# לוגיקה למדעי המחשב – שיעור 2:
# פירוש השפה הפסוקית

דוד קסלר 054-4511925

# חזרה קצרה על השיעור הקודם

# השפה הפסוקית / שפת תחשיב הפסוקים

- א"ב / מקלדת:
$\Sigma_n = \{P_1, \ldots, P_n, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$
- הגדרה באינדוקציה מבנית:
  - בסיס: הפסוקים האלמנטריים $P_1, \ldots, P_n$ הם פסוקים
  - כללי יצירה:
    - אם $\varphi$ פסוק אזי גם $\neg\varphi$ פסוק
    - אם $\varphi$ ו-$\psi$ פסוקים אזי גם $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ פסוקים

# הוכחה באינדוקציה מבנית

- אם מתקיים:
  - לכל פסוק אלמנטרי יש את התכונה $R$
  - אם לפסוק $\varphi$ יש את התכונה $R$ גם לפסוק $\neg\varphi$ יש אותה
  - לכל קשר דו מקומי $@$ אם לפסוקים $\varphi$ ו-$\psi$ יש את התכונה R אזי גם לפסוק $(\varphi@\psi)$ יש את התכונה $R$
- אזי לכל פסוק יש את התכונה $R$

# הוכחה באינדוקציה מבנית – דוגמה (חדשה)

- הוכיחו שבפסוק הכתוב בשפה הפסוקית המלאה (גם השלילה מוקפת סוגריים) אין שתי הופעות צמודות של סימבולים זהים שאינם סוגריים
- נוכיח במקביל תכונה נוספת: כל פסוק מתחיל ומסתיים בפסוק אלמנטרי או סוגריים
- בסיס: עבור פסוק אלמנטרי $P$ אין סימבולים סמוכים, מתחיל ומסתיים בפסוק אלמנטרי
- נניח שנכון עבור הפסוקים $\varphi$ ו-$\psi$
  - עבור הפסוק $(\neg\varphi)$ – לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ל-$\varphi$ . $\varphi$ מתחיל ומסתיים בפסוק אלמנטרי / סוגריים ולכן לא נוצרת כפילות עם $\neg$ בהתחלה. בנוסף – מתחיל ומסתיים בסוגריים.
  - עבור $(\varphi@\psi)$ - באופן דומה. $\varphi$ מסתיים בסוגר/פסוק אלמנטרי – אין כפילות עם $@$. $\psi$ מתחיל בסוגר / פסוק אלמנטרי – אין כפילות עם $@$. בנוסף – מתחיל ומסתיים בסוגריים.

# הגדרת פונקציה באינדוקציה מבנית

- ניתן להגדיר פונ' $f$ מקבוצת הפסוקים לקב' A כלשהי באמצעות אינדוקציה מבנית:
  - מגדירים את $f$ מקב' הפסוקים האלמנטריים לקב' A
  - מגדירים את $f(\neg\varphi)$ בהתבסס על הערך של $f(\varphi)$
  - מגדירים את $f(\varphi @ \psi)$ עבור כל קשר דו מקומי @ בהתבסס על ערכי $f(\varphi)$ ו-$f(\psi)$ .

# דוגמה: הגדרת תתי הפסוקים שבסיפא

- עבור פסוק אלמנטרי P, $suffix(P) = \{P\}$
- אם $\varphi$ פסוק אזי

$$suffix(\neg\varphi) = suffix(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$$

- אם $\varphi$ ו-$\psi$ פסוקים אזי

$$suffix((\varphi@\psi)) = suffix(\psi) \cup \{(\varphi@\psi)\}$$

# עוד על מבנה פסוקים

- משפט הקריאה היחידה
- עומק קשרי
- עץ מבנה של פסוק
- סדרת יצירה

# דוגמה

- בנו עץ מבנה וסדרת יצירה לפסוק. מהו העומק הקשרי שלו?

$$(((\neg R \vee P) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \rightarrow R))$$

0: $(((\neg R \vee P) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \rightarrow R))$

