



TESI DI LAUREA TRIENNALE

ANYONS

PARTICELLE QUANTISTICHE CON STATISTICA FRAZIONARIA

RELATORE:
PROF. VINCENZO ALBA

CANDIDATO:
VALERIO CAPORIONI

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

INDICE

1	Indistinguibilità in 3D	2
1.1	La rappresentazione proiettiva di S_2	2
1.2	Regole di superselezione	3
1.3	Perché proprio S_N ?	4
1.4	Fermioni, Bosoni e nulla più	8
2	Indistinguibilità in 2D ed Anyons	9
2.1	Il gruppo B_2	10
2.2	I gruppi B_N	11
2.2.1	Anyons abeliani	12
2.2.2	Anyons non-abeliani	13
2.3	Fusione di anyons	14
2.3.1	Fusione di anyons abeliani	14
2.3.2	Fusione di anyons non-abeliani	15
3	Introduzione alle fasi topologiche	16
3.1	Polidromia delle funzioni d'onda	16
3.2	Le fasi nella formulazione dell'integrale sui cammini	17
3.3	Modello a tubo di flusso	21
3.4	Superamento del postulato di simmetrizzazione	22
3.5	Esempio: particella libera su una circonferenza	23
3.5.1	Cyons	25
4	Due anyons interagenti armonicamente	25
5	Ritorno al mondo reale	27
5.1	Ma gli anyons esistono?	27
5.2	E se esistono, a cosa servono?	28

Sappiamo bene che esistono solo due specie di particelle quantistiche – bosoni e fermioni – ciascuna delle quali risulta indissolubilmente legata alla propria statistica. In questo capitolo mostreremo però che questa dicotomia, vera nel mondo tridimensionale, viene a cadere in un dominio bidimensionale. Qui troviamo infatti un'infinità di specie di particelle, ciascuna con un comportamento intermedio tra i due noti. Dimostriamo in questa sede l'esistenza di statistiche frazionarie, richiamando più volte il ruolo fondamentale della topologia, e per finire menzioneremo il motivo per cui questo campo di studio sia tutt'altro che un puro divertimento teorico.

1 INDISTINGUIBILITÀ IN 3D

Consideriamo, come nel Cap. 13, lo **scambio di due particelle** quantistiche. Aniché trattare il caso generale ad N oggetti, ci concentreremo sul caso $N = 2$, che oltre ad essere il più semplice è anche quello fondamentale, in quanto ogni permutazione di N oggetti è scomponibile in una composizione di scambi tra due elementi.

1.1 La rappresentazione proiettiva di S_2

Nel Cap. 13 abbiamo introdotto il **gruppo delle permutazioni** di due oggetti, ovvero il **gruppo simmetrico** $S_2 = \{e, g\}$, per cui valgono le leggi di composizione

$$ee = e \quad eg = ge = g \quad gg = e \quad (1)$$

e ne abbiamo dato, in termini di operatori sullo spazio di Hilbert degli stati \mathcal{H} , una rappresentazione **ordinaria**:

$$\mathcal{R}(S_2) = \{\mathbb{1}, \hat{\Pi}\}$$

Utilizzando questa rappresentazione, abbiamo scritto ad esempio

$$\hat{\Pi}^2 = \mathbb{1}$$

e dedotto che gli autovalori di $\hat{\Pi}$ sono ± 1 . Come possiamo intuire, le conseguenze di imporre una rappresentazione operatoriale ordinaria di S_2 sono molto rilevanti. Tuttavia, questa imposizione è piuttosto forte: sappiamo che lo spazio di Hilbert è **proiettivo**, ovvero $|\psi\rangle$ e $e^{i\phi}|\psi\rangle$, con $\phi \in \mathbb{R}$ sono due stati fisicamente equivalenti. Pertanto vorremmo fare un passo indietro: è lecito e consigliato iniziare cercando una rappresentazione operatoriale di S_2 che sia, più in generale, di tipo proiettivo. Allora, al posto dell'equazione

$$\hat{\Pi}_{12} |\alpha\rangle |\beta\rangle = |\beta\rangle |\alpha\rangle$$

relativa alla permutazione di due particelle, scriveremo

$$\hat{\Pi} |a\rangle |b\rangle = e^{i\phi(|a\rangle|b\rangle)} |b\rangle |a\rangle \quad (2)$$

ove la fase moltiplicativa dipende dallo stato $|a\rangle |b\rangle$.

Ricordiamo che imporre l'**indistinguibilità** in Meccanica Quantistica equivale a postulare una restrizione sulle osservabili: per ogni operatore legato ad una buona osservabile deve valere l'equazione

$$\langle \psi' | \hat{O} | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \quad (3)$$

riportata non solo nel Cap. 13, ma anche nel Cap. 8 nell'ambito delle rotazioni. In tale occasione, non abbiamo potuto mancare di notare l'indizio di un forte legame tra rotazioni e permutazioni, nonostante le differenze fondamentali tra questi due tipi di trasformazione. In questa sede proponiamo di approfondire il **legame tra spin e statistica** nell'ambito della Meccanica Quantistica non-relativistica. Possiamo fare riferimento al Cap. 8: i ragionamenti applicati con $\hat{R}_{2\pi}$ sono analoghi a quelli che, in questo caso, dobbiamo invece eseguire con $\hat{\Pi}$. In particolare, lì è dimostrato come l'imposizione della (3) sia equivalente non solo a richiedere che ogni operatore \hat{O} legato ad una buona osservabile commuti con $\hat{\Pi}$:

$$[\hat{\Pi}, \hat{O}] = 0$$

ma anche che, per ogni **stato realizzabile**, valga la relazione

$$\hat{\Pi} |\psi\rangle = e^{i\phi(|\psi\rangle)} |\psi\rangle \quad (4)$$

dove la fase può dipendere dallo stato $|\psi\rangle$, o per meglio dire dal *raggio* di stati relativo al *ket* $|\psi\rangle$. Questa equazione è analoga alla condizione di realizzabilità dei raggi del Cap. 8.

Confrontando le equazioni (4) e (2), troviamo che sotto l'ipotesi di indistinguibilità vale

$$|a\rangle |b\rangle = |b\rangle |a\rangle$$

dove $|a\rangle$, $|b\rangle$ sono stati di singola particella. In altri termini, come anticipato nel Cap. 13, possiamo unire i *ket* e affermare che per due particelle identiche

$$|a, b\rangle = |b, a\rangle$$

cioè non importa l'ordinamento dei numeri quantici nel *ket*, fintantoché le loro posizioni indicano una precisa particella¹. Nella pratica, questo equivale a sostenere che particelle indistinguibili non sono "etichettabili".

1.2 Regole di superselezione

Gli stati realizzabili sono sfasati con fasi in generale diverse. Consideriamo due raggi, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, che trasformano sotto scambio con fasi diverse

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} |\psi_1\rangle &= e^{i\phi_1} |\psi_1\rangle \\ \hat{\Pi} |\psi_2\rangle &= e^{i\phi_2} |\psi_2\rangle \end{aligned}$$

dove $\phi_1 \neq \phi_2$. Definiamo come $|s\rangle$ la generica sovrapposizione lineare di $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$. Evidentemente, questo stato non verifica la condizione di realizzabilità:

$$\hat{\Pi} |s\rangle \neq e^{i\phi} |s\rangle \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$$

Ciò implica che esiste una **regola di superselezione**: essa esclude la realizzabilità di sovrapposizioni lineari tra stati che trasformano con fasi diverse sotto lo scambio $\hat{\Pi}$.

I vari sottospazi \mathcal{H}_{ϕ_k} che trasformano la medesima fase ϕ_k , ovvero condividono la stessa statistica, generano tutti assieme l'intero \mathcal{H} e sono ortogonali tra loro, quindi

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{\phi_k}$$

Dimostrazione. Con $\phi_i \neq \phi_j$, consideriamo $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_j\rangle$. Usando l'unitarietà di $\hat{\Pi}$, per cui $\hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} = \mathbb{1}$, vale

$$\begin{aligned} \langle \psi_i | \psi_j \rangle &= \langle \psi_i | \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} | \psi_j \rangle \\ &= \underbrace{e^{i(\phi_j - \phi_i)}}_{\neq 1} \langle \psi_i | \psi_j \rangle \end{aligned}$$

Eppure, come evidenziato,

$$e^{i(\phi_j - \phi_i)} \neq 1$$

dal momento che per ipotesi abbiamo posto $\phi_i \neq \phi_j$. Ne consegue che

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = 0$$

□

Le regole di superselezione impongono delle restrizioni sugli stati realizzabili in \mathcal{H} , quindi

$$\mathcal{H}_{\text{real}} = \bigcup_k \mathcal{H}_{\phi_k}$$

Con $\mathcal{H}_{\text{real}}$ indichiamo non tutto lo spazio di Hilbert, ma solamente lo spazio "realizzabile", cioè lo spazio entro cui abbia senso fisico eseguire delle sovrapposizioni. Notiamo infatti che la nozione di unione insiemistica non ammette sovrapposizioni tra sottospazi \mathcal{H}_{ϕ_1} e \mathcal{H}_{ϕ_2} con $\phi_1 \neq \phi_2$.

1.3 Perché proprio S_N ?

Non è privo di fondamento chiedere perché il gruppo relativo allo scambio di N particelle sia S_N , cioè il gruppo delle permutazioni di N oggetti. Potremmo pensare, dopotutto, che scambiare degli oggetti sia per definizione equivalente a effettuare una permutazione; eppure, *a priori* e in generale, questo non è affatto vero! La permutazione è infatti descrittiva del solo *risultato* dello scambio, ma non di come esso avviene nel tempo, cioè *trascura completamente l'evoluzione temporale*. Dobbiamo a questo punto chiederci *come si realizza lo scambio* di due particelle in $(3+1)\text{D}$, ove la dimensione aggiuntiva è ovviamente quella temporale.

Partiamo considerando due particelle classiche, modellizzate come punti materiali. Basta supporre che sia impossibile far loro condividere le stesse 4 coordinate, cioè posizionarle nello stesso luogo nel medesimo istante di tempo (ipotesi di **durezza**²), per avere salva la distinguibilità: la particella 1 e la

particella 2 saranno pure del tutto identiche, ma essendo possibile tracciare le rispettive linee orarie non intersecanti, le due particelle classiche risulteranno sempre distinguibili. Pertanto, riferendoci alle Fig. 1 e 2, possiamo a buon diritto chiamare 1 la particella che va da A_i a A_f , mentre 2 la sua compagna che viaggia da B_i a B_f .

