

# Криптография и корректирующее кодирование

13 января 2017 г.

# Оглавление

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Корректирующие коды, код Хемминга</b>                 | <b>3</b>  |
| 1.1      | Общие определения  | 3         |
| 1.2      | Расстояние Хемминга и исправление ошибок                 | 3         |
| 1.3      | Граница Хемминга   | 4         |
| 1.4      | Граница Варшамова-Гильберта                              | 6         |
| 1.5      | Граница Плоткина   | 6         |
| 1.6      | Асимптотика границ                                       | 8         |
| <b>2</b> | <b>Матрицы и коды Адамара</b>                            | <b>10</b> |
| 2.1      | Матрицы и коды Адамара, общее представление              | 10        |
| 2.2      | Построение матрицы Адамара по способу Пэли               | 11        |
| <b>3</b> | <b>Линейные коды</b>                                     | <b>12</b> |
| 3.1      | Базовые факты, коды Адамара                              | 12        |
| 3.2      | Смежные классы и декодирование по синдрому               | 13        |
| 3.3      | Полиномиальные коды                                      | 14        |
| 3.4      | Совершенные линейные коды                                | 14        |
| 3.5      | Двоичные циклические коды                                | 15        |
| 3.5.1    | Свойства циклического кода                               | 15        |
| 3.5.2    | Порождающая и проверочная матрицы циклического кода      | 16        |
| 3.6      | Модификации линейных кодов                               | 17        |
| 3.7      | Бинарные коды Голея                                      | 18        |
| 3.8      | Бинарные CRC-коды  | 19        |
| <b>4</b> | <b>Регистры сдвига и линейная сложность</b>              | <b>21</b> |
| 4.1      | Регистры сдвига с линейной обратной связью               | 21        |
| 4.2      | Линейная сложность, алгоритм Берлекэмп-Мэсси             | 22        |
| 4.3      | Порождение симплексного кода с помощью регистра сдвига   | 22        |
| <b>5</b> | <b>Булевы функции</b>                                    | <b>23</b> |
| 5.1      | Определения. Алгебраическая нормальная форма             | 23        |
| 5.1.1    | Алгебраическая нормальная форма                          | 23        |
| 5.1.2    | Быстрое преобразование Мёбиуса                           | 24        |
| 5.2      | Коды Рид-Маллера   | 25        |
| 5.2.1    | Взаимосвязь кодов Рид-Маллера разных порядков            | 25        |
| 5.2.2    | Выколотые коды Рид-Маллера                               | 26        |
| 5.2.3    | Декодирование кода $\mathcal{R}(1, m)$                   | 26        |
| 5.3      | Преобразование Фурье и Уолша-Адамара для булевых функций | 27        |
| 5.3.1    | Функция Уолша  | 27        |
| 5.3.2    | Преобразование Фурье и Уолша-Адамара                     | 28        |
| 5.3.3    | Связь АНФ и коэффициентов Уолша-Адамара                  | 30        |
| 5.3.4    | Быстрое вычисление коэффициентов Уолша-Адамара           | 31        |
| 5.3.5    | Свёртка и преобразование Фурье                           | 31        |
| 5.4      | Производная булевой функции по направлению               | 31        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>6</b> | <b>Криптографические свойства булевых функций</b>                    | <b>33</b> |
| 6.1      | Нелинейность . . . . .   | 33        |
| 6.2      | Автокорреляция . . . . .   | 34        |
| 6.3      | Уравновешенность, устойчивость и корреляционная иммунность . . . . . | 35        |
| 6.3.1    | Уравновешенность . . . . .   | 35        |
| 6.3.2    | Корреляционная иммунность . . . . .                                  | 35        |
| 6.3.3    | Устойчивость . . . . .   | 35        |
| 6.4      | Бент-Функции . . . . .   | 37        |
| 6.4.1    | Определение и базовые свойства . . . . .                             | 37        |
| 6.4.2    | Дуальная функция . . . . .   | 37        |
| 6.4.3    | Критерий Ротхауза . . . . .  | 38        |
| 6.4.4    | Конструкция Мэйорана — Мак-Фарланда . . . . .                        | 38        |
| 6.4.5    | Частично бент-функции . . . . .                                      | 40        |
| 6.5      | Неравенство Зигенталера . . . . .                                    | 40        |

# Глава 1

## Корректирующие коды, код Хемминга

### 1.1 Общие определения

Кодируется последовательность бит. При **непрерывном коде** кодируется вся последовательность, при **блочном** последовательность разбивается на блоки по  $k$  бит и каждый блок кодируется отдельно.

**Определение 1.1.** Инъективное отображение  $f : K \rightarrow \{0, 1\}^n$ ,  $K \subset \{0, 1\}^k$  называется кодом. Образ любого слова из  $\{0, 1\}^k$  называется кодовым словом или кодом. Множество  $C = f(\{0, 1\}^k)$  также называется кодом.

**Определение 1.2.** Код называется раздельным, если  $[n] = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $|A| = k$  и  $\forall x \in K : f(x)|_A = x$ , то есть, для некоторого подмножества бит кода оно совпадает с прообразом как строка. Биты множества  $A$  называются информационными, а из множества  $B$  — проверочными.

**Определение 1.3.** Код называется линейным, если соответствующее отображение  $f$  линейно.

**Определение 1.4.** Раздельный код называется систематическим, если проверочные символы являются линейной комбинацией информационных. То же самое, что раздельный линейный код.

**Определение 1.5.** Два кода  $f$  и  $g$  назовем эквивалентными, если  $g(x) = f(\pi(x))$ , где  $\pi(x)$  — это  $x$  под действием некоторой перестановки  $\pi$ .

**Определение 1.6.** Скорость кода  $C \subset \{0, 1\}^n$  — это величина  $R = \frac{1}{n} \log_2 |C|$ . При  $|C| = 2^k$  имеет место  $R = \frac{k}{n}$ .  
Избыточность кода — это величина  $1 - R$

### 1.2 Расстояние Хемминга и исправление ошибок

**Определение 1.7.** Расстоянием Хемминга между строками  $x, y \in \{0, 1\}^n$  будем называть величину

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$$

**Определение 1.8.**  $d(C) = \min_{\substack{x, y \in C \\ x \neq y}} d(x, y)$  — кодовое расстояние кода  $C$ .

Обозначение:  $(n, k, d)$ -код, код с длиной кодируемого слова  $k$ , кодового слова  $n$  и минимальным кодовым расстоянием  $d$ .  $[n, K, d]$ -код — код с длиной кодового слова  $n$ , количеством слов  $K$  и минимальным кодовым расстоянием  $d$ .

**Определение 1.9.** Код обнаруживает ошибки в  $r$  битах, если существует отображение  $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , такое, что  $\forall x \in \{0, 1\}^k, |z| \leq r : g(f(x) \oplus z) = 1$

**Определение 1.10.** Код исправляет ошибки в  $r$  битах, если существует отображение  $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$ , такое, что  $\forall x \in \{0, 1\}^k, |z| \leq r : g(f(x) \oplus z) = x$

**Теорема 1.1.** Для того, чтобы код  $C$  позволял обнаружить ошибки в  $r$  битах, необходимо и достаточно, чтобы  $d(C) \geq r + 1$

**Теорема 1.2.** Для того, чтобы код  $C$  позволял исправить ошибки в  $r$  битах, необходимо и достаточно, чтобы  $d(C) \geq 2r + 1$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$

$g(x) = \arg \min_{y \in \{0,1\}^k} d(x, f(y))$ . Пусть  $x = f(y) + z$  и  $|z| \leq r$  и  $g(x) \neq y$ . Тогда  $d(f(g(x)), x) \leq r$ , а, значит  $d(f(y), f(g(x))) \leq d(x, f(y)) + d(x, f(g(x))) \leq 2r$ . Противоречие.

$\Rightarrow$

Рассмотрим  $x, y \in C$  такие, что  $d(x, y) \leq 2r$ . Тогда легко видеть, что существует  $z$ , такое, что  $d(x, z) \leq r$  и  $d(y, z) \leq r$ . Тогда, как бы мы не определили  $g(z)$ , мы получим противоречие с  $x$  или  $y$ .  $\square$

### 1.3 Граница Хемминга

**Определение 1.11.** Шаром радиуса  $r$  с центром в  $x$  назовем множество точек

$$B_r(x) = \{y : d(x, y) \leq r\}$$

Количество вершин в шаре в пространстве  $\{0, 1\}^n$  обозначим  $S_r(n)$

**Замечание 1.1.**  $S_r(x) = \sum_{i=0}^r C_n^i$ .

*Доказательство.*  $S_r(n) = |B_r(0)|$ . Строки в  $B_r(0)$  — это строки с не более чем  $r$  единичными битами.  $\square$

**Определение 1.12.** Энтропией дискретной случайной величины  $\xi$  принимающей значения  $1, \dots, n$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_n$  называется

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$$

**Лемма 1.1.**

$$\frac{1}{n+1} 2^{nH(\frac{r}{n})} \leq C_n^r \leq 2^{nH(\frac{r}{n})}$$

*Доказательство.* По формуле Стирлинга

$$C_n^r \simeq \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

С другой стороны

$$2^{nH(\frac{r}{n})} = 2^{n \left( -\frac{r}{n} \log_2 \frac{r}{n} - (1-\frac{r}{n}) \log_2 (1-\frac{r}{n}) \right)} = \frac{\left( \frac{r}{n} \right)^{-r}}{\left( 1 - \frac{r}{n} \right)^{n-r}} = \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}$$

Тогда для достаточно больших  $n$  достаточно показать

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \leq 1$$

Второе неравенство очевидно, поскольку в знаменателе квадратичная зависимость.

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ , тогда имеем

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

для достаточно больших  $n$  последнее  $\geq \frac{1}{n+1}$   $\square$

**Теорема 1.3.** Для достаточно больших  $n$  и при условии  $0 < r \leq \frac{n}{2}$  верно

$$\frac{\log_2 S_r(n)}{n} = H\left(\frac{r}{n}\right) + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$$

где  $H\left(\frac{r}{n}\right)$  — энтропия случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с вероятностями  $\frac{r}{n}$  и  $1 - \frac{r}{n}$ .

*Доказательство.* Покажем, что при  $r \leq \frac{n}{2}$  наибольшим слагаемым будет  $C_n^r$ .

$$\frac{C_n^i}{C_n^{i+1}} = \frac{n!(i+1)!(n-i-1)!}{n!i!(n-i)!} = \frac{i+1}{n-i}$$

Возрастание  $C_n^i$  равносильно  $\frac{C_n^i}{C_n^{i+1}} \leq 1 \iff i+1 \leq n-i \iff 2i \leq n-1$ . То есть  $C_n^i$  больше предыдущего сочетания, если  $2(i-1) \leq n-1$  то есть  $i \leq \frac{n+1}{2}$ . Тогда имеем

$$C_n^r \leq S_r(n) \leq (r+1)C_n^r$$

Воспользуемся леммой, прологарифмируем формулу оттуда:

$$-\log_2(n+1) + nH\left(\frac{r}{n}\right) \leq \log_2 S_r(n) \leq \log_2(r+1) + nH\left(\frac{r}{n}\right)$$

Поделим три части на  $n$

$$-\frac{\log_2(n+1)}{n} + H\left(\frac{r}{n}\right) \leq \frac{\log_2 S_r(n)}{n} \leq \frac{\log_2(r+1)}{n} + H\left(\frac{r}{n}\right)$$

Тогда получили, что требовалось,

$$\frac{\log_2 S_r(n)}{n} = H\left(\frac{r}{n}\right) + \underbrace{c}_{|c| \leq 1} \frac{\log_2(r+1)}{n}$$

□

**Теорема 1.4.** (Граница Хемминга) Для любого  $(n, k)$ -кода, исправляющего  $r$  ошибок верно

$$n - k \geq \log_2 \left( \sum_{i=0}^r C_n^i \right)$$

*Доказательство.* Рассмотрим прообразы исправляющей функции  $g$ .  $g^{-1}(y)$ . По определению  $|g^{-1}(y)| \geq S_r(n)$  и  $y_1 \neq y_2 \implies g^{-1}(y_1) \cap g^{-1}(y_2) = \emptyset$ . Тогда для завершения доказательства достаточно расписать

$$2^n = |\{0, 1\}^n| = \left| \bigcup_{y \in \{0, 1\}^k} g^{-1}(y) \right| \geq \sum_{y \in \{0, 1\}^k} S_r(k) = 2^k S_r(n)$$

□

**Теорема 1.5.** Если  $n - k \geq \log_2(n+1)$ , то существует  $(n, k, 3)$  код, то есть, граница Хемминга достигается.

*Доказательство.* Построим явно такой линейный код.  $C = \{Hx = 0\}$ , где  $H$  — матрица  $(n-k) \times n$ . Пусть  $H_{ij}$  — это  $i$ -й бит числа  $j$  ( $1 \leq i \leq n-k$ ;  $1 \leq j \leq n$ ). Заметим, что в условиях теоремы в матрице нет двух одинаковых столбцов, то есть, ее ранг не меньше 2. Пусть существуют  $x, y \in C$ , такие, что  $d(x, y) \leq 2$  тогда  $d(0, x \oplus y) \leq 2$ . То есть  $x \oplus y$  имеет не более двух единиц в двоичной записи  $H(x \oplus y) = H_{j_1} \oplus H_{j_2} = 0$ , что противоречит выводу о ранге. Тогда кодовое расстояние полученного кода равно 3. □

**Пример 1.1.** Построим систематический  $(n, k)$  код Хемминга.

Пусть  $a \in \{0, 1\}^k$ ;  $b \in \{0, 1\}^n$ . Кодировующее преобразование  $E(a) = b$ . Наложим следующие ограничения:

$$\begin{cases} b_i = a_i & i \leq k \\ b_{i+k} = (\Gamma_i, a) & i \leq n-k \end{cases}$$

То есть  $b = a(E_k | \Gamma^T)$ . То есть, мы построили порождающую матрицу кодирующей функции. Построим теперь проверочную матрицу:

$$b_{i+k} = (\Gamma_i, (b_1, \dots, b_k)) \iff b_{i+k} \oplus (\Gamma_i, (b_1, \dots, b_k)) = 0$$

То есть,  $H = (\Gamma|E_{n-k})$ . Условие  $Hb = 0$  является необходимым и достаточным для того, чтобы  $b$  являлось кодом, поскольку образом такого  $b$  является  $(b_1, \dots, b_k)$ .

Если столбцы матрицы  $H$  различны, то по 1.5 мы можем исправлять одну ошибку. Давайте построим явно исправляющую функцию.

Пусть  $b' = b \oplus e_i$ , где  $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ . Тогда  $Hb' = H_i - i$  — столбец матрицы  $H$ . Так как все столбцы различны, мы можем узнать, в каком бите была ошибка.  $Hb'$  называется *синдромом* вектора  $b'$ .