1: $((\neg P \wedge Q) \rightarrow R)$ $\quad$ $((\neg R \vee P) \rightarrow Q)$

2: $R$ $\quad$ $(\neg P \wedge Q)$ $\quad$ $Q$ $\quad$ $(\neg R \vee P)$

3: $\neg P$ $\quad$ $Q$ $\quad$ $\neg R$ $\quad$ $P$

4: $P$ $\quad$ $R$

עומק קשרי 4

$R, P, Q, \neg R, \neg P, (\neg R \vee P), (\neg P \wedge Q), ((\neg R \vee P) \rightarrow Q), ((\neg P \wedge Q) \rightarrow R),$
$(((\neg R \vee P) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \rightarrow R))$

# תרגיל

- נגדיר שפה חדשה: הקשרים בשפה זו הם $\{\neg, \rightarrow\}$. בשפה זו אין סוגריים. נגדיר פסוק באופן הבא:
  - פסוק אלמנטרי הוא פסוק
  - אם $\varphi$ פסוק גם $\neg\varphi$ פסוק
  - אם $\varphi,\psi$ פסוקים גם $\neg\psi \rightarrow \varphi$ פסוק

א- נסחו את משפט ההוכחה באינדוקציה מבנית לשפה החדשה

ב- האם משפט הקריאה היחידה תקף לשפה החדשה?

ג- רישמו את כל עצי המבנה האפשריים לפסוק $\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

# תרגיל

א-  נסחו את משפט ההוכחה באינדוקציה מבנית לשפה החדשה

- פתרון:  משפט ההוכחה באינדוקציה מבנית:

תהי $R$ תכונה של מחרוזות. אם מתקיים:

- לכל פסוק אלמנטרי יש את התכונה $R$
- אם לפסוק $\varphi$ יש את התכונה $R$ אזי גם ל $\neg\varphi$ יש את התכונה $R$
- אם לפסוקים $\varphi,\psi$ יש את התכונה $R$ גם לפסוק $\neg\psi \to \varphi$ יש את התכונה $R$

אזי לכל פסוק יש את התכונה $R$

# תרגיל

- ב- האם משפט הקריאה היחידה תקף לשפה החדשה?
- ג- רישמו את כל עצי המבנה האפשריים לפסוק $\neg\neg\varphi \to \neg\psi$

• פתרון: ג' גם מהווה הוכחה שמשפט הקריאה היחידה לא תקף.
עצים אפשריים:

$$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$$
$$\neg\varphi \to \neg\psi$$
$$\neg\varphi \quad \psi$$
$$\varphi \quad \psi$$

$$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$$
$$\neg\varphi \to \neg\psi$$
$$\varphi \to \neg\psi$$
$$\varphi \quad \psi$$

$$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$$
$$\neg\neg\varphi \quad \psi$$
$$\neg\varphi \quad \psi$$
$$\varphi \quad \psi$$

# יחידה 3 – פירוש השפה הפסוקית

# פירוש השפה הפסוקית

- כל פסוק אלמנטרי מייצג משפט או טענה כלשהי
  - $P$ – אני אוכל הרבה ממתקים
  - $Q$ – מי שאוכל הרבה ממתקים משמין
  - $R$ – אני אשמין

$$((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

- אני אוכל הרבה ממתקים וגם מי שאוכל הרבה ממתקים משמין ולכן אני אשמין
- אותנו מעניין רק ערכי האמת של הפסוקים, בהצרנה רק חשוב לנו עם הפסוק $T$ או $F$ ולכן לא נתעניין בפירוש הטענות בשפה הטבעית.

# מודל / פירוש בלוגיקה פסוקית

- פירוש / מודל בשפה – פונ' $M$ מקב' הפסוקים האלמנטריים לערכי אמת $\{T,F\}$
- אם ערך האמת של $P$ במודל $M$ הוא $T$ נסמן $M(P) = T$ או $M \vDash P$
- אם ערך האמת של $P$ במודל $M$ הוא $F$ נסמן $M(P) = F$ או $M \nvDash P$
- נגדיר את ערך האמת של פסוקים מורכבים באינדוקציה מבנית:
  - אם $\varphi = \neg\psi$ אזי $M(\varphi) = T$ אם"ם $M(\psi) = F$
  - אם $M \vDash \varphi = (\psi \wedge \theta)$ אם"ם שני הפסוקים מקבלים ערך $T$
  - אם $M \vDash \varphi = (\psi \vee \theta)$ אם"ם אחד מהפסוקים לפחות מקבל ערך $T$
  - אם $M \vDash \varphi = (\psi \rightarrow \theta)$ אם"ם $\theta$ מקבל ערך $T$ או $\psi$ $F$
  - אם $M \vDash \varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$ אם"ם לשני הפסוקים אותו ערך אמת

