לוגיקה למדעי המחשב – שיעור 3:
תורת ההוכחה, שלמות ונאותות

דוד קסלר 054-4511925

חזרה קצרה על השיעור הקודם

מודל / פירוש בלוגיקה פסוקית

- פירוש / מודל בשפה – פונ' M מקב' הפסוקים האלמנטריים לערכי אמת $\{T,F\}$
- אם ערך האמת של P במודל M הוא T נסמן $M(P) = T$ או $M \vDash P$
- אם ערך האמת של P במודל M הוא F נסמן $M(P) = F$ או $M \nvDash P$
- נגדיר את ערך האמת של פסוקים מורכבים באינדוקציה מבנית:
  - אם $\varphi = \neg\psi$ אזי $M(\varphi) = T$ אם"ם $M(\psi) = F$
  - אם $\varphi = (\psi \wedge \theta)$ $M \vDash$ אם"ם שני הפסוקים מקבלים ערך T
  - אם $\varphi = (\psi \vee \theta)$ $M \vDash$ אם"ם אחד מהפסוקים לפחות מקבל ערך T
  - אם $\varphi = (\psi \rightarrow \theta)$ $M \vDash$ אם"ם θ מקבל ערך T או ψ F
  - אם $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$ $M \vDash$ אם"ם לשני הפסוקים אותו ערך אמת

אמת לוגית ושקילות לוגית

- טאוטולוגיה: אמת לוגית, פסוק שעבור כל מודל M מקבל $M \models \varphi$, כלומר אמיתי בכל מודל. נסמן $\models \varphi$, אחרת נסמן $\not\models \varphi$
- סתירה לוגית: פסוק שקרי בכל מודל
- φ טאוטולוגיה אם"ם $\neg\varphi$ סתירה
- פסוקים שקולים לוגית: φ ו-ψ שקולים לוגית אם הם נכונים בדיוק באותם מודלים. $\psi \equiv \varphi$ אם"ם $\models \varphi \leftrightarrow \psi$
- פסוק ספיק: פסוק φ נקרא ספיק אם הוא אינו סתירה, יש מודל המספק אותו

צורה נורמלית

- קוניונקציה מרובה: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$
  - $M \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Leftrightarrow \forall i\ M \vDash \varphi_i$
- דיסיונקציה מרובה: $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$
  - $M \vDash \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n \Leftrightarrow \exists i\ M \vDash \varphi_i$
- פסוק בסיסי: P , $\neg P$
- קוניונקציה פשוטה: $P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$
- פסוק דיסיונקטיבי נורמלי: $(P_1 \wedge \neg P_2) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee P_4$
- קוניונקציה פשוטה מלאה: $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \wedge \neg P_4$

קבוצות מלאות של קשרים

- קבוצה מלאה של קשרים היא קבוצת קשרים שניתן לבטא באמצעותה כל קשר שניתן לחשוב עליו / כל טבלת אמת
- כל קבוצה המכילה קבוצה מלאה היא קבוצה מלאה
- כל קבוצה חלקית לקבוצה לא מלאה אינה מלאה
- כל קבוצה שניתן לבטא בעזרתה את כל הקשרים של קבוצה מלאה היא מלאה
- הקבוצות $\{\neg, \vee\}$ ו-$\{\neg, \rightarrow\}$ הן קבוצות מלאות

תרגיל

א- נתונה קבוצת הקשרים הבאה: $\{\neg,\Delta\}$. הקשר Δ מוגדר באופן הבא לכל זוג פסוקים φ,ψ ולכל מודל M: $M(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = M(\varphi\Delta\psi)$. האם קבוצת הקשרים $\{\neg,\Delta\}$ מלאה?