## 1.4 Граница Варшамова-Гильберта

**Теорема 1.6.** *Существует  $(n, k)$ -код с минимальным расстоянием  $d$ , такой, что*

$$n - k \leq \log_2 S_{d-1}(n)$$

*Доказательство.* Выберем точку  $c_1$ . Рассмотрим  $B_{d-1}(c_1)$  и пометим точки в нем. Пока есть непомяченные точки будем выбирать  $c_i$  и пометать точки в шаре  $B_{d-1}(C_i)$ . Так мы построим последовательность точек  $c_1, \dots, c_K$ , такую, что  $i \neq j \implies d(c_i, c_j) \geq d$ . Все точки  $\{0, 1\}^n$  покрыты хотя бы одним шаром, то есть  $K \cdot S_{d-1}(n) \geq 2^n$ .  $K \geq 2$ , если  $d - 1 < n$ , так как  $d((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) = n$ . Выберем  $k = \lceil \log_2 K \rceil$ , тогда  $2^k S_{d-1}(n) \geq 2^n \implies S_{d-1}(n) \geq 2^{n-k}$ .  $\square$

**Следствие 1.1.** *Существует  $(n, k)$ -код, исправляющий  $r$  ошибок и удовлетворяющий*

$$n - k \leq \log_2(S_{2r}(n))$$

**Замечание 1.2.** Мы получили верхнюю границу на количество исправляющих символов. Граница Хемминга — нижняя граница, то есть

$$\log_2 S_r(n) \leq n - k \leq \log_2 S_{2r}(n)$$

## 1.5 Граница Плоткина

**Теорема 1.7.** *Для  $[n, K, d]$ -кода выполнено  $d \leq \frac{n \cdot \frac{K}{2}}{K-1}$ . В частности, для  $(n, k, d)$ -кода верно  $d \leq \frac{n 2^{k-1}}{2^k - 1}$*

*Доказательство.* Рассмотрим  $D = \sum_{x, y \in C} d(x, y)$ . С одной стороны

$$D \geq 2_K^2 d = K(K-1)d$$

С другой стороны, рассмотрим каждый бит строк и обозначим

$$d_i(x, y) = \begin{cases} 0 & x_i = y_i \\ 1 & x_i \neq y_i \end{cases}$$

Тогда  $d(x, y) = d_1(x, y) + \dots + d_n(x, y)$ . Тогда

$$D = \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{x, y \in C} d_i(x, y)}_{D_i}$$

Заметим, что

$$D_i = 2|\{x \in C : x_i = 0\}| \cdot |\{x \in C : x_i = 1\}|$$

Тогда  $D_i \leq 2\left(\frac{K}{2}\right)^2$ , а, значит

$$D \leq \frac{nK^2}{2}$$

Таким образом,

$$\frac{nK^2}{2} \geq K(K-1)d \iff \frac{nK}{K-1} \geq d$$

$\square$

**Теорема 1.8.** Если существует,  $(n, k)$ -код  $C$ , такой, что  $d(C) \geq \frac{n}{2}$ , то

$$k \leq \log_2(2n) \iff \overbrace{\frac{K}{2}}^{2^k} \leq n$$

*Доказательство.* Рассмотрим преобразование

$$\underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_{\in \{0,1\}^n} \mapsto ((-1)^{b_1}, \dots, (-1)^{b_n})$$

Пусть  $v^{(1)}, \dots, v^{(K)}$  — векторы, полученные этим преобразованием из векторов кода.  $d(b^{(i)}, b^{(j)}) \geq \frac{n}{2} \iff (v^{(i)}, v^{(j)}) \leq 0$ .

Пусть  $\frac{K}{2} > n$ , тогда покажем, что не может существовать набора  $v^{(1)}, \dots, v^{(K)}$  с требуемым свойством. Рассмотрим  $x \in \mathbb{R}^n$ , такой, что  $(x, v^{(i)}) \neq 0$  для всех  $i$ . Например, можно рассмотреть  $(1, 0, \dots, 0)$ .

Тогда  $(x, v^{(i)}) > 0$  для не менее чем  $\frac{K}{2}$  векторов, либо  $(x, v^{(i)}) < 0$  для не менее чем  $\frac{K}{2}$  векторов. НУО верно первое иначе рассмотрим  $-x$ .

Тогда у нас есть набор из  $\frac{K}{2} > n$  векторов, таких, что  $(x, v^{(i)}) > 0$  для всех  $i$ . Количество векторов превышает  $n$ , тогда

$$\exists \lambda: \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v^{(i)} = 0$$

НУО  $\exists \lambda_i > 0$ , иначе поменяем знак всем  $\lambda$ , тогда обозначим  $I = \{i: \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$ . Можем записать

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v^{(i)} = \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i v^{(i)}}_z + \sum_{i \notin I} \lambda_i v^{(i)} = 0$$

- $z \neq 0$ . Тогда  $(z, z) > 0$ , с другой стороны

$$(z, 0 - z) = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i v^{(i)}, - \sum_{i \notin I} \lambda_i v^{(i)} \right) = - \sum_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{\lambda_j}_{<0} \overbrace{(v^{(i)}, v^{(j)})}^{<0} \leq 0$$

Получаем противоречие

- $z = 0$ . Тогда  $(z, x) = 0$ , но

$$(z, x) = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i v^{(i)}, x \right) = \sum_{i \in I} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{(v^{(i)}, x)}_{>0} > 0$$

□

**Теорема 1.9.** Для  $(n, k)$  кода, такого, что  $n \geq 2d(C)$  выполнено

$$n - k \geq 2d(C) - \log_2 4d(C)$$

*Доказательство.* При  $n = 2d$  воспользуемся 1.8 и получим  $-k \geq -\log_2(2n)$  и прибавим к обеим частям  $n = 2d$

При  $n > 2d$  обозначим  $n = 2d + t$  и рассмотрим два случая:

1.  $t \geq k$ . Тогда сразу  $n \geq 2d + k$  и теорема доказана
2.  $t < k$ . Тогда выберем в коде  $t$  информационных символов  $I_0$  тогда рассмотрим код  $C' = \{x|_{[n] \setminus I_0} : x \in C \wedge x|_{I_0} = a\}$  для произвольного  $a \in \{0, 1\}^t$ . Кодовое расстояние этого кода не менее  $d$ , поскольку мы вычеркивали одинаковые символы,  $n' = 2d$ . Тогда  $k - t \leq \log_2(2n')$ . Тогда

$$n - k = 2d - (k - t) \geq 2d - \log_2(4d)$$

□



## 1.6 Асимптотика границ

$R = \frac{k}{n}$  — скорость кода.

Обозначим  $\delta(C) = \frac{d(C)}{n}$  — относительное кодовое расстояние.

Обозначим  $\mathcal{U} = \{(R, \delta)\} \subset [0, 1] \times [0, 1]$  множество пар, таких, что существует последовательность  $(n_i, k_i, d_i)$  кодов, таких, что

$$\begin{aligned} n_i &\rightarrow \infty \\ \frac{k_i}{n_i} &\rightarrow R \\ \frac{d_i}{n_i} &\rightarrow \delta \end{aligned}$$

Оценим величину  $\bar{R}(\delta) = \sup\{R: (R, \delta) \in \mathcal{U}\}$

**Замечание 1.3.** При  $\delta > \frac{1}{2}$   $\bar{R}(\delta) = 0$

*Доказательство.*

$$d \leq \frac{n2^{k-1}}{2^k - 1} \implies \delta + \frac{O(1)}{n} \leq \frac{2^{k-1}}{2^k - 1}$$

При  $n \rightarrow \infty$  получим (пользуясь  $2\delta - 1 > 0$ )  $2^k \leq \frac{2\delta}{2\delta - 1}$ , тогда  $k \leq \log_2 \frac{2\delta}{2\delta - 1}$ , и значит  $R = \frac{k}{n} \rightarrow 0$  □

**Утверждение 1.1.**  $\bar{R}(\delta) \leq 1 - H(\frac{\delta}{2})$

*Доказательство.*  $n - k \geq \log_2 S_{\lfloor \frac{d(C)-1}{2} \rfloor}(n)$  известно из теоремы о границе Хемминга.  $d(C) = \lfloor \delta n \rfloor$  имеем

$$1 - \frac{k}{n} \geq \frac{\log_2 S_{\lfloor \frac{\lfloor n\delta \rfloor - 1}{2} \rfloor}(n)}{n}$$

По следствию

$$\frac{\log_2 S_r(n)}{n} = H\left(\frac{r}{n}\right) + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$$

тогда

$$1 - R \geq O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right) + H\left(\frac{\lfloor n\delta \rfloor - 1}{2}\right)$$

пренебрегая округлениями

$$R + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right) \leq 1 - H\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

и при  $n \rightarrow \infty$

$$\bar{R}(\delta) \leq 1 - H\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

□

**Утверждение 1.2.**  $\bar{R}(\delta) \geq 1 - H(\delta)$  при  $\delta \leq \frac{1}{2}$

*Доказательство.* Из теоремы о границе Варшавова-Гильберта знаем, что

$$n - k \leq \log_2 S_{d-1}(n)$$

в нашем случае

$$1 - \frac{k}{n} \leq \frac{\log_2 S_{\lfloor n\delta \rfloor - 1}(n)}{n}$$

по следствию из теоремы о границе Хемминга

$$1 - \frac{k}{n} \leq H\left(\frac{\lfloor n\delta \rfloor - 1}{n}\right) - O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$$

тогда при  $n \rightarrow \infty$  получаем требуемое. □

**Утверждение 1.3.**  $\bar{R}(\delta) \leq 1 - 2\delta$  при  $\delta \leq \frac{1}{2}$

*Доказательство.* Из последней теоремы о границе Плоткина

$$n - k \geq 2n\delta - \log_2(4n\delta)$$

можно переписать как

$$\frac{k}{n} \leq 1 - 2\delta + \frac{\log_2 4n\delta}{n}$$

тогда при  $n \rightarrow \infty$  имеем  $\bar{R} \leq 1 - 2\delta$

□

## Глава 2

# Матрицы и коды Адамара

### 2.1 Матрицы и коды Адамара, общее представление

**Определение 2.1.** Матрицей Адамара называется матрица  $H \in \{-1, 1\}^{n \times n}$ , такая, что  $H \cdot H^T = nE_n$ .

Матрица адамана в нормализованном виде — это матрица, у которой первая строка и первый столбец состоят из единиц.

Двоичная матрица Адамара, это матрица, полученная из матрицы Адамара заменой  $-1$  на  $1$  а  $1$  на  $0$ .

**Утверждение 2.1.** Умножение строки или столбца матрицы Адамара на  $-1$  переводит ее в матрицу Адамара.

*Доказательство.* Умножение строки или столбца на единицу, это доножение слева или справа на матрицу  $d = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$ . Тогда в первом случае

$$(dH) \cdot (dH)^T = dHH^T d^T = d(nE)d^T = nEdd^T = nE$$

а во втором

$$(Hd) \cdot (Hd)^T = Hdd^T H^T = HH^T = nE$$

□

**Теорема 2.1.** Если существует матрица Адамара порядка  $n$ , то  $n \in \{1, 2\} \cup \{4k\}$

*Доказательство.* Пусть  $n \geq 3$  и существует  $H$ . Тогда представим ее в нормализованном виде и разделим столбцы на четыре типа:

1. Начинается с  $(1, 1, 1)$  —  $i$  штук
2. Начинается с  $(1, 1, -1)$  —  $j$  штук
3. Начинается с  $(1, -1, 1)$  —  $k$  штук
4. Начинается с  $(1, -1, -1)$  —  $l$  штук

Запишем условия ортогональности строк  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  и  $(1, 3)$ :

$$\begin{cases} i + j - k - l = 0 \\ i - j + k - l = 0 \\ i - j - k + l = 0 \end{cases}$$

Тогда  $i = j = k = l$ , тогда  $n = 4i$

□

**Утверждение 2.2.** Если  $H$  — матрица Адамара, то

$$\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$$

— тоже матрица Адамара.

*Доказательство.*

$$\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H^T & H^T \\ H^T & -H^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HH^T + HH^T & HH^T - HH^T \\ HH^T - HH^T & HH^T + HH^T \end{pmatrix} = 2nE_{2n}$$

□

Такие матрицы Адамара называются матрицами Сильвестра.

**Определение 2.2.** Симплексным кодом Адамара называется  $[K-1, K, \frac{K}{2}]$ -код, состоящий из строк двоичной матрицы Адамара из которой удален первый столбец.

**Утверждение 2.3.** Для симплексного кода Адамара выполнено  $K = \frac{2d}{2d-n}$ .

*Доказательство.* Очевидно. □

**Замечание 2.1.** Если матрица Адамара, построена по способу Сильвестра, то симплексный код, построенный по ней, линейен.

## 2.2 Построение матрицы Адамара по способу Пэли

**Определение 2.3.** Пусть  $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ .  $\{a \in \{0, \dots, p-1\} : \exists b: b^2 = a\}$  называется множеством квадратичных вычетов.

**Определение 2.4.** Функция

$$\chi(i) = \begin{cases} 0 & i \text{ кратно } p \\ 1 & i \pmod p \text{ вычет} \\ -1 & i \pmod p \text{ невычет} \end{cases}$$

называется символом Лежандра.

**Теорема 2.2.**  $\forall c \neq 0 \pmod p$  выполнено  $\sum_{b=0}^{p-1} \chi(b)\chi(b+c) = -1$

**Конструкция 2.1.** Матрица Джекобстола.  $Q = \{q_{ij}\}_{p \times p}$ .  $q_{ij} = \chi(j-i)$ .

**Лемма 2.1.**  $Q \cdot Q^T = pE - \mathbf{1}_{p \times p}$

$$Q\mathbf{1}_{p \times p} = \mathbf{1}_{p \times p}Q = 0$$

*Доказательство.*  $Q\mathbf{1}_{p \times p} = \mathbf{1}_{p \times p}Q = 0$ , так как по модулю  $p$  существует  $\frac{p-1}{2}$  вычетов и  $\frac{p-1}{2}$  невычетов.

Рассмотрим  $P = \{p_{ij}\} = Q \cdot Q^T$ . Тогда

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \sum_{k=0}^{p-1} q_{ik}^2 = p \\ p_{ij} &= \sum_{k=0}^{p-1} q_{ik}q_{jk} \\ p_{ij} &= \sum_{k=0}^{p-1} \chi(i-k)\chi(j-k) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi(i-k) + \chi((i-k) + (j-i)) = -1 \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.2.** Пусть

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_p \\ \mathbf{1}_p & Q - E \end{pmatrix}$$

Тогда  $H$  — матрица Адамара

*Доказательство.*

$$H \cdot H^T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_p \\ \mathbf{1}_p & Q - E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_p \\ \mathbf{1}_p & Q^T - E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{1}_{p \times p} + (Q-E)(Q^T-E) \end{pmatrix}$$

Распишем

$$\mathbf{1}_{p \times p} + (Q-E)(Q^T-E) = \mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T - Q - Q^T + E\mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T - Q - Q^T + E$$

заметим, что  $q_{ij} = \chi(i-j) = \chi(-1)\chi(j-i) = -\chi(j-i)$ , тогда  $Q^T = -Q^T$ , тогда

$$\mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T - Q - Q^T + E = \mathbf{1}_{p \times p} + QQ^T + E = (p+1)E$$

□

## Глава 3

# Линейные коды

### 3.1 Базовые факты, коды Адамара

**Определение 3.1.** Код называется линейным, если множество кодовых слов  $C$  является линейным подпространством  $\{0, 1\}^n$ .

**Определение 3.2.** Весом Хэмминга  $a \in \{0, 1\}^n$  назовем  $w(a) = \{i: a_i = 1\}$

**Замечание 3.1.**  $d(a, b) = w(a \oplus b)$

**Лемма 3.1.** Пусть  $C$  — линейный код. Тогда  $d(C) = \min_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} w(x)$

*Доказательство.*  $d(C) = \min_{a \neq b \in C} d(a, b) = \min_{a \neq b \in C} w(a \oplus b) = \min_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} w(x)$  □

**Определение 3.3.** Пусть  $C$  — некоторый линейный код с порождающей матрицей  $G$  и проверочной матрицей  $H$ . Тогда дуальным к нему называется код  $C^\perp$  с порождающей матрицей  $H$  и проверочной матрицей  $G$ .

Если  $C$  являлся  $(n, k)$ -кодом, то  $C^\perp$  будет  $(n, n - k)$ -кодом.