# טבלאות האמת של הקשרים

- איך נחשב את ערך האמת של פסוק?
- ניתן לרשום את סדרת היצירה של הפסוק, ולחשב את ערך האמת על פי טבלאות האמת של הקשרים:

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| F | T |
| T | F |

| $P$ | $Q$ | $(P \vee Q)$ | $(P \wedge Q)$ | $(P \longrightarrow Q)$ | $(P \leftrightarrow Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T | F |
| T | F | T | F | F | F |
| T | T | T | T | T | T |

# דוגמאות

- נתון: $M1(P) = T, M1(Q) = F, M1(R) = T$
- מה ערך האמת של הפסוקים הבאים ב$M1$?

$$((P \wedge \neg Q) \leftrightarrow R)$$
$$((\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow R)$$
$$((P \vee \neg Q) \rightarrow R)$$
$$((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R)$$
$$((P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (R \wedge \neg Q))$$

# דוגמאות

- נתון: $M2(P) = T, M2(Q) = T, M2(R) = F$
- מה ערך האמת של הפסוקים הבאים ב$M2$?

$$((P \land \neg Q) \leftrightarrow R)$$
$$((\neg P \land \neg Q) \leftrightarrow R)$$
$$((P \lor \neg Q) \to R)$$
$$((P \land \neg Q) \to \neg R)$$
$$((P \land \neg Q) \leftrightarrow (R \land \neg Q))$$

# טבלאות אמת

- דרך שיטתית לחישוב ערך האמת של פסוק. לפסוק בעל $n$ פסוקים אלמנטריים וסדרת בניה באורך $k$ נבנה טבלת אמת עם $k$ טורים ו-$2^n$ שורות.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg Q$ | $(P \vee \neg Q)$ | $((P \vee \neg Q) \rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | T | F |
| F | F | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | F |
| T | F | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | F |
| T | T | T | F | T | T |

# טבלאות אמת

- בנו את טבלת האמת של הפסוק $((\neg P \land Q) \to (P \lor R))$

| **P** | **Q** | **R** | $\neg \boldsymbol{P}$ | $(\neg P \land Q)$ | $(P \lor R)$ | $((\neg P \land Q) \to (P \lor R))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | T | F | F |
| F | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | T |
| T | F | T | F | F | T | T |
| T | T | F | F | F | T | T |
| T | T | T | F | F | T | T |

# אמת לוגית ושקילות לוגית

- טאוטולוגיה: אמת לוגית, פסוק שעבור כל מודל $M$ מקבל $\varphi \vDash M$ , כלומר אמיתי בכל מודל. נסמן $\vDash \varphi$, אחרת נסמן $\nvDash \varphi$
- סתירה לוגית: פסוק שקרי בכל מודל
- $\varphi$ טאוטולוגיה אם"ם $\neg\varphi$ סתירה
- פסוקים שקולים לוגית: $\varphi$ ו-$\psi$ שקולים לוגית אם הם נכונים בדיוק באותם מודלים. $\psi \equiv \varphi$ אם"ם $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$
- פסוק ספיק: פסוק $\varphi$ נקרא ספיק אם הוא אינו סתירה, יש מודל המספק אותו

# תרגיל – האם הפסוקים הבאים טאוטולוגיות?

$$((\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi))$$

| $\varphi$ | $\psi$ | $\neg\varphi$ | $(\varphi \rightarrow \psi)$ | $(\neg\varphi \vee \psi)$ | $((\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T |
| T | T | F | T | T | T |

$$((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \vee \psi))$$

| $\varphi$ | $\psi$ | $\neg\varphi$ | $(\varphi \rightarrow \psi)$ | $(\neg\varphi \vee \psi)$ | $((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \vee \psi))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | F |
| T | T | F | T | T | T |