- פתרון: נסמלץ את $\rightarrow$ באמצעות $\{\neg,\Delta\}$:

P	Q	$\neg P$	$(P \rightarrow Q)$	$\neg P \Delta Q$	$\neg(\neg P \Delta Q)$
F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F
T	T	F	T	F	T

- ידוע ש$\{\neg, \rightarrow\}$ מערכת קשרים מלאה. שלילה כבר יש ואת $\rightarrow$ ניתן לסמלץ

תרגיל

- ב- האם ניתן לכתוב את הפסוק $(p \rightarrow (q \wedge t))$ בעזרת מערכת הקשרים המתוארת בסעיף א'? אם כן, כיתבו, אם לא נמקו

- פתרון: כמובן שאפשר לכתוב – הוכחנו שקבוצת הקשרים מלאה.
- הפסוק: שקילות 5: $(\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. נמיר $\wedge$ ואז את ה-$\rightarrow$:

$$(p \rightarrow (q \wedge t)) \equiv (p \rightarrow (q \wedge \neg\neg t)) \equiv$$
$$\big(p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg t)\big) \equiv \big(p \rightarrow \neg\neg(\neg q \Delta \neg t)\big) \equiv \big(p \rightarrow (\neg q \Delta \neg t)\big)$$
$$\equiv \neg(\neg p \Delta (\neg q \Delta \neg t))$$

תרגיל

ג- האם קבוצת הקשרים $\{\leftrightarrow , \rightarrow\}$ היא מלאה? הוכיחו את תשובתכם

- פתרון זהה לפתרון של $\{\wedge , \vee\}$ מהשיעור הקודם.
- נוכיח באינדוקציה מבנית שלא ניתן לבטא שום טבלת אמת שבה במודל M_T מתקבל ערך F
- בסיס: עבור פסוק אלמנטרי P, P מקבל ערך T בM_T
- נניח שנכון עבור הפסוקים φ וψ
  - עבור $(\varphi \rightarrow \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה φ ו-ψ מקבלים ערך T בM_T ולכן גם $(\varphi \rightarrow \psi)$ (על פי טבלת האמת של $\rightarrow$)
  - עבור $(\varphi \leftrightarrow \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה φ ו-ψ מקבלים ערך T בM_T ולכן גם $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ (על פי טבלת האמת של$\leftrightarrow$)

נביעה לוגית ומשפט הקומפקטיות

- הפסוק ψ נובע לוגית מ-φ / φ גורר לוגית את ψ אמ"ם $\forall M\ M \vDash \varphi \Longrightarrow M \vDash \psi$. נסמן $\varphi \Longrightarrow \psi$
- $\varphi \Longrightarrow \psi$ אמ"ם $\vDash (\varphi \rightarrow \psi)$
- אם K קבוצת פסוקים $K = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$
  $K \Longrightarrow \psi$ אמ"ם בכל מודל שבו K נכונים גם ψ נכון.
- משפט הקומפקטיות: אם $K \Longrightarrow \psi$ יש קב' חלקית ל-K, K', סופית, המקיימת $K' \Longrightarrow \psi$ כלומר $\vDash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi)$

יחידה 4 – לוגיקה פסוקית – תורת ההוכחה

מנגנון הוכחה פורמלי

- מנגנון הוכחה פורמלי: קב' אקסיומות וכללי היסק / צעדי גזירה
- סדרת הוכחה פורמלית: סדרה המתקבלת רק מהאקסיומות ומצעדי הגזירה נקראת סדרת הוכחה פורמלית של הפסוק האחרון
- מנגנון הוכחה פורמלי נקרא "תחשיב"

מנגנון הוכחה פורמלי - תכונות

- מה היינו רוצים ממנגנון הוכחה מוצלח?
  - כל הוכחה באורך סופי
  - כל הוכחה היא חד משמעית
  - קל לבדוק נכונות של הוכחה
  - לכל טענה נכונה יש הוכחה (שלמות)
  - כל מה שניתן להוכחה הוא נכון (נאותות)

תחשיב הילברט

- האקסיומות הלוגיות:

1. $\left(\varphi \to (\psi \to \varphi)\right)$
2. $((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)))$
3. $((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi))$