**Теорема 3.1.** Дуальный код Хэмминга  $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$  является кодом Адамара с матрицей Сильвестра.

*Доказательство.* Будем доказывать по индукции.

**База:**  $m = 2$ . Тогда  $n = 2^m - 1 = 3$ ,  $k = 2^m - 1 - m = 1$ . Тогда проверочная матрица такого кода Хэмминга имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  Тогда все векторы дуального кода выглядят как:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Этот код совпадает с соответствующим

кодом Адамара.

**Переход:** пусть доказано для  $n = 2^{m-1} - 1$ . Пусть  $\bar{H} \in \{0, 1\}^{(m-1) \times 2^{m-1}}$  — проверочная матрица для кода Хэмминга  $(2^{m-1} - 1, 2^{m-1} - 1 - (m - 1))$ .

Покажем, что матрица

$$H = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 1 \dots 1 \\ \bar{H} & \mathbf{0}_{m-1} & \bar{H} \end{pmatrix}$$

является проверочной матрицей кода Хэмминга  $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$ . Это почти очевидно, достаточно заметить, что столбцы матрицы различны и ее размерность  $m \times (2^m - 1)$  (следует из того же свойства для  $\bar{H}$  и отсутствия в  $\bar{H}$  нулевого столбца).

По индукционному предположению матрица  $\bar{H}$  порождает строки матрицы  $\mathcal{A}'$  — усеченной бинарной матрицы Адамара размера  $2^{m-1} \times 2^{m-1} - 1$ . Тогда матрица  $(\bar{H} | \mathbf{0}_{m-1} | \bar{H})$  порождает строки матрицы  $(\mathcal{A}' | \mathbf{0}_{2^{m-1}} | \mathcal{A}')$ .

Добавим в  $(\bar{H} | \mathbf{0}_{m-1} | \bar{H})$  первую строку  $H_1$ , чтобы получить матрицу  $H$ . Тогда можно сделать вывод, что матрица  $H$  порождает все строки матрицы  $(\mathcal{A}' | \mathbf{0}_{2^{m-1}} | \mathcal{A}')$  и строки, полученные из них прибавлением  $H_0$ . Тогда в итоге мы получим коды

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}' & \mathbf{0}_{2^{m-1}} & \mathcal{A}' \\ \mathcal{A}' & \mathbf{1}_{2^{m-1}} & \mathbf{1} - \mathcal{A}' \end{pmatrix}$$

Припишем слева столбец из нулей и получим, что новая матрица — это в точности матрица, полученная из  $(\mathbf{0}_{2^{m-1}} | \mathcal{A}')$  по правилу Сильвестра. Таким образом, теорема доказана.  $\square$

**Следствие 3.1.** Код Адамара с матрицей Сильвестра является линейным.

**Теорема 3.2.** Пусть  $C$  — линейный код,  $H$  — его проверочная матрица.

1. В проверочной матрице  $H$  любые  $d-1$  столбцов линейно независимы  $\iff d(C) \geq d$
2. Если любые  $d-1$  столбцов матрицы  $H$  линейно независимы и существуют  $d$  линейно зависимых столбцов, то  $d(C) = d$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

По лемме  $d(C) = \min_{x \in C} w(x)$ . Пусть существует  $x \in C$  такое, что  $w(x) < d$ .  $Hx = 0$ . Пусть  $i_1, \dots, i_r$  — номера ненулевых компонент  $x$  ( $r < d$ ). Тогда  $H_{i_1} \oplus H_{i_2} \oplus \dots \oplus H_{i_r} = 0$ , но это противоречит условию линейной независимости столбцов.

$\Leftarrow$

Если  $H_{i_1} \oplus \dots \oplus H_{i_r} = 0$ , то рассмотрим вектор  $x = \{x_j\}$ ,  $x_j = \begin{cases} 0 & \exists l: j = i_l \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$ , Для такого вектора  $Hx = 0$ , но  $w(x) = r < d$ .

Пункт 2 непосредственно следует из пункта 1.  $\square$

## 3.2 Смежные классы и декодирование по синдрому

**Определение 3.4.** Смежным классом группы  $G$  по подгруппе  $C$  называется множество вида

$$\begin{aligned} Cb &= \{xb: x \in C\} && \text{правый} \\ bC &= \{bx: x \in C\} && \text{левый} \end{aligned}$$

**Определение 3.5.** Синдром вектора  $x$  относительно линейного кода  $C$  с проверочной матрицей  $H$  называется вектор  $Hx$

**Теорема 3.3.** Пусть  $x, y \in \{0, 1\}^n$ . Тогда  $x, y \in Cz$  для некоторого  $z \iff Hx = Hy$

*Доказательство.*  $\Rightarrow x = a + z, y = b + z, a, b \in C$ . Тогда

$$Hx = Ha + Hz = Hz = Hb + Hz = Hy$$

$$\Leftarrow Hx = Hy \implies H(x + y) = 0, \text{ тогда } x, y \in Cx. \quad \square$$

Пусть  $b \in C$ ,  $b' = b + e$ , где  $e$  — вектор ошибок. Тогда  $Hb' = He$ , то есть, ошибку для  $b'$  нужно искать в его смежном классе по  $C$ .

**Лидер** — это слово наименьшего веса в смежном классе. Лидер является наиболее вероятным вектором ошибок.

**Утверждение 3.1.** Будем полагать вектором ошибок лидера соответствующего смежного класса. Составим матрицу  $A = \{A_{ij}\}_{2^{n-k} \times 2^k}$ ,  $A_{i,0}$  — лидер смежного класса  $i$ ,  $A_{0,i} \in C$  и  $A_{ij} = A_{i,0} \oplus A_{0,j}$ .

1. Исправим все ошибки, являющиеся лидерами
2. Для любого слова  $A_{ij}$  слово  $A_{0,j}$  является ближайшим к  $A_{ij}$  кодовым словом.

*Доказательство.* 1. Очевидно

2.  $A_{ij} = A_{0,j} + A_{i,0}$ .  $A_{i,0}$  — лидер.  $d(A_{ij}, A_{0,j}) = w(A_{i,0})$ .

Рассмотрим другое кодовое слово  $A_{0,j'}$ .

$$d(A_{ij}, A_{0,j'}) = w(A_{ij} \oplus A_{0,j'})$$

$$A_{ij} \oplus A_{0,j'} = A_{i,0} \oplus \underbrace{A_{0,j} \oplus A_{0,j'}}_{\in C}$$

Тогда  $A_{ij} \oplus A_{0,j'}$  лежит в смежном классе  $i$ , значит  $w(A_{ij} \oplus A_{0,j'}) \geq w(A_{i,0})$ , что и требовалось.  $\square$

### 3.3 Полиномиальные коды

**Определение 3.6.** Установим взаимно однозначное соответствие между многочленами степени  $< n$  и двоичными векторами из  $\{0, 1\}^n$ .

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$$

. Тогда рассмотрим некоторый многочлен  $g(x)$ , тогда кодовые многочлены получаются по правилу  $b(x) = a(x)g(x)$ , где  $\deg(a(x)) < k$ . Тогда, если  $\deg(g(x)) = n - k$ , то получается  $(n, k)$  код.

**Пример 3.1.**  $(6, 4)$  код, с порождающим многочленом  $1 + x + x^2$

$$\begin{array}{rcl} 0001 & \xrightarrow{x^3} & 000111 \\ 0010 & \xrightarrow{x^2} & 001110 \\ 0100 & \xrightarrow{x} & 011100 \\ 1000 & \xrightarrow{1} & 111000 \end{array}$$

### 3.4 Совершенные линейные коды

**Определение 3.7.** Линейный  $(n, k)$ -код, исправляющий  $r$  ошибок называется совершенным, если для него достигается граница Хэмминга:

$$2^{n-k} = S_r(n)$$

**Замечание 3.2.** Для нелинейных кодов граница Хэмминга имеет вид

$$K = \frac{2^n}{S_r(n)}$$

**Пример 3.2.**  $(2m + 1, 1)$  код. Кодовые слова  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ . Этот код исправляет  $m$  ошибок.

$$S_m(2m + 1) = \sum_{i=0}^m C_{2m+1}^i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (C_{2m+1}^i + C_{2m+1}^{2m+1-i}) = 2^{2m}$$

Тогда  $2^{2m+1-1} = 2^{2m} = S_m(2m + 1)$ , что и требуется по определению.

**Пример 3.3.** Код Хэмминга с  $n = 2^m - 1$ ,  $k = 2^m - 1 - m$ ,  $m \geq 2$ . Код исправляет одну ошибку,  $S_1(n) = 1 + n = 2^m$ . Тогда

$$2^{n-k} = 2^{2^m-1-(2^m-1-m)} = 2^m = S_1(n)$$

**Теорема 3.4.** Следующие условия равносильны

1. Существует двоичный совершенный код  $C$  в  $\{0, 1\}^n$ , который исправляет одну ошибку
2.  $n = 2^m - 1$

*Доказательство.* 2  $\implies$  1 Должно выполняться  $K = \frac{2^n}{n+1}$ .  $K$  может быть целым, только если  $n + 1 = 2^m$  для некоторого  $m$ .

1  $\implies$  2 Доказали в примере 3.3. □

**Пример 3.4.**  $(23, 12)$ -код Голя, исправляющий 3 ошибки.  $S_3(23) = 1 + 23 + C_{23}^2 + C_{23}^3 = 2048 = 2^{11}$ . Тогда  $2^{23} = S_3(23) \cdot 2^{12}$ .

## 3.5 Двоичные циклические коды

### 3.5.1 Свойства циклического кода

**Определение 3.8.** Линейный код  $C$  называется циклическим, если  $\forall b \in C: b^{(1)} \in C$ , где  $(b_0, \dots, b_{n-1})^{(1)} = (b_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-2})$

Аналогично обозначим  $b^{(j)} = (b^{(j-1)})^{(1)}$  — сдвиг на  $j$  позиций вправо.

**Определение 3.9.** Кодовым многочленом, соответствующим  $b \in C$  назовем многочлен  $\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

**Теорема 3.5.**  $b^{(j)}(x) = x^j b(x) \pmod{x^n + 1}$

*Доказательство.* Распишем  $x^j b(x)$ :

$$x^j b(x) = \sum_{i=0}^{n-j-1} b_i x^{i+j} + \sum_{i=n-j}^{n-1} b_i x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-j-1} b_i x^{i+j} + x^n \underbrace{\sum_{i=n-j}^{n-1} b_i x^{i+j-n}}_{q(x)}$$

Рассмотрим многочлен  $q(x) = b_{n-j} + b_{n-j+1}x + \dots + b_{n-1}x^{j-1}$  и прибавм его дважды к  $x^j b(x)$  ( $q(x) + q(x) = 0$ ):

$$x^j b(x) = \underbrace{b_{n-j} + b_{n-j+1}x + \dots + b_{n-1}x^{j-1}}_{q(x)} + b_0 x^j + \dots + b_{n-j-1} x^{n-1} + x^n q(x) + q(x)$$

Тогда по модулю  $x^n + 1$  получаем  $b^{(j)}(x)$  □

**Теорема 3.6.** В циклическом коде существует только один ненулевой многочлен минимальной степени.

*Доказательство.* Пусть есть два таких многочлена  $q_1(x) = x^m + \dots$ ;  $q_2(x) = x^m + \dots$ . Тогда из линейности кода  $q_1(x) + q_2(x) \in C(x)$ . Но

$$(q_1 + q_2)(x) = \underbrace{x^m + x^m}_{=0} + \underbrace{\dots}_{deg < m}$$

тогда  $q_1$  и  $q_2$  не минимальны по степени. противоречие. □

**Определение 3.10.** Кодовый многочлен  $g(x)$  минимальной степени среди многочленов  $C(x)$  называется порождающим многочленом  $C$ .

**Теорема 3.7.** Свободный член  $g(x)$  — порождающего многочлена циклического кода, равен 1.

*Доказательство.* Пусть  $g_0 = 0$ , тогда  $g_1 + g_2 x + \dots + g_{n-1} x^{n-2} \in C(x)$ , но его степень меньше, чем у  $g$ . Противоречие. □

**Теорема 3.8.** Пусть  $g(x)$  — порождающий многочлен для циклического кода длины  $n$ . Тогда  $b(x) \in C(x) \iff b(x)$  кратно  $g(x)$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Пусть  $b(x) = g(x) \cdot a(x)$ .  $deg(a) \leq n - m - 1$ , тогда

$$b(x) = g(x) \sum_{i=0}^{n-m-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-m-1} a_i \underbrace{g(x) x^i}_{=g^{(i)}(x)}$$

таким образом,  $b(x)$  представлен в виде линейной комбинации циклических сдвигов  $g(x)$ , то есть  $b(x) \in C(x)$

$\Rightarrow$  Пусть  $b(x) \in C(x)$ . Можно записать  $b(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ . Нужно показать, что  $r(x) = 0$

$$r(x) = \underbrace{b(x)}_{\in C(x)} + \underbrace{g(x)q(x)}_{\in C(x)}$$

Тогда  $r(x) \in C(x)$ .  $deg(r(x)) < deg(g(x))$ , тогда по теореме 3.6  $r(x) = 0$ . □

**Теорема 3.9.** Пусть код порождается многочленом  $g(x)$ . Тогда следующие условия равносильны



1.  $C$  является циклическим

2.  $g(x)$  — делитель  $x^n + 1$

*Доказательство.*  $1 \implies 2$  Рассмотрим  $b \in C$ . По теореме 3.5 имеем  $b(x)x^j = b^{(j)}(x) + (x^n + 1)q(x)$ . Выберем  $j$  так, чтобы  $\deg(b(x)x^j) = n$ , тогда  $q(x) = 1$ . Тогда

$$\exists j \in \{0, \dots, n-1\}: x^j b(x) = b^{(j)}(x) + (x^n + 1)$$

Так как  $C$  циклический и порождается  $g(x)$ , то  $b^{(j)}(x) = g(x)a_j(x)$ . Тогда

$$\underbrace{x^j b(x)}_{\text{кратно } g(x)} = \underbrace{b^{(j)}(x)}_{\text{кратно } g(x)} + (x^n + 1)$$

Тогда и  $x^n + 1$  кратно  $g(x)$ .

$2 \implies 1$  Снова запишем

$$x^j b(x) = b^{(j)}(x) + (x^n + 1)q(x)$$

Тогда

$$b^{(j)}(x) = \underbrace{x^j b(x)}_{\text{кратно } g(x)} - \underbrace{(x^n + 1)}_{\text{кратно } g(x)} q(x)$$

Таким образом, код циклический. □

### 3.5.2 Порождающая и проверочная матрицы циклического кода

Пусть  $C$  — циклический код с порождающим многочленом  $g(x) = 1 + g_1x + \dots + g_{r-1}x^{r-1} + x^r$ . Тогда все кодовые многочлены имеют вид

$$b(x) = g(x) \underbrace{a(x)}_{\deg=k-1} = a_0g(x) + a_1xg(x) + \dots + a_{k-1}x^{k-1}g(x)$$

То есть, любой кодовый многочлен представляется как линейная комбинация многочленов  $x^jg(x)$ . Тогда порождающая матрица имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & g_1 & g_2 & \dots & g_{r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & g_1 & \dots & g_{r-2} & g_{r-1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & g_1 & \dots & \dots & g_{r-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь построим проверочную матрицу. Рассмотрим  $h(x)$ , такой, что  $x^n + 1 = h(x)g(x)$ . Тогда рассмотрим произвольный кодовый многочлен  $b(x) = q(x)g(x)$ .

$$b(x)h(x) = q(x)g(x)h(x) = q(x)(x^n + 1) = q(x) + x^n a(x)$$

Заметим, что  $\deg(a(x)) \leq k-1$ , а мономы  $x^n a(x)$  имеют степень не менее  $n$  тогда коэффициенты  $b(x)h(x)$  при  $x^k, x^{k+1}, \dots, x^{n-1}$  равны нулю. Давайте выразим эти коэффициенты через коэффициенты  $b$  и  $h$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k b_i h_{k-i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^k b_{i+1} h_{k-i} &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Тогда в матричном виде это выглядит как:

$$H = \begin{pmatrix} h_k & h_{k-1} & h_{k-2} & \dots & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_k & g_{k-1} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_k & g_{k-1} & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{pmatrix}$$

**Замечание 3.3.** Строки в  $G$  и  $H$  линейно независимы, поскольку у каждой строки есть компонент, отсутствующий во всех строках с большими номерами. Формально можно доказать по индукции.