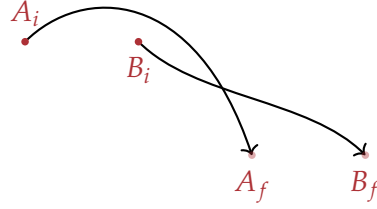


Figura 1: Due particelle classiche seguono traiettorie ben definite. Il moto avviene in 3D ed è parametrizzato dal tempo, ma ne disegniamo una proiezione sulla pagina. Anche sotto l'ipotesi di non avere *overlapping* a nessun tempo, potrebbero esserci delle intersezioni non illusorie (cioè non dovute alla proiezione) tra le due traiettorie, ma mai tra le due linee orarie. Infatti, i passaggi per le eventuali coordinate di intersezione devono avvenire in tempi sempre differenti per la particella 1 e la particella 2. In altri termini, se illustrassimo il moto nello spazio $(3+1)$ dimensionale in cui dimorano le linee orarie, con tre coordinate spaziali e una temporale, in tale spazio non vedremmo nessuna intersezione. Alla luce di questo, capiamo come le eventuali intersezioni nelle traiettorie siano dovute alla proiezione delle linee orarie sulle sole dimensioni spaziali. Nella Figura successiva possiamo rendere più chiaro quanto sta accadendo.

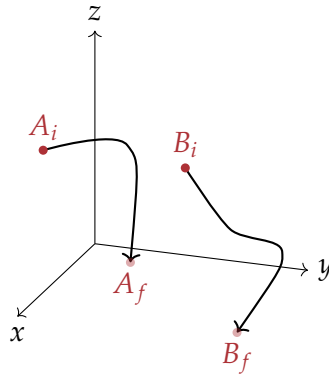


Figura 2: Questa Figura serve a chiarire quella precedente. Il tempo rimane un parametro, al variare del quale i due punti materiali corrono lungo le rispettive traiettorie.

Lo scambio si realizza nel caso in cui la posizione finale di una coincide con la posizione iniziale dell'altra

$$A_f = B_i \quad B_f = A_i$$

mentre l'identità si realizza quando le particelle tornano alle rispettive posizioni iniziali

$$A_f = A_i \quad B_f = B_i$$

Non è difficile intuire che le due evoluzioni non sono equivalenti a livello topologico: i percorsi dell'identità sono topologicamente equivalenti a due circuiti chiusi, mentre lo scambio a due semi-circuiti che, uniti, compongono un unico circuito chiuso.

Nel mondo quanto-meccanico le particelle non sono altrettanto docili: il concetto di traiettoria di cui ci siamo avvalsi nella Meccanica Classica non sopravvive. Accorre però in nostro aiuto la formulazione del **Path Integral**, in cui abbiamo visto come sia possibile riportare alla luce non più *una*, ma innumerevoli traiettorie, cioè *tutte quelle permesse*. Disegneremo allora tutte le possibili traiettorie a meno di omotopia, cioè di deformazione continua, per trovare tutte le **classi di equivalenza**. Possiamo a questo livello trattare le particelle in maniera *pseudo-classica*, ovvero come se fossero distinguibili: nell'eseguire il Path Integral, dopo, dovremo sommare su tutte le possibilità. Questo è un buon modo per comprendere il significato dell'indistinguibilità quantistica: dopo aver eseguito l'integrazione, non ha senso cercare di chiamare rispettivamente 1 e 2 le particelle, poiché non riusciremmo a capire in alcun modo se lo scambio sia avvenuto o no. L'evoluzione temporale ammette entrambe le possibilità, scambio e non-scambio, e nell'integrale di Feynman abbiamo sommato su ambo gli avvenimenti possibili. Il tentativo di distinzione risulterebbe dunque vano: come analogia possiamo notare che, partendo da una distribuzione $f(x_k)$ e integrando sulla variabile x_i , otteniamo

$$f(x_j) = \int_{D(x_i)} f(x'_k) dx'_i \quad \text{con } j \neq i$$

e non ha alcun senso chiedere quale sia, ad esempio, il valor medio di x_i sulla distribuzione $f(x_j)$, dal momento che questa non ha (più) alcuna dipendenza da x_i .

Per trovare il numero di statistiche permesse in d dimensioni spaziali, è necessario studiare le proprietà topologiche di $M_N^{(d)}$: lo **spazio delle configurazioni** di un sistema di N particelle. Senza perdere di generalità, possiamo analizzare il caso $N = 2$.

Iniziamo da $d = 3$. In tre dimensioni, effettuando delle deformazioni continue sulle traiettorie, ogni modo di unire due punti di partenza (A_i, B_i) a due punti di arrivo (A_f, B_f) ricade in una di due classi $[e], [g]$: se chiamiamo γ una possibile evoluzione, cioè una possibile coppia di traiettorie, allora

$$\gamma \in [e] \quad \text{altrimenti} \quad \gamma \in [g]$$

Nella classe $[g]$ avviene effettivamente lo scambio, ma non nella classe $[e]$ dei cammini detti *diretti*. Riportiamo in Fig. 3 una rappresentazione schematica delle due classi.

Le traiettorie possono anche "concatenarsi", e questo non cambia il risultato: per $d = 3$ il concetto di avvolgimento non risulta ben definito. Per convincersene analizziamo le proprietà dei cammini chiusi – o *loop* – in $M_2^{(3)}$.

L'intera traiettoria seguita da una delle due particelle è rimovibile da \mathbb{R}^3 effettuando un buco Ω' nello spazio tridimensionale. Risulta comodo porsi preventivamente nel sistema di riferimento $\Sigma^{(i)}$ solidale alla particella i -



Figura 3: Due classi di equivalenza esauriscono i possibili percorsi. A sinistra vediamo la classe $[e]$, mentre a destra $[g]$. Per quanto riguarda una eventuale intersezione in $[g]$, vale lo stesso discorso della Fig. 1.

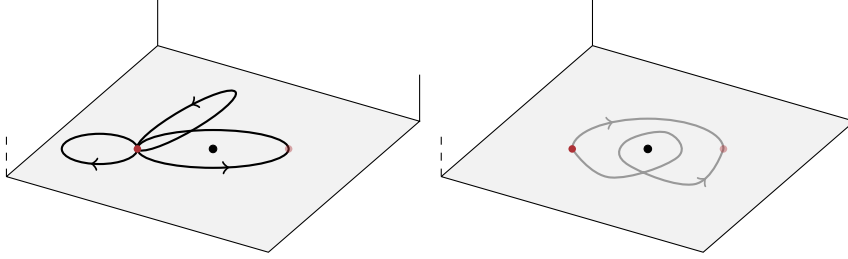


Figura 4: Tenendo fissa una particella in \bullet , muoviamo l'altra. I punti antipodali come \bullet e \bullet sono identificati. Costruiamo in questo modo lo spazio delle configurazioni. I cammini dello stesso colore sono omotopicamente equivalenti, mentre i neri non lo sono ai grigi. Associamo i loop rispettivamente alle classi $[e]$ e $[g]$.

esima e rimuovere da \mathbb{R}^3 la traiettoria seguita dalla particella i -esima, che in $\Sigma^{(i)}$ è banale, ridotta al punto d'origine. In $\Sigma^{(i)}$, il buco Ω è puntiforme, e l'altra particella potrà sviluppare la sua traiettoria in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Dobbiamo però tenere conto dell'indistinguibilità propria delle particelle identiche, quindi lo spazio delle configurazioni diventa

$$M_2^{(3)} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}{S_2}$$

dove quozientare S_2 corrisponde ad identificare punti antipodali rispetto ad Ω . Lo spazio $M_2^{(3)}$ è **non semplicemente connesso**: i loop appartengono ad una tra **due classi di equivalenza**. Inoltre, componendo due cammini di classe $[g]$ otteniamo un cammino equivalente a quello banale. Si guardi in merito la Fig. 4.

Mostriamo in questo modo che il gruppo fondamentale di $M_2^{(3)}$ è

$$\pi_1(M_2^{(3)}) = S_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \quad (5)$$

ove \simeq indica un isomorfismo; ciò significa che \mathbb{Z}_2 è il gruppo fondamentale dello spazio delle configurazioni $M_2^{(3)}$. In generale, per N particelle avremo

$$\pi_1(M_N^{(3)}) = S_N$$

Questo rispecchia la composizione grupale delle classi di equivalenza per le evoluzioni nello spazio delle configurazioni, elementi di $\pi_1(M_N^{(3)})$.

Mancando la definizione di *winding number*, rimane possibile soltanto la descrizione del risultato di uno scambio, ma non quella del suo svolgimento nel tempo. Da ciò segue che, per dimensioni ≥ 3 , l'operazione di scambio tra N particelle sia legata al gruppo delle permutazioni S_N .

1.4 Fermioni, Bosoni e nulla più

Una volta raggiunto il risultato (5), per trattare lo scambio di particelle cerchiamo su \mathcal{H} una rappresentazione operatoriale proiettiva del gruppo \mathbb{Z}_2 . Se la cerchiamo solamente proiettiva, possiamo considerare

$$\mathcal{R}(\mathbb{Z}_2) = \{e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}\} \quad \text{con} \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$$

dove si sottintende, ovviamente, l'operatore $\mathbb{1}$ a moltiplicare. Tuttavia, possiamo facilmente dare una rappresentazione ordinaria:

$$\mathcal{R}(\mathbb{Z}_2) = \{+1, -1\}$$

Per scambio di due particelle in 3D abbiamo quindi

$$\hat{\Pi}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$$

dove il segno $+$ corrisponde a stati bosonici, il $-$ a stati fermionici. Possiamo definire lo **spin** s come

$$s = \frac{\phi}{2\pi}$$

quindi abbiamo

$$\hat{\Pi}|\psi\rangle = e^{i2\pi s}|\psi\rangle$$

Definiamo θ come **angolo statistico**

$$\theta = \phi \mod 2\pi$$

ove il modulo serve ad eliminare le ridondanze legate alla periodicità, e definiamo anche il **numero di statistica** ω , che è semplicemente l'angolo statistico espresso in unità di π :

$$\omega = \frac{\theta}{\pi} = \frac{\phi}{\pi} \mod 2$$

Possiamo legare spin e numero di statistica con la relazione

$$\omega = 2s \mod 2 \tag{6}$$

Se le fasi possono essere solo ± 1 , allora gli spin possono essere solo interi o semi-interi³ e questo porta ad avere solo due statistiche: quella bosonica e quella fermionica

$$\mathbb{U} = \{0, 1\}$$

Abbiamo scoperto che nel nostro mondo tridimensionale, la zoologia delle particelle è non banale, perché abbiamo due statistiche differenti. Eppure, possiamo renderci conto di come questa biodiversità sia ampiamente sovrastata da quella di un mondo che, in termini dimensionali, è *più piatto* del nostro.

2 INDISTINGUIBILITÀ IN 2D ED ANYONS

Hic sunt aniones...

