力学

ツンツン

2023 年 10 月 3 日

タイトル等にある*は (多分) 物概第一や既知の知識である範囲を示している、必要であれば各自確認せよ

目次

1　力学の基礎

1.1　*位置と速度、加速度の関係

$\overrightarrow{x}(t)$ を物体の位置とし、$\overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{a}(t)$ はそれぞれ物体の速度、加速度を示す t の関数とする

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{x}(t)}{dt} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{x}(t)}{dt^2} \tag{2}$$

1.2　慣性質量

物体の動かしづらさを数値にしたものを”慣性質量” という。ニュートンの運動方程式の質量と一致する。

$$F = m_I\overrightarrow{a} \tag{3}$$

ある物体に働く重力による力は”重力加速度” ×”質量” と表せる。この質量は慣性質量とは異なるものであるが、重力質量と慣性質量はほぼ一致する。であるから、重力の場合でも共通の質量を扱えばよい。

1.3　ベクトルを用いた運動方程式

ここでは三次元の運動を考える。
x,y,z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とすると位置は

$$\overrightarrow{r} = (x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{4}$$

速度は

$$\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}) \tag{5}$$

力 (加速度) は

$$\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z) = (\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2t}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}) \tag{6}$$

大切なのは向きという概念。あとは速度は変化しても速さ自体は変化しない可能性があるということ。(ex 円運動)

1.4　*様々な力

・重力
物体が地面にひきつけられる力、重力は万有引力による力であるが、距離の変化は微小であるから、力は一定であるとする。

$$F = mg \quad \text{(ただし正の向きの取り方によっては負になりうる。)} \tag{7}$$

・摩擦力静止摩擦力
物体が面と接してるときに滑らないようにする力。最大静止摩擦力は垂直抗力 R と静止摩擦係数 μ_s を用いて、

$$F = \mu_s R \tag{8}$$

動摩擦力
物体が面と接して動いてるときに働く力、速度と逆向き (減速させる力)。垂直抗力と動摩擦係数 μ_d を用いて、

$$F = \mu_d R \tag{9}$$

一般に動摩擦力は最大静止摩擦力より小さい。
・粘性抵抗
流体中[*1]を物体が移動する際に、流体が物体に与える力。

$$F = -kv \tag{10}$$

k は定数であり、半径 a の球の場合 η を粘性率として $k = 6\pi a\eta$ と表すことができる (ストークスの抵抗法則)

1.5 運動方程式の微分方程式を解く

ここでは二つの例についてみていく・粘性抵抗のみ働いてる運動方程式 (重力なし)
運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv \tag{11}$$

この微分方程式は変数分離法[*2]を用いると、次のように解くことができる。

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{-k}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{-k}{m}\mathrm{d}t$$

$$\log v = \frac{-k}{m}t + C$$

$$v = e^{\frac{-k}{m}t+C}$$

初速度を v_0,$K = \frac{k}{m}$ とすると

$$v = v_0 e^{-Kt} \tag{12}$$

物体の位置 x は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-Kt} \tag{13}$$

より、微分方程式を解くと、

$$\int v_0 e^{-Kt}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

$$x = B - \frac{v_0}{K}e^{-Kt}$$

初期位置を x_0 とすると

$$x = x_0 + \frac{V_0}{K}(1 - e^{-Kt}) \tag{14}$$

*1 流体とは、液体、気体を指す
*2 微分方程式は解析学の授業でやるはずなので省略する。

・重力と粘性抵抗がある場合
運動方程式は次のようになる

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv - mg$$

変形し $V = v + \frac{mg}{k}$ とすると

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kV \tag{15}$$

あとはこの微分方程式を解けばよい。

2　減衰振動と強制振動

2.1　*バネの力

バネには自然長から伸ばしたり縮めたりすると復元力が働く、バネ定数を k とすると、

$$F = -kx \tag{16}$$

と表すことができる。

2.2　バネの運動方程式

・バネに繋がれたおもりの運動方程式 (重力無視)
次の微分方程式を解く

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx \tag{17}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{18}$$

2.2.1　*三角関数を用いた解法

x を二回微分したら、x に戻ってくるものを考える。
$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ とし、代入をすると、

$$-m\omega^2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) = -k(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) \tag{19}$$