**Замечание 3.4.** Порождающим многочленом дуального кода, порожденного многочленом  $g(x)$  с проверочным многочленом  $h(x)$  является многочлен  $x^k h(x^{-1})$ .

*Доказательство.* Многочлен  $x^k h(x^{-1}) = h_k + x h_{k-1} + \dots + x^{k-1} h_1 + x^k h_0$ , то есть, это многочлен  $h(x)$  с развернутыми коэффициентами. Тогда порождающая матрица для этого многочлена совпадает с проверочной для кода, порожденного  $C$ .  $\square$

## 3.6 Модификации линейных кодов

**Определение 3.11.**  $(n+1, k)$ -код, полученный из  $(n, k)$ -кода добавлением одного контрольного бита (иначе говоря, дополнительной переменной), называется *расширенным кодом* (*extended code*).

Вообще говоря, добавлять можем любой бит, но это не всегда имеет смысл.

**Утверждение 3.2.** Любой  $(n, k, d)$ -код с нечётным кодовым расстоянием можно расширить до  $(n+1, k, d+1)$ -кода добавлением бита проверки чётности.

*Доказательство.* Если между двумя словами было расстояние  $d$ , то одно из них имеет чётный вес, а другое нечётный, т.к.  $d$  нечётно. Тогда очевидно, что добавление бита проверки чётности увеличит расстояние между ними.  $\square$

**Определение 3.12.**  $(n-1, k)$ -код, полученный из  $(n, k)$ -кода удалением одного из контрольных битов (удалением переменной), называется *проколотым кодом* (*punctured code*).

Если расширим код, а затем уменьшим его на тот же контрольный бит, на который увеличивали, получим исходный код.

Если удаляемый бит принимает значение 1 в кодовом слове минимального веса, то минимальное кодовое расстояние уменьшается.

**Определение 3.13.** Код, полученный удалением информационных битов, называется *укороченным кодом* (*shortened code*).

Это значит удаление строки из порождающей матрицы и удаление столбца из проверочной. Т.е.  $(n, k)$ -код превращается в  $(n-1, k-1)$ -код.

**Определение 3.14.** Код, полученный добавлением информационного бита, называется *удлиненным кодом* (*lengthened code*).

Это значит, что мы добавили строку в порождающую матрицу и столбец в проверочную. Т.е.  $(n, k)$ -код превращается в  $(n+1, k+1)$ -код.

**Утверждение 3.3.** При удлинении и при укорочении минимальное кодовое расстояние не меняется.

*Доказательство.*

1. При удлинении очевидно.
2. При укорочении происходит следующее: из  $G$  вычёркивается строка и соответствующий её столбец *единичной подматрицы*. Соответственно, вычёркивается столбец из проверочной матрицы. Любая линейная комбинация строк  $G$  имеет вес как минимум  $d$ .

$$a_1 g_1 + \dots + a_n g_n \geq d, \forall \{a_i\}$$

Вычёркивание  $i$ -ой строки и соответствующего ей столбца — это линейная комбинация с  $a_i = 0$ .

$\square$

**Определение 3.15.** Код, полученный удалением некоторых кодовых слов, называется *суженным кодом* (*expurgated code*).

Возможно построить суженный код так, чтобы он оставался линейным.

Минимальное кодовое расстояние может увеличиться.

**Определение 3.16.** Код, полученный добавлением новых кодовых слов, называется *дополненным кодом* (*augmented code*).

**Пример 3.5.** (7, 4)-код Хэмминга.

Построим расширенный код двумя способами: начиная с проверочной матрицы и начиная с порождающей. Новая переменная — дополнительная проверка чётности для всех битов.

1. Проверочная матрица

$$H = \left[ \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Последняя строка соответствует уравнению  $\sum_{i=0}^6 x_i = x_7$ , то есть  $x_7$  — бит проверки чётности.

Линейными преобразованиями получим

$$H = \left[ \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Ей соответствует порождающая матрица

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|c|cccc} 1 & 0 & 1 & |1| & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & |0| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & |1| & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & |1| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

соответствующая начальной порождающей, к которой добавили 1 столбец (4-ый).

2. Порождающая матрица

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|c|cccc} 1 & 0 & 1 & |?| & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & |?| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & |?| & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & |?| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

. Добавим такой столбец, что количество единиц в каждой строке чётно. Легко видеть, что это тот же столбец, который мы получили в первом случае и других быть не может.

Почему появляется условие чётности по строкам? Вспомним,  $G = (\Gamma^t | E)$ ,  $H = (E | \Gamma)$ . От  $H$  хотим, чтобы линейными преобразованиями над строками можно было получить строку из всех единиц. Поскольку в  $H$  есть единичная подматрица, единственный способ это сделать — просуммировать все строки с коэффициентами 1. Тогда нам необходимо, чтобы все столбцы  $\Gamma$  были веса 1, то есть чтобы все строки  $\Gamma^t$  были веса 1. Следовательно, все строки  $G$  должны иметь вес 0.

## 3.7 Бинарные коды Голея

Чтобы бинарный  $(n, k, d)$ -код был совершенным, необходимо выполнение условия плотной упаковки:

$$2^k \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} C_n^k = 2^n$$

Голей нашел два возможных кандидата: (23, 12, 7) и (90, 78, 5).

**Теорема 3.10.** Не существует бинарного (90, 78, 5)-кода.

*Доказательство.* Предположим, что существует  $C$  — (90, 78, 5)-код. Не умаляя общности можем считать, что  $0 \in C$  (иначе выберем любой вектор  $C$  и прибавим его ко всем векторам кода).

Пусть  $Y = \{y \in \{0, 1\}^{90} : y_0 = y_1 = 1 \wedge w(y) = 3\}$ . Очевидно,  $|Y| = 88$ . Так как  $C$  — совершенный код, каждому  $y \in Y$  соответствует единственный  $x \in C$  причем  $d(x, y) = 2$ . Тогда  $1 \leq w(x) \leq 5$ , но  $d(x, 0) \geq 5$  и тогда мы можем заключить, что  $w(x) = 5$ . Тогда  $y \subset x$ , то есть  $y_i = 1 \implies x_i = 1$ .

Пусть  $X = \{x \in C : x_0 = x_1 = 1 \wedge w(x) = 5\}$ . Каждому  $y \in Y$  соответствует единственный  $\phi(y) = x \in X$ , такой, что  $d(x, y) = 2$ . С другой стороны, рассмотрим  $x \in X$ . Заменяя две из трех единиц, стоящих на позициях  $\{2, \dots, 89\}$  на нули мы получим три различных  $y_1, y_2, y_3 \in Y$ , при этом  $d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, y_3) = 2$ , тогда  $\phi(y_1) = \phi(y_2) = \phi(y_3) = x$ . Для любых других  $y \in Y$   $d(x, y) > 2$ . Тогда все элементы  $Y$  должны разбиться на тройки по значению  $\phi(y)$ . Но 88 не делится на 3. Противоречие.  $\square$

**Определение 3.17.** Расширенным кодом Голя назовем  $(24, 12)$ -код, построенный с помощью порождающей матрицы  $G = (E_{12}|A)$ , где  $A$  — фиксированная матрица  $12 \times 12$ , обладающая следующими свойствами:

- $A = A^T$
- $i \neq j \implies A_i \perp A_j$  (где  $A_i, A_j$  — строки матрицы  $A$ )

**Утверждение 3.4.** Так построенный код обладает кодовым расстоянием 8 и исправляет три ошибки.

**Замечание 3.5.** Удалив один проверочный бит из  $(24, 12, 8)$ -кода получим  $(23, 12, 7)$ -код — совершенный код Голя.

**Утверждение 3.5.** Код Голя самодуален, то есть  $G^\perp = G$

*Доказательство.* Заметим, что строки матрицы  $G$  ортогональны. Это следует из того, что строки  $E$  ортогональны и строки  $A$  ортогональны. Тогда  $G \subset G^\perp$ . Но размерности  $G$  и  $G^\perp$  равны 12, тогда  $G = G^\perp$   $\square$

## 3.8 Бинарные CRC-коды

**Определение 3.18.** CRC-код — это циклический код, используемый для *обнаружения* ошибок. Пусть порождающий многочлен нашего кода —  $g(x)$ . Тогда будем производить кодирование по правилу

$$c(x) = x^k m(x) + (x^k m(x) \bmod g(x))$$

Будем проверять наличие ошибок в  $\bar{c}(x)$  следующим образом:

$$\begin{cases} \text{ошибка} & \text{если } \bar{c}(x) \neq 0 \\ \text{принимает} & \text{если } \bar{c}(x) = 0 \end{cases}$$

Обозначим  $e(x) = \bar{c}(x) + c(x)$ .

**Замечание 3.6.** В одну сторону наша проверка корректна, если ошибки нет, то мы точно примем вектор. Но мы можем принять и вектор с ошибкой.

**Определение 3.19.** Вектор ошибок содержит пакет ошибок длины  $B$ , если расстояние между первой и последней ошибкой равно  $B$ , то есть, существует  $i$ , такое, что

$$e(x) = x^i(1 + e_1x + \dots + x^{B-1})$$

**Утверждение 3.6.** Верны следующие утверждения

1. Ошибка  $e(x) = x^i$  для  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  будет найдена
2. Если  $g(x) = (1+x)\bar{g}(x)$ , то  $\forall e(x): w(e) \bmod 2 = 1$  будет найдена
3. Если  $e(x)$  содержит пакет ошибок длины  $n-k$ , то такая ошибка будет найдена
4. Если  $e(x)$  содержит пакет ошибок длины  $n-k+1$ , то она не будет найдена только если  $e(x) = x^i g(x)$
5. Вероятность, что ошибка с блоком длины  $l > n-k+1$  не будет найдена равна  $2^{k-n}$

*Доказательство.* 1.  $g(x) = 1 + \dots + x^r$ ,  $r > 0$ . Рассмотрим произвольный многочлен  $a(x) = x^{d_l} + \dots + x^{d_r}$ . Тогда  $g(x)a(x) = x^{d_l} + \dots + x^{r+d_r}$ . Следовательно, так как  $d_l < r + d_r$ ,  $x^{d_l}$  не может делиться на  $g(x)$

2.

$$c(x) = (1+x)\bar{g}(x)m(x) = (1+x)\left(\sum_{i=0}^{n-2} t_i x^i\right) = t_0 + x(t_0 + t_1) + \dots + t_{n-2}x^{n-1}$$

Посчитаем сумму коэффициентов:  $t_0 + (t_0 + t_1) + (t_1 + t_2) + \dots + t_{n-2} = 2(\sum_{i=0}^{n-2} t_i) = 0$ . То есть, если ошибка содержит нечетное число единиц, то она не делится на  $g(x)$

3. Пусть  $e(x)$  содержит пакет ошибок длины  $n - k$ . Тогда

$$e(x) = x^i(1 + e_1x + \dots + x^{n-k-1})$$

$i \in \{0, \dots, k\}$ . Пусть  $e(x) = f(x)g(x)$ .

$$\deg(f) = \deg(e) - \deg(g) = (i + n - k - 1) - (n - k) = i - 1$$

Тогда вспомним, что  $g$  не кратно  $x^j$  ни для каких  $j$ . Таким образом  $f$  кратно  $x^i$ , но  $\deg(f) < i$ . Значит,  $e(x)$  не делится на  $g(x)$  и мы обнаружим такую ошибку.

4. Если  $e(x) = x^i(1 + e_1x + \dots + x^{n-k})$ , тогда ошибка может не распознаться только если  $e(x) = x^i g(x)$

5. Пусть  $e(x)$  содержит пакет ошибок длины  $l > n - k + 1$ . Тогда можем записать  $e(x) = x^i a(x)g(x)$ , опять исходя из факта, что  $g$  не кратно  $x^j$  для всех  $j > 0$ . Тогда  $\deg(a) = l - (n - k) - 1$  и свободный член  $a$  равен 1. Тогда возможных вариантов выбора  $a$  существует  $2^{l-n+k-2}$ .

Будем считать  $e$  равномерно распределенным по всем возможным ошибкам с блоком длины  $l$ . Тогда вероятность того, что такая ошибка поделится на  $g(x)$  равна

$$\frac{\overbrace{(n-l+1)}^{\text{выбор } i} 2^{l-n+k-2}}{2^{l-2}(n-l+1)} = 2^{k-n}$$

□

## Глава 4

# Регистры сдвига и линейная сложность

### 4.1 Регистры сдвига с линейной обратной связью

Хотим генерировать поток битов из некоторого начального конечного количества. Рассмотрим следующий алгоритм:

**Алгоритм 4.1.** Имеем  $s_0, s_1, \dots, s_{l-1}$ , где  $l$  будем называть длиной регистра сдвига. Пусть  $f : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}$ . Тогда будем генерировать дальнейшие биты по рекуррентному соотношению  $s_i = f(s_{i-1}, s_{i-2}, \dots, s_{i-l})$ .

$f$  будем называть функцией обратной связи.

$s_i$  — выход регистра на шаге  $i$ .

Рассмотрим регистр сдвига с линейной функцией обратной связи (РСЛОС)

**Определение 4.1.** Если  $f(x_0, \dots, x_{l-1}) = \sum_{i=0}^{l-1} c_i x_i$ , то многочлен, ассоциированный с РСЛОС:  $c(x) = 1 + c_0 x + \dots + c_{l-1} x^l$ .

**Определение 4.2.** Периодом регистра называется число  $\min\{N \in \mathbb{N} : \forall i \geq N \ S_{N+i} = S_i\}$

**Свойства:**

1.  $s_0 = \dots = s_{l-1} = 0 \implies \forall i: s_i = 0$
2. Период регистра конечен.

*Доказательство.* Если

$$\begin{cases} s_i = s_j \\ s_{i+1} = s_{j+1} \\ \dots \\ s_{i+l-1} = s_{j+l-1} \end{cases}$$

То  $s_{i+l} = s_{j+l}$  по определению. Тогда  $\forall k \geq 0: s_{i+k} = s_{j+k}$ . Таким образом  $(s_i, s_{i+1}, \dots) = (s_j, s_{j+1}, \dots)$ . Но тогда существует не более  $2^l$  различных типов таких последовательностей.

□

3.  $T \leq 2^l - 1$ . Непосредственно следует из доказательства предыдущего пункта.
4.  $c_{l-1} = 0 \implies$  период начинается не с начала последовательности ( $c_T$  не всегда равно  $c_0$ )
5.  $c_{l-1} = 1 \implies c_T = c_0$
6.  $c(x)$  неприводим над  $\mathbb{F}_2 \implies 2^l - 1$  кратно  $T$
7.  $c(x)$  примитивный над  $\mathbb{F}_2 \implies T = 2^l - 1$

**Утверждение 4.1.** Пусть известны  $s_i, \dots, s_{i+2l-1}$  и известно, что регистр имеет длину  $l$ . Тогда можно найти регистр сдвига, порождающий такую последовательность.