Jericho Resosco, De Re Quantistica

Come abbiamo visto, lavorando in uno spazio di Hilbert proiettivo, per analizzare lo scambio di 2 particelle partiamo con lo scrivere l'equazione (4):

$$\hat{\Pi}|\psi\rangle = e^{i\phi(|\psi\rangle)}|\psi\rangle$$

Per $d = 3$ abbiamo cercato una rappresentazione unidimensionale di S_2 , poiché, come abbiamo in seguito verificato, vale la (5):

$$\pi_1(M_2^{(3)}) = S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$$

Ora, con meno temerità, controlliamo immediatamente quale sia $\pi_1(M_2^{(2)})$, il gruppo fondamentale dello spazio delle configurazioni relativo allo scambio di due particelle per $d = 2$

$$M_2^{(2)} = (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega) / S_2 \quad (7)$$

Di nuovo, i punti antipodali sono identificati.

Anche $M_2^{(2)}$ è **connesso in modo non semplice**, tuttavia le **classi di equivalenza** dei loop sono **infinite**, dunque $\pi_1(M_2^{(2)})$ non è un gruppo finito.

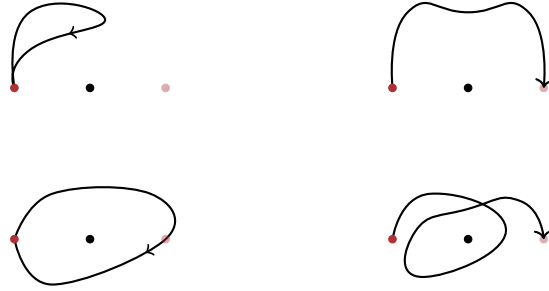


Figura 5: Alcuni loop possibili nello spazio delle configurazioni $M_2^{(2)}$, tutti appartenenti a classi di omotopia diverse.

In Fig. 5, il tempo è ancora un parametro. I punti antipodali come \bullet e \bullet sono sempre identificati. La particella in moto passa per le illusorie intersezioni in tempi diversi, mentre l'altra è ferma: ci siamo posti nel suo sistema di riferimento. Fig. 5 è l'analogo della Fig. 4, solo per $d = 2$. Possiamo muovere la prima particella attorno a quella ferma, che indichiamo con \bullet , e farla tornare al proprio posto, senza compiere un giro attorno all'altra; possiamo portarla da un punto a un altro del piano, sempre senza effettuare giri; è poi possibile tornare al punto di partenza chiudendo \bullet in un solo loop, oppure partire e terminare la traiettoria in una posizioni diversa effettuando un giro attorno ad essa, e così via. Abbiamo anche libertà sulla scelta del senso –

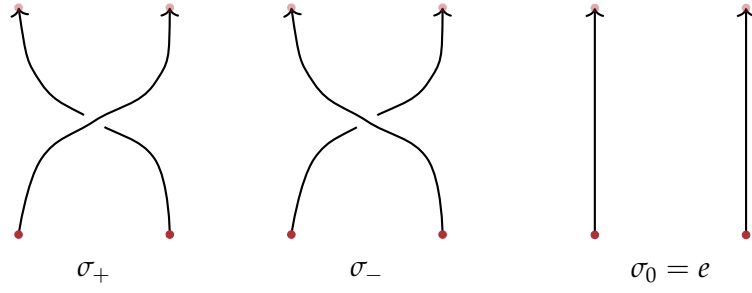


Figura 6: A sinistra, σ_+ costituisce l'unico generatore del gruppo B_2 . Il suo inverso σ_- è disegnato al centro. Chiaramente $\sigma_+^k \sigma_-^k = \sigma_0$

orario o antiorario – degli avvolgimenti. Nel caso $d = 3$, ogni avvolgimento può essere sciolto, e l'unica distinzione possibile tra cammini chiusi risiede nel fatto che alcuni sono chiusi attraverso punti antipodali, mentre altri no. Per $d = 2$ non vale solamente questo, ma anche il numero di giri o *winding number* risulta ben definito.

Già dalla Figura 5, se sviluppiamo il tempo come coordinata, possiamo intuire il gruppo fondamentale di $M_2^{(2)}$: è il **gruppo delle 2-trecce** o **gruppo B_2 di Artin**. Ricordando che ci siamo posti nel sistema di riferimento di una delle due particelle⁴.

$$\pi_1(M_2^{(2)}) = B_2 \simeq \mathbb{Z}$$

2.1 Il gruppo B_2

Il gruppo B_N , considerando uno spazio $(2 + 1)$ dimensionale in cui una dimensione è temporale, può essere rappresentato graficamente dalle trecce costruite con N fili. In modo più formale, i fili rappresentano le linee orarie relative alle N particelle considerate. La loro proiezione sulle due dimensioni spaziali ci permette invece di guardare le loro varie traiettorie. Siccome una coordinata è quella temporale, non si può tornare indietro per “annodare” un filo a un altro. Dall'ipotesi di durezza consegue che i fili non possono intersecarsi, inoltre i punti iniziali devono corrispondere ad altrettanti punti finali: vige una legge di conservazione del numero di fili, che non possono crearsi né distruggersi in mezzo alla trama. Consideriamo le trecce come classi di equivalenza, quindi ciascuna di esse rappresenta anche tutte le possibili evoluzioni che le sono omotopicamente equivalenti nello spazio $(2 + 1)$ dimensionale. I gruppi di Artin ad $N \geq 3$ trecce, indicati con B_N , **non sono commutativi**, mentre B_2 è abeliano. Il generatore di B_2 è il solo σ_+ : con questo e con il suo elemento inverso σ_- è possibile costruire l'intero gruppo. Le regole di composizione tra elementi di B_2 sono semplici

$$\sigma_+^m \sigma_-^n = \begin{cases} \sigma_+^{m-n} & \text{se } m > n \\ \sigma_-^{n-m} & \text{se } n > m \\ \sigma_0 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Comporre una treccia con un'altra significa far coincidere i punti finali della prima con i punti iniziali della seconda, considerando i punti iniziali della

prima e i punti finali della seconda come punti iniziali e finali della treccia complessiva.

Il gruppo B_2 risulta isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$, o più brevemente \mathbb{Z} , il gruppo dei numeri interi. Questo colloca B_2 , ma più in generale tutti i gruppi di Artin B_N , al di fuori dei gruppi finiti, ed è l'immediata conseguenza del fatto che, al contrario di quanto avviene per le permutazioni di due elementi in S_2 , un doppio scambio non porta all'identità: $\sigma_+^2 \neq \sigma_0$. Cerchiamo dunque una rappresentazione unidimensionale del gruppo B_2 in termini di fasi, aiutati dal prezioso isomorfismo con \mathbb{Z} . Se considerassimo \mathbb{Z}_n , un'ovvia rappresentazione ordinaria sarebbe costituita dalle n radici n -esime dell'unità:

$$\mathcal{R}(\mathbb{Z}_n) = \left\{ e^{i2\pi k/n} \mid k = 0, 1, \dots, (n-1) \right\}$$

e ciò corrisponde precisamente a quanto abbiamo scritto per il caso tridimensionale, relativo a $n = 2$. Adesso dobbiamo considerare \mathbb{Z} , quindi euristicamente è lecito immaginare che una rappresentazione ordinaria sia

$$\mathcal{R}(\mathbb{Z}) = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i2\pi k/n} \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

ove il limite non è inteso come eseguito a k fissato, bensì con k libero di variare in \mathbb{N}_0 . Sotto uno scambio antiorario, corrispondente all'elemento $\sigma_+ \in B_2$, lo stato $|\psi\rangle$ acquista una fase $e^{i\phi}$

$$|\psi\rangle \longrightarrow e^{i\phi} |\psi\rangle$$

ma è chiaro che adesso diventano accessibili tutte le fasi $e^{i\phi}$ con ϕ multiplo razionale non negativo di 2π . Seguendo la definizione di spin $s = \phi/(2\pi)$, ovviamente inteso nel senso di modulo, deriva che per $d = 2$ sono validi tutti gli spin razionali non negativi. Inoltre, come nel caso $d = 3$, la stessa statistica corrisponde a molti spin differenti. Siccome vale

$$\omega = \frac{\phi}{\pi} \pmod{2}$$

l'insieme dei numeri statistici è in questo caso molto più ricco

$$\mathcal{U}_{2D} = \{x \in \mathbb{Q} \text{ con } 0 \leq x < 2\}$$

da cui la denominazione *anyons* data a questi oggetti da Wilczek⁵: **il loro angolo statistico è estremamente libero**, può essere (quasi) qualunque angolo compreso tra 0 e 2π .

Così come nel caso $d = 3$ uno stato può essere solo fermionico o bosonico, anche adesso, benché abbiamo a disposizione un'infinità di numeri statistici intermedi, ciascuno stato risulta legato in modo univoco al proprio numero ω_{ab} , dove il pedice esprime la dipendenza del numero statistico dalla natura delle due particelle a e b .

2.2 I gruppi B_N

In generale, per N particelle che dimorano in due dimensioni spaziali dobbiamo considerare il gruppo di Artin B_N . Esso ha $N - 1$ generatori $\sigma_k : k =$

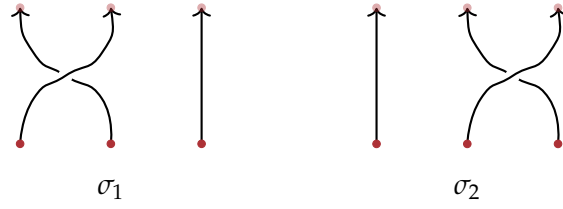


Figura 7: σ_1 e σ_2 sono i due generatori del gruppo B_3 .

$1, \dots, N-1$, ciascuno dei quali corrisponde all'intreccio tra il filo k -esimo e quello successivo in senso antiorario: il secondo passa "dietro" a quello che lo precede.

La composizione gruppale è analoga a quella vista nel caso di B_2 : il risultato corrisponde a disegnare una treccia dopo l'altra, come osserviamo in Fig. 8.

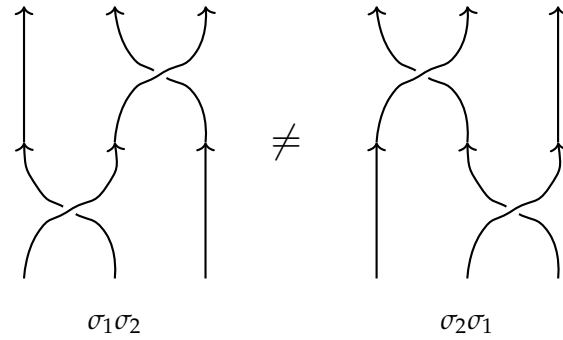


Figura 8: In B_3 , i primi esempi di composizione che ci vengono alla mente sono $\sigma_1 \sigma_2$ e $\sigma_2 \sigma_1$. Evidentemente $\sigma_1 \sigma_2 \neq \sigma_2 \sigma_1$: come anticipato, il gruppo non è abeliano.

