ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס אביב 2022ב

כתב: ישראל פרידמן

פברואר 2022 - סמסטר אביב - תשפ"ב

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283.
חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il .

הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://www.openu.ac.il/shoham .
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:
https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library . פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il .

מרכז ההוראה בקורס הוא ישראל פרידמן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781431, בימי ג' בשעות 12:00 - 13:00 (ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

שימו לב:

חובה להגיש מטלות במשקל של 14 נקודות לפחות.

ללא הגשת מטלות במשקל זה

אי-אפשר לעבור את הקורס.

ראו הסבר בעמוד ה'

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס: 20476 /ב2022)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	04.03.2022-27.02.2022	מבוא מהיר ללוגיקה			
2	11.03.2022-06.03.2022	תורת הקבוצות פרק 1		ממ"ח 01 עד 10.03.2022	
3	18.03.2022-13.03.2022	תורת הקבוצות פרק 2			ממ"ן 11 עד 22.03.2022
4	25.03.2022-20.03.2022	תורת הקבוצות פרק 3		ממ"ח 02 עד 27.03.2022	
5	01.04.2022-27.03.2022	תורת הקבוצות פרק 3			
6	08.04.2022-03.04.2022	תורת הקבוצות פרק 4			ממ"ן 12 עד 11.04.2022
7	15.04.2022-10.04.2022	תורת הקבוצות פרק 4		ממ"ח 03 עד 18.04.2022	
8	22.04.2022-17.04.2022 (א-ו פסח)	קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3			
9	29.04.2022-24.04.2022 (ה יום הזכרון לשואה)	קומבינטוריקה סעיפים 3.2- 2.4			ממ"ן 13 עד 25.04.2022
10	06.05.2022-01.05.2022 (ד יום הזיכרון, ה יום העצמאות)	קומבינטוריקה פרקים 4 - 5			ממ"ן 14 עד 09.05.2022
11	13.05.2022-08.05.2022	קומבינטוריקה פרקים 6- 7		ממ"ח 04 עד 18.05.2022	
12	20.05.2022-15.05.2022 (ה ל"ג בעומר)	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			ממ"ן 15 עד 24.05.2022
13	27.05.2022-22.05.2022	תורת הגרפים פרקים 1-2			
14	03.06.2022-29.05.2022	תורת הגרפים פרקים 3-4		ממ"ח 05 עד 10.06.2022	
15	10.06.2022-05.06.2022 (א שבועות)	תורת הגרפים פרקים 5-6			ממ"ן 16 עד 15.06.2022

+ התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב#לוח מפגשים ומנחים#

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחלופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס שש מטלות מנחה (ממ״נים) וחמש מטלות מחשב (ממ״חים).
משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, משקל כל ממ״ח הוא 2 נקודות מלבד ממ״ח 01 שמשקלו נקודה אחת.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 27 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות:

חובה להגיש מטלות במשקל של 14 נקודות לפחות.
ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
אי-אפשר לעבור את הקורס.

תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. להגיש מטלות במשקל של 14 נק׳ לפחות.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

השאירו לעצמכם העתק של המטלה

האוניברסיטה הפתוחה אינה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

מספר השאלות: 13 | **משקל המטלה: נקודה אחת**

סמסטר: 2022ב | **מועד הגשה: 10.03.2022**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,
ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. האמירה **המספרים 6, 7 הם מספרים זוגיים** היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי $1+2+3+4$ הוא פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק **הכד נמצא על השולחן**
   היא הפסוק **הכד נמצא מתחת לשולחן**
2. **שלילת** הפסוק איציק שפך את המים מהכד
   היא הפסוק איציק מילא את הכד במים

שאלה 3

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק **אם** $2=3$ **אז** $2=1+1$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2=3$ **אז** $2=10$ הוא אמת.

שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי
   $(p \to q) \vee (r \to q)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \vee (r \to q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 6

1. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$.

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee (p \wedge q)$.