# ספיקות - תרגילים

- נתון $\varphi$ ו-$\psi$ ספיקים. איזה מהפסוקים הבאים ספיקים בהכרח?
  - $(\varphi \vee \psi)$
    - כן. $\varphi$ ספיק, מכאן קיים מודל M המספק אותו, מודל זה מספק את $(\varphi \vee \psi)$.
  - $(\varphi \wedge \psi)$
    - לא. למשל $\varphi = P$ ו $\psi = \neg P$ כל פסוק ספיק אבל אין מודל שמספק את שניהם
- נתון $(\varphi \rightarrow \psi)$ ו- $\varphi$ ספיקים. האם בהכרח $\psi$ ספיק?
  - לא. למשל $\varphi = P$ ו $\psi = (P \wedge \neg P)$

# טאוטולוגיה - תרגילים

- נתון $(\varphi \to \psi)$ ו- $\varphi$ טאוטולוגיות. האם בהכרח $\psi$ טאוטולוגיה?
  - כן. נניח בשלילה שלא טאוטולוגיה, כלומר קיים מודל $M$ שבו $M(\psi) = \mathrm{F}$. אבל, $\models (\varphi \to \psi)$ ולכן ב$M$ $(\varphi \to \psi)$ מקבל ערך $T$ , ואם $\psi$ מקבל ערך $F$ אז $\varphi$ צריך לקבל ערך $F$, בסתירה לכך ש-$\models \varphi$
- נתון $(\varphi \to \psi)$ טאוטולוגיה ו- $\varphi$ סתירה. מה ניתן לומר על $\psi$?
  - שום דבר, אם $\varphi$ סתירה מתקבל ש-$(\varphi \to \psi)$ טאוטולוגיה ללא תלות ב $\psi$

# שקילויות לוגיות שימושיות (עמ' 117)

**רשימת שקילויות לוגיות בסיסיות**

להלן רשימה של כמה שקילויות שימושיות:

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
2. אם $\neg\varphi \equiv \psi$ הרי $\varphi \equiv \neg\psi$
3. $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
4. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \to \psi)$
5. $\neg(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$

'5. $\neg(\varphi \to \neg\psi) \equiv (\varphi \wedge \psi)$

6. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

'6. $(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

7. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

'7. $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

8. $[\varphi \vee (\psi \wedge \theta)] \equiv [(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)]$
9. $[\varphi \wedge (\psi \vee \theta)] \equiv [(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)]$
10. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \equiv (\psi \to \varphi)$
11. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv [(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)]$
12. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv [(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\psi \wedge \neg\varphi)]$

# אמת לוגית ושקילות לוגית – תרגיל

- יהי $\varphi$ פסוק שהקשרים היחידים המופיעים בו הם $\{\neg, \vee, \wedge\}$. יהי $\varphi*$ הפסוק שבו הוחלפו כל הקשרים $\wedge$ ו-$\vee$ אחד בשני, וכל פסוק אלמנטרי מוחלף בשלילתו.
  - הוכיחו באינדוקציה מבנית ש $\varphi^* \equiv \neg\varphi$ שקולים לוגית
  - תנו דוגמה לפסוק $\varphi$ מורכב שאינו סתירה ואינו טאוטולוגיה
  - מיצאו פסוק שקול לוגית לפסוק בסעיף ב'
- פתרון סעיף א':
  - עבור פסוק אלמנטרי $P$, $P^* = \neg P$ (כל פסוק אלמנטרי מוחלף בשלילתו)
  - עבור $\varphi = \psi \vee \theta$ : $\varphi^* = (\psi^* \wedge \theta^*) \equiv (\neg\psi \wedge \neg\theta) \equiv \neg(\psi \vee \theta) = \neg\varphi$
  - עבור $\varphi = \psi \wedge \theta$ : $\varphi^* = (\psi^* \vee \theta^*) \equiv (\neg\psi \vee \neg\theta) \equiv \neg(\psi \wedge \theta) = \neg\varphi$
- פתרון סעיפים ב', ג': $(\neg\psi \wedge \neg\theta) \equiv \neg(\psi \vee \theta)$

