力学

ツンツン

2023 年 10 月 8 日

タイトル等にある*は (多分) 物概第一や既知の知識である範囲を示している、必要であれば各自確認せよ

目次

1 力学の基礎

1.1 *位置と速度、加速度の関係

$\overrightarrow{x}(t)$ を物体の位置とし、$\overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{a}(t)$ はそれぞれ物体の速度、加速度を示す t の関数とする

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{x}(t)}{dt} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{x}(t)}{dt^2} \tag{2}$$

1.2 慣性質量

物体の動かしづらさを数値にしたものを”慣性質量”という。ニュートンの運動方程式の質量と一致する。

$$F = m_I\overrightarrow{a} \tag{3}$$

ある物体に働く重力による力は”重力加速度”×”質量”と表せる。この質量は慣性質量とは異なるものであるが、重力質量と慣性質量はほぼ一致する。であるから、重力の場合でも共通の質量を扱えばよい。

1.3 ベクトルを用いた運動方程式

ここでは三次元の運動を考える。
x,y,z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とすると位置は

$$\overrightarrow{r} = (x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{4}$$

速度は

$$\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}) \tag{5}$$

力 (加速度) は

$$\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z) = (\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2t}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}) \tag{6}$$

大切なのは向きという概念。あとは速度は変化しても速さ自体は変化しない可能性があるということ。(ex 円運動)

1.4 *様々な力

・重力

物体が地面にひきつけられる力、重力は万有引力による力であるが、距離の変化は微小であるから、力は一定であるとする。

$$F = mg \quad \text{(ただし正の向きの取り方によっては負になりうる。)} \tag{7}$$

・摩擦力静止摩擦力

物体が面と接してるときに滑らないようにする力。最大静止摩擦力は垂直抗力 R と静止摩擦係数 μ_s を用いて、

$$F = \mu_s R \tag{8}$$

動摩擦力

物体が面と接して動いてるときに働く力、速度と逆向き (減速させる力)。垂直抗力と動摩擦係数 μ_d を用いて、

$$F = \mu_d R \tag{9}$$

一般に動摩擦力は最大静止摩擦力より小さい。

・粘性抵抗

流体中[*1]を物体が移動する際に、流体が物体に与える力。

$$F = -kv \tag{10}$$

k は定数であり、半径 a の球の場合 η を粘性率として $k = 6\pi a\eta$ と表すことができる (ストークスの抵抗法則)

1.5 運動方程式の微分方程式を解く

ここでは二つの例についてみていく・粘性抵抗のみ働いてる運動方程式 (重力なし)

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv \tag{11}$$

この微分方程式は変数分離法[*2]を用いると、次のように解くことができる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \frac{-k}{m}\mathrm{d}t \\ \int\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int\frac{-k}{m}\mathrm{d}t \\ \log v &= \frac{-k}{m}t + C \\ v &= e^{\frac{-k}{m}t+C}\end{aligned}$$

初速度を v_0,$K = \frac{k}{m}$ とすると

$$v = v_0 e^{-Kt} \tag{12}$$

[*1] 流体とは、液体、気体を指す

[*2] 微分方程式は解析学の授業でやるはずなので省略する。

物体の位置 x は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-Kt} \tag{13}$$

より、微分方程式を解くと、

$$\int v_0 e^{-Kt} \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

$$x = B - \frac{v_0}{K} e^{-Kt}$$

初期位置を x_0 とすると

$$x = x_0 + \frac{V_0}{K}(1 - e^{-Kt}) \tag{14}$$

・重力と粘性抵抗がある場合
運動方程式は次のようになる

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv - mg$$

変形し $V = v + \frac{mg}{k}$ とすると

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kV \tag{15}$$

あとはこの微分方程式を解けばよい。

2　減衰振動と強制振動

2.1　*バネの力

バネには自然長から伸ばしたり縮めたりすると復元力が働く、バネ定数を k とすると、

$$F = -kx \tag{16}$$

と表すことができる。

2.2　バネの運動方程式

・バネに繋がれたおもりの運動方程式 (重力無視)
次の微分方程式を解く

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx \tag{17}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{18}$$

