

# Глава 1

## Корректирующие коды, код Хемминга

(Конспект: А. Рязанов)

### 1.1 Общие определения

Кодируется последовательность бит. При **непрерывном коде** кодируется вся последовательность, при **блочном** последовательность разбивается на блоки по  $k$  бит и каждый блок кодируется отдельно.

**Определение 1.1.** Инъективное отображение  $f : K \rightarrow \{0, 1\}^n$ ,  $K \subset \{0, 1\}^k$  называется кодом. Образ любого слова из  $\{0, 1\}^k$  называется кодовым словом или кодом. Множество  $C = f(\{0, 1\}^k)$  также называется кодом.

**Определение 1.2.** Код называется раздельным, если  $[n] = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $|A| = k$  и  $\forall x \in K : f(x)|_A = x$ , то есть, для некоторого подмножества бит кода оно совпадает с прообразом как строка. Биты множества  $A$  называются информационными, а из множества  $B$  — проверочными.

**Определение 1.3.** Код называется линейным, если соответствующее отображение  $f$  линейно.

**Определение 1.4.** Раздельный код называется систематическим, если проверочные символы являются линейной комбинацией информационных. То же самое, что раздельный линейный код.

**Определение 1.5.** Два кода  $f$  и  $g$  назовем эквивалентными, если  $g(x) = f(\pi(x))$ , где  $\pi(x)$  — это  $x$  под действием некоторой перестановки  $\pi$ .

**Определение 1.6.** Скорость кода  $C \subset \{0, 1\}^n$  — это величина  $R = \frac{1}{n} \log_2 |C|$ . При  $|C| = 2^k$  имеет место  $R = \frac{k}{n}$ .  
Избыточность кода — это величина  $1 - R$

### 1.2 Расстояние Хемминга и исправление ошибок

**Определение 1.7.** Расстоянием Хемминга между строками  $x, y \in \{0, 1\}^n$  будем называть величину

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$$

**Определение 1.8.**  $d(C) = \min_{\substack{x, y \in C \\ x \neq y}} d(x, y)$  — кодовое расстояние кода  $C$ .

Обозначение:  $(n, k, d)$ -код, код с длиной кодируемого слова  $k$ , кодового слова  $n$  и минимальным кодовым расстоянием  $d$ .  $[n, K, d]$ -код — код с длиной кодового слова  $n$ , количеством слов  $K$  и минимальным кодовым расстоянием  $d$ .

**Определение 1.9.** Код обнаруживает ошибки в  $r$  битах, если существует отображение  $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , такое, что  $\forall x \in \{0, 1\}^k, |z| \leq r : g(f(x) \oplus z) = 1$

**Определение 1.10.** Код исправляет ошибки в  $r$  битах, если существует отображение  $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$ , такое, что  $\forall x \in \{0, 1\}^k, |z| \leq r : g(f(x) \oplus z) = x$

**Теорема 1.1.** Для того, чтобы код  $C$  позволял обнаружить ошибки в  $r$  битах, необходимо и достаточно, чтобы  $d(C) \geq r + 1$

**Теорема 1.2.** Для того, чтобы код  $C$  позволял исправить ошибки в  $r$  битах, необходимо и достаточно, чтобы  $d(C) \geq 2r + 1$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$

$g(x) = \arg \min_{y \in \{0,1\}^k} d(x, f(y))$ . Пусть  $x = f(y) + z$  и  $|z| \leq r$  и  $g(x) \neq y$ . Тогда  $d(f(g(x)), x) \leq r$ , а, значит  $d(f(y), f(g(x))) \leq d(x, f(y)) + d(x, f(g(x))) \leq 2r$ . Противоречие.

$\Rightarrow$

Рассмотрим  $x, y \in C$  такие, что  $d(x, y) \leq 2r$ . Тогда легко видеть, что существует  $z$ , такое, что  $d(x, z) \leq r$  и  $d(y, z) \leq r$ . Тогда, как бы мы не определили  $g(z)$ , мы получим противоречие с  $x$  или  $y$ .  $\square$

### 1.3 Граница Хемминга

**Определение 1.11.** Шаром радиуса  $r$  с центром в  $x$  назовем множество точек

$$B_r(x) = \{y: d(x, y) \leq r\}$$

Количество вершин в шаре в пространстве  $\{0, 1\}^n$  обозначим  $S_r(n)$

**Замечание 1.1.**  $S_r(n) = \sum_{i=0}^r C_n^i$ .

*Доказательство.*  $S_r(n) = |B_r(0)|$ . Строки в  $B_r(0)$  — это строки с не более чем  $r$  единичными битами.  $\square$

**Определение 1.12.** Энтропией дискретной случайной величины  $\xi$  принимающей значения  $1, \dots, n$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_n$  называется

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$$

**Лемма 1.1.**

$$\frac{1}{n+1} 2^{nH(\frac{r}{n})} \leq C_n^r \leq 2^{nH(\frac{r}{n})}$$

*Доказательство.* По формуле Стирлинга

$$C_n^r \simeq \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

С другой стороны

$$2^{nH(\frac{r}{n})} = 2^{n \left( -\frac{r}{n} \log_2 \frac{r}{n} - (1-\frac{r}{n}) \log_2 (1-\frac{r}{n}) \right)} = \frac{\left( \frac{r}{n} \right)^{-r}}{\left( 1 - \frac{r}{n} \right)^{n-r}} = \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}$$

Тогда для достаточно больших  $n$  достаточно показать

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \leq 1$$

Второе неравенство очевидно, поскольку в знаменателе квадратичная зависимость.