# לוקליות ערך האמת, משפט ההצבה

- מודל של קבוצת פסוקים: אם $K = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ קבוצת פסוקים, $M$ מודל של $K$, ומסומן $M \vDash K$ אם"ם $M$ מספק את כל הפסוקים ב$K$.
- לוקליות ערך האמת: ערך האמת של פסוק תלוי רק בפסוקים האלמנטריים הנמצאים בו.
- בשיעור הקודם הוכחנו שאם בפסוק $\varphi$ מחליפים תת פסוק $\psi$ בתת פסוק $\psi'$ מתקבל פסוק חדש $\varphi'$.
- משפט ההצבה: כל מודל המקיים $M(\psi) = M(\psi')$ מקיים גם $M(\varphi) = M(\varphi')$

# לוקליות ערך האמת - תרגיל

- נתונים פסוקים $\varphi,\psi$ כך ש-$P$ הוא הפסוק האלמנטרי היחיד המשותף לשניהם. יש להוכיח אם $\vDash (P \to (\varphi \to \psi))$ אזי $\vDash (P \to \neg\varphi)$ או $\vDash (P \to \psi)$
- פתרון: נניח בשלילה $(P \to \neg\varphi)$ ו-$(P \to \psi)$ לא טאוטולוגיות $\Longleftarrow$
קיימים $M1, M2$ כך ש$(P \to \neg\varphi) \nvDash M1$ ו-$(P \to \psi) \nvDash M2$
בשני המודלים הערך של $P$ חייב להיות $T$
נבנה מודל $M3$ המקיים $M3(P) = T$. עבור כל שאר הפסוקים ב$\varphi$ מתלכד עם $M1$, ועבור כל שאר הפסוקים ב $\psi$ מתלכד עם $M2$
מלוקליות ערך האמת מתקיים $M3 \nvDash (P \to \neg\varphi)$ ו$M3 \nvDash (P \to \psi)$
מכאן $M3(\varphi) = \mathrm{F}$, $M3(\psi) = \mathrm{T}$ ומכאן $\mathrm{M3} \nvDash \left(P \to (\varphi \to \psi)\right)$
סתירה

# מודל של קב' פסוקים - תרגיל

- תהי $K$ קבוצת הפסוקים $K=\{(P_i \to P_j) \mid i,j \in N\}$
- נגדיר 3 מודלים: $M_T, M_F, M_{even}$ . איזה מההמודלים הם מודלים של $K$?
  - $K \models M_T$ כי לכל i,j מתקיים $M_T\left(\left(P_i \to P_j\right)\right) = T$
  - $K \models M_F$ כי לכל i,j מתקיים $M_F\left(\left(P_i \to P_j\right)\right) = T$
  - $K \not\models M_{even}$ כי למשל $M_{\text{even}}\left((P_2 \to P_3)\right) = F$
- איזה מודלים יספקו את K?
  - רק $M_T$ ו $M_F$ . כל מודל אחר לא יספק את $K$.

# מודל של קב' פסוקים - תרגיל

- תהי $K$ קבוצת הפסוקים $K = \{(\neg P_i \rightarrow P_j) \mid i,j \in N\}$
- איזה מודלים מספקים את $K$?
  - $K \vDash M_T$ כי לכל i,j מתקיים $M_T((\neg P_i \rightarrow P_j)) = T$
  - $K \nvDash M_F$ כי לכל i,j מתקיים $M_F((\neg P_i \rightarrow P_j)) = \mathrm{F}$
  - המודלים המספקים את $K$ – כל המודלים עם ערך F אחד לכל היותר

# מודל של קבוצת פסוקים – תרגיל 2

- הוכיחו או הפריכו: לכל קב' פסוקים $\Sigma$ קיימת תת קבוצה $\Gamma \subset \Sigma$ כך שלכל מודל $M$ מתקיים $M \vDash \Sigma$ אם"ם $M \vDash \Gamma$
- לא. נסתכל למשל על $\Sigma = \{P, \neg P\}$ לא קיים מודל המספק אותה, אולם לכל תת קבוצה ממש קיים מודל