2.2.1　*三角関数を用いた解法

x を二回微分したら、x に戻ってくるものを考える。
$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ とし、代入をすると、

$$-m\omega^2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) = -k(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) \tag{19}$$

よって

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{20}$$

となるので、$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ は解である。この式を変形すると

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega t)\right) \tag{21}$$

ここで $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\phi, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\phi$ とすると

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\phi\sin(\omega t) + \sin\phi\cos(\omega t)) \tag{22}$$

三角関数の加法定理の逆を用いると、

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t + \phi) \tag{23}$$

よって、$\sqrt{A^2+B^2}$ は定数であるから

$$x = C\sin(\omega t + \phi) \tag{24}$$

となる。
このように表すことができる振動を単振動と言い、C を振幅,ω は角速度,ϕ は位相という。

2.2.2 $e^{\lambda t}$ を用いた解法

今度は e^x に着目してこの微分方程式を解いていくご存じの通り、e^{ax} は二回微分すると a^2e^{ax} となる、これを用いて解いていく。
$x = e^{\lambda t}$ として、運動方程式に代入すると、式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} \tag{25}$$

これを計算し、λ を求めると

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega \tag{26}$$

となる。[*3] (i は虚数単位)
このことから、この微分方程式の特殊解は $e^{\pm i\omega t}$ となる。つまり一般解は定数 C, C' を用いて

$$x = Ce^{i\omega t} + C'e^{-i\omega t}$$

これをオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ をもちいて変形を行うと、次のようになる。

$$Ce^{i\omega t} + C'e^{-i\omega t} = C(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C'(\cos\omega t - i\sin\omega t) \tag{27}$$

$$= (C+C')\cos\omega t + i(C-C')\sin\omega t \tag{28}$$

$(C+C') = A, i(C-C') = B$ とすると

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{29}$$

[*3] ここは実際に手を動かして確認してみてほしい、良い練習になるはず。

となり、結果的に三角関数で考えた場合と同じ結論になる。
・重力下でバネにつるされたおもりの運動方程式
おもりはバネと重力の両方を受けるので、変位を x とすると、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg - kx = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \tag{30}$$

$X = \left(x - \frac{mg}{k}\right)$ とすれば、この式は重力のない時の式と一致する。つまりつり合いの位置を中心に単振動を行う。

2.3 *減衰振動

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - 2hv = -kx - 2h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

ここの $2h$ の 2 はのちの計算をしやすくするために取り出したもの。[*4]
$\gamma = \frac{h}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ とし、式を変形させると、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \tag{32}$$

この微分方程式を解いていく。
これは $x = e^{\lambda t}$ として代入すると

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{33}$$

この二次方程式の解は

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{34}$$

ここで γ^2, ω_0^2 の大小関係で場合分けを行う。

2.3.1 過減衰

$\gamma^2 > \omega_0^2$ の時
この時 $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ は実数である。
このことから $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sigma$ とすると一般解は

$$x = Ae^{(-\gamma+\sigma)t} + Be^{(-\gamma-\sigma)t} \tag{35}$$

となる。

2.3.2 減衰振動

$\gamma^2 < \omega_0^2$ の時
この時 $\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
つまりこれは複素数であるため、一般解は $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \omega_1$ と置くことにより

$$x = Ae^{(-\gamma+i\omega_1)t} + Be^{(-\gamma-i\omega_1)t} \tag{36}$$

これをオイラーの公式を用いて展開すると、

$$x = e^{-\gamma t}(C\cos\omega_1 t + C'\sin\omega_1 t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \alpha) \tag{37}$$

となる。

[*4] 二次方程式の解の公式とかでも 2 の倍数の時 みたいなのがあっただろう、それと似ている。

2.3.3 臨界減衰

$\gamma^2 = \omega_0^2$ の時
この時 $x = \lambda$。よって $x = e^{-\lambda t}$ はこの微分方程式の特殊解である。ここで,$x = a(t)e^{-\gamma t}$ として ($a(t)$ は t の関数)、微分方程式に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} - \gamma a(t)e^{-\gamma t} \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{d}^2 a(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\gamma e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma^2 a(t)e^{-\gamma t} \tag{39}$$