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ , тогда имеем

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

для достаточно больших  $n$  последнее  $\geq \frac{1}{n+1}$   $\square$

**Теорема 1.3.** Для достаточно больших  $n$  и при условии  $0 < r \leq \frac{n}{2}$  верно

$$\frac{\log_2 S_r(n)}{n} = H\left(\frac{r}{n}\right) + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$$

где  $H\left(\frac{r}{n}\right)$  — энтропия случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с вероятностями  $\frac{r}{n}$  и  $1 - \frac{r}{n}$ .

*Доказательство.* Покажем, что при  $r \leq \frac{n}{2}$  наибольшим слагаемым будет  $C_n^r$ .

$$\frac{C_n^i}{C_n^{i+1}} = \frac{n!(i+1)!(n-i-1)!}{n!i!(n-i)!} = \frac{i+1}{n-i}$$

Возрастание  $C_n^i$  равносильно  $\frac{C_n^i}{C_n^{i+1}} \leq 1 \iff i+1 \leq n-i \iff 2i \leq n-1$ . То есть  $C_n^i$  больше предыдущего сочетания, если  $2(i-1) \leq n-1$  то есть  $i \leq \frac{n+1}{2}$ . Тогда имеем

$$C_n^r \leq S_r(n) \leq (r+1)C_n^r$$

Воспользуемся леммой, прологарифмируем формулу оттуда:

$$-\log_2(n+1) + nH\left(\frac{r}{n}\right) \leq \log_2 S_r(n) \leq \log_2(r+1) + nH\left(\frac{r}{n}\right)$$

Поделим три части на  $n$

$$-\frac{\log_2(n+1)}{n} + H\left(\frac{r}{n}\right) \leq \frac{\log_2 S_r(n)}{n} \leq \frac{\log_2(r+1)}{n} + H\left(\frac{r}{n}\right)$$

Тогда получили, что требовалось,

$$\frac{\log_2 S_r(n)}{n} = H\left(\frac{r}{n}\right) + \underbrace{c}_{|c| \leq 1} \frac{\log_2(r+1)}{n}$$

□

**Теорема 1.4.** (Граница Хемминга) Для любого  $(n, k)$ -кода, исправляющего  $r$  ошибок верно

$$n - k \geq \log_2 \left( \sum_{i=0}^r C_n^i \right)$$

*Доказательство.* Рассмотрим прообразы исправляющей функции  $g$ .  $g^{-1}(y)$ . По определению  $|g^{-1}(y)| \geq S_r(n)$  и  $y_1 \neq y_2 \implies g^{-1}(y_1) \cap g^{-1}(y_2) = \emptyset$ . Тогда для завершения доказательства достаточно расписать

$$2^n = |\{0, 1\}^n| = \left| \bigcup_{y \in \{0, 1\}^k} g^{-1}(y) \right| \geq \sum_{y \in \{0, 1\}^k} S_r(k) = 2^k S_r(n)$$

□

**Теорема 1.5.** Если  $n - k \geq \log_2(n+1)$ , то существует  $(n, k, 3)$  код, то есть, граница Хемминга достигается.

*Доказательство.* Построим явно такой линейный код.  $C = \{Hx = 0\}$ , где  $H$  — матрица  $(n-k) \times n$ . Пусть  $H_{ij}$  — это  $i$ -й бит числа  $j$  ( $1 \leq i \leq n-k$ ;  $1 \leq j \leq n$ ). Заметим, что в условиях теоремы в матрице нет двух одинаковых столбцов, то есть, ее ранг не меньше 2. Пусть существуют  $x, y \in C$ , такие, что  $d(x, y) \leq 2$  тогда  $d(0, x \oplus y) \leq 2$ . То есть  $x \oplus y$  имеет не более двух единиц в двоичной записи  $H(x \oplus y) = H_{j_1} \oplus H_{j_2} = 0$ , что противоречит выводу о ранге. Тогда кодовое расстояние полученного кода равно 3. □

**Пример 1.1.** Построим систематический  $(n, k)$  код Хемминга.

Пусть  $a \in \{0, 1\}^k$ ;  $b \in \{0, 1\}^n$ . Кодирующее преобразование  $E(a) = b$ . Наложим следующие ограничения:

$$\begin{cases} b_i = a_i & i \leq k \\ b_{i+k} = (\Gamma_i, a) & i \leq n-k \end{cases}$$

То есть  $b = a(E_k | \Gamma^T)$ . То есть, мы построили порождающую матрицу кодирующей функции. Построим теперь проверочную матрицу:

$$b_{i+k} = (\Gamma_i, (b_1, \dots, b_k)) \iff b_{i+k} \oplus (\Gamma_i, (b_1, \dots, b_k)) = 0$$

То есть,  $H = (\Gamma|E_{n-k})$ . Условие  $Hb = 0$  является необходимым и достаточным для того, чтобы  $b$  являлось кодом, поскольку образом такого  $b$  является  $(b_1, \dots, b_k)$ .