- כלל הגזירה היחיד MP:

$$\frac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi}$$

תרגיל – בחינה שפסוק הוא אקסיומה

- האם הפסוק $\big((\neg\varphi \to \theta) \to ((\mu \to \neg\eta) \to (\neg\varphi \to \theta))\big)$ הוא אקסיומה?
- נתחיל לבנות את עץ הבניה של הפסוק:

$$\big((\neg\varphi \to \theta) \to ((\mu \to \neg\eta) \to (\neg\varphi \to \theta))\big)$$

$$\underbrace{(\neg\varphi \to \theta)}_{\varphi} \qquad ((\mu \to \neg\eta) \to (\neg\varphi \to \theta))$$

$$\underbrace{(\mu \to \neg\eta)}_{\psi} \qquad \underbrace{(\neg\varphi \to \theta)}_{\varphi}$$

- מתקבל עץ הבניה של אקסיומה 1

הוכחה בתחשיב

- סדרת הוכחה מתוך K: כאשר K קבוצת פסוקים, סדרת הוכחה מתוך K היא סדרה בה כל פסוק הוא אקסיומה, פסוק מK או מתקבל מפסוקים קודמים בMP. אם קיימת סדרת הוכחה לφ מתוך K נסמן $K \vdash \varphi$. ל- φ נקרא משפט של K
- סדרת הוכחה בתחשיב: סדרת הוכחה מהקבוצה הריקה. אם קיימת סדרת הוכחה לφ נסמן $\vdash \varphi$. ל- φ נקרא משפט בתחשיב.

הוכחה בתחשיב - דוגמה

• הוכח את המשפט $(P \rightarrow P)$

(Ax. 2) 1. $((P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)))$

(Ax. 1) 2. $(P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P))$

(MP 1,2) 3. $((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$

(Ax. 1) 4. $(P \rightarrow (P \rightarrow P))$

(MP3,4) 5. $(P \rightarrow P)$

הוכחה מקבוצת פסוקים - דוגמה

- הוכח את φ מתוך $\{(\psi \rightarrow \varphi), \psi, \theta\}$

(הנחה) 1. $(\psi \rightarrow \varphi)$

(הנחה) 2. ψ

(MP 1,2) 3. φ

תכונות של הוכחות

- כל רישא של סדרת הוכחה היא סדרת הוכחה
- כל פסוק שמופיע בסדרת הוכחה הוא משפט של K
- שרשור סדרות הוכחה הוא סדרת הוכחה
- $\mathrm{K} \vdash \varphi, \mathrm{K} \subseteq L \implies L \vdash \varphi$
- אם $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ משפטים של K, וגם $K \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \psi$ אזי $K \vdash \psi$
- אם $\mathrm{K} \vdash \varphi$ קיימת קב' סופית $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ כך ש $\mathrm{K}' \vdash \varphi$

משפט הדדוקציה

- אם $K \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ אזי $K \vdash (\psi \to \varphi)$
- איך באמצעות משפט הדדוקציה נוכיח $(P \to P)$?
- דוגמה – טרנזיטיביות החץ: צ"ל $\{(\varphi \to \psi),(\psi \to \theta)\} \vdash (\varphi \to \theta)$

ממשפט הדדוקציה מספיק להראות: $\{(\varphi \to \psi),(\psi \to \theta),\varphi\} \vdash \theta$

(הנחה)	1. φ
(הנחה)	2. $(\varphi \to \psi)$
(MP1,2)	3. ψ
(הנחה)	4. $(\psi \to \theta)$
(MP3,4)	5. θ

משפט הדדוקציה - תרגיל

- הוכיחו $\vdash (\gamma \to ((\gamma \to \beta) \to (\beta \to \gamma)))$
- לפי משפט הדדוקציה מספיק להוכיח
  $\{\gamma\} \vdash ((\gamma \to \beta) \to (\beta \to \gamma))$
- לפי משפט הדדוקציה (נשתמש שוב) מספיק להוכיח
  $\{\gamma, (\gamma \to \beta)\} \vdash (\beta \to \gamma)$
- לפי משפט הדדוקציה (נשתמש שוב) מספיק להוכיח
  $\{\gamma, (\gamma \to \beta), \beta\} \vdash \gamma$
- הוכחה:

1. γ (הנחה)