であるから、

$$\frac{\mathrm{d}^2 a(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{40}$$

したがって $a(t)$ は二回微分して 0 となるような関数であることが分かる。つまり、定数 A,B を用いると、

$$a(t) = At + B \tag{41}$$

と表すことができる。したがって一般解は

$$x = (At + B)e^{-\gamma t} \tag{42}$$

2.4 強制振動

・復元力のほかに、外部から力を与えることでそれに影響されて、特異な振動をする。ちなみにバネの根元を動かすということも強制振動に入る
・例えば $F = F_0 \sin\omega t$ という力を与えるとする。この運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F_0 \sin\omega t \tag{43}$$

この微分方程式を解いていく。
この微分方程式の一般解は、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{44}$$

という斉次方程式の一般解と

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = F_0 \sin\omega t \tag{45}$$

という非斉次方程式の特殊解の和である。上の斉次方程式の一般解は $x = C\sin(\omega_0 t + \alpha)$ であるので、下の非斉次方程式を解く。非斉次方程式に,$x = A\sin\omega t$ として代入すると、

$$-\omega^2 A\sin\omega t + \omega_0^2 A\sin\omega t = f_0 \sin\omega t \tag{46}$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{47}$$

したがって非斉次方程式の特殊解は

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{48}$$

これらのことから、この強制振動の一般解は

$$x = C\sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{49}$$

となる。$\omega = \omega_0$ のとき、A は非常に大きな値をとり、この現象を共鳴もしくは共振という。この場合の微分方程式は $x = At\cos\omega_0 t$ として計算を行う。

2.5　減衰を伴う強制振動

次の微分方程式を解く。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - 2h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\sin\omega t \tag{50}$$

これの両辺を m で割り変形をすると、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0\sin\omega t \tag{51}$$

この微分方程式の一般解は、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \tag{52}$$

の一般解と

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0\sin\omega t \tag{53}$$

の特殊解の和である。
$x = A\sin\omega t$ を代入しても、非斉次方程式は成り立たないため、$x = A\sin(\omega t - \delta)$ として代入し、計算を行うと、

$$-A\omega^2\sin(\omega t - \delta) + 2\gamma\omega A\cos(\omega t - \delta) + \omega_0 A\sin(\omega t - \delta) = f_0\sin\omega t \tag{54}$$

これは任意の時間 t で成り立つ必要性があるので、係数を両辺で一致させる必要性がある。ところで、

$$f_0\sin\omega t = f_0\sin(\omega t - \delta + \delta) = f_0\cos(\omega - \delta)\sin\delta + f_0\sin(\omega - \delta)\cos\delta \tag{55}$$

であるから、これを代入して、係数を比較すると

$$\begin{aligned} -A\omega^2 + \omega_0^2 A &= f_0\cos\delta \\ 2\gamma\omega A &= f_0\sin\delta \end{aligned}$$

であるから、この連立方程式から $A, \tan\delta$ を求めると、

$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{56}$$

となる。(発散はしない)
振幅が最大になるのは

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{57}$$

3　仕事とエネルギー

3.1　*仕事

物理学での”仕事”とは、物体をどれだけ動かしたのかというのが大切である。なので仕事 W はある地点とある地点の距離 x と力 F, 及び力と進行方向のなす角 θ を用いて、

$$W = Fx\cos\theta \tag{58}$$

またベクトルを用いて表すと、内積を使って

$$W = \overrightarrow{F}\overrightarrow{x} \tag{59}$$

と表せる。
力が一定でない場合、微小区間 $\mathrm{d}\overrightarrow{x}$ を用いて積分を用いればよい。

$$W = \int_P^Q \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{x} = \int_P^Q (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z) \tag{60}$$

仕事の単位は 1 J=1 N· m=1 kg $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$
始点と終点の位置だけで仕事が決まる力のことを保存力という。例えば、重力、ばねの弾性力、万有引力である。
力 $\overleftarrow{F}$ が保存力であるのならば、その周回積分は 0 となる

$$\oint \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{r} = 0 \tag{61}$$

単位時間あたりに行う仕事を仕事率という。

$$P = \overrightarrow{F}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}\overrightarrow{v} \tag{62}$$