Sempre nella stessa figura, notiamo che il gruppo B_3 , e più in generale B_N con $N \geq 3$, non è abeliano. Valgono tuttavia le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sigma_n \sigma_m = \sigma_m \sigma_n \quad \forall m, n : |m - n| > 1 \\ \text{(ii)} \quad & \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \end{aligned} \tag{8}$$

La proprietà (i) può essere spiegata intuitivamente, oltre che generalizzata, pensando che due trecce commutano quando interessano fili diversi una dall'altra, mentre per la (ii), chiamata Relazione di Yang-Baxter, facciamo riferimento alla Fig. 9.

2.2.1 Anyons abeliani

Possiamo dare una rappresentazione unidimensionale e abeliana del gruppo B_N in termini di fasi, sulla falsariga di quella relativa a B_2 . Sappiamo che B_N non è abeliano, perciò una simile rappresentazione non può essere fedele per $N \geq 3$. Possiamo scrivere il generico elemento $g \in B_N$ come una produttoria – in senso di composizione gruppale – di **scambi ordinati**

$$g = \prod_j \sigma_{k_j}^{\alpha_j} \quad : \quad k_j \in \{1, \dots, N-1\}, \quad \alpha_j = \pm 1 \tag{9}$$

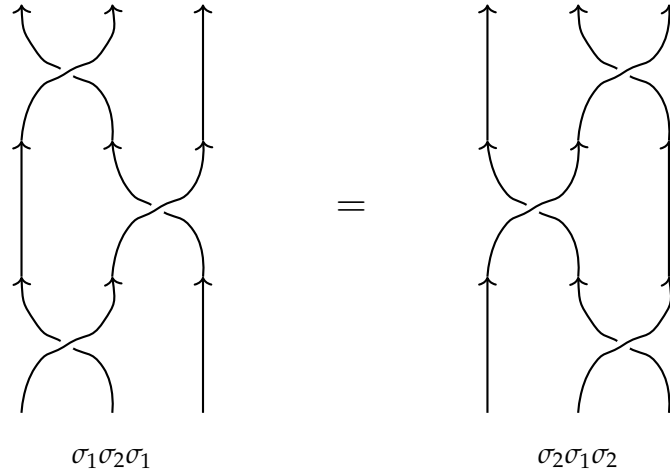


Figura 9: Riportiamo il più semplice esempio di applicazione della proprietà (ii). In B_3 vale l'uguaglianza $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$, e lo si può notare facendo scorrere su e giù i vari fili, senza ovviamente eseguire ulteriori scambi.

e rappresentarlo come prodotto di fasi

$$\mathcal{R}(g) = \prod_j e^{i\alpha_j \pi \omega_{k_j}} = \exp \left(i\pi \sum_j \alpha_j \omega_{k_j} \right) \quad (10)$$

dove k_j individua la coppia di fili da scambiare, $\alpha_j = \pm 1$ indica il verso rispettivamente antiorario ed orario dello scambio, mentre il numero statistico ω_{k_j} dipende dalla coppia scambiata.

Ribadiamo che la produttoria di Eq. (9) è ben ordinata, e deve essere tale in modo da distinguere, ad esempio, $\sigma_1 \sigma_2$ da $\sigma_2 \sigma_1$, che come visto sopra non corrispondono allo stesso elemento. Al contrario, nella rappresentazione l'ordinamento è perduto, dato che il prodotto in \mathbb{C} è commutativo: ne consegue che la rappresentazione non è fedele, in accordo con la precisazione precedente. Nella sommatoria di Eq. (10) possiamo dunque raccogliere eventuali termini ripetuti e relativi agli stessi k , trovando

$$\mathcal{R}(g) = \exp \left(i\pi \sum_{k=1}^{N-1} n_k \omega_k \right) \quad (11)$$

Il numero n_k indica solo quanti scambi (antiorari meno orari) sono avvenuti tra la coppia di fili $(k, k+1)$, mentre è persa l'informazione sull'ordine in cui avvengono gli scambi.

2.2.2 Anyons non-abeliani

Esistono tuttavia rappresentazioni non-abeliane di B_N in più dimensioni, a cui corrispondono delle statistiche non-abeliane. Esse si trovano quando, avendo N particelle a posizioni fissate, descriviamo lo stato all'interno di uno spazio di Hilbert degenere \mathcal{H}_n , con degenerazione n . In questo spazio definiamo una base ortonormale di stati $|\psi_a\rangle$, con $a = 1, \dots, n$. Uno stato generico $|\psi\rangle$ si scrive pertanto come

$$|\psi\rangle = \sum_{a=1}^n c_a |\psi_a\rangle \quad (12)$$

Sotto alla trasformazione σ_k , uno stato di base trasforma grazie al rappresentativo di σ_k , che chiamiamo $\rho(\sigma_k)$ ed è una matrice unitaria $n \times n$:

$$|\psi_a\rangle = [\rho(\sigma_k)]_{ab} |\psi_b\rangle$$

sommando sull'indice ripetuto. Il prodotto matriciale di matrici unitarie è in generale non-commutativo, quindi la rappresentazione può essere fedele:

$$g \in B_N \longleftrightarrow \rho(g) \in U(n)$$

In tal caso, utilizzando di nuovo l'esempio ormai noto, avremo

$$[\rho(\sigma_1)]_{ab} [\rho(\sigma_2)]_{bc} \neq [\rho(\sigma_2)]_{ab} [\rho(\sigma_1)]_{bc}$$

in modo che sia riprodotta fedelmente la relazione $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$, e le particelle seguiranno una **statistica non-abeliana**. Potremo quindi scrivere $\rho(g)$ e utilizzarla per trasformare $|\psi\rangle$. A meno che tali matrici non commutino per ogni scambio di particelle, caso in cui la statistica è abeliana, l'intreccio di anyons determina delle trasformazioni unitarie non banali all'interno dello spazio \mathcal{H}_n .

2.3 Fusione di anyons

Un *anyonic system* possiede generalmente anyons che seguono statistiche differenti. Un modo per formare una tipologia diversa di anyon a partire da altri anyons è la **fusione**. Innanzitutto trattiamo la fusione di anyons nel caso più facile, ovvero per sistemi abeliani.

2.3.1 Fusione di anyons abeliani

Consideriamo un sistema con vari anyons abeliani, il cui angolo statistico è θ . Uno stato legato di N anyons di questo tipo possiede un angolo statistico $N^2\theta$. Anche nel caso in cui non esistesse alcuno stato legato stabile di questo genere, possiamo immaginare di portare N anyons abbastanza vicino fra loro e sufficientemente lontano da tutte le altre: a questo punto è lecito approssimarli come una singola particella, i cui numeri quantici si ottengono combinando quelli delle particelle che la compongono, compresi quelli topologici come l'angolo statistico. Conseguentemente, per descrivere il sistema in modo completo è necessario includere anche queste specie di particelle composte. Il motivo per cui ad una composizione di N anyons corrisponda un riscaldamento di N^2 dell'angolo statistico può essere spiegato dal ragionamento riportato sotto alla Fig. 10.

In generale, per anyons abeliani le **regole di fusione** sono piuttosto immediate: dati due stati legati a e b composti rispettivamente da n e k anyons semplici, ciascuno dei quali segue una statistica di angolo θ , possiamo utilizzare un argomento analogo a quello di Fig. 10 per mostrare che la particella costituita dalla fusione $a \times b$ segue una statistica $(n+k)^2\theta$:

$$n^2\theta \times k^2\theta = (n+k)^2\theta \quad (13)$$

In entrambi i casi, abeliano e non-abeliano, si indica con \times l'operazione di fusione tra anyons. Nel caso di anyons abeliani, la statistica risultante da

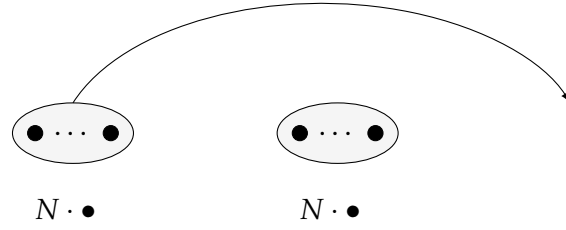


Figura 10: Illustriamo con \bullet il singolo anyon, caratterizzato dall'angolo statistico θ , mentre ne fondiamo N identici con i contorni disegnati. Adesso scambiamo in senso antiorario un anyon composito con un altro oggetto analogo. Questo scambio corrisponde allo scambio di N^2 coppie di anyons singoli: ogni anyon semplice del primo raggruppamento effettua uno scambio antiorario con ogni anyon semplice del secondo, e ciascuna coppia contribuisce alla fase complessiva con un $e^{i\theta}$. Ne consegue che fondendo N anyons con statistica θ si crea un anyon di statistica $N^2\theta$.

una fusione è determinata in modo univoco, nel modo che abbiamo appena osservato.

Per dare un esempio, consideriamo un sistema costituito da anyons abeliani con $\theta = \pi/m$, ove $m \in \mathbb{N}$. Fondendo $n = 2, 3, \dots, (m-1)$ di essi, otteniamo anyons di angolo θ_n . Guidati dalla (13), troviamo $\theta_2 = 4\pi/m$, $\theta_3 = 9\pi/m$, \dots , $\theta_{(m-1)} = (m-1)^2\pi/m$. Dato che l'angolo statistico è definito a meno di un modulo 2π , per m pari si ha $(m-1)^2\pi/m = \pi/m$, mentre per m dispari $(m-1)^2\pi/m = \pi(1 + 1/m)$. Se m è pari, allora $\theta_m = m\pi$, che a meno di multipli di 2π è $\theta_m = 0$. L'anyon con angolo statistico nullo corrisponde a un bosone, ma è anche detto **anyon banale** o **vuoto**. Anche nel caso m dispari, dopo un certo numero di fusioni l'anyon composito ricade nel caso banale:

$$\theta_{(2m)} = 4m\pi \mod 2\pi = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

2.3.2 Fusione di anyons non-abeliani

La fusione di anyons non-abeliani di angoli θ_a, θ_b è invece una questione più delicata, dal momento che non ha un risultato univoco, allo stesso modo di quanto abbiamo visto nel Cap. 9 relativamente alla composizione di momenti angolari: ad esempio comporre gli stati di due particelle di spin $s_1 = s_2 = 1/2$ dà come risultato uno stato complessivo con spin totale $s = 0$ oppure $s = 1$. In tal caso, la regola di fusione è

$$\theta_a \times \theta_b = \sum_c N_{ab}^c \theta_c \quad (14)$$

ovvero il risultato della fusione di due particelle di specie θ_a e θ_b può essere un anyon di angolo θ_k se $N_{ab}^k \neq 0$. Se gli anyons sono abeliani, i coefficienti di composizione N_{ab}^c saranno tutti nulli tranne uno, e la composizione torna ad essere univoca.