# צורה נורמלית

- קוניונקציה מרובה: $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \cdots \land \varphi_n$
  - $M \vDash \varphi_1 \land \varphi_2 \land \cdots \land \varphi_n \Leftrightarrow \forall i\ M \vDash \varphi_i$
- דיסיונקציה מרובה: $\varphi_1 \lor \varphi_2 \lor \cdots \lor \varphi_n$
  - $M \vDash \varphi_1 \lor \varphi_2 \lor \cdots \lor \varphi_n \Leftrightarrow \exists i\ M \vDash \varphi_i$
- פסוק בסיסי: $P$ , $\neg P$
- קוניונקציה פשוטה: $P_1 \land \neg P_2 \land \cdots \land P_n$
- פסוק דיסיונקטיבי נורמלי: $(P_1 \land \neg P_2) \lor (P_1 \land P_2 \land \neg P_3) \lor P_4$
- קוניונקציה פשוטה מלאה: $P_1 \land P_2 \land \neg P_3 \land \neg P_4$

# בניית פסוק שקול כפסוק דיסיונקטיבי נורמלי

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg \boldsymbol{Q}$ | $(\boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q})$ | $((\boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{R})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | T | F |
| F | F | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | F |
| T | F | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | F |
| T | T | T | F | T | T |

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

# בניית פסוק שקול כפסוק דיסיונקטיבי נורמלי

| $P$ | $R$ | $\neg\boldsymbol{R}$ | $(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{R})$ | $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{R})$ | $(\boldsymbol{R} \vee \neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{R}))$ | $((\boldsymbol{R} \vee \neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{R})) \wedge \boldsymbol{P})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | T | T | F |
| F | T | F | F | T | T | F |
| T | F | T | T | F | F | F |
| T | T | F | F | T | T | T |

$$(P \wedge R)$$

# נירמול דיסיונקטיבי של פסוק

- ממירים כל $\rightarrow$ לפי זהויות (3) ו-(5):

$$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$$
$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$$

וממירים כל $\leftrightarrow$ לפי זהות (12):

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$$

- מזיזים את סימני השלילה פנימה עד לפסוקים אלמנטריים (מחיקת כפילויות, הכנסה לסוגריים על פי דה-מורגן, זהויות (6)-(7))

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

- מכניסים כל קוניונקציה שלפני דיסיונקציה עפ"י זהות (9):

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$$

# נירמול דיסיונקטיבי של פסוק - דוגמא

- המירו את הפסוק $((P \vee \neg Q) \to R)$ לצורה דיסיונקטיבית נורמלית
- נעבוד לפי השלבים:

$$((P \vee \neg Q) \to R)$$
$$(\neg(P \vee \neg Q) \vee R)$$
$$((\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee R)$$
$$((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

# נירמול דיסיונקטיבי של פסוק - דוגמא

- המירו את הפסוק $(P \to Q) \land (Q \to P)$ לצורה דיסיונקטיבית נורמלית
- נעבוד לפי השלבים:

$$(P \to Q) \land (Q \to P)$$
$$(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P)$$
$$((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land P)$$
$$(\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q) \lor (\neg P \land P) \lor (Q \land P)$$
$$(\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land P)$$

# קבוצות מלאות של קשרים

- קבוצה מלאה של קשרים היא קבוצת קשרים שניתן לבטא באמצעותה כל קשר שניתן לחשוב עליו / כל טבלת אמת
- כל קבוצה המכילה קבוצה מלאה היא קבוצה מלאה
- כל קבוצה חלקית לקבוצה לא מלאה אינה מלאה
- כל קבוצה שניתן לבטא בעזרתה את כל הקשרים של קבוצה מלאה היא מלאה
- הקבוצות $\{\neg, \vee\}$ ו-$\{\neg, \rightarrow\}$ הן קבוצות מלאות