Если столбцы матрицы  $H$  различны, то по 1.5 мы можем исправлять одну ошибку. Давайте построим явно исправляющую функцию.

Пусть  $b' = b \oplus e_i$ , где  $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ . Тогда  $Hb' = H_i - i$  — столбец матрицы  $H$ . Так как все столбцы различны, мы можем узнать, в каком бите была ошибка.  $Hb'$  называется *синдромом* вектора  $b'$ .

## 1.4 Граница Варшамова-Гильберта

**Теорема 1.6.** *Существует  $(n, k)$ -код с минимальным расстоянием  $d$ , такой, что*

$$n - k \leq \log_2 S_{d-1}(n)$$

*Доказательство.* Выберем точку  $c_1$ . Рассмотрим  $B_{d-1}(c_1)$  и пометим точки в нем. Пока есть непомянутые точки будем выбирать  $c_i$  и помечать точки в шаре  $B_{d-1}(C_i)$ . Так мы построим последовательность точек  $c_1, \dots, c_K$ , такую, что  $i \neq j \implies d(c_i, c_j) \geq d$ . Все точки  $\{0, 1\}^n$  покрыты хотя бы одним шаром, то есть  $K \cdot S_{d-1}(n) \geq 2^n$ .  $K \geq 2$ , если  $d - 1 < n$ , так как  $d((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) = n$ . Выберем  $k = \lceil \log_2 K \rceil$ , тогда  $2^k S_{d-1}(n) \geq 2^n \implies S_{d-1}(n) \geq 2^{n-k}$ .  $\square$

**Следствие 1.1.** *Существует  $(n, k)$ -код, исправляющий  $r$  ошибок и удовлетворяющий*

$$n - k \leq \log_2(S_{2r}(n))$$

**Замечание 1.2.** Мы получили верхнюю границу на количество исправляющих символов. Граница Хемминга — нижняя граница, то есть

$$\log_2 S_r(n) \leq n - k \leq \log_2 S_{2r}(n)$$

## 1.5 Граница Плоткина

**Теорема 1.7.** *Для  $[n, K, d]$ -кода выполнено  $d \leq \frac{n \cdot \frac{K}{2}}{K-1}$ . В частности, для  $(n, k, d)$ -кода верно  $d \leq \frac{n 2^{k-1}}{2^k - 1}$*

*Доказательство.* Рассмотрим  $D = \sum_{x, y \in C} d(x, y)$ . С одной стороны

$$D \geq 2_K^2 d = K(K-1)d$$

С другой стороны, рассмотрим каждый бит строк и обозначим

$$d_i(x, y) = \begin{cases} 0 & x_i = y_i \\ 1 & x_i \neq y_i \end{cases}$$

Тогда  $d(x, y) = d_1(x, y) + \dots + d_n(x, y)$ . Тогда

$$D = \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{x, y \in C} d_i(x, y)}_{D_i}$$

Заметим, что

$$D_i = 2|\{x \in C : x_i = 0\}| \cdot |\{x \in C : x_i = 1\}|$$

Тогда  $D_i \leq 2\left(\frac{K}{2}\right)^2$ , а, значит

$$D \leq \frac{nK^2}{2}$$

Таким образом,

$$\frac{nK^2}{2} \geq K(K-1)d \iff \frac{nK}{K-1} \geq d$$

$\square$

**Теорема 1.8.** Если существует,  $(n, k)$ -код  $C$ , такой, что  $d(C) \geq \frac{n}{2}$ , то

$$k \leq \log_2(2n) \iff \frac{\overbrace{K}^{2^k}}{2} \leq n$$

*Доказательство.* Рассмотрим преобразование

$$\underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_{\in \{0,1\}^n} \mapsto ((-1)^{b_1}, \dots, (-1)^{b_n})$$

Пусть  $v^{(1)}, \dots, v^{(K)}$  — векторы, полученные этим преобразованием из векторов кода.  $d(b^{(i)}, b^{(j)}) \geq \frac{n}{2} \iff (v^{(i)}, v^{(j)}) \leq 0$ .

Пусть  $\frac{K}{2} > n$ , тогда покажем, что не может существовать набора  $v^{(1)}, \dots, v^{(K)}$  с требуемым свойством. Рассмотрим  $x \in \mathbb{R}^n$ , такой, что  $(x, v^{(i)}) \neq 0$  для всех  $i$ . Например, можно рассмотреть  $(1, 0, \dots, 0)$ .

Тогда  $(x, v^{(i)}) > 0$  для не менее чем  $\frac{K}{2}$  векторов, либо  $(x, v^{(i)}) < 0$  для не менее чем  $\frac{K}{2}$  векторов. НУО верно первое иначе рассмотрим  $-x$ .