3 INTRODUZIONE ALLE FASI TOPOLOGICHE

In Meccanica Quantistica un sistema fisico è descritto, nella rappresentazione delle coordinate, da una funzione a valori complessi detta funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^{N_d})$, ove per brevità $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$, tuttavia le informazioni fisiche sono contenute nel suo modulo quadro $|\psi(\mathbf{x})|^2$. Da questo segue che, definito un operatore unitario \hat{U} corrispondente sulle funzioni d'onda a un operatore moltiplicativo

$$U\psi(\mathbf{x}) = e^{if(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}) \equiv \psi'(\mathbf{x})$$

con f funzione a valori reali, nessun osservatore può distinguere i due stati $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$, in quanto

$$|\psi(\mathbf{x})|^2 = |\psi'(\mathbf{x})|^2$$

La funzione d'onda, si legge spesso, è definita a meno di una fase. Tale fase, però, non è sempre priva di significato fisico; ad esempio, è ovviamente importante tenerne conto quando si studiano differenze di fase tra sistemi che hanno seguito cammini non omotopicamente equivalenti. Potremmo iniziare un esperimento con due stati identici, separarli, muoverli su percorsi non equivalenti e, infine, osservare gli effetti di interferenza tra i due stati finali. Un esperimento di questo genere è quello con cui è stato per la prima volta osservato l'effetto Aharonov-Bohm⁶.

3.1 Polidromia delle funzioni d'onda

Utilizzando la topologia algebrica, in particolare il concetto di ricoprimento universale, è possibile trovare – ma qui non sarà dimostrato⁷ – che se lo spazio delle configurazioni è semplicemente connesso la fase può essere fissata globalmente, ovvero su tutto il dominio: la funzione d'onda è monodroma. Al contrario, **se lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso**, la funzione d'onda è **polidroma**: seguendo un cammino γ nello spazio delle configurazioni, la funzione d'onda varia per una fase dipendente dalla classe di equivalenza $[\gamma]$ a cui il cammino appartiene

$$\psi \xrightarrow{\gamma} a([\gamma])\psi \equiv \psi' \quad (15)$$

ove per brevità sottintendiamo la dipendenza dalle coordinate. La liceità di funzioni d'onda polidrome appare come un passo naturale della meccanica quantistica, né lede alcuna interpretazione fisica: come abbiamo sopra ricordato, la funzione d'onda non costituisce un oggetto misurabile di per sé, a differenza del suo modulo quadro.

La fase $a([\gamma]) = e^{i\phi([\gamma])}$ di Eq. (15), chiamata talvolta **carattere** della classe di omotopia, è analoga alla $e^{i\phi(|\psi\rangle)}$ che abbiamo incontrato nella (4), relativa in tal caso all'operatore $\hat{\Pi}$, e costituisce una rappresentazione del gruppo fondamentale π_1 . Qui vediamo però che essa dipende non soltanto dal particolare stato $|\psi\rangle$ su cui agisce la trasformazione, come indicato esplicitamente nella (4), ma anche dalla classe di omotopia a cui appartiene il cammino seguito nella trasformazione unitaria, cioè da $[\gamma]$. Fissato uno stato, se applicando una trasformazione unitaria ψ varia per una fase dipendente dalla

classe di omotopia del cammino, è giocoforza che trasformazioni con cammini omotopicamente equivalenti condividano la medesima fase. Ad esempio, per gli scambi di due particelle in tre dimensioni, abbiamo già visto esistere due sole classi di equivalenza: singolo scambio e identità. Per questo motivo la funzione d'onda acquista, sotto una trasformazione di scambio, una tra le due fasi $e^{i\phi_1}$ e $e^{i\phi_2}$. Se lo stato è bosonico, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, mentre per stati fermionici $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$.

Nell'equazione (15) è contenuta anche la nozione di realizzabilità, e possiamo dedurne la solita regola di superselezione. Continuando a usare il pratico esempio degli scambi in tre dimensioni, scriviamo una funzione d'onda come sovrapposizione: $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Applicando $\hat{U}(\gamma)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\psi' &= \hat{U}(\gamma) \\ &= a_1([\gamma])\psi_1 + a_2([\gamma])\psi_2 \\ &= a_1([\gamma]) \{ \psi_1 + a_1^*([\gamma])a_2([\gamma])\psi_2 \}\end{aligned}$$

Ma imponendo la validità di (15), deve essere

$$a_1^*([\gamma])a_2([\gamma]) = 1 \implies a_1([\gamma]) = a_2([\gamma])$$

Come già noto per via differente, la sovrapposizione è lecita solo tra stati che trasformano con lo stesso *set* di caratteri, ovvero di fasi.

3.2 Le fasi nella formulazione dell'integrale sui cammini

L'effetto Aharonov-Bohm, introdotto nel Cap. 12, è un fenomeno interferometrico, tanto che la sua prima verifica sperimentale è avvenuta proprio in un contesto di interferenza da doppia fenditura. Riportiamo in Fig. 11a una rappresentazione molto schematica dell'esperimento. Inseriamo tra le due fenditure un solenoide idealmente infinito lungo la direzione perpendicolare al foglio, ovvero un tubo di flusso magnetico Φ . Il campo \mathbf{B} è nullo all'esterno del solenoide, tuttavia la sua presenza influisce sul moto delle particelle cariche che partono dalla sorgente S e colpiscono lo schermo. Infatti, non è nullo all'esterno del solenoide il potenziale vettore \mathbf{A} , ben presente nell'hamiltoniana elettromagnetica.

Ricordiamo che, definita r la distanza dal centro del tubo di flusso, una buona *gauge* è

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \text{ fuori dal solenoide}$$

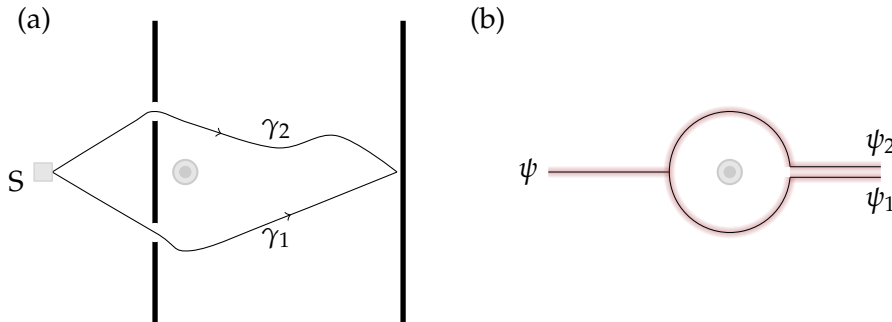


Figura 11: Esperimento interferometrico sull'effetto Aharonov-Bohm.

Chiamiamo ψ la funzione d'onda delle particelle alla sorgente, ψ' è la funzione d'onda diffusa, $\psi' = U\psi$, con U operatore unitario di evoluzione. Sullo schermo finale osserviamo chiaramente $|\psi'|^2$. Per sovrapposizione, possiamo scrivere

$$\psi' = \psi_1 + \psi_2 \quad (16)$$

ove ψ_i sono le funzioni d'onda finali nel caso in cui si tenga aperta solo la fenditura i -esima. A ciò fa riferimento Fig. 11b.

Lo spazio delle configurazioni, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{linea}\}$ se togliamo lo schermo forato come in Fig. 11b, è connesso in modo non semplice. Ad esempio i due percorsi riportati in Fig. 11a non sono omotopicamente equivalenti. Sullo schermo osserviamo un pattern di interferenza: le particelle acquisiscono una fase differente a seconda della classe di equivalenza del cammino che percorrono

$$\psi_1 = e^{i\varphi_1}\psi \quad \psi_2 = e^{i\varphi_2}\psi$$

Lo sfasamento $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ è presente anche nel caso $\Phi = 0$, ma possiede eventualmente un contributo magnetico dipendente da Φ , la cui osservazione è proprio il risultato chiave dell'esperimento di Tonomura.

Il propagatore $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$, tale per cui

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \int K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) \psi(\mathbf{x}_0, 0) d^3\mathbf{x}_0$$

si scrive come

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) = \int_{(\mathbf{x}_0, 0)}^{(\mathbf{x}, t)} \mathcal{D}[\gamma(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (17)$$

La lagrangiana elettromagnetica per una particella è

$$L_{em} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - q_j \phi(\mathbf{x}) + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

e qui $\phi = 0$ dovunque, perciò indicando con L_0 la lagrangiana della particella libera

$$L_{em} = L_0 + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = L_0 + L_{int}$$

L'azione calcolata lungo un percorso $\gamma(t)$ è l'integrale di linea

$$\begin{aligned} S[\gamma(t)] &= \int_{\gamma}^t dt' \left[L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t') + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right] \\ &= S_0[\gamma(t)] + S_\gamma[\gamma(t)] \end{aligned}$$

costituito dall'azione del caso libero $S_0[\gamma(t)]$ e un contributo caratteristico dell'effetto Aharonov-Bohm:

$$S_\gamma[\gamma(t)] = \frac{q}{c} \int_{\gamma}^t dt' \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (18)$$

Siccome \mathbf{A} è in questo spazio una forma differenziale chiusa ma non esatta, l'integrale $S_\gamma[\gamma(t)]$ non dipende solamente dagli estremi di $\gamma(t)$, ma anche dalla sua classe di equivalenza. Vogliamo scrivere – vedremo tra breve il motivo – il propagatore complessivo come somma sfasata di propagatori parziali, ognuno dei quali è frutto dell'integrazione su cammini appartenenti a

una classe di omotopia distinta. Restringendo lo spazio delle configurazioni ad una sola classe di equivalenza omotopica, \mathbf{A} è una forma esatta, il fattore di fase di Aharonov-Bohm è costante su tutta la singola classe e può uscire dall'integrazione con il nome $a_g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \equiv a_g(t)$, in cui concordemente alla (15) riconosciamo il carattere topologico. Otteniamo allora la serie

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) &= \sum_{g \in \pi_1} a_g(t) \int_{(\mathbf{x}_0, 0)}^{(\mathbf{x}, t)} \mathcal{D}_g[\gamma(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \\ &= \sum_{g \in \pi_1} a_g(t) K_g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) \end{aligned} \quad (19)$$

ricordando la relazione biunivoca tra classi di equivalenza di cammini ed elementi del gruppo fondamentale $[\gamma] \longleftrightarrow g$.

Come anticipato nella (16), solo due termini della (19) hanno un contributo importante: quelli relativi ai cammini equivalenti rispettivamente a γ_1 e a γ_2 riportati in Fig. 11a. In altre parole, teniamo conto solo di due situazioni:

- (1) La particella passa per la fenditura 1
- (2) La particella passa per la fenditura 2

Ovviamente stiamo approssimando: nell'integrazione sui cammini dobbiamo tenere conto anche del percorso che passa per la fenditura 1, torna indietro attraverso la 2, passa nuovamente per la 1 e, solo allora, termina sullo schermo, tuttavia l'ampiezza di probabilità relativa a percorsi di questo genere è generalmente trascurabile rispetto alle due ampiezze ψ_1 e ψ_2

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) \simeq e^{i\varphi_1} K_1(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) + e^{i\varphi_2} K_2(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$$

La differenza di fase indotta dall'effetto Aharonov-Bohm è

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{q}{\hbar c} \left(\int_{\gamma_2}^t dt' \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - \int_{\gamma_1}^t dt' \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \right) = \frac{q}{\hbar c} \int_{(\gamma_2 - \gamma_1)}^t dt' \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} = -\frac{q}{\hbar c} \Phi$$

ove nell'ultimo passaggio ci avvaliamo del teorema della circuitazione.