よって

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{20}$$

となるので、$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ は解である。この式を変形すると

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega t)\right) \tag{21}$$

ここで $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\phi, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\phi$ とすると

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\phi\sin(\omega t) + \sin\phi\cos(\omega t)) \tag{22}$$

三角関数の加法定理の逆を用いると、

$$x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \phi) \tag{23}$$

よって、$\sqrt{A^2 + B^2}$ は定数であるから

$$x = C\sin(\omega t + \phi) \tag{24}$$

となる。
このように表すことができる振動を単振動と言い、C を振幅,ω は角速度,ϕ は位相という。

2.2.2 $e^{\lambda t}$ を用いた解法

今度は e^x に着目してこの微分方程式を解いていくご存じの通り、e^{ax} は二回微分すると a^2e^{ax} となる、これを用いて解いていく。
$x = e^{\lambda t}$ として、運動方程式に代入すると、式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} \tag{25}$$

これを計算し、λ を求めると

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega \tag{26}$$

となる。[*3] (i は虚数単位)
このことから、この微分方程式の特殊解は $e^{\pm i\omega t}$ となる。つまり一般解は定数 C, C' を用いて

$$x = Ce^{i\omega t} + C'e^{-i\omega t}$$

これをオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ をもちいて変形を行うと、次のようになる。

$$\begin{aligned} Ce^{i\omega t} + C'e^{-i\omega t} &= C(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C'(\cos\omega t - i\sin\omega t) && (27) \\ &= (C + C')\cos\omega t + i(C - C')\sin\omega t && (28) \end{aligned}$$

$(C + C') = A, i(C - C') = B$ とすると

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{29}$$

となり、結果的に三角関数で考えた場合と同じ結論になる。
・重力下でバネにつるされたおもりの運動方程式
おもりはバネと重力の両方を受けるので、変位を x とすると、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg - kx = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \tag{30}$$

$X = \left(x - \frac{mg}{k}\right)$ とすれば、この式は重力のない時の式と一致する。つまりつり合いの位置を中心に単振動を行う。

[*3] ここは実際に手を動かして確認してみてほしい、良い練習になるはず。

2.3 *減衰振動

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - 2hv = -kx - 2h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

ここの $2h$ の 2 はのちの計算をしやすくするために取り出したもの。[*4]
$\gamma = \frac{h}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ とし、式を変形させると、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \tag{32}$$

この微分方程式を解いていく。
これは $x = e^{\lambda t}$ として代入すると

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{33}$$

この二次方程式の解は

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{34}$$

ここで γ^2, ω_0^2 の大小関係で場合分けを行う。

2.3.1 過減衰

$\gamma^2 > \omega_0^2$ の時
この時 $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ は実数である。
このことから $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sigma$ とすると一般解は

$$x = Ae^{(-\gamma+\sigma)t} + Be^{(-\gamma-\sigma)t} \tag{35}$$

となる。

2.3.2 減衰振動

$\gamma^2 < \omega_0^2$ の時
この時 $\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
つまりこれは複素数であるため、一般解は $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \omega_1$ と置くことにより

$$x = Ae^{(-\gamma+i\omega_1)t} + Be^{(-\gamma-i\omega_1)t} \tag{36}$$

これをオイラーの公式を用いて展開すると、

$$x = e^{-\gamma t}(C\cos\omega_1 t + C'\sin\omega_1 t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \alpha) \tag{37}$$

となる。

[*4] 二次方程式の解の公式とかでも 2 の倍数の時 みたいなのがあっただろう、それと似ている。

2.3.3 臨界減衰

$\gamma^2 = \omega_0^2$ の時

この時 $x=\lambda$。よって $x = e^{-\lambda t}$ はこの微分方程式の特殊解である。ここで,$x = a(t)e^{-\gamma t}$ として ($a(t)$ は t の関数)、微分方程式に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} - \gamma a(t)e^{-\gamma t} \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{d}^2a(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\gamma e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma^2 a(t)e^{-\gamma t} \tag{39}$$

であるから、

$$\frac{\mathrm{d}^2a(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{40}$$