שאלה 7

1. $\neg\big((p \vee q) \wedge r\big)$ שקול טאוטולוגית ל- $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee \neg r$.

2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8

1. **שלילת** הפסוק **האוכל היה חם וטעים**

   שקולה לפסוק **האוכל לא היה חם והאוכל לא היה טעים**.

2. **שלילת** הפסוק **רצחתָ וגם ירשתָ** שקולה לפסוק **לא רצחתָ או לא ירשתָ**

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .

2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

שאלה 10

1. את הפסוק "הריבוע של מספר לעולם אינו קטן מ- 0"

   אפשר להצרין כך: $\forall x \neg (x^2 < 0)$.

2. את הפסוק "קיים מספר גדול מ- 0 שהריבוע שלו הוא 9"

   אפשר להצרין כך: $\big(\exists x(x > 0)\big) \wedge \big(\exists x(x^2 = 9)\big)$.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **לכל מספר הגדול/שווה 0 , קיים מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר המקורי.** ניתן להצרין פסוק זה כך:

1. $\big(\forall x\ (x \geq 0)\big) \to \big(\exists y\ (y^2 = x)\big)$

2. $\forall x\big(x \geq 0 \to \exists y\ (y^2 = x)\big)$

שאלה 12

להלן האותיות a,b,p מסמנות מספרים טבעיים חיוביים כאשר $p \geq 2$.

את הפסוק " p מספר ראשוני " ניתן להצרין כך:

1. [2] $\forall a \forall b((a = 1) \vee (b = 1) \vee (p \neq ab))$

2. [4] $\forall a \forall b(((a = 1) \vee (b = 1)) \to (p \neq ab))$.

שאלה 13

את הפסוק "בקטע הפתוח $(0,1)$ לא קיים מספר גדול ביותר" ניתן להצרין כך:

1. $\forall x \exists y((x > 0) \wedge (x < 1) \wedge (x < y) \wedge (y < 1))$

2. $\forall x((x < 1) \wedge (x > 0) \to \exists y(x < y))$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2022ב **מועד הגשה: 22.03.2022**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד או סרוק בפורמט** *PDF*). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $\{1,2\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$ ב. $\{2\} \subseteq \{\{1\},2\}$ ג. $\{\{1\},\{2\}\} \in \{\{\{1\},\{2\}\}\}$ ד. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\} \setminus \{\varnothing\}$

ה. $\varnothing \in \{\varnothing\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$ ו. $\{2\} \in \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{\mathbf{N}\}|$ ח. $\{1,2\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\}) \neq \varnothing$

שאלה 2 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $(A \cup B) \setminus (C \setminus B) = B \cup (A \setminus C)$.

ב. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

ג. אם A,B קבוצות סופיות אז $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \cap B)| \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$

שאלה 3 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $A \cup B^c \neq U$ ו- $B \cup A^c \neq U$ אז $|A \Delta B| \geq 2$.

ב. אם $A \Delta B \subseteq A \Delta C$ אז $A \cap C \subseteq B \subseteq A \cup C$.

ג. אם $A \Delta \{1,2\} = B \Delta \{2,3\}$ אז $A \Delta B = \{1,3\}$.

שאלה 4 (28 נק')

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbf{N}$ נסמן $A_k = \left\{2^0, 2^k, 2^{2k}, 2^{3k}, \ldots\right\} = \{2^{nk} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מיצאו מספר טבעי k כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- A_k. נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ ב. $\bigcap_{k=2}^{5} A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ד. $\{\frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\}$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2,1**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2022ב | **מועד הגשה: 27.03.2022**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

א - אם הטענה נכונה | **ב - אם הטענה לא נכונה**

במטלה זו A,B,C הן קבוצות, R,S הם יחסים והאות n מייצגת מספר טבעי

שאלה 1
$\{2,3\} \cap \{\{2\},\{3\}\} = \{\{2\},3\} \cap \{2,\{3\}\}$

שאלה 2
אם $A \cup C = A \cup B$ אז $B = C$

שאלה 3
אם $A \subseteq B \cup C$ אז $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$