Тогда у нас есть набор из  $\frac{K}{2} > n$  векторов, таких, что  $(x, v^{(i)}) > 0$  для всех  $i$ . Количество векторов превышает  $n$ , тогда

$$\exists \lambda: \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v^{(i)} = 0$$

НУО  $\exists \lambda_i > 0$ , иначе поменяем знак всем  $\lambda$ , тогда обозначим  $I = \{i: \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$ . Можем записать

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v^{(i)} = \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i v^{(i)}}_z + \sum_{i \notin I} \lambda_i v^{(i)} = 0$$

- $z \neq 0$ . Тогда  $(z, z) > 0$ , с другой стороны

$$(z, 0 - z) = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i v^{(i)}, - \sum_{i \notin I} \lambda_i v^{(i)} \right) = - \sum_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{\lambda_j}_{<0} \overbrace{(v^{(i)}, v^{(j)})}^{<0} \leq 0$$

Получаем противоречие

- $z = 0$ . Тогда  $(z, x) = 0$ , но

$$(z, x) = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i v^{(i)}, x \right) = \sum_{i \in I} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{(v^{(i)}, x)}_{>0} > 0$$

□

**Теорема 1.9.** Для  $(n, k)$  кода, такого, что  $n \geq 2d(C)$  выполнено

$$n - k \geq 2d(C) - \log_2 4d(C)$$

*Доказательство.* При  $n = 2d$  воспользуемся 1.8 и получим  $-k \geq -\log_2(2n)$  и прибавим к обеим частям  $n = 2d$

При  $n > 2d$  обозначим  $n = 2d + t$  и рассмотрим два случая:

1.  $t \geq k$ . Тогда сразу  $n \geq 2d + k$  и теорема доказана
2.  $t < k$ . Тогда выберем в коде  $t$  информационных символов  $I_0$  тогда рассмотрим код  $C' = \{x|_{[n] \setminus I_0} : x \in C \wedge x|_{I_0} = a\}$  для произвольного  $a \in \{0, 1\}^t$ . Кодовое расстояние этого кода не менее  $d$ , поскольку мы вычеркивали одинаковые символы,  $n' = 2d$ . Тогда  $k - t \leq \log_2(2n')$ . Тогда

$$n - k = 2d - (k - t) \geq 2d - \log_2(4d)$$

□

## 1.6 Асимптотика границ

$R = \frac{k}{n}$  — скорость кода.

Обозначим  $\delta(C) = \frac{d(C)}{n}$  — относительное кодовое расстояние.

Обозначим  $\mathcal{U} = \{(R, \delta)\} \subset [0, 1] \times [0, 1]$  множество пар, таких, что существует последовательность  $(n_i, k_i, d_i)$  кодов, таких, что

$$\begin{aligned} n_i &\rightarrow \infty \\ \frac{k_i}{n_i} &\rightarrow R \\ \frac{d_i}{n_i} &\rightarrow \delta \end{aligned}$$

Оценим величину  $\bar{R}(\delta) = \sup\{R: (R, \delta) \in \mathcal{U}\}$

**Замечание 1.3.** При  $\delta > \frac{1}{2}$   $\bar{R}(\delta) = 0$

*Доказательство.*

$$d \leq \frac{n2^{k-1}}{2^k - 1} \implies \delta + \frac{O(1)}{n} \leq \frac{2^{k-1}}{2^k - 1}$$

При  $n \rightarrow \infty$  получим (пользуясь  $2\delta - 1 > 0$ )  $2^k \leq \frac{2\delta}{2\delta - 1}$ , тогда  $k \leq \log_2 \frac{2\delta}{2\delta - 1}$ , и значит  $R = \frac{k}{n} \rightarrow 0$  □

**Утверждение 1.1.**  $\bar{R}(\delta) \leq 1 - H(\frac{\delta}{2})$

*Доказательство.*  $n - k \geq \log_2 S_{\lfloor \frac{d(C)-1}{2} \rfloor}(n)$  известно из теоремы о границе Хемминга.  $d(C) = \lfloor \delta n \rfloor$  имеем

$$1 - \frac{k}{n} \geq \frac{\log_2 S_{\lfloor \frac{\lfloor n\delta \rfloor - 1}{2} \rfloor}(n)}{n}$$

По следствию

$$\frac{\log_2 S_r(n)}{n} = H\left(\frac{r}{n}\right) + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$$

тогда

$$1 - R \geq O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right) + H\left(\left\lfloor \frac{\lfloor n\delta \rfloor - 1}{2} \right\rfloor\right)$$

пренебрегая округлениями

$$R + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right) \leq 1 - H\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

и при  $n \rightarrow \infty$

$$\bar{R}(\delta) \leq 1 - H\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

□

**Утверждение 1.2.**  $\bar{R}(\delta) \geq 1 - H(\delta)$  при  $\delta \leq \frac{1}{2}$

*Доказательство.* Из теоремы о границе Варшавова-Гильберта знаем, что

$$n - k \leq \log_2 S_{d-1}(n)$$

в нашем случае

$$1 - \frac{k}{n} \leq \frac{\log_2 S_{\lfloor n\delta \rfloor - 1}(n)}{n}$$

по следствию из теоремы о границе Хемминга

$$1 - \frac{k}{n} \leq H\left(\frac{\lfloor n\delta \rfloor - 1}{n}\right) - O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$$

тогда при  $n \rightarrow \infty$  получаем требуемое. □

**Утверждение 1.3.**  $\bar{R}(\delta) \leq 1 - 2\delta$  при  $\delta \leq \frac{1}{2}$

*Доказательство.* Из последней теоремы о границе Плоткина

$$n - k \geq 2n\delta - \log_2(4n\delta)$$

можно переписать как

$$\frac{k}{n} \leq 1 - 2\delta + \frac{\log_2 4n\delta}{n}$$

тогда при  $n \rightarrow \infty$  имеем  $\bar{R} \leq 1 - 2\delta$  □

## Глава 2

# Матрицы и коды Адамара

(Конспект: А. Рязанов)

### 2.1 Матрицы и коды Адамара, общее представление

**Определение 2.1.** Матрицей Адамара называется матрица  $H \in \{-1, 1\}^{n \times n}$ , такая, что  $H \cdot H^T = nE_n$ .