# נוכיח שהקבוצה $\{\neg, \vee\}$ מלאה

- נוכיח באינדוקציה מבנית
- בסיס: עבור פסוק אלמנטרי $P$ אין קשרים ולכן מתקבל
- נניח שנכון עבור הפסוקים $\varphi$ ו $\psi$ , כלומר קיימים $\varphi' \equiv \varphi$ כך ש $\varphi'$ מכיל רק את הקשרים $\{\neg, \vee\}$ ו $\psi' \equiv \psi$ כך ש $\psi'$ מכיל רק את הקשרים $\{\neg, \vee\}$
  - עבור הפסוק $\neg\varphi$: $\neg\varphi' \equiv \neg\varphi$ פסוק שקול רק עם $\{\neg, \vee\}$
  - עבור $(\varphi \vee \psi)$: מתקיים $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi' \vee \psi')$ המכיל רק קשרים מותרים
  - עבור $(\varphi \wedge \psi)$: מתקיים
    $$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi' \wedge \psi') \equiv \neg\neg(\varphi' \wedge \psi') \equiv \neg(\neg\varphi' \vee \neg\psi')$$
  - עבור $(\varphi \rightarrow \psi)$: מתקיים
    $$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi' \rightarrow \psi') \equiv (\neg\varphi' \vee \psi')$$
  - עבור $(\varphi \leftrightarrow \psi)$: מתקיים
    $$(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi' \leftrightarrow \psi') \equiv \left((\varphi' \wedge \psi') \vee (\neg\varphi' \wedge \neg\psi')\right)$$

# הוכחה עבור $\{\neg, \rightarrow\}$ , $\{\neg, \vee, \wedge\}$

- הוכח/י שהקבוצה $\{\neg, \vee, \wedge\}$ מלאה
  - מתקבל כי מכילה את הקבוצה המלאה $\{\neg, \vee\}$
  - הראינו ישירות בנרמול דיסיונקטיבי של פסוק
- הוכח/י שהקבוצה $\{\neg, \rightarrow\}$ מלאה
  - מתקבל בעזרת שיוויון מס' 3:

$$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$$

# קב' מלאות של קשרים – תרגיל 1

- הוכח/י שהקבוצה $\{\vee, \wedge\}$ לא מלאה
- נוכיח באינדוקציה מבנית שלא ניתן לבטא שום טבלת אמת שבה במודל $M_T$ מתקבל ערך $F$
- בסיס: עבור פסוק אלמנטרי $P$, $P$ מקבל ערך $T$ ב$M_T$
- נניח שנכון עבור הפסוקים $\varphi$ ו$\psi$
  - עבור $(\varphi \vee \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה $\varphi$ ו-$\psi$ מקבלים ערך $T$ ב$M_T$ ולכן גם $(\varphi \vee \psi)$ (על פי טבלת האמת של $\vee$)
  - עבור $(\varphi \wedge \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה $\varphi$ ו-$\psi$ מקבלים ערך $T$ ב$M_T$ ולכן גם $(\varphi \wedge \psi)$ (על פי טבלת האמת של $\wedge$)

# קב' מלאות של קשרים – תרגיל 2

- הוכח/י שהקבוצה $\{\neg, \leftrightarrow\}$ לא מלאה
- הוכחה: לכל מודל $M$ נסמן ב$M'$ את המודל המשלים (כל פסוק אלמנטרי שמקבל ערך $T$ יקבל ערך $F$ ולהיפך). נוכיח שכל פסוק המכיל רק את קשרים $\{\neg, \leftrightarrow\}$ מקבל בכל טבלת האמת ערכי אמת זהים למודל ולמודלים המשלימים, או מקבל ערכי אמת הפוכים מהמודל המשלים

| P | Q | ערכי אמת זהים למשלים | ערכי אמת הפוכים למשלים | לא זה ולא זה |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T |
| F | T | F | F | F |
| T | F | F | T | T |
| T | T | T | F | T |