Vedremo tra poco come questo effetto quantistico sia utilizzato nello studio degli anyons.

Considerando infatti N particelle in due dimensioni – il caso degli anyons – troviamo che la rappresentazione di B_N discussa in Sez. 2.2.1 costituisce proprio la mappa tra le possibili evoluzioni di scambio $g \in B_N$, a meno di omotopia, e le fasi acquisite nell'evoluzione dalla funzione d'onda che descrive il sistema. Se g è l'elemento di B_N relativo alla classe $[\gamma]$, applicare \hat{U}_g allo stato descritto da $\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \equiv \psi(\mathbf{x})$ dà

$$\psi'(\mathbf{x}) = U_g \psi(\mathbf{x}) = \exp \left(i\pi \sum_{k=1}^{N-1} n_k \omega_k \right) \psi(\mathbf{x})$$

ove utilizziamo la stessa simbologia della (11). Denominiamo la fase moltiplicativa $a_g(t)$, dipendente dalla classe di omotopia $[\gamma] \longleftrightarrow g$ dell'evoluzione. Utilizzando il formalismo dell'integrale sui cammini⁸, è possibile porre in

evidenza l'aspetto cinematico dell'evoluzione, immaginando che la fase sia acquisita regolarmente. Inoltre riusciamo così a calcolare la fase acquisita in un'evoluzione generica, anche estranea a quelle di scambio, nella quale le posizioni finali siano diverse da quelle iniziali. In tal caso, nell'evoluzione la funzione d'onda acquisisce la fase

$$a_g(t) = \exp \left(\frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k \int_{\gamma}^t dt' \frac{d}{dt'} \alpha_k(t') \right) \quad (20)$$

dove θ_k è l'angolo statistico della coppia $(k, k+1)$. Indichiamo con $\alpha_k(t)$ l'angolo spazzato dal vettore $\mathbf{a}_k(t') = \mathbf{x}_{k+1}(t') - \mathbf{x}_k(t')$, dipendente dalle posizioni finali e iniziali e dalla classe di equivalenza $[\gamma]$ del percorso $\gamma(t')$. In altri termini,

$$\alpha_k(t) = \arctan \left(\frac{y_{k+1}(t) - y_k(t)}{x_{k+1}(t) - x_k(t)} \right) - \arctan \left(\frac{y_{k+1}(0) - y_k(0)}{x_{k+1}(0) - x_k(0)} \right)$$

ed ovviamente vale $\alpha_k(0) = 0$. A dipendere da $\gamma(t')$ sono le $\dot{\alpha}_k(t')$, ma integrando tra 0 e t lungo γ rimane solo la dipendenza dalla classe di omotopia, e quindi da g . Come visto sopra nella trattazione dell'effetto Aharonov-Bohm, $a_g(t)$ dipende anche dalle posizioni finali e iniziali $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, usualmente considerate come fissate nel formalismo dell'integrale sui cammini. Per questo motivo e per brevità, scegliamo anche qui di sottintendere tale dipendenza.

Possiamo notare come, anziché sommare sulle coppie $(k, k+1)$ indicizzate da k , sia possibile eseguire la somma sulle coppie di anyons (i, j) con $i < j$: definendo

$$\varphi_{ij}(t) = \arctan \left(\frac{y_i(t) - y_j(t)}{x_i(t) - x_j(t)} \right) - \arctan \left(\frac{y_i(0) - y_j(0)}{x_i(0) - x_j(0)} \right)$$

scriviamo pertanto

$$a_g(t) = \exp \left(\frac{i}{\pi} \sum_{i < j} \theta_{ij} \int_{\gamma}^t dt' \frac{d}{dt'} \varphi_{ij}(t') \right) \quad (21)$$

naturalmente con θ_{ij} angolo statistico della coppia (i, j) .

Il propagatore $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$ si scrive in modo analogo a quanto riportato nella (17):

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) &= \sum_{g \in \pi_1} a_g(t) \int_{(\mathbf{x}_0, 0)}^{(\mathbf{x}, t)} \mathcal{D}_g[\gamma(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \\ &= \sum_{g \in \pi_1} a_g(t) K_g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) \end{aligned} \quad (22)$$

Di nuovo, dal momento che lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso, il propagatore è una somma sfasata di propagatori parziali, ognuno dei quali è frutto dell'integrazione su cammini appartenenti a classi di omotopia distinte. Se l'azione è $S_0 = \int_0^t dt' L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t')$, con L_0 funzione lagrangiana del sistema di N anyons, possiamo utilizzare la (20) nella (22) ed ottenere

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) = \int_{(\mathbf{x}_0, 0)}^{(\mathbf{x}, t)} \mathcal{D}[\gamma(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

con una azione S

$$S[\gamma(t)] = \int_0^t dt' \left[L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t') + \frac{\hbar}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k \dot{\alpha}_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t') \right] \quad (23)$$

comprensiva di un termine topologico. Mentre $S_0[\gamma(t)]$, i.e. l'integrale del primo termine, dipende dal cammino specifico, l'integrale del termine topologico dipende solo dalla classe di omotopia del cammino stesso. Dalla (23) possiamo far corrispondere S all'integrale nel tempo, effettuato lungo la traiettoria $\gamma(t)$, della lagrangiana effettiva $L = L_0 + L_t$:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = L_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \frac{\hbar}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k \dot{\alpha}_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad (24)$$

3.3 Modello a tubo di flusso

Trattato un sistema di anyons con lagrangiana L_0 per mezzo dell'integrale sui cammini, possiamo osservare come ciò corrisponda, nella somma sui vari percorsi, a immaginare che gli anyons si comportino come particelle pseudo-classiche – i.e. bosoni – con lagrangiana L . **Anyons liberi** sono dunque trattati alla stregua di **bosoni in presenza un termine topologico** L_t .

$$L_t = \frac{\hbar}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k \dot{\alpha}_k = \frac{\hbar}{\pi} \sum_{i < j} \theta_{ij} \dot{\phi}_{ij} \quad (25)$$

ove la seconda espressione si trova banalmente sostituendo la (21) al posto della (20) nella (22). Questo modo di vedere gli anyons dà origine al **modello a tubo di flusso**. La statistica quantistica di un anyon generico può essere riprodotta immaginandolo come una particella bosonica dotata di una carica fittizia q e collegata un flusso magnetico fittizio Φ , interagenti tramite l'effetto Aharonov-Bohm⁹. Il termine topologico L_t diviene così un termine di interazione fittizia tra carica e flusso, e possiamo identificarla con L_{int} .

Rammentiamo che la lagrangiana elettromagnetica della singola particella j -esima è

$$L_{em}^{(j)} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}_j^2 - q_j \phi(\mathbf{x})_j + \frac{q_j}{c} \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_j) \quad (26)$$

ove $\phi = 0$ ovunque, mentre \mathbf{A} è un potenziale vettore fittizio. Una semplice gauge per il potenziale vettore generato dalla sola particella i -esima è

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} \bar{\varphi}_i \Phi_i / (2\pi r_{ij}), & r_{ij} \neq 0 \\ 0, & r_{ij} = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$$

e possiamo immaginare che il tubo di flusso sia localizzato sulla particella, cioè con un campo magnetico a *delta* di Dirac. Se il primo termine della (26) corrisponde a quello di lagrangiana libera, l'ultimo costruisce il termine di interazione (fittizia, in realtà è topologico) se sommato sulle coppie di particelle:

$$L_{int} = \sum_{i < j} \frac{q_j}{c} \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \bar{\varphi}_i \frac{\Phi_i}{2\pi r_{ij}} = \frac{\hbar}{\pi} \sum_{i < j} \theta_{ij} \dot{\phi}_{ij}(t)$$

utilizzando la (25).

Riconosciamo quindi

$$\theta_{ij} = \frac{q_j \Phi_i}{2\hbar c} \quad \dot{\varphi}_{ij} = \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i$$

Abbiamo trovato così gli angoli statistici delle coppie (i, j) .

Nel sistema sono assenti interazioni elettrostatiche di tipo carica-carica, dunque per eliminarle consideriamo i limiti $q_j \rightarrow 0$, $\Phi_i \rightarrow \infty$, tenendo

$$q_j \Phi_i / (\hbar c) = 2\theta_{ij} = \text{cost.}$$

INTEGRABILITÀ DEI PROBLEMI CON ANYONS Il modello a tubo di flusso, che abbiamo appena introdotto, espone in modo chiaro il motivo per cui anche i problemi più semplici relativi a un gas di anyons non interagenti possano risultare non banali. Ancor prima di introdurre un potenziale di interazione, il problema di anyons liberi è già equivalente a quello di un gas di bosoni o fermioni interagenti, in generale difficile da risolvere. Per questo, soltanto alcuni problemi con $N = 2$ anyons sono stati risolti analiticamente, ad esempio i casi di 2 anyons liberi o interagenti armonicamente.

SIMMETRIE ROTTE E INTATTE Dalla (20) risulta chiaro come gli anyons rompano separatamente le simmetrie di parità \hat{P} e di time-reversal \hat{T} : la trasformazione di parità (inversione degli assi spaziali) è analoga ad una inversione del verso di percorrenza dei cammini, quindi cambia segno agli angoli statistici θ_k o meglio, per coerenza con la definizione in $[0, 2\pi)$, manda $\theta_k \rightarrow 2\pi - \theta_k$, mentre l'inversione temporale corrisponde alla trasformazione $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi^*(\mathbf{x})$. Risulta invece invariata la simmetria combinata $\hat{P} \cdot \hat{T}$.

3.4 Superamento del postulato di simmetrizzazione

Estesa così la formulazione della Meccanica Quantistica a spazi configurazionali non semplicemente connessi, possiamo trattare sia sistemi piuttosto banali – come una particella confinata su una circonferenza – sia sistemi di particelle identiche. Nella discussione relativa alle particelle indistinguibili, è concettualmente soddisfacente la costruzione di uno spazio delle configurazioni $M_N^{(d)}$ con la corretta corrispondenza biunivoca tra i suoi punti e l'effettiva configurazione fisica del sistema, che non distingue tra loro le particelle identiche. Questo risultato rende **superflua** l'introduzione del **postulato di simmetrizzazione** delle funzioni d'onda, dato che per costruzione nello spazio $M_N^{(d)}$ non è ben definito lo *scambio* di particelle indistinguibili.