*Доказательство.* Составим систему уравнений, относительно  $c_i$ :

$$\begin{cases} s_{i+l} = c_0 s_{i+l-1} + c_1 s_{i+l-2} + \dots + c_{l-1} s_0 \\ s_{i+l+1} = c_0 s_{i+l} + c_1 s_{i+l-1} + \dots + c_{l-1} s_1 \\ \dots = \dots \\ s_{i+2l-1} = c_0 s_{i+2l-2} + c_1 s_{i+2l-3} + \dots + c_{l-1} s_{i+l-1} \end{cases}$$

Система совместна по построению  $s_i$ , тогда решение — подходящий регистр сдвига. Если уравнения линейно-независимы, регистр сдвига определяется однозначно.  $\square$

## 4.2 Линейная сложность, алгоритм Берлекэмпа-Мэсси

**Определение 4.3.** Регистр сдвига порождает последовательность  $s$ , если для начальных значений  $s_0, \dots, s_{l-1}$  регистр выдает последовательность  $s$ .

**Определение 4.4.** Линейной сложностью последовательности бит (конечной или бесконечной)  $s$  назовем

- 0, если  $s = (0, 0, \dots)$
- $\infty$ , если  $\nexists$  РСЛОС, порождающего  $s$ .
- Длина минимального регистра сдвига, порождающего  $s$ .

Обозначим  $L(s)$ .

**Определение 4.5.** Пусть  $s$  — последовательность бит. Тогда пусть

$$L_N = L(s_0, \dots, s_{N-1})$$

Последовательность  $L_1, L_2, \dots$  назовем профилем линейной сложности последовательности  $s$ .

**Утверждение 4.2.** Верны следующие утверждения

1.  $j > i \implies L_j \geq L_i$
2.  $L_N \leq \frac{N}{2} \implies L_{N+1} > L_N$
3.  $L_{N+1} > L_N \implies L_N + L_{N+1} = N + 1$

Сам алгоритм базируется на этих трех утверждениях. [Можно его дописать сюда].

## 4.3 Порождение симплексного кода с помощью регистра сдвига

**Определение 4.6.** Рассмотрим  $C_m$ ,  $(2^m - 1, 2^m - m - 1)$ -код Хэмминга. Дуальный к нему код  $S_m$  является кодом Адамара с матрицей Сильвестра — симплексным кодом.

**Замечание 4.1.**  $S_m$  является циклическим кодом с проверочным многочленом

$$h(x) = 1 + h_1 x + \dots + h_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

Тогда, вспоминая структуру проверочной матрицы циклического кода, можем записать условия на то, что  $(s_0, \dots, s_{2^m-2}) \in S_m$ :

$$\forall i \in \{0, \dots, 2^m - 2 - m\}: s_{i+m} = s_i + s_{i+1} h_{m-1} + \dots + s_{i+m-1} h_1$$

Тогда каждое кодовое слово  $s \in S_m$  порождается регистром сдвига с характеристическим многочленом  $h(x)$  и начальными входами  $s_0, \dots, s_{m-1}$ .

## Глава 5

# Булевы функции

### 5.1 Определения. Алгебраическая нормальная форма

#### 5.1.1 Алгебраическая нормальная форма

**Определение 5.1.** Функция  $f : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$  называется булевой функцией

Мы поймем, что *любую* булеву функцию можно представить в виде многочлена от  $m$  переменных в  $\mathbb{F}_2$  и даже выведем явную формулу.

С помощью таблицы истинности можно легко заметить, что для любой булевой функции  $f$  верно

$$f(v_1, \dots, v_m) = \bigvee_{i_1, \dots, i_m \in \{0, 1\}} f(i_1, \dots, i_m)(w_1^{i_1} \wedge \dots \wedge w_m^{i_m})$$

Где  $w_i^1 = v_i$  и  $w_i^0 = \neg v_i$ .

Это просто функция в дизъюнктивной нормальной форме.

**Определение 5.2.** Будем обозначать  $x \leq y$  для  $x, y \in \{0, 1\}^n$ , если  $x_i \leq y_i$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$

**Теорема 5.1.** Любая булева функция  $f$  может быть записана как

$$f(v_1, \dots, v_m) = \sum_{a \in \{0, 1\}^m} g(a) v_1^{a_1} \dots v_m^{a_m}$$

$$\text{где } g(a) = \sum_{b \leq a} f(b_1, \dots, b_m)$$

*Здесь и далее, если не указано иное, все суммы в  $\mathbb{F}_2$*

*Доказательство.* Зафиксируем набор значений  $v_1, \dots, v_m$  и проверим, что получается то, что нужно. Пусть  $A = \{i : v_i = 1\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ;  $B = \{i : v_i = 0\}$ .

Во-первых, можно выбросить слагаемые, где  $a_i = 1$  для  $i \in B$ , так как они обращаются в ноль.

$$\sum_{a \leq \mathbf{1}_A} g(a) v_1^{a_1} \dots v_m^{a_m} = \sum_{a \leq \mathbf{1}_A} g(a)$$

Здесь  $\mathbf{1}_A$  — характеристический вектор  $A$ , он равен  $(v_1, \dots, v_m)$ .

Так как во всех остальных слагаемых  $v_1^{a_1} \dots v_m^{a_m} = 1$ . Тогда, подставляя  $g(a)$ , получаем

$$= \sum_{a \leq \mathbf{1}_A} \sum_{b \leq a} f(b_1, \dots, b_m)$$

Давайте поймем, сколько раз каждое слагаемое входит в сумму:

$$= \sum_{b \leq \mathbf{1}_A} \sum_{\mathbf{1}_A \geq a \geq b} f(b_1, \dots, b_m)$$



Осталось посчитать сколько бывает таких  $a$ . Легко видеть, что их количество равно  $2^{w(a)-w(b)}$  и тогда все слагаемые, кроме  $b = \mathbf{1}_A = (v_1, \dots, v_m)$  по четности обращаются в ноль

$$= f(v_1, v_2, \dots, v_m)$$

□

**Определение 5.3.** Представление

$$f(v_1, \dots, v_m) = \sum_{a \in \{0,1\}^m} g(a) v_1^{a_1} \dots v_m^{a_m}$$

называется *алгебраической нормальной формой* функции  $f$ .

### 5.1.2 Быстрое преобразование Мёбиуса

**Определение 5.4.** Пусть  $f \in \{0,1\}^{2^n}$ . Поставим вектору  $f$  в соответствие функцию  $\in \text{Map}(\{0,1\}^n, \{0,1\})$  следующим образом

$$f \mapsto \left( \underbrace{x}_{\in \{0,1\}^n} \mapsto f_x \right)$$

где  $f_x$  — компонента вектора  $f$  с номером, соответствующим двоичной записи  $x$ . Мы будем отождествлять вектор  $f$  и соответствующую ему функцию и записывать  $f(x) = f_x$ .

Отображение  $\mu : \{0,1\}^{2^n} \rightarrow \{0,1\}^{2^n}$  называется *преобразованием Мёбиуса*, если выполнено:

$$f \mapsto g \iff \forall a: g(a) = \bigoplus_{b \leq a} f(b)$$

Вычисление преобразования Мёбиуса по определению требует  $3^n$  операций (это количество пар  $x, y \in \{0,1\}^n: x \leq y$ ). Но можно выполнить его оптимальнее, используя  $2^n \cdot n$  операций.

Действительно, рассмотрим  $f$  и  $g = \mu(f)$ .

$$g(a_1, \dots, a_n) = \bigoplus_{b \leq a} f(b_1, \dots, b_n) = \bigoplus_{\substack{b \leq a \\ b_1=0}} f(b_1, \dots, b_n) \oplus \bigoplus_{\substack{b \leq a \\ b_1=1}} f(b_1, \dots, b_n)$$

Теперь разберем два случая:  $a_1 = 0$  и  $a_1 = 1$ :

$$g(0, a_2, \dots, a_n) = \bigoplus_{\substack{b \leq a \\ b_1=0}} f(b_1, \dots, b_n)$$

в этом случае второе слагаемое обращается в ноль, поскольку  $b_1 = 1 \implies b \not\leq a$ .

$$g(1, a_2, \dots, a_n) = \bigoplus_{\substack{b \leq a \\ b_1=0}} f(b_1, \dots, b_n) \oplus \bigoplus_{\substack{b \leq a \\ b_1=1}} f(b_1, \dots, b_n)$$

Заметим, что теперь в обоих случаях условие  $b \leq a \iff (b_2, \dots, b_n) \leq (a_2, \dots, a_n)$ . Это дает нам возможность рассмотреть функции  $f_0(a') = f(0, a'_1, \dots, a'_{n-1})$  и  $f_1(a') = f(1, a'_1, \dots, a'_{n-1})$  и, используя прошлые рассуждения, записать

$$g(0, a_2, \dots, a_n) = \mu(f_0)(a_2, \dots, a_n)$$

и

$$g(1, a_2, \dots, a_n) = \mu(f_0)(a_2, \dots, a_n) \oplus \mu(f_1)(a_2, \dots, a_n)$$

Таким образом, мы свели задачу нахождения преобразования Мёбиуса для вектора из  $\{0,1\}^{2^n}$  к двум задачам нахождения преобразования Мёбиуса для вектора из  $\{0,1\}^{2^{n-1}}$  тогда время работы нашего алгоритма равно  $T(n) = 2^n + 2T(n-1)$ . Из этого соотношения легко видеть, что  $T(n) = 2^n \cdot n$ .

## 5.2 Коды Рида-Маллера

**Определение 5.5.** Для произвольного  $r \in \{0, \dots, m\}$  двоичный код Рида-Маллера  $\mathcal{R}(r, m)$  порядка  $r$  и длины  $2^m$  определяется как

$$\text{Lin}\{v_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v_{\alpha_p} : p \leq r; 1 \leq \alpha_i \leq m\}$$

то есть линейная оболочка мономов степени  $\leq r$  или, что то же самое, множество всех многочленов от  $m$  переменных над  $\mathbb{F}_2$  степени не больше  $r$ .

Собственно кодами будут характеристические векторы этих многочленов.

Очевидно, что этот код является линейным. Значит, можно говорить о его размерности.

**Замечание 5.1.** Размерность  $\mathcal{R}(r, m)$  равна  $\sum_{k=0}^r C_m^k$

*Доказательство.* Из теоремы 5.1 все мономы линейно независимы, а количество мономов степени  $\leq r$  равно  $\sum_{k=0}^r C_m^k$  □

### 5.2.1 Взаимосвязь кодов Рида-Маллера разных порядков

**Теорема 5.2.**

$$\mathcal{R}(r+1, m+1) = \{|u|u+v| : u \in \mathcal{R}(r+1, m), v \in \mathcal{R}(r, m)\}$$

Здесь  $|x|y|$  — конкатенация  $x$  и  $y$

**Лемма 5.1.** Пусть  $f(v_1, \dots, v_m)$  — булева функция с характеристическим вектором  $\phi$ . Тогда характеристические векторы функций  $g(v_1, \dots, v_{m+1}) = f(v_1, \dots, v_m)$  и  $h(v_1, \dots, v_{m+1}) = v_{m+1}f(v_1, \dots, v_m)$  равны, соответственно  $|\phi|\phi|$  и  $|0|\phi|$

*Доказательство.* Здесь  $m+1$  считается старшей степенью. Тогда левой части соответствуют те значения переменных где  $v_{m+1} = 0$ , а правой — те, где  $v_{m+1} = 1$ . Тогда в обеих частях характеристического вектора  $f$  будет вектор  $\phi$ .левой части характеристического вектора  $h$  будет соответствовать тождественный 0, поскольку мы умножили на 0. □

*Доказательство.* Рассмотрим  $f \in \mathcal{R}(r+1, m+1)$ . Давайте запишем

$$f(v_1, \dots, v_{m+1}) = \underbrace{g(v_1, \dots, v_m)}_{\deg \leq r+1} + v_{m+1} \underbrace{h(v_1, \dots, v_m)}_{\deg \leq r}$$

Вспомним лемму и заметим, что характеристические векторы слагаемых этой формулы равны  $|1_g|1_g|$  и  $|0|1_h|$  соответственно. Тогда характеристический вектор их суммы равен  $|1_g|1_g| + |0|1_h|$ . □

**Замечание 5.2.** Похоже на формулу для биномиальных коэффициентов.

Теперь мы готовы к тому, чтобы найти расстояние между кодовыми словами в коде Рида-Маллера.

**Теорема 5.3.** Минимальное расстояние между словами в коде  $\mathcal{R}(r, m)$  равно  $2^{m-r}$

*Доказательство.* Индукция по  $m$ . При  $m = 0$  существует один код Рида Миллера:  $\mathcal{R}(0, 0)$ . Он состоит из слов 0 и 1, расстояние между ними равно 1.

Пусть для всех  $m < m_0$  доказано, докажем для  $m_0$ . Из прошлой теоремы  $\mathcal{R}(r, m) = \mathcal{R}(r, m-1) + \mathcal{R}(r-1, m-1)$ . Рассмотрим  $a_1, a_2 \in \mathcal{R}(r, m)$ . Они имеют вид  $|u_1|u_1+v_1|$  и  $|u_2|u_2+v_2|$  соответственно. Тогда

$$d(a_1, a_2) = d(u_1, u_2) + d(u_1+v_1, u_2+v_2) \geq d(u_1, u_2) + \underbrace{|d(u_1, u_2) - d(v_1, v_2)|}_{\geq 2^{m-r-1}} \geq 2^{m-r}$$

Поймём, что это неравенство действительно верно (здесь сумма вещественных чисел):

$$d(u_1+v_1, u_2+v_2) = \sum_{i=1}^{2^m} d_i(u_1+v_1, u_2+v_2)$$

где  $d_i(x, y) = 1$ , если  $i$ -е символы  $x$  и  $y$  различаются и 0, если совпадают. Теперь разбором случаев можно доказать, что  $d_i(a+b, c+d) \leq |d_i(a, c) - d_i(b, d)|$ :

| a | b | c | d | $d_i(a+b, c+d)$ | $d_i(a, c)$ | $d_i(b, d)$ | $ \dots $ |
|---|---|---|---|-----------------|-------------|-------------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0               | 0           | 0           | 0         |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1               | 0           | 1           | 1         |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1               | 1           | 0           | 1         |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0               | 1           | 1           | 0         |

Здесь можно считать  $a = b = 0$ , так как иначе можно перейти к  $a \rightarrow a + a$ ;  $b \rightarrow b + b$ ;  $c \rightarrow c + a$ ;  $d \rightarrow d + b$ , не изменив обе части формулы и обратив  $a, b$  в ноль. Таким образом можем записать

$$\sum_{i=1}^{2^m} d_i(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \leq \sum_{i=1}^{2^m} |d_i(u_1, u_2) - d_i(v_1, v_2)| \leq \left| \sum_{i=1}^{2^m} (d_i(u_1, u_2) - d_i(v_1, v_2)) \right| = |d(u_1, u_2) - d(v_1, v_2)|$$

Теперь нужно разобрать два случая:

- $d(u_1, u_2) \geq d(v_1, v_2)$ . Тогда  $d(a_1, a_2) \geq 2^{m-r} + |\dots| \geq 2^{m-r}$
- $d(v_1, v_2) > d(u_1, u_2)$ . Тогда  $d(a_1, a_2) \geq d(u_1, u_2) + d(v_1, v_2) - d(u_1, u_2) = d(v_1, v_2) \geq 2^{m-r}$

□

### 5.2.2 Выколотые коды Рида-Маллера

**Определение 5.6.** Для произвольного  $r \in \{0, \dots, m-1\}$  **выколотый** двоичный код Рида-Маллера  $\mathcal{R}^*(r, m)$  порядка  $r$  и длины  $2^m$  определяется как

$$\{x_1 x_2 \dots x_{2^m-1} : x \in \mathcal{R}(r, m)\}$$

то есть, получается из  $\mathcal{R}(r, m)$  вычеркиванием элемента вектора, соответствующего  $v_1 = \dots = v_m = 0$

Очевидно, что  $\mathcal{R}^*(r, m)$  имеет длину  $2^m - 1$ , минимальное расстояние  $2^{m-r} - 1$ .

