度座標系からみた運動方程式は次のように表すことができる

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A} \quad (171)$$

このことから、加速度座標系からみた運動方程式は加速度座標系の加速度分だけ、余計な力が入っているということが分かる。この力を慣性力という。

6.3 回転座標系

先の加速度座標系で考えた通り、回転する座標系にも、見かけの力が働いていると考えられる。この見かけの力である、コリオリ力と遠心力について考えていく。

宇宙ステーション (または人工衛星) を考えると、それらは地球の重力を受けているはずなのに、地球に向かって落ちてはいかない、これは地球の重力とは反対方向の力、遠心力が働いているからである。

回転する地面上にいる二人のキャッチボールを考えていく、地面が静止しているならば、もちろんまっすぐ投げれば、相手に届くが、地面が静止していない時には、相手にまっすぐ投げたとしても、相手から見たボールの挙動は変なものになる。これはコリオリ力という力がボールに働いているためである。

6.4 角速度ベクトル

回転座標系での運動を分かりやすくするために角速度ベクトル $\vec{\omega}$ を導入する。

このベクトルは、物体はこのベクトルと垂直な面で、このベクトルを回転の軸として、角速度 $|\vec{\omega}|$ で運動するというものである。

このベクトルを導入する利点を見ていこう。まず原点から、 $\vec{\omega}, \vec{r}$ という、角速度ベクトルと位置ベクトルがあるとすると、二つのなす角を θ とすると、 dr は次のように表すことができる。

$$dr = \omega r \sin \theta dt = |\vec{\omega} \times \vec{r}| dt \quad (172)$$

つまりこの式を変形させると

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (173)$$

となる。^{*7}これは任意の \vec{r} で成り立つ (つまり回転座標系ではいつでも用いていいということ。) また回転軸がある単位ベクトルと平行であれば、その単位ベクトルは変化しない。(例えば回転軸と y 軸方向が平行だったりとか...)

そして、位置の単位ベクトルを微分したときも $\vec{\omega}$ の外積になる。

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_x \quad (174)$$

これが角速度ベクトルである。これを用いて回転座標系と静止座標系との運動の違いを考えていく。

付録 A 斉次方程式と非斉次方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (A.1)$$

で表すことができる微分方程式は、 n 階の斉次方程式 (同次方程式) という。

逆に

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (A.2)$$

で表すことができる微分方程式を、 n 階の非斉次方程式 (非同次方程式) という。

非斉次方程式の一般解は、斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和である。

^{*7} 円運動の速さが ω 倍されると近い、というかたぶん同じ [要出典]

付録 B ナブラ演算子とは

関数 $f(x, y, z)$ に対して、各変数の偏微分を並べたベクトルを ∇f と書く

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{B.3})$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ は関数 $f(x, y, z)$ の x 方向の変化量を表している。したがって ∇f はそれぞれの向きの変化量、つまり勾配、傾きを表している。

$\nabla \cdot \vec{a}$ について考えてみよう (内積)。内積であるから計算をすると。

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{B.4})$$

これは x 方向の x 成分の変化量と y 方向の y 成分の変化量と z 方向の z 成分の変化量の和である。つまり各辺が dx, dy, dz である微小な立方体を考えてあげると、そこに入ってくる量と出ていく量の差分がわかる。また発散を意味する *divergence* を使って、

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} \quad (\text{B.5})$$

と表すことができる。

$\nabla \times \vec{a}$ について考える (外積)

これを計算すると、

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y & a_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ a_z & a_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \vec{k} \quad (\text{B.7})$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{B.8})$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \quad (\text{B.9})$$

成分の意味について考えていく。 z 成分の $\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$ を見ると、これは y の x 方向の変化から x の y 方向の変化を引いたものである。 y の x 方向の変化とは z 軸に対して反時計回りの回転を示して、 x の y 方向の変化とは z 軸に対して時計回りの回転を示している。これらのことから、 $\nabla \times \vec{a}$ はそれぞれの軸周りでの回転の大きさを表している。また、回転を意味する *rotation* をもちいて、外積は

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} \quad (\text{B.10})$$

と表すことができる。

簡単のため、二次元にして考えてみると、 y 方向に dx だけ、 x 方向に dy だけ移動したときの和は、

$$a_x(x, y)dx + a_y(x + dx, y)dy - a_x(x, y + dy)dx - a_y(x, y)dy \quad (\text{B.11})$$

$$\approx a_x(x, y)dx + a_y(x, y)dy + \frac{\partial a_y(x, y)}{\partial x} dx dy - a_x(x, y)dx - a_y(x, y)dy - \frac{\partial a_x(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (\text{B.12})$$

$$= \left\{ \frac{\partial a_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial a_x(x, y)}{\partial y} \right\} dx dy \quad (\text{B.13})$$

このことから、これはこの経路における、力 \vec{a} の仕事である。

ところで、保存力は元に戻ってくると仕事は 0 であるので、力が保存力であることの条件は $\nabla \times \vec{a} = 0$ である。

付録 C 保存力であるということは?