Rammentiamo che, in linea di principio, la condizione di simmetria o antisimmetria è globale, quindi deve essere applicata anche a particelle arbitrariamente distanti tra loro. Supponiamo proprio che due particelle siano tanto distanti da essere trattabili indipendentemente, come spieghiamo l'effetto di (anti)simmetrizzazione? Se ci avvaliamo del postulato di simmetrizzazione, questa correlazione è risolta dal fatto che, se la sovrapposizione delle funzioni d'onda delle due particelle è molto piccola, cioè se le particelle sono sufficientemente distanti e poco interagenti, risulta praticamente indifferente la scelta tra la funzione d'onda totale (anti)simmetrizzata e il

semplice prodotto delle due funzioni d'onda, consistentemente con l'ipotesi di particelle indipendenti. Utilizzando invece lo spazio delle configurazioni $M_N^{(d)}$, invece, questo impiccio non compare neppure, perché $M_N^{(d)}$ appare, in tal caso, localmente isometrico allo spazio configurazionale di N particelle non identiche: il primo differisce dal secondo solo per proprietà topologiche globali, di cui dobbiamo tenere conto soltanto se le particelle possono *effettivamente* scambiare posizione nel loro moto, evento posto come impossibile per ipotesi. Benché possiamo fare a meno del postulato di simmetrizzazione, è importante rimarcare che nell'approccio presentato continua a essere cruciale postulare – introducendolo come risultato sperimentale estraneo agli assiomi fondamentali della Meccanica Quantistica – che particelle identiche risultano indistinguibili. In altri termini, dobbiamo imporre come spazio delle configurazioni proprio $M_N^{(d)}$ e non il prodotto cartesiano degli N spazi delle configurazioni di singola particella.

3.5 Esempio: particella libera su una circonferenza

Abbiamo analizzato il problema di una particella quantistica libera su una circonferenza nel Cap.12, discutendo dell'effetto Aharonov-Bohm. In tale contesto, tuttavia, abbiamo imposto la monodromia della funzione d'onda, senza tenere conto della topologia del dominio. La circonferenza S^1 è infatti uno spazio connesso in modo non semplice, con $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$: sono ammesse tante classi di omotopia quanti sono i numeri interi. Il suo rivestimento universale è \mathbb{R} , l'insieme dei numeri reali, semplicemente connesso. Identificando S^1 con $U(1)$, cioè l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario, una buona mappa $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ risulta essere $(\phi \in \mathbb{R}) \rightarrow e^{i\phi}$. Da questo segue, come prima enunciato, che la funzione d'onda della particella è in generale polidroma, e non monodroma. Vedremo a breve come siamo riusciti a non cadere in errore nonostante la differente trattazione.

Nella circonferenza, sono identificati i punti corrispondenti ad angoli che differiscono per multipli di 2π . Ne consegue la **condizione al bordo**

$$\psi(\varphi + 2\pi) = e^{i\xi} \psi(\varphi) \quad (27)$$

In altri termini, eseguendo un giro completo in senso antiorario (per convenzione di segno) la funzione d'onda deve differire al più per una fase $e^{i\xi}$, ma il suo modulo è invariato. La fase $e^{i\xi}$ corrisponde al carattere del percorso di rivoluzione seguito, e ξ è una costante caratteristica del sistema quantistico.

Le soluzioni normalizzate dell'equazione di Schrödinger sono

$$\psi_n(\varphi) = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

con autoenergie

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m}$$

mentre la condizione (27) impone

$$n = \frac{\xi}{2\pi} + k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Da questo segue che lo spettro è

$$\psi_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[i \left(\frac{\xi}{2\pi} + k \right) \varphi \right] \quad E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\xi}{2\pi} + k \right)^2 \quad (28)$$

Nel caso $\xi = 0$, corrispondente all'imposizione di monodromia della funzione d'onda, è degenerare ogni coppia di stati $(k, -k)$, escluso il fondamentale ($k = 0$). Per $\xi = \pi$ tutti gli stati, incluso il fondamentale, sono due volte degeneri, stavolta con le coppie $(k, -k - 1)$. In tal caso lo spettro è

$$E_k(\xi = \pi) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2$$

Per $\xi = 2\pi$ le autoenergie sono le stesse del caso $\xi = 0$, coerentemente con il fatto che $e^{i\xi}$ è definito a meno di multipli di 2π . Tuttavia, in tal caso il ground state corrisponde a $k = -1$, e tutti gli altri stati sono degeneri a coppie $(k, -k - 2)$. Ragionamenti analoghi sono validi per $\xi = \alpha\pi$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$, a seconda di $|\alpha|$ pari o dispari. Per $\xi \neq \alpha\pi$, gli stati sono sempre non degeneri nell'energia.

Immaginiamo che la circonferenza abiti un mondo tridimensionale. Nello spazio delle configurazioni relativo a questo sistema, che è evidentemente \mathbb{R}^3 , il moto di rivoluzione lungo una circonferenza risulta omotopicamente equivalente al loop banale, perciò i relativi caratteri sono uguali. Dunque se il loop banale ha carattere 1, necessariamente il sistema ha $\xi = 0$ se il suo spazio configurazionale è \mathbb{R}^3 , e in questo caso avremmo potuto imporre la monodromia: come anticipato, nulla sarebbe cambiato.

Se anche lo spazio delle configurazioni fosse \mathbb{R}^2 , il risultato non sarebbe differente: siccome il sistema è modellizzato come una particella singola, a questo livello l'esistenza degli anyons non compare neppure in due dimensioni: l'angolo statistico è un numero quantico relativo al comportamento della funzione d'onda sotto scambio tra particelle indistinguibili, quindi non è accessibile nel caso in cui abbiamo una sola particella a disposizione¹⁰

Se adesso nello spazio tridimensionale poniamo, per esempio, un tubo di flusso magnetico, contenuto in un solenoide *infinito* e impenetrabile, stiamo cambiando lo spazio delle configurazioni del sistema quantistico. Le proprietà topologiche dello spazio risultante sono molto diverse: il solenoide lo rende connesso in modo non semplice ed adesso il loop di rivoluzione e quello banale non sono omotopicamente equivalenti, se il primo ruota attorno al solenoide. Nel Cap. 12 abbiamo trovato

$$\xi = -\frac{\Phi}{\Phi_0}$$

dove Φ è il flusso magnetico e $\Phi_0 = hc/e$ è il quanto di flusso magnetico.

A questa modifica esemplificativa dobbiamo far corrispondere l'aggiunta di un **contributo topologico al momento angolare**. Nel Cap. 12 abbiamo trovato questo termine aggiuntivo utilizzando un operatore hamiltoniano elettromagnetico, imponendo la monodromia di $\psi(\varphi)$. Ora invece l'hamiltoniano è quello di una particella libera in assenza di campo, ma accettiamo una funzione d'onda polidroma e, in questo modo, arriviamo naturalmente a un risultato che tiene conto di un possibile contributo topologico al momento angolare.

3.5.1 Cyons

Il sistema fisico che abbiamo descritto, chiamato **cyon** e consistente di una particella carica che abita una circonferenza attorno a un tubo di flusso magnetico, ha un **momento angolare topologico**

$$s = \frac{\xi}{2\pi}$$

Possiamo riconoscere in questo momento angolare lo **spin** della sistema particella-flusso, notando anche che non è in generale un numero intero o semi-intero, bensì libero di possedere un valore reale, o meglio frazionario. Proprio per questo motivo, il cyon è un anyon¹¹. Avvalendoci della relazione (6), evinciamo che ξ coincide con l'angolo statistico del cyon.

Benché i cyon siano dei sistemi piuttosto irrealistici e di difficile realizzazione pratica, costituiscono l'esempio basilare del modello a tubo di flusso.

4 DUE ANYONS INTERAGENTI ARMONICAMENTE

Per mostrare come il comportamento degli anyons differisca da quelli di bosoni e fermioni, effettuando una interpolazione tra i due, cerchiamo lo spettro di un sistema di **due anyons** di angolo statistico θ , **interagenti armonicamente in due dimensioni spaziali**¹². Come atteso, vedremo che bosoni e fermioni saranno solo due casi particolari corrispondenti a $\theta = 0$ e a $\theta = \pi$ rispettivamente.

Se indichiamo con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ i vettori posizione dei due anyons, il potenziale di interazione è della forma $U(r)$, ove $r = |\mathbf{r}|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ è il vettore della posizione relativa del secondo anyon rispetto al primo. Risulta pertanto lecito scomporre il moto nel modo usuale, ovvero distinguendo moto del CM e moto relativo. Il primo è banalmente il moto libero, in due dimensioni, di una particella con massa pari alla massa totale del sistema $M = 2m$, e continueremo lo svolgimento dell'esercizio senza tenerne conto. L'altro, invece, è il moto di un anyon di massa ridotta $\mu = m/2$ nel campo centrale e armonico

$$U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$$

Scriviamo l'equazione agli autovalori per la funzione d'onda del moto relativo, considerando come variabili le coordinate polari r, ϕ

$$H\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi) \quad (29)$$

con hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + U(r) \quad (30)$$

Il laplaciano corretto è ovviamente quello bidimensionale

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

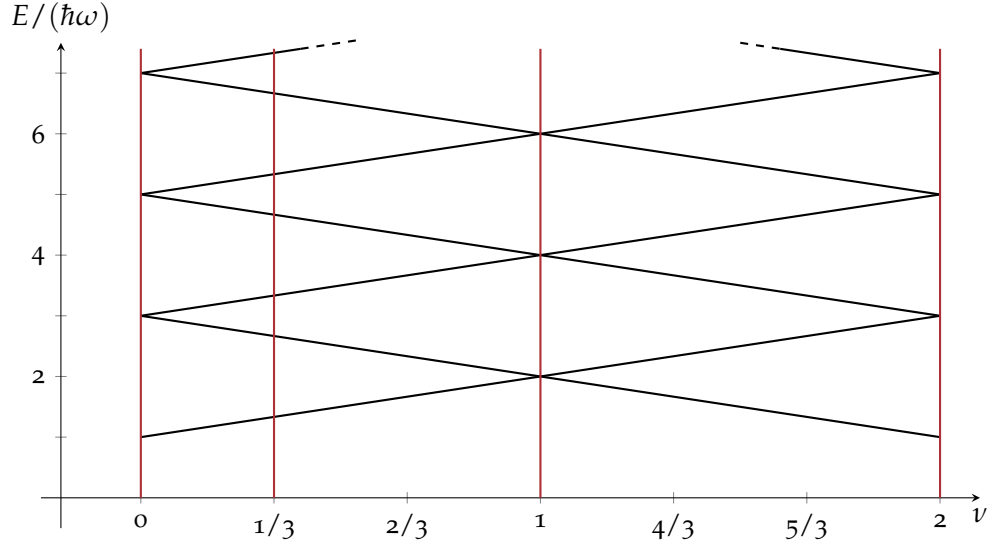


Figura 12: Livelli energetici del moto relativo bidimensionale di due anyons, interagenti secondo un potenziale armonico che dipende dalla loro distanza, al variare del numero di statistica $\nu = \theta/\pi$. Per $\nu = 0$ e $\nu = 2$ (la statistica è definita mod 2) si trovano i livelli bosonici, per $\nu = 1$ quelli fermionici, mentre per $\nu \in (0, 1) \cup (1, 2)$ osserviamo lo spettro degli anyons generici, che interpola linearmente i due casi estremali. La transizione tra spettro bosonico e fermionico avviene con continuità al variare di ν . Per esempio, abbiamo tracciato la linea corrispondente a $\nu = 1/3$, quindi guardando alle sue intersezioni con i grafici rettilinei troviamo i livelli energetici rispettivo caso.