したがって $a(t)$ は二回微分して 0 となるような関数であることが分かる。つまり、定数 A,B を用いると、

$$a(t) = At + B \tag{41}$$

と表すことができる。したがって一般解は

$$x = (At+B)e^{-\gamma t} \tag{42}$$

2.4 強制振動

・復元力のほかに、外部から力を与えることでそれに影響されて、特異な振動をする。ちなみにバネの根元を動かすということも強制振動に入る

・例えば $F = F_0\sin\omega t$ という力を与えるとする。この運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F_0\sin\omega t \tag{43}$$

この微分方程式を解いていく。

この微分方程式の一般解は、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{44}$$

という斉次方程式の一般解と

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = F_0\sin\omega t \tag{45}$$

という非斉次方程式の特殊解の和である。上の斉次方程式の一般解は $x = C\sin(\omega_0 t + \alpha)$ であるので、下の非斉次方程式を解く。非斉次方程式に,$x = A\sin\omega t$ として代入すると、

$$-\omega^2 A\sin\omega t + \omega_0^2 A\sin\omega t = f_0\sin\omega t \tag{46}$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{47}$$

したがって非斉次方程式の特殊解は

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t \tag{48}$$

これらのことから、この強制振動の一般解は

$$x = C\sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{49}$$

となる。$\omega = \omega_0$ のとき、A は非常に大きな値をとり、この現象を共鳴もしくは共振という。この場合の微分方程式は $x = At\cos\omega_0 t$ として計算を行う。

2.5　減衰を伴う強制振動

次の微分方程式を解く。

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - 2h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\sin\omega t \tag{50}$$

これの両辺を m で割り変形をすると、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0\sin\omega t \tag{51}$$

この微分方程式の一般解は、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \tag{52}$$

の一般解と

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0\sin\omega t \tag{53}$$

の特殊解の和である。
$x = A\sin\omega t$ を代入しても、非斉次方程式は成り立たないため、$x = A\sin(\omega t - \delta)$ として代入し、計算を行うと、

$$-A\omega^2\sin(\omega t - \delta) + 2\gamma\omega A\cos(\omega t - \delta) + \omega_0 A\sin(\omega t - \delta) = f_0\sin\omega t \tag{54}$$

これは任意の時間 t で成り立つ必要性があるので、係数を両辺で一致させる必要性がある。ところで、

$$f_0\sin\omega t = f_0\sin(\omega t - \delta + \delta) = f_0\cos(\omega - \delta)\sin\delta + f_0\sin(\omega - \delta)\cos\delta \tag{55}$$

であるから、これを代入して、係数を比較すると

$$-A\omega^2 + \omega_0^2 A = f_0\cos\delta \tag{56}$$

$$2\gamma\omega A = f_0\sin\delta \tag{57}$$

であるから、この連立方程式から $A, \tan\delta$ を求めると、

$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{58}$$

となる。(発散はしない)
振幅が最大になるのは

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{59}$$

3　*仕事とエネルギー

3.1　*仕事

物理学での”仕事”とは、物体をどれだけ動かしたのかというのが大切である。なので仕事 W はある地点とある地点の距離 x と力 F, 及び力と進行方向のなす角 θ を用いて、

$$W = Fx\cos\theta \tag{60}$$

またベクトルを用いて表すと、内積を使って

$$W = \overrightarrow{F}\overrightarrow{x} \tag{61}$$

と表せる。
力が一定でない場合、微小区間 $\mathrm{d}\overrightarrow{x}$ を用いて積分を用いればよい。

$$W = \int_P^Q \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{x} = \int_P^Q (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z) \tag{62}$$

仕事の単位は $1\,\mathrm{J}$=$1\,\mathrm{N}\cdot\,\mathrm{m}$=$1\,\mathrm{kg\ m^2/s^2}$

付録 A　斉次方程式と非斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_2\frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0 \tag{A,1}$$

で表すことができる微分方程式は,n 階の斉次方程式 (同次方程式) という。
逆に

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_2\frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0 \tag{A,2}$$

で表すことができる微分方程式を,n 階の非斉次方程式 (非同次方程式) という。
非斉次方程式の一般解は、斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和である。