עקביות

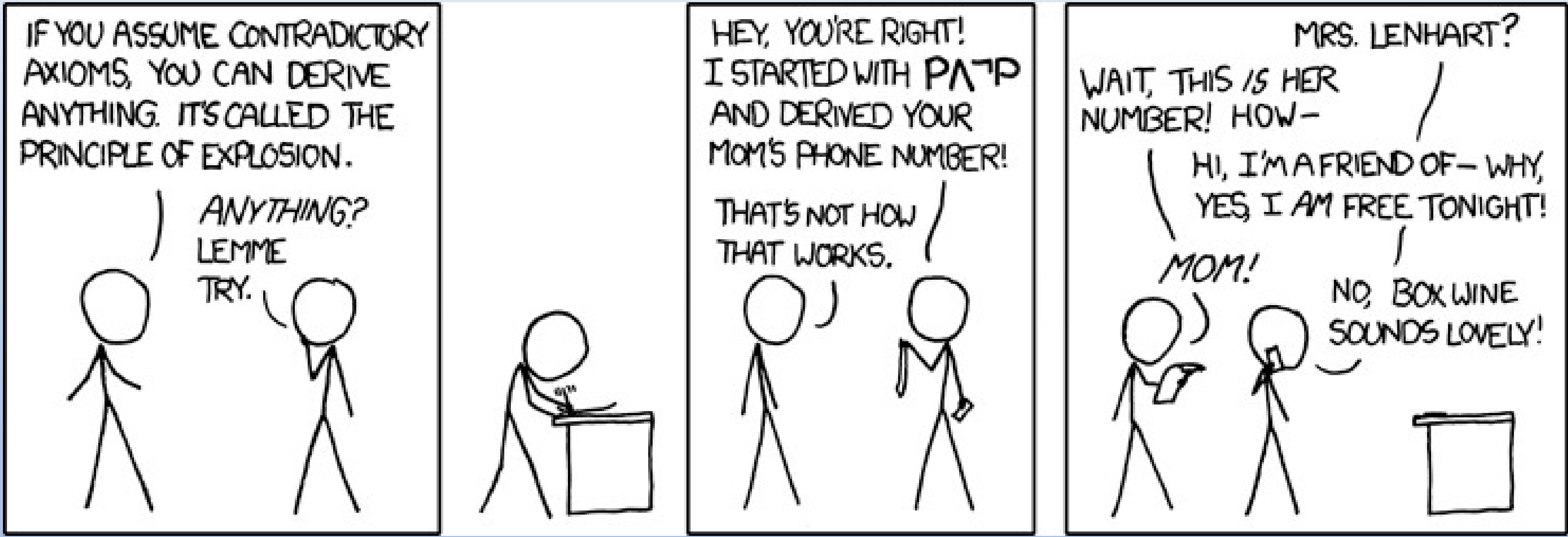
- קבוצת פסוקים K נקראת לא עקבית אם"ם קיים פסוק φ כך ש-$K \vdash \varphi$ וגם $K \vdash \neg\varphi$. אם לא קיים פסוק כזה, הקבוצה עקבית (קונסיסטנטית).
- קבוצה עקבית אם"ם יש לה לפחות מודל אחד
- קבוצה לא עקבית מוכיחה כל פסוק
- האם הקבוצה $\{P,Q,(P \rightarrow \neg Q)\}$ עקבית?
- האם הקבוצה $\{P,\neg Q\}$ עקבית?

עקביות

- נוכיח שקבוצה לא עקבית מוכיחה כל פסוק
- נוכיח את הפסוק ψ (כלשהו) בהנחה ש-$\mathrm{K} \vdash \varphi$ ו-$\mathrm{K} \vdash \neg\varphi$:

(הנחה)	1. $\neg\varphi$
(Ax.1)	2. $(\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$
(MP1,2)	3. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
(Ax.3)	4. $((\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$
(MP3,4)	5. $(\varphi \rightarrow \psi)$
(הנחה)	6. φ
(MP5,6)	7. ψ