Матрица адамана в нормализованном виде — это матрица, у которой первая строка и первый столбец состоят из единиц.

Двоичная матрица Адамара, это матрица, полученная из матрицы Адамара заменой  $-1$  на  $1$  а  $1$  на  $0$ .

**Утверждение 2.1.** Умножение строки или столбца матрицы Адамара на  $-1$  переводит ее в матрицу Адамара.

*Доказательство.* Умножение строки или столбца на единицу, это доножение слева или справа на матрицу  $d = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$ . Тогда в первом случае

$$(dH) \cdot (dH)^T = dHH^T d^T = d(nE)d^T = nEdd^T = nE$$

а во втором

$$(Hd) \cdot (Hd)^T = Hdd^T H^T = HH^T = nE$$

□

**Теорема 2.1.** Если существует матрица Адамара порядка  $n$ , то  $n \in \{1, 2\} \cup \{4k\}$

*Доказательство.* Пусть  $n \geq 3$  и существует  $H$ . Тогда представим ее в нормализованном виде и разделим столбцы на четыре типа:

1. Начинается с  $(1, 1, 1)$  —  $i$  штук
2. Начинается с  $(1, 1, -1)$  —  $j$  штук
3. Начинается с  $(1, -1, 1)$  —  $k$  штук
4. Начинается с  $(1, -1, -1)$  —  $l$  штук

Запишем условия ортогональности строк  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  и  $(1, 3)$ :

$$\begin{cases} i + j - k - l = 0 \\ i - j + k - l = 0 \\ i - j - k + l = 0 \end{cases}$$

Тогда  $i = j = k = l$ , тогда  $n = 4i$

□

**Утверждение 2.2.** Если  $H$  — матрица Адамара, то

$$\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$$

— тоже матрица Адамара.

*Доказательство.*

$$\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H^T & H^T \\ H^T & -H^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HH^T + HH^T & HH^T - HH^T \\ HH^T - HH^T & HH^T + HH^T \end{pmatrix} = 2nE_{2n}$$

□

Такие матрицы Адамара называются матрицами Сильвестра.

**Определение 2.2.** Симплексным кодом Адамара называется  $[K-1, K, \frac{K}{2}]$ -код, состоящий из строк двоичной матрицы Адамара из которой удален первый столбец.

**Утверждение 2.3.** Для симплексного кода Адамара выполнено  $K = \frac{2d}{2d-n}$ .

*Доказательство.* Очевидно.

□

**Замечание 2.1.** Если матрица Адамара, построена по способу Сильвестра, то симплексный код, построенный по ней, линейен.

## 2.2 Построение матрицы Адамара по способу Пэли

**Определение 2.3.** Пусть  $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ .  $\{a \in \{0, \dots, p-1\} : \exists b : b^2 = a\}$  называется множеством квадратичных вычетов.

**Определение 2.4.** Функция

$$\chi(i) = \begin{cases} 0 & i \text{ кратно } p \\ 1 & i \pmod p \text{ вычет} \\ -1 & i \pmod p \text{ невычет} \end{cases}$$

называется символом Лежандра.

**Теорема 2.2.**  $\forall c \neq 0 \pmod p$  выполнено  $\sum_{b=0}^{p-1} \chi(b)\chi(b+c) = -1$

**Конструкция 2.1.** Матрица Джекобстола.  $Q = \{q_{ij}\}_{p \times p}$ .  $q_{ij} = \chi(j-i)$ .

**Лемма 2.1.**  $Q \cdot Q^T = pE - \mathbf{1}_{p \times p}$   
 $Q\mathbf{1}_{p \times p} = \mathbf{1}_{p \times p}Q = 0$

*Доказательство.*  $Q\mathbf{1}_{p \times p} = \mathbf{1}_{p \times p}Q = 0$ , так как по модулю  $p$  существует  $\frac{p-1}{2}$  вычетов и  $\frac{p-1}{2}$  невычетов.

Рассмотрим  $P = \{p_{ij}\} = Q \cdot Q^T$ . Тогда

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \sum_{k=0}^{p-1} q_{ik}^2 = p \\ p_{ij} &= \sum_{k=0}^{p-1} q_{ik}q_{jk} \\ p_{ij} &= \sum_{k=0}^{p-1} \chi(i-k)\chi(j-k) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi(i-k) + \chi((i-k) + (j-i)) = -1 \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.2.** Пусть

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_p \\ \mathbf{1}_p & Q - E \end{pmatrix}$$

Тогда  $H$  — матрица Адамара

*Доказательство.*

$$H \cdot H^T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_p \\ \mathbf{1}_p & Q - E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_p \\ \mathbf{1}_p & Q^T - E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{1}_{p \times p} + (Q - E)(Q^T - E) \end{pmatrix}$$

Распишем

$$\mathbf{1}_{p \times p} + (Q - E)(Q^T - E) = \mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T - Q - Q^T + E\mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T - Q - Q^T + E$$

заметим, что  $q_{ij} = \chi(i-j) = \chi(-1)\chi(j-i) = -\chi(j-i)$ , тогда  $Q^T = -Q^T$ , тогда

$$\mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T - Q - Q^T + E = \mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T + E = (p+1)E$$

□



# Глава 3

## Линейные коды

(Конспект: А. Рязанов)

### 3.1 Базовые факты, коды Адамара

**Определение 3.1.** Код называется линейным, если множество кодовых слов  $C$  является линейным подпространством  $\{0, 1\}^n$ .