Il moto in campo centrale ammette separazione delle variabili, così la forma della funzione d'onda si scrive come

$$\psi(r, \phi) = R(r)e^{il\phi} \quad (31)$$

dove il numero quantico l coincide con il **momento angolare relativo** in unità di \hbar . Con l'aiuto di Eq. (31) e semplificando le fasi $e^{il\phi}$, da (29) otteniamo un'equazione per la parte radiale,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} (U(r) - E) \right] R(r) = 0 \quad (32)$$

in cui $U(r)$ è il potenziale armonico succitato.

Imponiamo solo adesso che la particella sia un anyon con angolo statistico θ , tramite la condizione

$$\psi(r, \phi + \pi) = e^{i\theta} \psi(r, \phi) \quad (33)$$

Da questa segue subito, utilizzando la forma (31), che deve valere

$$e^{il\pi} = e^{i\theta}$$

e conseguentemente $l\pi = \theta + 2k\pi$, ovvero

$$l = \nu + 2k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}, \quad \nu \in [0, 2) \quad (34)$$

Per evitare confusione con la costante armonica ω , qui indichiamo con ν il numero di statistica $\nu = \theta/\pi$. La (34) comunica che il significato della statistica frazionaria caratteristica degli anyons è interpretabile, per due particelle, come una **restrizione sui valori permessi del momento angolare relativo** l . Per bosoni ($\theta = 0$) il momento angolare relativo è un numero intero pari ($l = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$), nel caso dei fermioni ($\theta = \pi$) l è un intero dispari ($l = \pm 1, \pm 3, \dots$); infine, gli anyons con valori intermedi di θ interpolano linearmente tra queste possibilità, con momenti angolari relativi, sempre in unità di \hbar , pari a

$$l = \nu \pm 2, \nu \pm 4, \nu \pm 6, \dots$$

Notiamo che il momento $l = 0$ è accessibile solo se le due particelle sono bosoni.

Utilizzando quindi nella (32) la condizione statistica $l = \nu + 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, e risolvendo l'equazione risultante, di fatto analoga a quella del comune oscillatore armonico quantistico in due dimensioni, troviamo le autofunzioni e lo spettro degli autovalori di H

$$E_{nk} = \hbar\omega (2n + 1 + |\nu + 2k|) \quad \text{ove} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{Z} \quad (35)$$

Come mostriamo in Fig. 12, nel caso bosonico ($\nu = 0$) troviamo lo spettro dell'oscillatore armonico bidimensionale ristretto a valori di eccitazione pari, mentre nel caso fermionico ($\nu = 1$) la restrizione è sugli stati con valori di eccitazione dispari. Il dominio degli anyons generici, con numero di statistica frazionario, si estende per i valori $\nu \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

5 RITORNO AL MONDO REALE

5.1 Ma gli anyons esistono?

La domanda che dà un titolo alla Sezione probabilmente è sorta anche nella mente di chi sta leggendo. L'idea degli anyons è nata nel segno di una revisione della teoria quantistica delle particelle identiche, ma per qualche tempo è rimasta un mero esercizio accademico, una soluzione in cerca di problemi da risolvere. Potremmo essere portati a pensare che, essendo il nostro mondo *almeno* tridimensionale nello spazio, l'esistenza degli anyons sia fuori discussione. In un certo senso, questo è vero: gli oggetti dalla statistica frazionaria sono sempre delle *quasi*-particelle che vivono in sistemi bidimensionali.

Contrariamente alle attese iniziali, la teoria degli anyons ha trovato applicazioni molto presto. L'effetto Aharonov-Bohm, con la fase connessa, è stato osservato per la prima volta meno di quattro anni dopo il battesimo di Wilczek. Negli stessi anni, inoltre, è stato teorizzato ed osservato, nello studio della materia condensata, l'**effetto Hall quantistico**. Più specificamente, nel caso **frazionario** è stato dimostrato che le eccitazioni degli **stati di Laughlin**, quasiparticelle con carica elettrica frazionaria rispetto a e , sono una realizzazione fisica degli anyons¹³.

5.2 E se esistono, a cosa servono?

Non solo gli anyons esistono realmente, ma sono anche oggetto di ricerca per un'applicazione pratica nell'ambito della computazione quantistica. Vari studi sono stati e sono attualmente svolti nel campo del *Topological Quantum Computing*, poiché un ipotetico computer quantistico topologico – il cui funzionamento sarebbe basato su anyons – risulterebbe notevolmente *fault-tolerant*¹⁴, i.e. relativamente protetto da errori casuali e da errori sistematici contenuti. Gli errori casuali sono dovuti all'interazione dei qubit con l'ambiente esterno, principalmente consistente di scattering con fononi e fotoni, e determinano un entanglement qubit-ambiente. Quest'ultimo entra a fare parte della computazione in modo incontrollabile e pertanto distruttivo. La condivisione dell'informazione con l'ambiente esterno, con la sua contestuale perdita dal punto di vista del sistema computazionale, è chiamata **decoerenza**. Sotto al nome di errori sistematici raccogliamo invece gli effetti di termini non considerati nell'hamiltoniano.

Gli anyons presentano delle difese naturali contro questi errori: l'idea è che registrando informazione ed effettuando calcoli in modo puramente topologico, ovvero tramite una corrispondenza con elementi del gruppo B_N , il sistema computazionale sia **immune a perturbazioni locali**, in quanto B_N è un gruppo discreto e non è possibile trasformare con continuità un suo elemento in un altro. Ovviamente, le ragioni di questa protezione sono topologiche e risiedono nella connessione non semplice dello spazio configurazionale. In altri termini, in un TQC l'informazione è immagazzinata a livello globale, non locale.

In breve, con il processo di inizializzazione si formano anyons in determinate posizioni spaziali, la cui configurazione globale corrisponde allo stato iniziale. Nella computazione gli anyons sono fatti muovere, così da intrecciare le loro linee orarie in un processo di evoluzione unitaria. Questo modifica lo stato del sistema di anyons come descritto brevemente in Sez. 3, con una fase che descrive la tipologia di intreccio svolto. Infine, per leggere il risultato della computazione, è necessario effettuare una misura dello stato finale del sistema. Per raggiungere questo obiettivo esistono varie possibilità, ma quella che più ci interessa è una misura interferometrica, svolta guardando la differenza di fase acquisita dallo stato evoluto rispetto allo stato iniziale. L'esperimento in questione è analogo a quello, già citato, di Tonomura, relativo all'effetto Aharonov-Bohm. Il risultato della computazione dipende solo dalla classe di omotopia dell'evoluzione del sistema di quasi-particelle, insensibile al modo esatto in cui la essa si svolge, quindi a piccole imprecisioni dell'hamiltoniano e soprattutto a perturbazioni locali con l'ambiente esterno.

Agli scopi della TQC servono **anyons non-abeliani**, incontrati in Sez. 2.2.2 e corrispondenti a rappresentazioni unitarie non-commutative del gruppo B_N . Essi sono descritti non da una sola funzione d'onda, ma da un vettore di funzioni d'onda, come riportato in Eq. (12). Percorrendo un cammino nello spazio delle configurazioni, il vettore è moltiplicato per una matrice unitaria $\rho(g)$. L'argomento è piuttosto complesso, quindi ci limitiamo a menzionare che la richiesta di anyons non-abeliani costituisce un *punctum dolens*: sulla base di calcoli teorici e simulazioni numeriche, si ipotizza l'esistenza

di anyons non-abeliani solo in un insieme molto limitato di stati dell'effetto Hall quantistico frazionario.

NOTE

1. Non vale ovviamente lo stesso, neppure per particelle indistinguibili, nel caso in cui i numeri quantici dello stato siano numeri di occupazione; lì, la diversa posizione non serve a distinguere varie particelle ma, per esempio, vari livelli energetici.
2. Questa ipotesi non è accurata per tutte le particelle: ad esempio fallisce miseramente considerando dei fotoni, mentre possiamo pensare che sia rispettata per particelle dotate di *hard-core repulsion*. In ogni caso, beché non sia ovvio poter trattare degli oggetti ondulatori come *oggetti duri*, proseguiamo con questa assunzione.
3. Per una via differente ma sicuramente collegata, raggiungiamo adesso lo stesso risultato della trattazione del momento angolare di Cap. 6!
4. Quindi lo spazio delle configurazioni vero e proprio è quello di Eq. (7) solo a meno di un prodotto cartesiano $\times R^2$, che tenga conto del moto della particella • rispetto all'osservatore. In modo sostanzialmente analogo, si giunge allo stesso risultato scomponendo il moto a due corpi in moto relativo e moto del centro di massa. L'Eq. (7) tiene ovviamente conto dello spazio configurazionale relativo al solo moto relativo.
5. Wilczek, Frank. Quantum mechanics of fractional-spin particles. Phys. Rev. Lett. 49, 957-959 (1982). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.957>
6. A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, H. Yamada. Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. Phys. Rev. Lett. 56, 792 (1986) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.792>
7. Se ne può leggere la dimostrazione, svolta passando per alcuni teoremi, in Morandi, Giuseppe. The role of topology in classical and quantum physics. Springer-Verlag, 1992.
8. Wu, Yong-Shi. Multiparticle Quantum Mechanics Obeying Fractional Statistics, Phys. Rev. Lett. 53, 111 (1984). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.111>
Chou, Chihong. Fractional Statistics. Massachusetts Institute of Technology 1992. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/31030>
9. Wilczek, Frank. Fractional statistics and anyon superconductivity §3. World Scientific Publishing, 1990.
10. In due dimensioni, mentre lo spazio configurazionale di due particelle non è semplicemente connesso, è semplicemente connesso lo spazio delle configurazioni di una sola particella.
11. R. Mackenzie, A. S. Goldhaber. Are cyons really anyons? Phys. Lett. B, 214 (1988) [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91397-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91397-4)
12. Leinaas, J.M., Myrheim, J. On the theory of identical particles. Nuovo Cim B 37, 1-23 (1977). <https://doi.org/10.1007/BF02727953>
13. Sanghun An, P. Jiang, H. Choi, W. Kang, S. H. Simon, L. N. Pfeiffer, K. W. West, K. W. Baldwin. Braiding of Abelian and Non-Abelian Anyons in the Fractional Quantum Hall Effect. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1112.3400>
14. C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma. Non-Abelian anyons and topological quantum computation Rev. Mod. Phys. 80, 1083 (2008) <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>