**Утверждение 5.1.** Для  $r < m$  верно  $\dim(\mathcal{R}^*(r, m)) = \sum_{k=0}^r C_m^k$

*Доказательство.* То есть, нужно доказать, что размерность равна размерности кода до выкалывания. Заметим, что по лемме о рандомизации, в каждой строке порождающей матрицы четное количество единиц (так как  $r < m$  и строки, соответствующей  $v_1 \dots v_m$ , где только одна единица, в матрице нет).

Тогда сложим все столбцы, кроме первого, и получим столбец вида  $(1, 0, \dots, 0)^T$ .

Таким образом, размерность линейной оболочки всех столбцов  $\mathcal{R}(r, m)$  равна размерности линейной оболочки всех столбцов, кроме первого, то есть  $\dim(\mathcal{R}^*(r, m))$  □

### 5.2.3 Декодирование кода $\mathcal{R}(1, m)$

Рассмотрим на примере  $m = 3$ . Порождающая матрица  $\mathcal{R}(1, m)$  будет иметь размер  $(m+1) \times 2^m$  и будет состоять из векторов  $\mathbf{1}, \mathbf{1}_{x_1}, \mathbf{1}_{x_2}, \mathbf{1}_{x_3}$ :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Кодирование, как и в любом линейном коде — домножение кодируемой строки на порождающую матрицу.

Все возможные 16 кодов получаются линейными комбинациями строк матрицы:

$$A = \mathcal{R}(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Закодируем какое-нибудь слово. Например  $y = (1, 0, 0, 1)$ .  $z = yG = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ . Кодовое расстояние равно  $2^{3-1} = 4$ . Поэтому код способен исправить только одну ошибку. Тогда пусть  $z' = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ . Преобразуем матрицу  $A$  так, чтобы можно посчитать расстояния от декодируемого вектора до всех кодовых слов.  $H_{ij} = 2A_{ij} - 1$ . Можно заметить, что  $H$  — это две матрицы Адамара, поставленные друг на друга. Преобразуем  $z'$  тем же образом:  $z''_i = 2z'_i - 1$ .

Рассмотрим  $H(z'')^T$ .  $i$ -й компонент этого вектора равен  $(2^m - d(H_i, z')) - d(H_i, z') = 2^m - 2d(H_i, z')$ . Тогда вектор с минимальным расстоянием соответствует максимуму среди компонент  $H(z'')^T$ .

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$H(z'')^T = (2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, -6, 6, 2, -2, 2, -2, 2, -2)^T$$

Максимальная компонента соответствует 10-й строке матрицы, а это и есть вектор  $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ , который мы шифровали.

## 5.3 Преобразование Фурье и Уолша-Адамара для булевых функций

### 5.3.1 Функция Уолша

**Определение 5.7.** Экспонента булевой функции  $\text{exp } f(x) = (-1)^{f(x)}$

$$\text{Т.е. } \text{exp } f : V_n \xrightarrow{f} \{0, 1\} \longrightarrow \{-1, 1\}$$

**Определение 5.8.** *Дискретная функция Уолша*

$$v(a, x) := (-1)^{\langle a, x \rangle}, \quad a, x \in V_n$$

$$v : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \longrightarrow \{1, -1\}$$

На  $a$  и  $x$  мы смотрим одновременно и как на двоичные векторы из  $\{0, 1\}^n$ , и как на целые числа, двоичная запись которых, дополненная при необходимости слева нулями, совпадает с этими векторами.

**Свойства функции Уолша:**

1.  $v(a, x) = v(x, a)$
2.  $|v(a, x)| = 1$
3.  $v(0, x) = v(x, 0) = 1$
4.  $E$  линейное подпространство  $\{0, 1\}^n$   
 $a \notin E^\perp$   
 Тогда

$$\sum_{x \in E} v(a, x) = 0$$

*Доказательство.*  $E_0 := \{x \in E : \langle a, x \rangle = 0\}$ ,  $E_1 := \{x \in E : \langle a, x \rangle = 1\}$

Покажем, что  $|E_0| = |E_1|$ , тогда число  $+1$  и  $-1$  в сумме будет одинаково.

$a \notin E^\perp \Rightarrow \exists x \in E : \langle a, x \rangle \neq 0 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$  ( $E^\perp = \{u \in \{0, 1\}^n : \langle u, x \rangle = 0, \forall x \in E\}$ )

Пусть  $y \in E_1$ . Рассмотрим равенство  $x + y = z$ . Скалярно домножив на  $a$  получим

$$\langle a, x \rangle + \underbrace{\langle a, y \rangle}_1 = \langle a, z \rangle$$

То есть если  $x \in E_1$ , то  $z \in E_0$ . И наоборот, если  $x \in E_0$ , то  $z \in E_1$ . Отсюда легко видеть, что, прибавляя  $y$  ко всем элементам  $E_1$ , получим элементы  $E_0$ . Значит,  $E_1 + y \subset E_0 \Rightarrow |E_1| \leq |E_0|$ . Так же прибавляя  $y$  ко всем элементам  $E_0$ , получим элементы  $E_1$ . Значит,  $E_0 + y \subset E_1 \Rightarrow |E_0| \leq |E_1|$ .  $\square$

**Следствие 5.1.** Т.к.  $\{0, 1\}^{n\perp} = \{0\}$ ,

$$\sum_{x \in \{0, 1\}^n} v(a, x) = \delta_0(a) 2^n$$

где

$$\delta_0(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0 \\ 0, & \text{если } a \neq 0 \end{cases}$$

### 5.3.2 Преобразование Фурье и Уолша-Адамара

**Определение 5.9.** Преобразованием Фурье булевой функции  $f$  называется целочисленная функция на  $\{0, 1\}^n$ , определяемая следующим равенством

$$F_f(u) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} f(x) v(x, u)$$

Для каждого  $u \in \{0, 1\}^n$  значение  $F_f(u)$  называется *коэффициентом Фурье*.

**Определение 5.10.** Преобразованием Уолша-Адамара булевой функции  $f$  называется целочисленная функция на  $\{0, 1\}^n$ , определяемая следующим равенством

$$W_f(u) = F_f(\exp f(u)) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \exp f(x) v(x, u) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} (-1)^{\langle x, u \rangle} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus \langle x, u \rangle} = \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(f(x) \oplus \langle x, u \rangle)
\end{aligned}$$

Для каждого  $u \in \{0,1\}^n$  значение  $W_f(u)$  называется *коэффициентом Уолша-Адамара*.

Уолш: от функции Уолша.

Адамар: функцию Уолша можно получить из матрицы Адамара. Рекурсивно умеем формировать матрицы Адамара размера  $2^n$  (мы полученные таким способом матрицы матрицами Сильвестра).

$$H_{new} = \begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix}$$

Тогда строчки — функции Уолша. То есть  $x$  соответствует номеру столбца,  $a$  соответствует номеру строки. Элемент  $H_{a,x} = v(a, x)$ .

**Пример 5.1.**

$$H_4 = \begin{bmatrix} a_1 = 00 | & \frac{x_1 = 00}{1} & \frac{x_2 = 01}{1} & \frac{x_3 = 10}{1} & \frac{x_4 = 11}{1} \\ a_2 = 01 | & 1 & -1 & 1 & -1 \\ a_3 = 10 | & 1 & 1 & -1 & -1 \\ a_4 = 11 | & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Определение 5.11.** Часто коэффициенты Фурье и коэффициенты Уолша-Адамара называются *спектральными коэффициентами*.

**Теорема 5.4.** Коэффициенты Фурье и Уолша-Адамара связаны соотношением

$$W_f(u) = 2^n \delta_0(u) - 2F_f(u)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
W_f(u) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp f(x) v(x, u) = \sum_{x \in \text{Supp } f} \underbrace{\exp f(x) v(x, u)}_{-1} + \sum_{x \in \{0,1\}^n \setminus \text{Supp } f} \underbrace{\exp f(x) v(x, u)}_0 = \\
&= - \sum_{x \in \text{Supp } f} v(x, u) + \sum_{x \in \{0,1\}^n \setminus \text{Supp } f} v(x, u)
\end{aligned}$$

По замечанию к 4-ому свойству

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \{0,1\}^n} v(a, x) &= \delta_0(a) 2^n \\
\sum_{x \in \{0,1\}^n \setminus \text{Supp } f} v(x, u) &= \underbrace{\sum_{x \in \{0,1\}^n} v(x, u)}_{=\delta_0(u) 2^n} - \sum_{x \in \text{Supp } f} v(x, u)
\end{aligned}$$

Кроме того

$$F_f(u) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) v(u, x) = \sum_{x \in \text{Supp } f} v(u, x)$$

Итого

$$W_f(u) = \delta_0(u) 2^n - 2 \sum_{x \in \text{Supp } f} v(x, u) = \delta_0(u) 2^n - 2F_f(u)$$

□

**Теорема 5.5** (формула обращения). Для преобразования Уолша-Адамара справедлива формула обращения.

$$\exp f(x) = 2^{-n} \sum_{u \in \{0,1\}^n} W_f(u) v(x, u)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 2^{-n} \sum_{u \in \{0,1\}^n} W_f(u) v(x, u) &= 2^{-n} \sum_{u \in \{0,1\}^n} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(y)} \underbrace{(-1)^{\langle y, u \rangle} (-1)^{\langle x, u \rangle}}_{(-1)^{\langle x \oplus y, u \rangle} = v(x \oplus y, u)} = \\
 &= 2^{-n} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(y)} \sum_{u \in \{0,1\}^n} v(x \oplus y, u) = \\
 \sum_{u \in \{0,1\}^n} v(x \oplus y, u) &= \begin{cases} 2^n, & x \oplus y = 0 \\ 0, & x \oplus y \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Т.е. от всех сумм останется только одно слагаемое при  $y = x$

$$= 2^{-n} (-1)^{f(x)} 2^n = \exp f(x)$$

□

Таким образом, коэффициенты Уолша-Адамара однозначно определяют булеву функцию. Вместе с тем, не любой набор из  $2^n$  чисел может быть набором коэффициентов Уолша-Адамара некоторой булевой функции.

Задачи 2.38, 2.39.

**Теорема 5.6** (равенство Парсеваля). *Коэффициенты Уолша-Адамара удовлетворяют соотношению:*

$$\sum_{u \in \{0,1\}^n} W_f^2(u) = 2^{2n}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \sum_{u \in \{0,1\}^n} W_f^2(u) &= \sum_{u \in \{0,1\}^n} \left( \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus \langle x, u \rangle} \right)^2 = \sum_{u \in \{0,1\}^n} \left( \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus \langle x, u \rangle} \right) \left( \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(y) \oplus \langle y, u \rangle} \right) = \\
 &= \sum_{u \in \{0,1\}^n} \sum_{x, y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus \langle x, u \rangle \oplus f(y) \oplus \langle y, u \rangle} = \sum_{x, y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus f(y)} \underbrace{\sum_{u \in \{0,1\}^n} (-1)^{\langle x \oplus y, u \rangle}}_{=0, \text{ при } x \neq y} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{\overbrace{f(x) \oplus f(x)}^0} = \\
 &= 2^{2n}
 \end{aligned}$$

□

### 5.3.3 Связь АНФ и коэффициентов Уолша-Адамара

**Утверждение 5.2.** *Коэффициенты алгебраической нормальной формы  $g_f(u)$  выражаются через коэффициенты Уолша-Адамара следующим образом:*

$$g_f(u) = 2^{wt(u)-1} - 2^{wt(u)-n-1} \sum_{\alpha \preceq u \oplus 1} W_f(\alpha)$$

Доказательство. Подставим формулу для коэффициентов Уолша-Адамара:

$$g_f(u) = 2^{wt(u)-1} - 2^{wt(u)-n-1} \sum_{\alpha \preceq u \oplus 1} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(f(x) \oplus \langle x, \alpha \rangle) = 2^{wt(u)-1} - 2^{wt(u)-n-1} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(f(x)) \sum_{\alpha \preceq u \oplus 1} \exp(\langle x, \alpha \rangle)$$

Величина  $\sum_{\alpha \preceq u \oplus 1} \exp(\langle x, \alpha \rangle)$  обращается в 0 при  $x$  не ортогональном  $\{y \leq u \oplus 1\}$  и равна  $2^{n-wt(u)}$  при  $x \perp \{y \leq u \oplus 1\} \iff x \in \{y \leq u\}$ .

$$= 2^{wt(u)-1} - 2^{wt(u)-n-1} \sum_{x \leq u} \exp(f(x)) 2^{n-wt(u)} = \frac{1}{2} 2^{wt(u)} - \frac{1}{2} \sum_{x \leq u} \exp(f(x)) = \frac{1}{2} \sum_{x \leq u} \underbrace{(1 - \exp(f(x)))}_{=2f(x)} = \sum_{x \leq u} f(x)$$

□

### 5.3.4 Быстрое вычисление коэффициентов Уолша-Адамара

Коэффициенты Уолша-Адамара — это коэффициенты Фурье для функции  $\exp f$ , поэтому достаточно научиться вычислять коэффициенты Фурье. Будем действовать аналогично вычислению преобразования Мёбиуса. Пусть  $u \in \{0, 1\}^n$ . Обозначим  $u' = (u_2, \dots, u_n)$ , аналогично для  $x \in \{0, 1\}^n$  обозначим  $x' = (x_2, \dots, x_n)$

$$F_f(u) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} f(x_1, x') \exp(x_1 v_1 + \langle x', u' \rangle) = \sum_{x \in \{0, 1\}^{n-1}} f(0, x) \exp(\langle x, u' \rangle) + f(1, x) \exp(u_1) \exp(\langle x, u' \rangle)$$

Пусть  $f_0(x) = f(0, x)$  и  $f_1(x) = f(1, x)$ , тогда

$$F_f(u) = F_{f_0}(u') + \exp u_1 F_{f_1}(u')$$

Таким образом, мы свели задачу преобразования Фурье для вектора  $\in \{0, 1\}^{2^n}$  к задаче вычисления преобразования Фурье для двух векторов из  $\{0, 1\}^{2^{n-1}}$ . Аналогично вычислению преобразования Мёбиуса, имеем время работы  $T(n) = 2^n + 2T(n-1) = 2^n \cdot n$

### 5.3.5 Свёртка и преобразование Фурье

**Определение 5.12.** Пусть  $f, g \in \mathcal{F}_n$  определим свёртку  $f$  и  $g$  следующим образом:

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in \{0, 1\}^n} f(x \oplus y) g(y) = \sum_{y \in \{0, 1\}^n} f(y) g(x \oplus y)$$

**Теорема 5.7.** Для любых  $f, g \in \mathcal{F}_n$  выполняется

$$\forall u \in \{0, 1\}^n: F_{f*g}(u) = F_f(u) F_g(u)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F_{f*g}(u) &= \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (f * g)(x) \exp(\langle x, u \rangle) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \sum_{y \in \{0, 1\}^n} f(y) g(x \oplus y) \exp(\langle x \oplus y \oplus y, u \rangle) = \\ &= \sum_{y \in \{0, 1\}^n} f(y) \exp(\langle y, u \rangle) \sum_{x \in \{0, 1\}^n} g(x \oplus y) \exp(\langle x \oplus y, u \rangle) = F_f(u) F_g(u) \end{aligned}$$