**Определение 3.2.** Весом Хэмминга  $a \in \{0, 1\}^n$  назовем  $w(a) = \{i: a_i = 1\}$

**Замечание 3.1.**  $d(a, b) = w(a \oplus b)$

**Лемма 3.1.** Пусть  $C$  — линейный код. Тогда  $d(C) = \min_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} w(x)$

*Доказательство.*  $d(C) = \min_{a \neq b \in C} d(a, b) = \min_{a \neq b \in C} w(a \oplus b) = \min_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} w(x)$  □

**Определение 3.3.** Пусть  $C$  — некоторый линейный код с порождающей матрицей  $G$  и проверочной матрицей  $H$ . Тогда дуальным к нему называется код  $C^\perp$  с порождающей матрицей  $H$  и проверочной матрицей  $G$ .

Если  $C$  являлся  $(n, k)$ -кодом, то  $C^\perp$  будет  $(n, n - k)$ -кодом.

**Теорема 3.1.** Дуальный код Хэмминга  $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$  является кодом Адамара с матрицей Сильвестра.

*Доказательство.* Будем доказывать по индукции.

**База:**  $m = 2$ . Тогда  $n = 2^m - 1 = 3$ ,  $k = 2^m - 1 - m = 1$ . Тогда проверочная матрица такого кода Хемминга имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  Тогда все векторы дуального кода выглядят как:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Этот код совпадает с соответствующим

кодом Адамара.

**Переход:** пусть доказано для  $n = 2^{m-1} - 1$ . Пусть  $\bar{H} \in \{0, 1\}^{(m-1) \times 2^{m-1}}$  — проверочная матрица для кода Хэмминга  $(2^{m-1} - 1, 2^{m-1} - 1 - (m - 1))$ .

Покажем, что матрица

$$H = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 1 \dots 1 \\ \bar{H} & \mathbf{0}_{m-1} & \bar{H} \end{pmatrix}$$

является проверочной матрицей кода Хэмминга  $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$ . Это почти очевидно, достаточно заметить, что столбцы матрицы различны и ее размерность  $m \times (2^m - 1)$  (следует из того же свойства для  $\bar{H}$  и отсутствия в  $\bar{H}$  нулевого столбца).

По индукционному предположению матрица  $\bar{H}$  порождает строки матрицы  $\mathcal{A}'$  — усеченной бинарной матрицы Адамара размера  $2^{m-1} \times 2^{m-1} - 1$ . Тогда матрица  $(\bar{H} | \mathbf{0}_{m-1} | \bar{H})$  порождает строки матрицы  $(\mathcal{A}' | \mathbf{0}_{2^{m-1}-1} | \mathcal{A}')$ .

Добавим в  $(\bar{H} | \mathbf{0}_{m-1} | \bar{H})$  первую строку  $H_1$ , чтобы получить матрицу  $H$ . Тогда можно сделать вывод, что матрица  $H$  порождает все строки матрицы  $(\mathcal{A}' | \mathbf{0}_{2^{m-1}-1} | \mathcal{A}')$  и строки, полученные из них прибавлением  $H_0$ . Тогда в итоге мы получим коды

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}' & \mathbf{0}_{2^{m-1}-1} & \mathcal{A}' \\ \mathcal{A}' & \mathbf{1}_{2^{m-1}-1} & \mathbf{1} - \mathcal{A}' \end{pmatrix}$$

Припишем слева столбец из нулей и получим, что новая матрица — это в точности матрица, полученная из  $(0_{2^{m-1}} | A')$  по правилу Сильвестра. Таким образом, теорема доказана.  $\square$

**Следствие 3.1.** Код Адамара с матрицей Сильвестра является линейным.

**Теорема 3.2.** Пусть  $C$  — линейный код,  $H$  — его проверочная матрица.

1. В проверочной матрице  $H$  любые  $d-1$  столбцов линейно независимы  $\iff d(C) \geq d$
2. Если любые  $d-1$  столбцов матрицы  $H$  линейно независимы и существуют  $d$  линейно зависимых столбцов, то  $d(C) = d$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

По лемме  $d(C) = \min_{x \in C} w(x)$ . Пусть существует  $x \in C$  такое, что  $w(x) < d$ .  $Hx = 0$ . Пусть  $i_1, \dots, i_r$  — номера ненулевых компонент  $x$  ( $r < d$ ). Тогда  $H_{i_1} \oplus H_{i_2} \oplus \dots \oplus H_{i_r} = 0$ , но это противоречит условию линейной независимости столбцов.

$\Leftarrow$

Если  $H_{i_1} \oplus \dots \oplus H_{i_r} = 0$ , то рассмотрим вектор  $x = \{x_j\}$ ,  $x_j = \begin{cases} 0 & \exists l: j = i_l \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$ . Для такого вектора  $Hx = 0$ , но  $w(x) = r < d$ .