Principle of explosion



נביעה לוגית - תרגיל

- הוכח או הפרך: $\Sigma \Rightarrow \alpha$ אם ורק אם אין מודל לקבוצת הפסוקים $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$
- נכון.
  - כיוון 1: אם מתקיים $\Sigma \Rightarrow \alpha$ אז בכל מודל M שבו קבוצת הפסוקים Σ מקבלת ערך T גם α מקבל ערך T ולכן $\neg\alpha$ מקבל ערך F
  - כיוון 2: אם אין מודל לקבוצה $\{\neg\alpha\} \cup \Sigma$ או ש-Σ לא עיקבית ואז $\Sigma \Rightarrow \alpha$ או ש-Σ עיקבית ואין מודל ל-$\{\neg\alpha\} \cup \Sigma$ ואז כל מודל של Σ הוא גם מודל של α ולכן $\Sigma \Rightarrow \alpha$.

משפט ההוכחה בדרך השלילה

- אם $K \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית אזי $\mathrm{K} \vdash \varphi$
- שימוש: נניח בשלילה $\neg\varphi$, נגיע לסתירה ב$\{\neg\varphi\}$ $K \cup$ ונסיק $\mathrm{K} \vdash \varphi$
- הוכחת המשפט: נבחר אקסיומה כלשהי, למשל $\theta = (P \to (P \to P))$. קב' לא עקבית מוכיחה כל פסוק, לכן בפרט אם $K \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית $K \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\theta$ ולפי משפט הדדוקציה $K \vdash (\neg\varphi \to \neg\theta)$

(דדוקציה)	1. $(\neg\varphi \to \neg\theta)$
(Ax.3)	2. $((\neg\varphi \to \neg\theta) \to (\theta \to \varphi))$
(MP1,2)	3. $(\theta \to \varphi)$
(Ax.1)	4. θ
(MP3,4)	5. φ

נאותות התחשיב

- לכל קבוצת פסוקים K ופסוק φ אם $\mathrm{K} \vdash \varphi$ אזי $\mathrm{K} \Longrightarrow \varphi$
- במילים אחרות – כל פסוק שניתן להוכיח הוא נכון, ובפרט אם $\vdash \varphi$ אזי $\models \varphi$. כל המשפטים שניתן להוכיח מהקבוצה הריקה הם טאוטולוגיות.
- אם לקבוצת פסוקים יש מודל היא עקבית
- הוכחה: מוכיחים את נכונות האקסיומות ואת נכונות כללי המעבר, ואז באינדוקציה על אורך ההוכחה

שלמות התחשיב ותורה שלמה

- לכל קבוצת פסוקים K ופסוק φ אם $K \Rightarrow \varphi$ אזי $K \vdash \varphi$.
- במילים אחרות – כל פסוק נכון ניתן להוכחה, ובפרט אם $\vDash \varphi$ אזי $\vdash \varphi$. כל הטאוטולוגיות ניתנות להוכחה מהקבוצה הריקה.

- תורה / מערכת אקסיומות: קבוצת פסוקים עקבית
- תורה שלמה: תורה שאם מניחים אותה כל פסוק ניתן להוכחה או להזמה (ניתן להוכיח את שלילתו)
  לתורה שלמה יש מודל אחד בדיוק

שלמות ונאותות – תרגיל 1

- האם ניתן להוכיח את הפסוק $(\neg(\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \theta))$?
- לא. הפסוק לא טאוטולוגיה. למשל, עבור $M(\varphi)=T, M(\theta)=F$ מקבל ערך F. על פי משפט הנאותות לא ניתן להוכיח אותו.
- האם ניתן להוכיח את הפסוק $(\neg(\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \neg\theta))$?
- כן – טאוטולוגיה (ניתן לבדוק עם טבלת אמת) ולכן לפי משפט השלמות ניתן להוכחה.