ここでは保存力について考えていく。保存力の仕事は始点と終点のみ依存するものである。つまり周回積分を用いて次のように表すことができる。

$$\oint \vec{F} d\vec{x} = 0 \quad (\text{C.14})$$

これは次のように表すことができる。(\vec{n} は単位ベクトル)

$$\oint \vec{F} d\vec{x} = \int \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{C.15})$$

これをストークスの定理という。したがって保存力であることは、力が

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (\text{C.16})$$

を満たす必要がある。

力が

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (\text{C.17})$$

を満たすとする

$$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times (\nabla U) \quad (\text{C.18})$$

が成り立つ。このとき $\nabla \times (\nabla U) = 0$ である。このことから式 (C.16) が成り立つときも、保存力であるということが言える。

付録 D 三次元空間での極座標変換とそのヤコビアン

今までは二次元での極座標、つまり次の変換を考えていた。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

では三次元での極座標はどのように表すことができるのであろうか? 結論としては次のように表すことができる

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (\text{D.19})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (\text{D.20})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{D.21})$$

具体的に図にすると次のようになる

ところで、三次元での体積は

$$V = x \times y \times z \quad (\text{D.22})$$

と表すことができるから、微小体積 dV は三つの微小区間を用いて

$$dV = dx \times dy \times dz \quad (\text{D.23})$$

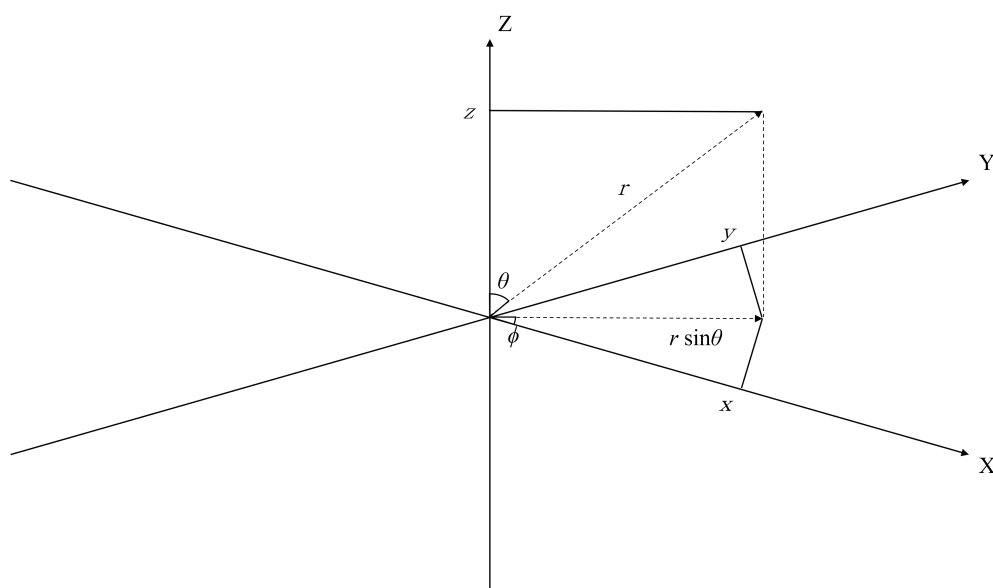


図 2 三次元での極座標の表し方

と表すことができる。つまり

$$V = f(x, y, z) \quad (\text{D.24})$$

と表せるとき区間 C における体積の積分は

$$\int_C V \, dV = \int_C \int_C \int_C f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (\text{D.25})$$

と表すことができる。

では先の極座標表示での方法で置換した場合、そのまま置換できるのであろうか？ 結論としては NO である。

それではどうやって考えていくかということ ヤコビアン (ヤコビ行列) を考えることにより、この答えを出すことができる。ではヤコビアンについて見ていこう。

まず三次元極座標でのヤコビアンを考える前に二次元極座標でのヤコビアンについて考えていこう。

二次元極座標のヤコビアンは定義より次のように表すことができる

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (\text{D.26})$$

この式から偏微分を計算すると

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \quad (\text{D.27})$$

これにより二次元極座標でのヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad (\text{D.28})$$

したがって次のことが言える、

$$dx dy = r dr d\theta \quad (\text{D.29})$$

このことを用いて、三次元極座標でのヤコビアンについて考えていく 定義より

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \quad (\text{D.30})$$

ではこの偏微分を計算すると求めたい行列式は次のように変形することができる。

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{D.31})$$

この行列式を解くと

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \quad (\text{D.32})$$

したがって次のことが言える、

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{D.33})$$

このことから体積を求める際に、極座標での変換をする場合 $r^2 \sin \theta$ 倍だけ補正する必要性がある。