仕事率の単位は J/t であるが一般に W が使われる。

3.2　*エネルギー

エネルギーとは仕事をするという能力である。
例えば重力が働く場所で、基準点から高さ h の所まで質量 m の物体を持ち上げたとする。この時の仕事は mgh である。逆に物体を高さ h からゆっくり落とした場合、物体は mgh の仕事だけする。
この mgh を仕事を行う、エネルギーと呼ぶ。mgh のように位置に関係するエネルギーを位置エネルギー、またはポテンシャルエネルギーという。またある位置からある位置までに移動する時にする力の仕事は位置エネルギーの差で表すことができる。
再び仕事の定義に戻ると

$$W = \int_P^Q \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}x \tag{63}$$

であった。ところで運動方程式から力 $\overrightarrow{F}$ は $\overrightarrow{F} = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ であるのだから、仕事は $\mathrm{d}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}\mathrm{d}t$ を用いて、

$$\begin{aligned} W &= \int_P^Q m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_P^Q \frac{m}{w}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{m}{2}(v_{Qx}^2 + v_{Qy}^2 + v_{Qz}^2) - \frac{m}{2}(v_{Px}^2 + v_{Py}^2 + v_{Pz}^2) \end{aligned}$$

したがって力がした仕事は、

$$W = \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{1}{2}mv_P^2 \tag{64}$$

と表せ、

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{65}$$

を運動エネルギーという。

3.3 *力学的エネルギー保存則

例えば、重力によって落下する物体を考える。なお物体には重力以外の力が働いていないとする。
P 地点から Q 地点まで移動する間に重力が行う仕事は運動エネルギーの変化と等しいので、

$$mgz_P - mgz_Q = \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{1}{2}mv_P^2 \tag{66}$$

このことから、次の関係が成り立つ

$$mgz_P + \frac{1}{2}mv_P^2 = mgz_Q + \frac{1}{2}mv_Q^2 = K + U \tag{67}$$

つまり、運動エネルギーと位置エネルギーが保存されているので、これを力学的エネルギー保存則という。
非保存力の場合、力学的エネルギー保存則は成り立たないが、しかし非保存力のした仕事は、エネルギーに影響を与える。運動エネルギーの差は全ての力がした仕事である。

3.4 位置エネルギーと力の関係

仕事は力×距離であり、位置エネルギーの変化でもある、微小区間 $\mathrm{d}x$ の間の仕事は

$$W = F\mathrm{d}x = U(x) - U(x + \mathrm{d}x) \tag{68}$$

したがって、力は

$$F = \frac{U(x) - U(x + \mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{69}$$

となり、位置エネルギーの微分は力であることが分かる。
このことを三次元に拡張すると

$$F_x = \frac{U(x, y, z) - U(x + \mathrm{d}x, y, z)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{70}$$

となる。よって力はナブラ ∇ を使って。

$$F = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial z}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{71}$$

となる。

4　回転運動

4.1　円運動

半径 R で xy 平面を円運動する物体の位置は、角速度を ω として、

$$(x, y) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t) \tag{72}$$

で表すことができる、この時の速度と力は、

$$(v_x, v_y) = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t) \tag{73}$$

$$(F_x, F_y) = (-mR\omega^2\cos\omega t, -mR\omega^2\sin\omega t) = (-m\omega^2 x, -m\omega^2 y) \tag{74}$$

このことから力の方向は中心方向に向かっていることが分かる。このように力の方向が常にある一点の方向に向かう力を中心力という。

円運動している物体は、円の中心に向かう中心力を受けている。原点から物体の位置に向かう位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ とし $\overrightarrow{r}$ 方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}_r$ とすると、中心力は

$$\overrightarrow{F_r} = f(r)\overrightarrow{e}_r \tag{75}$$

4.2　角運動量

運動量 $\overrightarrow{p}$ とは

$$\overrightarrow{F} = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\overrightarrow{v}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} \tag{76}$$

で表すことができる量である。この式から単位時間当たりの運動量の変化が力になるということが分かる。このことから運動量の変化が大きいものは力も大きいということが分かる。