שלמות ונאותות – תרגיל 2

- נתונה מערכת הוכחה חדשה:
  - אקסיומות:

$$Ax1: \big(\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\alpha)\big)$$

$$Ax2: \big(\big(\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\alpha)\big) \to (\alpha \to \neg\alpha)\big)$$

  - כלל ההיסק MP

א- האם המערכת נאותה? (האם $\vdash \varphi \Longrightarrow \vDash \varphi$)

- פתרון: מתקיים $\vdash Ax2$ אבל $\nvDash Ax2$ (עבור M(α)=T)

שלמות ונאותות – תרגיל 2

- ב- עבור כל פסוק φ נגדיר φ^*: כמו φ לאחר מחיקת כל קשרי השלילה הוכיחו: $\vdash \varphi \Longrightarrow \vDash \varphi^*$

- פתרון: נוכיח בעזרת אינדוקציה מבנית על מבנה ההוכחה.
  - בסיס: $\vDash Ax2^*$ וגם $\vDash Ax1^*$. ניתן לבדוק בעזרת טבלת אמת
  - צעד האינדוקציה: נניח ש $\vdash \psi$ צריך להוכיח $\vDash \psi^*$.

    ψ התקבל מMP. על פי הנחת האינדוקציה:

    $\vdash \varphi \Longrightarrow \vDash \varphi^*$ וגם

    $\vdash (\varphi \to \psi) \Longrightarrow \vDash (\varphi \to \psi)^*$.

    מתקיים $(\varphi \to \psi)^* = (\varphi^* \to \psi^*)$ ומכיוון ש $\vDash \varphi^*$ לפי טבלת האמת של $\to$ מתקיים $\vDash \psi^*$

שלמות ונאותות – תרגיל 2

ג- הוכיחו שהמערכת לא שלמה

- פתרון: נניח בשלילה שהמערכת שלמה. מכאן – כל טאוטולוגיה ניתנת להוכחה. $\left((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)\right)$ $= \varphi$ טאוטולוגיה (אקסיומה 3) ולכן ניתנת להוכחה במערכת. מכאן, לפי סעיף ב' $\left((A \to B) \to (B \to A)\right)$ $\models \varphi^* =$ אבל, φ^* אינה טאוטולוגיה, והגענו לסתירה. הנחת השלילה אינה נכונה והמערכת לא שלמה.

משפט הקומפקטיות – נוסחים נוספים

- הנוסח שלמדנו: אם $K \Longrightarrow \psi$ יש קבוצה $K' \subseteq K$ סופית, המקיימת $K' \Longrightarrow \psi$ כלומר $\vDash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi)$
- אם K קבוצת פסוקים וכל קבוצה $K' \subseteq K$ סופית הינה בעלת מודל אזי יש מודל שבו כל פסוקי K נכונים
- נוסח נוסף: קבוצת פסוקים היא עקבית אם"ם כל תת קבוצה סופית שלה עקבית

משפט הקומפקטיות - תרגיל

- הוכיחו או הפריכו: לכל קב' פסוקים Σ קיימת תת קבוצה סופית $\Sigma \subseteq \Gamma$ כך שמתקיים Σ ספיקה אם"ם Γ ספיקה
- כן. אם Σ ספיקה קיים מודל המספק אותה, ומימלא מודל זה מספק גם כל תת קבוצה שלה. אם Σ לא ספיקה היא מוכיחה פסוק ושלילתו. ממשפט הקומפקטיות לכל אחד מהם קיימת קבוצה סופית ממנה הוא נובע. איחוד הקבוצות האלה מוכיח פסוק ושלילתו והוא אינו ספיק

תחשיב הפסוקים תרגילים מסכמים

תרגיל 1

- נתונה מערכת הוכחה חדשה D בשפה הפסוקית עם הקשרים $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:
  - אקסיומות:

$$Ax1: (\alpha \vee \neg\alpha)$$

$$Ax2: ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$$

  - כלל ההיסק MP

א- בדקו עבור כל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא יכיח בD. אם כן הוכיחו ואם לא הסבירו
  - $((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$
  - $\neg(\neg P \wedge \neg\neg P)$

ב- הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
  - עבור כל פסוק θ מתקיים אם $\vDash \theta$ אז $\vdash_D \theta$
  - עבור כל פסוק θ מתקיים אם $\Sigma \vDash \theta$ אז $\Sigma \vdash_D \theta$

תרגיל 1

א- בדקו עבור כל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא יכיח בD. אם כן הוכיחו ואם לא הסבירו

- $((P \land Q) \lor (P \to Q))$
- $\neg(\neg P \land \neg\neg P)$

• פתרון:

- נוכיח שהמערכת נאותה (נראה שהאקסיומות טאוטולוגיות ונציין שMP נכון ואפשר להוכיח באינדוקציה על מבנה ההוכחה). הפסוק אינו טאוטולוגיה (למשל M(P)=T, M(Q)=F) ולכן לא יכיח
- סדרת הוכחה:

$(Ax.1\ \alpha = P)$ 1. $(P \lor \neg P)$

$(Ax.2\ \alpha = P, \beta = \neg P)$ 2. $((P \lor \neg P) \to \neg(\neg P \land \neg\neg P))$

$(MP\ 1,2)$ 3. $\neg(\neg P \land \neg\neg P)$

תרגיל 1

ב- הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
- עבור כל פסוק θ מתקיים אם $\models \theta$ אז $\vdash_D \theta$
- עבור כל פסוק θ מתקיים אם $\Sigma \models \theta$ אז $\Sigma \vdash_D \theta$

- פתרון:
  - לא ניתן להוכיח במערכת פסוקים שהקשרים הראשיים שלהם לא מופיעים באקסיומות. נבחר טאוטולוגיה כזו (למשל $(\alpha \leftrightarrow \alpha)$). מצאנו פסוק שהוא טאוטולוגיה אבל לא יכיח.
  - הטאוטולוגיה שמצאנו קודם סותרת עבור $\Sigma = \emptyset$.
  - הערה: יש לשים לב שלכל פסוק קיימת Σ כך ש $\Sigma \vdash_D \theta$ (למשל Σ הכוללת את הפסוק עצמו)

תרגיל 2

- תהי Σ קבוצת פסוקים בשפה $L_{\{\neg,\rightarrow\}}$. קבוצת פסוקים Σ נקראת סגורה כאשר מתקיים בה: אם $\varphi \vdash \Sigma$ אזי $\varphi \in \Sigma$. תהי Σ קבוצת פסוקים סגורה. הוכיחו או הפריכו: Σ עקבית אם"ם ישנו פסוק φ בשפה כך ש $\varphi \notin \Sigma$.
- פתרון:
  - כיוון 1: Σ לא עקבית $\Leftarrow$ φ וגם $\neg\varphi$ יכיח מ-Σ $\Leftarrow$ $\varphi,\neg\varphi \in \Sigma$ $\Leftarrow$ כל הפסוקים יכיחים ב-Σ $\Leftarrow$ כל הפסוקים ב-Σ
  - כיוון 2: Σ עקבית $\Leftarrow$ φ או $\neg\varphi$ לא יכיח מΣ $\Leftarrow$ יש פסוק שלא בΣ

תרגיל 3

- בהינתן $\Sigma = \{P_1, \dots P_n \dots\}$ אוסף הפסוקים האלמנטריים בשפה עם קשר דו מקומי אחד $\{\rightarrow\}$ ומערכת הוכחה המקיימת את משפט הדדוקציה. נגדיר באינדוקציה מבנית את R_Σ קבוצת הפסוקים הימניים של Σ: בסיס: $(P_i \rightarrow P_j)$ כלל יצירה: $(P_i \rightarrow \alpha)$ כאשר α פסוק בקבוצה. הוכיחו:

א- לכל $\varphi \in R_\Sigma$ מתקיים $\Sigma \vDash \varphi$
  - הוכחה באינדוקציה על אורך הפסוק בסדרת הבניה. לפסוק $(P_i \rightarrow P_j)$ מתקיים כי שני הפסוקים מקבלים ערך T ומטבלת הבניה של $\rightarrow$. בהנחה ש-α מקבל ערך T גם $(P_i \rightarrow \alpha)$ מקבל ערך T.