Пункт 2 непосредственно следует из пункта 1.  $\square$

## 3.2 Смежные классы и декодирование по синдрому

**Определение 3.4.** Смежным классом группы  $G$  по подгруппе  $C$  называется множество вида

$$\begin{aligned} Cb &= \{xb: x \in C\} && \text{правый} \\ bC &= \{bx: x \in C\} && \text{левый} \end{aligned}$$

**Определение 3.5.** Синдром вектора  $x$  относительно линейного кода  $C$  с проверочной матрицей  $H$  называется вектор  $Hx$

**Теорема 3.3.** Пусть  $x, y \in \{0, 1\}^n$ . Тогда  $x, y \in Cz$  для некоторого  $z \iff Hx = Hy$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$   $x = a + z$ ,  $y = b + z$ ,  $a, b \in C$ . Тогда

$$Hx = Ha + Hz = Hz = Hb + Hz = Hy$$

$$\Leftarrow Hx = Hy \implies H(x + y) = 0, \text{ тогда } x, y \in Cz. \quad \square$$

Пусть  $b \in C$ ,  $b' = b + e$ , где  $e$  — вектор ошибок. Тогда  $Hb' = He$ , то есть, ошибку для  $b'$  нужно искать в его смежном классе по  $C$ .

**Лидер** — это слово наименьшего веса в смежном классе. Лидер является наиболее вероятным вектором ошибок.

**Утверждение 3.1.** Будем полагать вектором ошибок лидера соответствующего смежного класса. Составим матрицу  $A = \{A_{ij}\}_{2^{n-k} \times 2^k}$ ,  $A_{i,0}$  — лидер смежного класса  $i$ ,  $A_{0,i} \in C$  и  $A_{ij} = A_{i,0} \oplus A_{0,j}$ .

1. Исправим все ошибки, являющиеся лидерами
2. Для любого слова  $A_{ij}$  слово  $A_{0,j}$  является ближайшим к  $A_{ij}$  кодовым словом.

*Доказательство.* 1. Очевидно

2.  $A_{ij} = A_{0,j} + A_{i,0}$ .  $A_{i,0}$  — лидер.  $d(A_{ij}, A_{0,j}) = w(A_{i,0})$ .

Рассмотрим другое кодовое слово  $A_{0,j'}$ .

$$d(A_{ij}, A_{0,j'}) = w(A_{ij} \oplus A_{0,j'})$$

$$A_{ij} \oplus A_{0,j'} = A_{i,0} \oplus \underbrace{A_{0,j} \oplus A_{0,j'}}_{\in C}$$

Тогда  $A_{ij} \oplus A_{0,j'}$  лежит в смежном классе  $i$ , значит  $w(A_{ij} \oplus A_{0,j'}) \geq w(A_{i,0})$ , что и требовалось.  $\square$

### 3.3 Полиномиальные коды

**Определение 3.6.** Установим взаимно однозначное соответствие между многочленами степени  $< n$  и двоичными векторами из  $\{0, 1\}^n$ .

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$$

. Тогда рассмотрим некоторый многочлен  $g(x)$ , тогда кодовые многочлены получаются по правилу  $b(x) = a(x)g(x)$ , где  $\deg(a(x)) < k$ . Тогда, если  $\deg(g(x)) = n - k$ , то получается  $(n, k)$  код.

**Пример 3.1.**  $(6, 4)$  код, с порождающим многочленом  $1 + x + x^2$

$$\begin{array}{lll} 0001 & \xrightarrow{x^3} & 000111 \\ 0010 & \xrightarrow{x^2} & 001110 \\ 0100 & \xrightarrow{x} & 011100 \\ 1000 & \xrightarrow{1} & 111000 \end{array}$$

### 3.4 Совершенные линейные коды

**Определение 3.7.** Линейный  $(n, k)$ -код, исправляющий  $r$  ошибок называется совершенным, если для него достигается граница Хэмминга:

$$2^{n-k} = S_r(n)$$

**Замечание 3.2.** Для нелинейных кодов граница Хэмминга имеет вид

$$K = \frac{2^n}{S_r(n)}$$

**Пример 3.2.**  $(2m+1, 1)$  код. Кодовые слова  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ . Этот код исправляет  $m$  ошибок.

$$S_m(2m+1) = \sum_{i=0}^m C_{2m+1}^i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (C_{2m+1}^i + C_{2m+1}^{2m+1-i}) = 2^{2m}$$

Тогда  $2^{2m+1-1} = 2^{2m} = S_m(2m+1)$ , что и требуется по определению.

**Пример 3.3.** Код Хэмминга с  $n = 2^m - 1$ ,  $k = 2^m - 1 - m$ ,  $m \geq 2$ . Код исправляет одну ошибку,  $S_1(n) = 1 + n = 2^m$ . Тогда

$$2^{n-k} = 2^{2^m-1-(2^m-1-m)} = 2^m = S_1(n)$$

**Теорема 3.4.** Следующие условия равносильны

1. Существует двоичный совершенный код  $C$  в  $\{0, 1\}^n$ , который исправляет одну ошибку
2.  $n = 2^m - 1$

*Доказательство.*  $2 \implies 1$  Должно выполняться  $K = \frac{2^n}{n+1}$ .  $K$  может быть целым, только если  $n+1 = 2^m$  для некоторого  $m$ .