角運動量 $\overrightarrow{L}$ とは次のように定義できる量である。

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \tag{77}$$

これは物体の位置ベクトルと運動量の外積である。*5位置ベクトルと速度のなす角を ϕ とすると、角運動量の絶対値は、

$$|\overrightarrow{L}| = |\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}| = rmv\sin\phi \tag{78}$$

ここで $|\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}|$ は $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$ となることを用いて計算をした。(θ はなす角)

このことから原点に対する向きと速度の向きが一致しているとき角運動量は 0 となる。つまり角運動量は原点に対して回転運動の勢いを示している。

*5 いつもの積ではなく外積であるということに気を付けてほしい。

4.3 角運動量保存則

単位時間当たりの角運動量の変化について考えていこう。

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{v}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{p} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v}\times(m\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F} = \overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F} \tag{79}$$

この $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F}$ は位置ベクトルと力の外積である。このことから力と位置の方向が同じであれば 0 であり、垂直であれば最大である。このことからこれは原点に対して回転の加速度を与える作用の大きさといえる。これを力のモーメントという。

中心力について考えていこう。中心力は位置の方向と力の方向が一致しているので力のモーメントは 0 である。つまり角運動量は増減しない (変化量は 0)、よって中心力のとき、角運動量は一定に保存される。これは角運動量保存則という

4.4 平面運動の極座標表示

ある位置 (x, y) にある物体の運動を表すとき、原点からの距離とそのなす角度を使って表すことができる。この場合の微分方程式は

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{80}$$

と表すことができる。ところでこの時力はどうやって表すことができるのだろうか。

位置の関数の時間微分について

(x, y) 座標系のとき

$r = (x, y)$ で表すことができるベクトルは、x 方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{i}$,y 方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{j}$ とすると、$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ となる。これの時間微分は、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + x\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} + y\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{j}}{\mathrm{d}t} \tag{81}$$

ところで、基底ベクトルは時間依存しないものであるから、この値は次のようになる

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} \tag{82}$$

では極座標系ではどうであろうか

r 方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{e_r}$,θ 方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{e_\theta}$ とし、それを $\overrightarrow{i}$ と $\overrightarrow{j}$ を使って表す,$\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$ であることと $\overrightarrow{e_r}$ と $\overrightarrow{e_\theta}$ は垂直であることを使うと、

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$$

このことから、単位ベクトルの向きは時間依存であることが分かる。

位置の微分について考える、上記より $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$ であるのだから、時間微分は

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} \tag{83}$$

である。ここで、$\overrightarrow{e_r}$ の時間微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta\overrightarrow{i}+\sin\theta\overrightarrow{j}) \\
&= -\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i}+\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\sin\theta\overrightarrow{i}+\cos\theta\overrightarrow{j}) \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}
\end{aligned}
$$

このことから、時間微分は

$$
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r}+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} \tag{84}
$$

となり $\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$ であることから

$$
\begin{aligned}
v_r &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\
v_\theta &= r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

と表すことができるここからさらに時間微分を行い、加速度を求めると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r}+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_r}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_\theta}+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

ここで、e_θ の時間微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\sin\theta\overrightarrow{i}+\cos\theta\overrightarrow{j}) \\
&= -\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i}-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} \\
&= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r}
\end{aligned}
$$

である。これはどちらも θ を微分したものが出てくることを知っておくと、確認しやすいだろう
(ex. 円運動なら角度の時間による関数は ωt であるから時間微分すると ω が出てくる)
これにより、二回微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_r}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\theta}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_\theta}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\overrightarrow{e_r} \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\overrightarrow{e_r}+\left\{r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\theta}}{\mathrm{d}t}\right\}\overrightarrow{e_\theta} \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\overrightarrow{e_\theta}
\end{aligned}
$$

となる。運動方程式は $\overrightarrow{F} = F_r\overrightarrow{e_r}+F_\theta\overrightarrow{e_\theta}$ であることを利用して、

$$F_r = m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}$$
$$F_\theta = \frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

となる。極座標で表して解くというのも必要であるので、しっかりと理解し使えるようにいってほしい。

中心力である場合

中心力の場合 $F_\theta = 0$ であるのだから、運動方程式より、

$$\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{85}$$

よって

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const.} \tag{86}$$

である。ここで角運動量の大きさを考えると

$$|\overrightarrow{L}| = rmv_\theta = rm\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const.} \tag{87}$$