□

## 5.4 Производная булевой функции по направлению

**Определение 5.13.** Производной булевой функции  $f$  по направлению  $u \in \{0, 1\}^n$  называется булева функция

$$D_u f(x) = f(x \oplus u) \oplus f(x)$$

**Определение 5.14.** Производной булевой функции  $f$  по направлению подпространства  $L \subset \{0, 1\}^n$  называется функция

$$D_u f(x) = \bigoplus_{u \in F} f(x \oplus u)$$

**Замечание 5.1.** Если  $L = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ , то  $D_L f = D_{u_k} D_{u_{k-1}} \dots D_{u_1} f$

*Доказательство.* Индукция по  $k$ . Для  $k = 1$  очевидно. Пусть  $L = \text{Lin}(u, L')$ , докажем, что  $D_L f(x) = D_u D_{L'}(x)$ .

$$D_u D_{L'}(x) = D_u \bigoplus_{v \in L'} f(x \oplus v) = \bigoplus_{v \in L'} f(x \oplus v) \oplus \bigoplus_{v \in L'} f(x \oplus v \oplus u) = \bigoplus_{v \in L} f(x \oplus v)$$

□

**Утверждение 5.3.** Верны следующие утверждения



1.  $\forall L \subset \{0, 1\}^n$  подпространства  $\forall f \in \text{Map}(\{0, 1\}^n, \{0, 1\})$ ,  $u \in L$ ,  $x \in \{0, 1\}^n$  верно

$$D_L f(x) = D_L f(x \oplus u)$$

2.  $\forall f, g \in \text{Map}(\{0, 1\}^n, \{0, 1\})$ ,  $\forall$  подпространства  $L \subset \{0, 1\}^n$

$$D_L(f \oplus g) = D_L f \oplus D_L g$$

3.  $\forall f \in \text{Map}(\{0, 1\}^n, \{0, 1\})$ ,  $\forall u, v, x \in \{0, 1\}^n$

$$D_{u \oplus v} f(x) = D_u f(x) \oplus D_v f(x \oplus u)$$

4.  $\forall u, x \in \{0, 1\}^n$   $D_u f(x) = 0 \iff f = \text{const}$

5.  $\forall u \in \{0, 1\}^n$   $D_u f = \text{const} \iff \exists \alpha \in \{0, 1\}^n, \beta \in \{0, 1\}: f = \langle \alpha, x \rangle \oplus \beta$  то есть  $f$  — аффинная.

*Доказательство.* 1.  $D_L f(x) = \bigoplus_{v \in L} f(x \oplus v) = \bigoplus_{v \in L} f(x \oplus (u \oplus v)) = \bigoplus_{v \in L} f((x \oplus u) \oplus v) = D_L f(x \oplus u)$

2.  $D_L(f \oplus g)(x) = \bigoplus_{u \in L} f(x \oplus u) \oplus g(x \oplus v) = D_L f(x) \oplus D_L g(x)$

3.  $D_u f(x) \oplus D_v f(x \oplus u) = f(u \oplus x) \oplus f(x) \oplus f(x \oplus u \oplus v) \oplus f(x \oplus u) = f(x) \oplus f(x \oplus u \oplus v) = D_{u \oplus v} f(x)$

4. Очевидно по определению

5.  $D_u f(x) = \alpha_u \implies f(x) \oplus f(x \oplus u) = \alpha_u$  Тогда  $f(u) = f(0) + \alpha_u$ , тогда  $f(x) \oplus f(y) = \alpha_{x \oplus y} = f(0) \oplus f(x \oplus y)$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^k f(x_i) = f(\sum_{i=1}^k x_i) + k f(0)$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — единичные векторы. Тогда

$$f(x) = \langle (f(e_1), \dots, f(e_n)), x \rangle \oplus (w(x) \mod 2 \oplus 1) f(0) = \langle (f(e_1), \dots, f(e_n)) + (f(0), \dots, f(0)), x \rangle \oplus f(0)$$

□

## Глава 6

# Криптографические свойства булевых функций

### 6.1 Нелинейность

**Определение 6.1.** Нелинейностью булевой функции  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  называется число

$$\mathcal{N}_f = \min_{g \in \mathcal{A}_n} d(f, g)$$

где  $\mathcal{A}_n$  — пространство аффинных функций (имеющих как многочлены степень не более 1) и  $d(f, g) = |\{x : f(x) \neq g(x)\}|$

**Замечание 6.1.** Легко видеть, что для любой  $f \in \mathcal{A}_n$  существует  $u \in \{0, 1\}^n$  и  $b \in \{0, 1\}$  такой, что  $f(x) = (u, x) \oplus b$

**Теорема 6.1.**

$$\mathcal{N}_f = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{u \in \{0, 1\}^n} |W_f(u)|$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} W_f(u) &= \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \exp f(x) v(x, u) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus (u, x)} = \\ &= \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \exp(f \oplus (u, x))(x) \underbrace{v(x, 0)}_{=1} = W_{f \oplus u}(0) = |\{x : f(x) \oplus (u, x) = 0\}| - |\{x : f(x) \oplus (u, x) = 1\}| \\ &= (2^n - d(f(x), (u, x))) - d(f(x), (u, x)) = 2^n - 2d(f(x), (u, x)) \end{aligned}$$

Выражая из этой формулы расстояние

$$d(f(x), (u, x)) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} W_f(u)$$

теперь выразим расстояние до функции  $(u, x) \oplus 1$

$$d(f(x), (u, x) \oplus 1) = 2^n - (2^{n-1} - \frac{1}{2} W_f(u)) = 2^{n-1} + \frac{1}{2} W_f(u)$$

Тогда

$$\min\{d(f(x), (u, x)), d(f(x), (u, x) \oplus 1)\} = 2^{n-1} - \frac{1}{2} |W_f(u)|$$

и, наконец

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f &= \min_{g \in \mathcal{A}_n} d(f, g) = \min_{\substack{u \in \{0, 1\}^n \\ b \in \{0, 1\}}} d(f, (u, x) \oplus b) = \min_{u \in \{0, 1\}^n} \left| 2^{n-1} - \frac{1}{2} |W_f(u)| \right| = \\ &= 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{u \in \{0, 1\}^n} |W_f(u)| \end{aligned}$$

□

## 6.2 Автокорреляция

**Определение 6.2.** Пусть  $f, g \in \mathcal{F}_n = \text{Map}(\{0, 1\}^n, \{0, 1\})$ . Определим функцию  $\Delta_{f,g} : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  следующим образом:

$$\Delta_{f,g}(u) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(f(x) \oplus g(x \oplus u))$$

Назовем эту функцию *функцией взаимной корреляции*.

**Утверждение 6.1.**  $\forall u \in \{0, 1\}^n, \forall f, g \in \mathcal{F}_n : \Delta_{f,g}(u) = \Delta_{g,f}(u)$

**Определение 6.3.** Для  $f \in \mathcal{F}_n$  функция  $\Delta_f(u) = \Delta_{f,f}(u)$  называется функцией автокорреляции.

**Замечание 6.1.** Автокорреляция  $f$  в точке  $u \in \{0, 1\}^n$  равна нулевому коэффициенту Уолша-Адамара производной  $f$  по направлению  $u$ :

$$\Delta_f(u) = W_{D_u f}(0)$$

*Доказательство.*

$$W_{D_u f}(0) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(D_u f(x)) = \sum \exp(f(x+u) + f(x)) = \Delta_f(u)$$

□

**Замечание 6.2.** Не любой набор из  $2^n$  чисел может быть набором значений автокорреляции.

**Теорема 6.2.** Пусть  $f, g \in \mathcal{F}_n$ . Тогда

$$(\Delta_{f,g}(0), \dots, \Delta_{f,g}(2^n - 1))H_n = (W_f(0) \cdot W_g(0), \dots, W_f(2^n - 1) \cdot W_g(2^n - 1))$$

где  $H_n$  — матрица Сильвестра размера  $2^n \times 2^n$

*Доказательство.* Без доказательства

□

**Следствие 6.1.** Пусть  $f \in \mathcal{F}_n$  тогда

$$(\Delta_f(0), \dots, \Delta_f(2^n - 1))H_n = (W_f^2(0), \dots, W_f^2(2^n - 1))$$

или

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \Delta_f(x) \exp(\langle x, u \rangle) = W_f^2(u)$$

для всех  $u \in \{0, 1\}^n$ .

**Теорема 6.3.** Определим  $h \in \mathcal{F}_{n+m}$  как  $h(x, y) = f(x) + g(y)$ , где  $f \in \mathcal{F}_n$ ,  $g \in \mathcal{F}_m$ . Тогда

$$\forall \alpha \in \{0, 1\}^n, \beta \in \{0, 1\}^m : \Delta_h(\alpha, \beta) = \Delta_f(\alpha) \Delta_g(\beta)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \Delta_h(\alpha, \beta) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ y \in \{0,1\}^m}} \exp(h(x, y) \oplus h(x + \alpha, y + \beta)) = \\ &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ y \in \{0,1\}^m}} \exp(f(x) \oplus g(y) \oplus f(x + \alpha) \oplus g(y + \beta)) = \Delta_f(\alpha) \Delta_g(\beta) \end{aligned}$$

□

**Следствие 6.2.**  $\forall f \in \mathcal{F}_n$  выполнено  $|\text{Supp } \Delta_f| \cdot |\text{Supp } W_f| \geq 2^n$ , где  $\text{Supp } \Delta_f = \{x : \Delta_f(x) \neq 0\}$ ;  $\text{Supp } W_f = \{x : W_f(x) \neq 0\}$ .

## 6.3 Уравновешенность, устойчивость и корреляционная иммунность

### 6.3.1 Уравновешенность

**Определение 6.4.** Функция  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  называется, уравновешенной, если для

$$|\{x : f(x) = 0\}| = 2^{n-1}$$

, то есть, если она принимает значение 0 ровно в половине случаев.

Если функция уравновешена, то она наиболее оптимально сужает множество возможных прообразов, то есть, сообщает ровно 1 бит информации о прообразе.

**Утверждение 6.2.**  $f$  уравновешенна  $\iff W_f(0^n) = 0$ , где  $F_f$  — преобразование Фурье функции  $f$ .

$$\text{Доказательство. } W_f(0^n) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x)} \underbrace{v(x, 0^n)}_{=1} = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x)} = |\{x : f(x) = 0\}| - |\{x : f(x) = 1\}|$$

Так как  $\{x : f(x) = 0\} \cap \{x : f(x) = 1\} = \emptyset$ , получили, что требовалось.  $\square$

### 6.3.2 Корреляционная иммунность

**Определение 6.5.** Пусть  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$ . Тогда обозначим  $f_{i_1, \dots, i_m}^{a_1, \dots, a_m}$  функцию из  $\{0, 1\}^{n-m}$  полученную как сужение функции  $f$  на множество  $\{x : x_{i_k} = a_k\}$  с введением естественных координат.

**Определение 6.6.** Пусть  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ .  $f$  называется корреляционно-иммунной, если для любых  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$  выполнено

$$w(f_{i_1, \dots, i_m}^{a_1, \dots, a_m}) = \frac{w(f)}{2^m}$$

### 6.3.3 Устойчивость

**Определение 6.7.** Функция  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  называется  $m$ -устойчивой, если для любых  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$  и любых  $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$  функция, полученная из  $f$  сужением на множество  $\{x : x_{i_k} = a_k\}$  уравновешенна.

Вспомним несколько свойств преобразования Уолша-Адамара.

**Утверждение 6.3.** Пусть  $E$  — линейное подпространство  $\{0, 1\}^n$ . Тогда  $F_{1_E} = |E|1_{E^\perp}$

**Определение 6.8.** Обозначим  $\mathcal{F}(f) = W_f(0)$

**Определение 6.9.** Бинарной производной функции  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  называется функция  $D_b f(x) = f(x) \oplus f(x + b)$

**Утверждение 6.4.** Для бинарной  $f$  выполняется  $W_f^2(u) = \sum_{b \in \{0, 1\}^n} \mathcal{F}(D_b(f))(-1)^{(u, b)}$

*Доказательство.* Распишем правую часть:

$$\sum_{b \in \{0, 1\}^n} \mathcal{F}(D_b(f))(-1)^{(u, b)} = \sum_{b \in \{0, 1\}^n} \sum_{g \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(g) \oplus f(g+b)} (-1)^{(u, b)}$$

поменяем обозначения

$$\sum_{h \in \{0, 1\}^n} \sum_{g \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(g) \oplus f(h)} (-1)^{(u, g \oplus h)}$$

и по линейности скалярного произведения получаем

$$\left( \sum_{h \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(h)} (-1)^{(u, h)} \right) \cdot \left( \sum_{g \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(g)} (-1)^{(u, g)} \right) = W_f^2(u)$$

$\square$

**Теорема 6.4.**  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  является  $t$ -устойчивой  $\iff \forall u: w(u) \leq t$  выполняется  $W_f(u) = 0$

Уравновешенные функции являются 0-устойчивыми и для них мы эту теорему уже доказали.

**Лемма 6.1.** Пусть  $E$  и  $E'$  — подпространства  $\{0, 1\}^n$  такие, что  $\underbrace{E + E'}_{\text{прямая сумма}} = \{0, 1\}^n$  и  $E \cap E' = \{0\}$ . Пусть  $h_a$  — сужение  $f$  на сдвинутое подпространство  $E + a$ . Тогда выполняется

$$\sum_{u \in E^\perp} W_f^2(u) = |E^\perp| \sum_{a \in E'} W_{h_a}^2(0)$$

*Доказательство.*

$$\sum_{u \in E^\perp} W_f^2(u) =$$

по второму утверждению

$$\sum_{u \in E^\perp} \sum_{b \in \{0, 1\}^n} \mathcal{F}(D_b f)(-1)^{(u, b)} =$$

поменяем местами суммы

$$\sum_{b \in \{0, 1\}^n} \mathcal{F}(D_b f) \underbrace{\sum_{u \in E^\perp} (-1)^{(u, b)}}_{F_{\mathbf{1}_{E^\perp}}(b)} =$$

по первому утверждению

$$\sum_{b \in \{0, 1\}^n} \mathcal{F}(D_b f) |E^\perp| \mathbf{1}_E(b) = |E^\perp| \sum_{b \in E} \mathcal{F}(D_b f)$$

теперь, так как  $\{0, 1\}^n$  является прямой суммой  $E$  и  $E'$  можно записать  $f = \sum_{e \in E'} h_e$

$$|E^\perp| \sum_{b \in E} \mathcal{F}(D_b \sum_{e \in E'} h_e)$$

производная и преобразование Уолша-Адамара линейны, поэтому вынесем сумму по  $e$  вонне

$$= |E^\perp| \sum_{e \in E'} \left( \sum_{b \in E} \mathcal{F}(D_b h_e) \right)$$

теперь применим второе утверждение еще раз, пользуясь тем, что  $E$  — линейное пространство

$$|E^\perp| \sum_{e \in E'} \mathcal{F}^2(D_e f)$$

□

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное множество  $I \subset \{1, \dots, n\}$  такое, что  $|I| = t$ . Обозначим  $E = \{x : \forall i \in I x_i = 0\}$ . Тогда легко видеть, что  $E^\perp = \{x : \forall i \notin I x_i = 0\}$ . Прямая сумма  $E$  и  $E^\perp$  дает всё  $\{0, 1\}^n$ .