$1 \implies 2$  Доказали в примере 3.3. □

**Пример 3.4.**  $(23, 12)$ -код Голея, исправляющий 3 ошибки.  $S_3(23) = 1 + 23 + C_{23}^2 + C_{23}^3 = 2048 = 2^{11}$ . Тогда  $2^{23} = S_3(23) \cdot 2^{12}$ .

### 3.5 Двоичные циклические коды

**Определение 3.8.** Линейный код  $C$  называется циклическим, если  $\forall b \in C: b^{(1)} \in C$ , где  $(b_0, \dots, b_{n-1})^{(1)} = (b_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-2})$

Аналогично обозначим  $b^{(j)} = (b^{(j-1)})^{(1)}$  — сдвиг на  $j$  позиций вправо.

**Определение 3.9.** Кодовым многочленом, соответствующим  $b \in C$  назовем многочлен  $\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

**Теорема 3.5.**  $b^{(j)}(x) = x^j b(x) \pmod{x^n + 1}$

*Доказательство.* Распишем  $x^j b(x)$ :

$$x^j b(x) = \sum_{i=0}^{n-j-1} b_i x^{i+j} + \sum_{i=n-j}^{n-1} b_i x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-j-1} b_i x^{i+j} + x^n \underbrace{\sum_{i=n-j}^{n-1} b_i x^{i+j-n}}_{q(x)}$$

Рассмотрим многочлен  $q(x) = b_{n-j} + b_{n-j+1}x + \dots + b_{n-1}x^{j-1}$  и прибавм его дважды к  $x^j b(x)$  ( $q(x) + q(x) = 0$ ):

$$x^j b(x) = \underbrace{b_{n-j} + b_{n-j+1}x + \dots + b_{n-1}x^{j-1}}_{q(x)} + b_0 x^j + \dots + b_{n-j-1} x^{n-1} + x^n q(x) + q(x)$$

Тогда по модулю  $x^n + 1$  получаем  $b^{(j)}(x)$  □

**Теорема 3.6.** В циклическом коде существует только один ненулевой многочлен минимальной степени.

*Доказательство.* Пусть есть два таких многочлена  $q_1(x) = x^m + \dots$ ;  $q_2(x) = x^m + \dots$ . Тогда из линейности кода  $q_1(x) + q_2(x) \in C(x)$ . Но

$$(q_1 + q_2)(x) = \underbrace{x^m + x^m}_{=0} + \underbrace{\dots}_{deg < m}$$

тогда  $q_1$  и  $q_2$  не минимальны по степени. противоречие. □

**Определение 3.10.** Кодовый многочлен  $g(x)$  минимальной степери среди многочленов  $C(x)$  называется порождающим многочленом  $C$ .

**Теорема 3.7.** Свободный член  $g(x)$  — порождающего многочлена циклического кода, равен 1.

*Доказательство.* Пусть  $g_0 = 0$ , тогда  $g_1 + g_2 x + \dots + g_{n-1} x^{n-2} \in C(x)$ , но его степень меньше, чем у  $g$ . Противоречие. □

**Теорема 3.8.** Пусть  $g(x)$  — порождающий многочлен для циклического кода длины  $n$ . Тогда  $b(x) \in C(x) \iff b(x)$  кратно  $g(x)$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Пусть  $b(x) = g(x) \cdot a(x)$ .  $deg(a) \leq n - m - 1$ , тогда

$$b(x) = g(x) \sum_{i=0}^{n-m-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-m-1} a_i \underbrace{g(x) x^i}_{=g^{(i)}(x)}$$

таким образом,  $b(x)$  представлен в виде линейной комбинации циклических сдвигов  $g(x)$ , то есть  $b(x) \in C(x)$   
 $\Rightarrow$  Пусть  $b(x) \in C(x)$ . Можно записать  $b(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ . Нужно показать, что  $r(x) = 0$

$$r(x) = \underbrace{b(x)}_{\in C(x)} + \underbrace{g(x)q(x)}_{\in C(x)}$$

Тогда  $r(x) \in C(x)$ .  $deg(r(x)) < deg(g(x))$ , тогда по теореме 3.6  $r(x) = 0$ . □

**Теорема 3.9.** Пусть код порождается многочленом  $g(x)$ . Тогда следующие условия равносильны

1.  $C$  является циклическим
2.  $g(x)$  — делитель  $x^n + 1$

*Доказательство.*  $1 \implies 2$  Рассмотрим  $b \in C$ . По теореме 3.5 имеем  $b(x)x^j = b^{(j)}(x) + (x^n + 1)q(x)$ . Выберем  $j$  так, чтобы  $\deg(b(x)x^j) = n$ , тогда  $q(x) = 1$ . Тогда

$$\exists j \in \{0, \dots, n-1\}: x^j b(x) = b^{(j)}(x) + (x^n + 1)$$

Так как  $C$  циклический и порождается  $g(x)$ , то  $b^{(j)}(x) = g(x)a_j(x)$ . Тогда

$$\underbrace{x^j b(x)}_{\text{кратно } g(x)} = \underbrace{b^{(j)}(x)}_{\text{кратно } g(x)} + (x^n + 1)$$

Тогда и  $x^n + 1$  кратно  $g(x)$ .

$$2 \implies 1$$

□