つまり、中心力であれば角運動量は定数つまり一定であることがわかる。このことから中心力であれば、角運動量保存則は確かに成り立つことが分かる。

付録 A　斉次方程式と非斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_2\frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0 \tag{A, 1}$$

で表すことができる微分方程式は,n 階の斉次方程式 (同次方程式) という。

逆に

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_2\frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0 \tag{A, 2}$$

で表すことができる微分方程式を,n 階の非斉次方程式 (非同次方程式) という。

非斉次方程式の一般解は、斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和である。

付録 B　ナブラ演算子とは

関数 $f(x, y, z)$ に対して、各変数の偏微分を並べたベクトルを ∇f と書く

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{B, 1}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ は関数 $f(x, y, z)$ の x 方向の変化量を表している。したがって ∇f はそれぞれの向きの変化量、つまり勾配、傾きを表している。

$\nabla \cdot \overrightarrow{a}$ について考えてみよう (内積)。内積であるから計算をすると。

$$\nabla \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{B, 2}$$

これは x 方向の x 成分の変化量と y 方向の y 成分の変化量と z 方向の z 成分の変化量の和である。つまり各辺が $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ である微小な立方体を考えてあげると、そこに入ってくる量と出ていく量の差分がわかる。また発散を意味する *divergence* を使って、

$$\mathrm{div}\overrightarrow{a} = \nabla \cdot \overrightarrow{a} \tag{B,3}$$

と表すことができる。

$\nabla \times \overrightarrow{a}$ について考える (外積)

これを計算すると、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \overrightarrow{a} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y & a_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ a_z & a_x \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\
&= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \overrightarrow{k} \\
&= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

成分の意味について考えていく。z 成分の $\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$ を見ると、これは y の x 方向の変化から x の y 方向の変化を引いたものである。y の x 方向の変化とは z 軸に対して反時計回りの回転を示して、x の y 方向の変化とは z 軸に対して時計回りの回転を示している。これらのことから、$\nabla \times \overrightarrow{a}$ はそれぞれの軸周りでの回転の大きさを表している。また、回転を意味する *rotation* をもちいて、外積は

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{a} = \nabla \overrightarrow{a} \tag{B,4}$$

と表すことができる。

簡単のため、二次元にして考えてみると、y 方向に $\mathrm{d}x$ だけ、x 方向に $\mathrm{d}y$ だけ移動したときの和は、

$$\begin{aligned}
&a_x(x,y)\mathrm{d}x + a_y(x+\mathrm{d}x,y)\mathrm{d}y - a_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x - a_y(x,y)\mathrm{d}y \\
&\approx a_x(x,y)\mathrm{d}x + a_y(x,y)\mathrm{d}y + \frac{\partial a_y(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - a_x(x,y)\mathrm{d}x - a_y(x,y)\mathrm{d}y - \frac{\partial a_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left\{ \frac{\partial a_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial a_x(x,y)}{\partial y} \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

このことから、これはこの経路における、力 $\overrightarrow{a}$ の仕事である。

ところで、保存力は元に戻ってくると仕事は 0 であるので、力が保存力であることの条件は $\nabla \times \overrightarrow{a} = 0$ である。

付録 C　保存力であるということは?

ここでは保存力について考えていく。保存力の仕事は始点と終点のみ依存するものである。つまり周回積分を用いて次のように表すことができる。

$$\oint \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{x} = 0 \tag{C,1}$$

これは次のように表すことができる。($\overrightarrow{n}$ は単位ベクトル)

$$\oint \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{x} = \int \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{C,2}$$

これをストークスの定理という。したがって保存力であることは, 力が

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = 0 \tag{C,3}$$

を満たす必要がある。
力が

$$\overrightarrow{F} = -\nabla U \tag{C,4}$$

を満たすとすると

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = -\nabla \times (\nabla U) \tag{C,5}$$

が成り立つ。このとき $\nabla \times (\nabla U) = 0$ である。このことから式 (C,5) が成り立つときも、保存力であるということが言える。