# קב' מלאות של קשרים – תרגיל 2

- הוכח/י שהקבוצה $\{\neg, \leftrightarrow\}$ לא מלאה
- הוכחה:
  - בסיס: עבור פסוק אלמנטרי $P$ – אין קשרים בכלל, מקבל את הטבלה ההפוכה למשלים (עבור המודל $M(P) = T$ מקבל ערך $T$ ועבור המודל המשלים בו $M(P) = F$ מקבל ערך $F$)
  - נניח שנכון עבור $\varphi,\psi$.
    - עבור $\neg\varphi$: הטבלה של $\varphi$ מתהפכת. אם $\varphi$ קיבל ערכי אמת זהים למשלים הוא יקבל ערכים הפוכים ולהיפך.
    - עבור $(\varphi \leftrightarrow \psi)$: נניח ששניהם זהים למשלים. מכאן אם במודל $M$ כלשהו $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ יקבל ערך $T$, גם במשלים הוא יקבל ערך $T$, כלומר – זהה למשלים. אם שניהם הפוכים מהמשלים – כנ"ל. אם אחד כמו המשלים והשני הפוך – אם במודל $M$ $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ יקבל ערך $T$ אזי במשלים הוא יקבל ערך $F$ ולהיפך (אחד יתהפך והשני לא).

# קב' מלאות של קשרים – תרגיל 3

- הוכח/י שהקבוצות {NAND} ו-{NOR} מלאות
- טבלת האמת של הקשרים:

| $P$ | $Q$ | $P\ NAND\ Q$ | $P\ NOR\ Q$ |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | T | F |
| T | F | T | F |
| T | T | F | F |

- "נסמלץ" את {¬, V} בעזרת NAND:

$$A\ NAND\ A \equiv\ \neg A$$
$$A \vee B \equiv (A\ NAND\ A) NAND (B\ NAND\ B)$$

# קב' מלאות של קשרים – תרגיל 3

- הוכח/י שהקבוצות {NAND} ו-{NOR} מלאות
- "נסמלץ" את $\{\neg, \rightarrow\}$ בעזרת NOR:

| $P$ | $Q$ | $P\ NOR\ Q$ | $\neg P$ | $P\ NOR\ P$ | $(P \rightarrow Q)$ | (P NOR P)NOR Q | ((P NOR P)NOR Q)NOR((P NOR P)NOR Q) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | $T$ | $T$ | T | F | T |
| F | T | F | $T$ | $T$ | T | F | T |
| T | F | F | $F$ | $F$ | F | T | F |
| T | T | F | $F$ | $F$ | T | F | T |

# דיאלקטים

- ניתן להוריד / להוסיף קשרים (למשל XOR המסומן ב$\otimes$)
- ניתן להגדיר שפה פסוקית עבור כל מערכת קשרים שלמה. למשל עבור {NAND}:
  - כל פסוק אלמנטרי הוא פסוק
  - אם $\varphi,\psi$ פסוקים גם $(\varphi\ NAND\ \psi)$ פסוק
- ניתן להגדיר שפות עם תחביר שונה:
  - השפה הפסוקית המלאה (סוגריים גם מסביב לשלילה)
  - השפה הפולנית:
    - כל פסוק אלמנטרי הוא פסוק
    - אם $\varphi$ פסוק גם$\neg\varphi$ פסוק
    - אם $\varphi,\psi$ פסוקים גם $@\varphi\psi$ פסוק

# נביעה לוגית ומשפט הקומפקטיות

- הפסוק $\psi$ נובע לוגית מ-$\varphi$ / $\varphi$ גורר לוגית את $\psi$ אם"ם $\forall M\ M \vDash \varphi \implies M \vDash \psi$. נסמן $\varphi \implies \psi$
- $\psi \implies \varphi$ אמ"ם $\vDash (\varphi \to \psi)$
- אם $K$ קבוצת פסוקים $K = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$
  $K \implies \psi$ אמ"ם בכל מודל שבו $K$ נכונים גם $\psi$ נכון.
- משפט הקומפקטיות: אם $K \implies \psi$ יש קב' חלקית ל$K$, $K'$, סופית, המקיימת $K' \implies \psi$ כלומר $\vDash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi)$

# נביעה לוגית - דוגמה

- איזה פסוקים נובעים לוגית מהפסוק $P$?
  - $(P \vee Q)$
  - $(P \wedge Q)$
  - $(P \rightarrow Q)$
  - $(Q \rightarrow P)$
  - $(P \rightarrow P)$
  - $(Q \rightarrow Q)$

תודה רבה ☺