ב- לכל $\varphi \in R_\Sigma$ מתקיים $\Sigma \vdash \varphi$
  - הפסוק φ מהצורה $\varphi = (P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow \cdots (\dots P_k)))$ ניתן להשתמש במשפט הדדוקציה k-1 פעמים ולכן מתקבל $\Sigma \vdash \varphi$

תרגיל 4

- נגדיר מערכת הוכחה D בשפת הפסוקים בעלת 2 קשרים: $\{\neg, \rightarrow\}$, האקסיומות הן האקסיומות של תחשיב הילברט, וכלל ההיסק היחיד הוא $\frac{(\alpha\rightarrow\beta),(\alpha\rightarrow\neg\beta)}{\neg\alpha}$

א- האם עבור כל פסוק θ מתקיים אם $\vdash_D \theta$ אז $\models \theta$?

- כן. האקסיומות טאוטולוגיות וניתן לבדוק בטבלת אמת שאם שני הפסוקים בטבלת האמת מקבלים ערך T גם $\neg\alpha$ מקבל ערך T. התחשיב נאות

ב- תהי Σ תורה. האם עבור כל פסוק θ מתקיים אם $\Sigma \vdash_D \theta$ אז $\Sigma \models \theta$?

- כן. הוכחנו שהתחשיב נאות. כל פסוק שיתקבל מההנחות או מכלל ההיסק ולכן הוא ינבע מההנחות.

תרגיל 4

- נגדיר מערכת הוכחה D בשפת הפסוקים בעלת 2 קשרים: $\{\neg, \rightarrow\}$, האקסיומות הן האקסיומות של תחשיב הילברט, וכלל ההיסק היחיד הוא $\frac{(\alpha\rightarrow\beta),(\alpha\rightarrow\neg\beta)}{\neg\alpha}$

ג- האם מערכת ההיסק D מערכת שלמה?

- לא. כל משפט של המערכת נובע מאקסיומה ובמבנה שלה או מכלל ההיסק ואז הקשר הראשי הוא שלילה. הפסוק $(\varphi \rightarrow \varphi)$ לא ניתן להוכחה.

ד- האם הפסוק $\neg(p \rightarrow ((q \rightarrow t) \rightarrow p))$ ניתן להוכחה במערכת ההיסק?

- לא. עבור מודל M(p)=F הפסוק הפנימי מקבל ערך T והפסוק כולו ערך F. הוא לא טאוטולוגיה ולכן לא ניתן להוכחה כי הראינו נאותות (למעשה הפסוק סתירה).

תרגיל 5

- נגדיר מערכת הוכחה N בשפת הפסוקים בעלת 2 קשרים: $\{\neg, \to\}$, האקסיומות הן $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$, $\left((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to \left((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)\right)\right)$ וכללי ההיסק הם $\frac{(\alpha \to (\beta \to \alpha))}{\alpha}$ ו- $\frac{\alpha, (\alpha \to \beta)}{\beta}$

א- האם מערכת ההיסק שלמה?

- כן. יהי φ פסוק כלשהו. סדרת הוכחה:

(Ax. 1) 1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$

(Rule1 1) 2. φ

ב- האם מערכת ההיסק נאותה?

- לא. הראינו בסעיף א' שכל פסוק ניתן להוכחה, ובפרט פסוקים שאינם טאוטולוגיות

תרגיל 6

- נגדיר מערכת הוכחה N בשפת הפסוקים בעלת 2 קשרים: $\{\neg, \to\}$, האקסיומות הן $\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi))$, $\neg((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)))$, $\neg((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi))$ וכללי ההיסק הם $\frac{\alpha}{(\neg\alpha\to\alpha)}$. הוכיחו או הפריכו:

א- לכל φ אם φ יכיח במערכת אז הוא סתירה

- כן. נוכיח באינדוקציה על אורך ההוכחה. בסיס: האקסיומות סתירות. מעבר: אם α סתירה אזי $\neg\alpha$ טאוטולוגיה ו-$(\neg\alpha \to \alpha)$ סתירה

ב- כל סתירה ניתנת להוכחה במודל

- לא. כלל ההיסק רק מגדיל את אורך הפסוק. לכן הפסוק $\neg(P \to P)$ לא יכול להיות מוכח במודל.

ג- מערכת ההוכחה שלמה

- לא. הראינו שכל פסוק הוא סתירה, ובפרט לא ניתן להוכיח שום טאוטולוגיה והמערכת לא שלמה

תודה רבה ☺