Тогда можем записать утверждение леммы

$$\sum_{u \in E^\perp} W_f^2(u) = |E^\perp| \sum_{a \in E^\perp} W_{h_a}^2(0)$$

Левая часть равна нулю тогда и только тогда, когда для всех  $u \in E^\perp$  верно  $W_f(u) = 0$ , вторая часть равна нулю тогда и только тогда, когда для всех  $a \in E^\perp$  верно  $W_{h_a}(0) = 0$ , что, в свою очередь, равносильно уравновешенности  $h_a$ . Здесь  $h_a$  — сужение на сдвинутое подпространство  $a + E$ , то есть сужение из определения устойчивости.

Так как эта равносильность выполнена для любых  $I$ , теорема доказана.

□

## 6.4 Бент-Функции

### 6.4.1 Определение и базовые свойства

**Определение 6.10.** Функция  $f \in \mathcal{F}_n$  называется *максимально нелинейной* если  $f = \arg \max_{f \in \mathcal{F}_n} \mathcal{N}_f$

**Определение 6.11.** Функция  $f \in \mathcal{F}_n$  называется бент-функцией, если

$$\forall u \in \{0, 1\}^n: W_f(u) \in \{2^{\frac{n}{2}}, -2^{\frac{n}{2}}\}$$

**Замечание 6.3.** Бент-функции существуют только для четных  $n$ , поскольку  $W_f(u) \in \mathbb{Z}$

**Замечание 6.4.** Если  $n$  четно, то  $f$  бент-функция  $\iff f$  максимально нелинейна.

*Доказательство.* Вспомним, что  $\mathcal{N}_f = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{u \in \{0,1\}^n} |W_f(u)|$ . Кроме того, по неравенству Парсеваля

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} W_f^2(x) = 2^{2n}.$$

Тогда

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} W_f^2(x) \leq 2^n \max_{x \in \{0,1\}^n} W_f^2(x) \implies \max_{x \in \{0,1\}^n} W_f^2(x) \geq 2^n \implies \mathcal{N}_f \leq 2^{n-1} - \frac{1}{2} 2^{\frac{n}{2}}$$

Тогда на бент-функциях достигается максимум нелинейности, а это и требовалось показать.  $\square$

ок

**Теорема 6.5.**  $f \in \mathcal{F}_{2n}$  является максимально нелинейной тогда и только тогда, когда  $Q = \left\{ \frac{1}{2^n} W_f(\alpha \oplus \beta) \right\}_{\alpha, \beta \in \{0,1\}^{2n}}$  является матрицей Адамара.

*Доказательство.* Все элементы матрицы принадлежат  $\{1, -1\}$ , осталось проверить ортогональность строк:

$$\langle Q_\alpha, Q_\beta \rangle = \sum_{x \in \{0,1\}^{2n}} \frac{1}{2^{2n}} W_f(x \oplus \alpha) W_f(x \oplus \beta) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{x' \in \{0,1\}^{2n}} W_f(x') W_f(x' \oplus \alpha \oplus \beta)$$

теперь по свойству ортогональности коэффициентов Уолша-Адамара имеем

$$\langle Q_\alpha, Q_\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{если } \alpha \neq \beta \\ 2^{2n} & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда  $Q$  — матрица Адамара.

В обратную сторону аналогично.  $\square$

### 6.4.2 Дуальная функция

**Определение 6.12.** Пусть  $f \in \mathcal{F}_{2n}$  — максимально нелинейная булева функция. Тогда  $\tilde{f} \in \mathcal{F}_{2n}$  называется *дуальной* к  $f$ , если  $W_f(\alpha) = 2^n (-1)^{\tilde{f}(\alpha)}$

**Пример 6.1.** Имея пример максимально-нелинейной функции легко построить дуальную к ней:

| $x$ | $f$ | $\exp f$ |    | $W_f$ | $\tilde{f}$ |
|-----|-----|----------|----|-------|-------------|
| 00  | 1   | -1       | 0  | 2     | 0           |
| 01  | 0   | 1        | 2  | -2    | 1           |
| 10  | 0   | 1        | -2 | -2    | 1           |
| 11  | 0   | 1        | 0  | -2    | 1           |

**Теорема 6.6.** Пусть  $f \in \mathcal{F}_{2n}$  является бент-функцией, то  $\tilde{f}$  тоже является бент-функцией.

*Доказательство.* Воспользуемся формулой обращения преобразования Уолша-Адамара (5.5):

$$\exp f(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{u \in \{0,1\}^{2n}} W_f(u) \exp \langle x, u \rangle$$

Рассмотрим преобразование Уолша-Адамара для  $\tilde{f}$ :

$$W_{\tilde{f}}(u) = \sum_{x \in \{0,1\}^{2n}} \exp(\tilde{f}(x) \oplus \langle x, u \rangle)$$

По определению дуальной функции  $\exp \tilde{f}(x) = \frac{1}{2^n} W_f(x)$ , тогда, подставляя в предыдущую формулу:

$$W_{\tilde{f}}(u) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^{2n}} W_f(x) \exp(\langle x, u \rangle) = 2^n \exp f(x) \in \{2^n, -2^n\}$$

А это и значит, что  $\tilde{f}$  является бент-функцией. □

**Замечание 6.5.**  $\tilde{\tilde{f}} = f$ . Следует из теоремы об обращении преобразования Уолша-Адамара.

### 6.4.3 Критерий Ротхауза

**Теорема 6.7** (критерий Ротхауза).  $f \in \mathcal{F}_{2n}$  является бент-функцией тогда и только тогда, когда

$$\forall u \in \{0,1\}^{2n} \setminus \{0\}: D_u f \text{ уравновешенна}$$

*Доказательство.* Вспомним теорему 6.5 о связи бент-функции с матрицей Адамара. Мы поняли, что

$$\left\{ \frac{1}{2^n} W_f(a \oplus b) \right\}_{a,b \in \{0,1\}^{2n}}$$

является матрицей Адамара. Запишем это условие для функции  $\tilde{f}$ , учитывая

$$W_{\tilde{f}}(u) = 2^n \exp f(u).$$

Скалярное произведение двух строк матрицы  $Q = \left\{ \frac{1}{2^n} W_{\tilde{f}}(a \oplus b) \right\}_{a,b \in \{0,1\}^{2n}}$ :

$$\langle Q_0, Q_\alpha \rangle = \sum_{x \in \{0,1\}^{2n}} \frac{1}{2^{2n}} W_{\tilde{f}}(x) W_{\tilde{f}}(x \oplus \alpha) = \sum_{x \in \{0,1\}^{2n}} \exp(f(x) \oplus f(x \oplus \alpha)) = \sum_{x \in \{0,1\}^{2n}} \exp D_\alpha f(x)$$

Тогда  $\alpha = 0 \iff D_\alpha f$  уравновешенна. Мы записываем только произведения с первой строкой, поскольку  $\langle Q_a, Q_b \rangle = \langle Q_0, Q_{a \oplus b} \rangle$  □

### 6.4.4 Конструкция Мэйорана — Мак-Фарланда

**Теорема 6.8.** Пусть  $\pi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$  — перестановка (биекция).  $\psi \in \mathcal{F}_n$ .

Тогда

$$f \in \mathcal{F}_{2n}: f(x, y) = \langle \pi(y), x \rangle \oplus \psi(y)$$

является бент-функцией.

*Доказательство.* Воспользуемся критерием Ротхауза (6.7) об уравновешенности производных.

$$D_u f(x, y) = f(x \oplus u_1, y \oplus u_2) \oplus f(x, y) = \langle \pi(y \oplus u_2), x \oplus u_1 \rangle \oplus \psi(x \oplus u_2) \oplus \langle \pi(y), x \rangle \oplus \psi(y)$$

Чтобы доказать уравновешенность, достаточно вычислить нулевой коэффициент Уолша-Адамара для  $D_u f(x, y)$ :

$$W_{D_u f}(0) = \sum_{v_1, v_2 \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(v_2 + u_2), v_1 + u_1 \rangle \oplus \psi(v_2 \oplus u_2) \oplus \langle \pi(v_2), v_1 \rangle \oplus \psi(v_2))$$

Распишем по линейности скалярного произведения и вынесем за скобки всё, зависящее только от  $v_2$ :

$$\dots = \sum_{v_2 \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(v_2 \oplus u_2), u_1 \rangle \oplus \psi(v_2) \oplus \psi(v_2 \oplus u_2)) \sum_{v_1 \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(v_2 \oplus u_2) \oplus \pi(v_2), v_1 \rangle)$$

Из свойств функции Волша знаем, что

$$\sum_{v_1 \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(v_2 \oplus u_2) \oplus \pi(v_2), v_1 \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{если } \pi(v_2 \oplus u_2) \oplus \pi(v_2) \neq 0 \iff u_2 \neq 0 \\ 2^n & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда можем переписать сумму как

$$\dots = 2^n \cdot \begin{cases} 0 & \text{если } u_2 \neq 0 \\ \sum_{v_2 \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(v_2), u_1 \rangle \oplus \underbrace{\psi(v_2) \oplus \psi(v_2)}_{=0}) & \text{если } u_2 = 0 \end{cases}$$

Тогда, из тех же соображений, можем записать

$$W_{D_u f}(0) = \begin{cases} 0 & u \neq 0 \\ 2^{2n} & u = 0 \end{cases}$$

Это доказывает условие критерия Ротхауза и завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Определение 6.13.** Класс функций, построенных по теореме выше, называется классом Мэйорана — Мак-Фарланда и обозначается  $\mathcal{M}$ .

**Утверждение 6.5.**  $|\mathcal{M}| = (2^n)! \cdot 2^{2^n}$

*Доказательство.* Любая функция из  $\mathcal{M}$  однозначно задается соответствующими  $\pi$  и  $\psi$ . Пусть существует  $\pi_1, \pi_2$  и  $\psi_1, \psi_2$ , такие, что

$$\langle \pi_1(y), x \rangle \oplus \psi_1(y) \equiv \langle \pi_2(y), x \rangle \oplus \psi_2(y)$$

тогда

$$\langle \pi_1(y) \oplus \pi_2(y), x \rangle \equiv \psi_1(y) \oplus \psi_2(y)$$

Но левая часть зависит от  $x$ , а правая не зависит, положив  $x = 0$  получаем  $\psi_1 \equiv \psi_2$  и тогда сразу  $\pi_1 \equiv \pi_2$ .  $\square$

**Утверждение 6.6.** Пусть  $f(x, y) = \langle \pi(y), x \rangle \oplus \psi(y)$ . Тогда

$$\tilde{f}(x, y) = \langle y, \pi^{-1}(x) \rangle \oplus \psi(\pi^{-1}(x))$$

для  $x, y \in \{0, 1\}^n$

*Доказательство.* Нужно проверить  $W_f(\alpha) = 2^n(-1)^{\tilde{f}(\alpha)}$ :

$$W_f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{x, y \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(y), x \rangle \oplus \psi(y) \oplus \langle \alpha_1, x \rangle \oplus \langle \alpha_2, y \rangle) = \sum_{y \in \{0,1\}^n} \exp(\psi(y) \oplus \langle \alpha_2, y \rangle) \sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(y) \oplus \alpha_1, x \rangle)$$

По свойству функции Волша

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \exp(\langle \pi(y) \oplus \alpha_1, x \rangle) = \begin{cases} 2^n & \pi(y) = \alpha_1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда в итоге получаем

$$W_f(\alpha) = 2^n \exp(\langle \alpha_2, \pi^{-1}(\alpha_1) \rangle \oplus \psi(\pi^{-1}(\alpha_1))) = 2^n \exp(\tilde{f}(\alpha))$$

$\square$

**Утверждение 6.7.** На множестве  $\mathcal{F}_{2n}$  существуют бент-функции степеней  $2, 3, \dots, n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $f(x, y) = \langle \pi(y), x \rangle \oplus \psi(y)$ .

Второе слагаемое зависит только от  $y$ . Пусть  $\forall y: \pi(y) = y$ . Тогда

$$f(x, y) = x_1 y_1 \oplus \dots \oplus x_n y_n \oplus \psi(y)$$

$\deg(\psi) \in \{0, \dots, n\}$ , кроме того, он не содержит мономов  $x_i y_i$ , то есть, коэффициенты при них в  $f$  равны 1. Тогда  $\deg f \in \{2, \dots, n\}$ .  $\square$



### 6.4.5 Частично бент-функции

**Определение 6.14.** Обозначим  $N\Delta_f = |\text{Supp } \Delta_f| = |\{u \in \{0, 1\}^n : \Delta_f(u) \neq 0\}|$   
 $NW_f = |\text{Supp } W_f| = |\{u \in \{0, 1\}^n : W_f(u) \neq 0\}|$

**Утверждение 6.8.**  $\forall f \in \mathcal{F}_n : N\Delta_f \cdot NW_f \geq 2^n$

**Определение 6.15.** Назовём функцию  $f \in \mathcal{F}_n$  частично бент-функцией, если  $N\Delta_f \cdot NW_f = 2^n$

**Теорема 6.9.** Следующие условия равносильны

1.  $f$  — частично бент-функция
2.  $\exists t \in \{0, 1\}^n$  такое, что  $\forall u \in \{0, 1\}^n : \Delta_f(u) \in \{0, (-1)^{\langle t, u \rangle} 2^n\}$
3.  $\{0, 1\}^n = E \oplus E'$  — ортогональная прямая сумма.  $f(x + y) = g(x) + h(y)$ ,  $x \in E$ ,  $y \in E'$  при этом  $g$  — аффинная функция, а  $h$  — бент-функция (тогда  $\dim E'$  чётно)

## 6.5 Неравенство Зигенталера

**Определение 6.16.** Функция  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  называется  $m$ -устойчивой, если для любых  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$  и любых  $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$  функция, полученная из  $f$  сужением на множество  $\{x : x_{i_k} = a_k\}$  уравновешенна.

Произвольную функцию из  $\mathcal{F}_n$  назовём  $(-1)$ -устойчивой.

**Определение 6.17.** Пусть  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ .  $f$  называется корреляционно-имунной порядка  $m$ , если для любых  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$  выполнено

$$w(f_{i_1, \dots, i_m}^{a_1, \dots, a_m}) = \frac{w(f)}{2^m}$$

**Утверждение 6.9.** Верны следующие утверждения:

1.  $f$  корреляционно имунна порядка  $m \iff \forall u \in \{0, 1\}^n : wt(u) \in \{1, \dots, m\} \implies W_f(u) = 0$
2.  $f$   $m$ -устойчива  $\iff \forall u \in \{0, 1\}^n : wt(u) \in \{0, \dots, m\} W_f(u) = 0$

**Определение 6.18.** Обозначим  $\text{cor } m = \max\{m : f \text{ корреляционно-имунна порядка } m\}$

$$\text{sut } f = \begin{cases} \text{cor } f & \text{если } f \text{ уравновешенна} \\ -1 & \text{иначе} \end{cases}$$

**Замечание 6.6.** Пусть  $f \in \mathcal{F}_n$ . Тогда  $\deg f = n \iff wt(f)$  нечетен

*Доказательство.*  $g(u) = \bigoplus_{\substack{x \leq u \\ x \in \{0, 1\}^n}} f(x)$

Заметим, что  $wt(f) \bmod 2 = g(\mathbf{1})$ . Заметим, что  $g(\mathbf{1}) = 1 \iff \deg f = n$ . □

**Теорема 6.10** (неравенство Зигенталера).  $\forall f \in \mathcal{F}_n : \deg f + \text{cor } f \leq n$  и  $0 \leq \text{sut } f \leq n - 2 \implies \deg f + \text{sut } f \leq n - 1$