שאלה 4
אם A,B קבוצות סופיות זרות אז $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = 2^{|A|} + 2^{|B|}$

שאלה 5
$A \subseteq \mathcal{P}(A)$

שאלה 6
אם $A \Delta B = A \setminus B$ אז $B \subseteq A$

שאלה 7
אם $x \in A \Delta B \Delta C$ אז $x \notin A \cap B$

שאלה 8
אם $x \notin A^c \cap B^c$ אז $x \in A \cap B$

שאלה 9
אם $A \subset B \times C$ אז $B \neq \varnothing$ וגם $C \neq \varnothing$

שאלה 10

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$$

שאלה 11

אם כל איבר של A הוא זוג סדור אז קיימות קבוצת B,C כך ש- $A = B \times C$

שאלה 12

אם R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2 = R$.

שאלה 13

אם יחס R מקיים $R^2 = R$ אז R הוא יחס טרנזיטיבי.

שאלה 14

אם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי אז גם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים

שאלה 15

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

שאלה 16

כל יחס רפלקסיבי R המקיים $R^2 = R$ הוא יחס שקילות.

שאלה 17

אם ליחס שקילות R על $\{1,2,3,\dots,n\}$ יש פחות מ- n מחלקות אז $|R| \geq n+2$

שאלה 18

אם $1 < n < m$ מספרים טבעיים אז החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

שאלה 19

אם A קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית אז אין ב- A איבר אחרון

שאלה 20

אם $A = \{1,2,3,4\}$ ואם $\langle A, \prec \rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים אז כל איבר של A הוא מינימלי או מקסימלי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2, 3**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2022ב **מועד הגשה: 11.04.2022**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד או סרוק בפורמט** *PDF*).
  כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\cup\{1,2\}=B\cup\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\cup\{1,2\}\subset B\cup\{1,2\}$.

א. הראו שאחד מהיחסים הוא יחס שקילות ומיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. הראו שאחד היחסים הוא יחס סדר. קבעו אם הוא סדר חלקי או מלא ומיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים לגבי יחס סדר זה.

שאלה 2

א. על הקבוצה $A=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ מגדירים יחס R כך: לכל $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in A$, מתקיים

$\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ אם ורק אם $x_1+y_1=x_2+y_2=1$ או $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$.

הוכיחו ש- R יחס שקילות ומיצאו את מספר מחלקות השקילות שלו. תארו אותן במישור.

ב. על הקבוצה $B=(0,\infty)\times(0,\infty)$ מגדירים יחס S כך:

לכל $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in B$, $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$ אם ורק אם $\dfrac{ab}{a^2+b^2}<\dfrac{cd}{c^2+d^2}$.

1. הוכיחו שלכל שני מספרים **שונים** $a,b>0$ מתקיים $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ ושאם n מספר טבעי כך ש- $\dfrac{1}{n}<\dfrac{ab}{a^2+b^2}$ אז $\langle 1,1/n\rangle S\langle a,b\rangle$.

2. הוכיחו ש- S הוא יחס סדר חלקי.

3. מיצאו את כל האיברים המקסימליים והמינימליים ב- B לגבי הסדר S .

שאלה 3

נתונה פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$.

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל שתי קבוצות **אינסופיות שונות** $A,B\subseteq\mathbf{N}$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$.

ב. הוכיחו ש- f היא פונקציה על אם ורק אם לכל שתי קבוצות **אינסופיות שונות** $A,B\subseteq\mathbf{N}$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$.

שאלה 4

א. נסמן $\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$.

נתונה $f:\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*\to\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ המוגדרת כך: לכל $q\in\mathbf{Q}$ ו- $n\in\mathbf{Z}^*$, $f\langle q,n\rangle=\langle\frac{q}{n},n\rangle$.

1. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית ועל.

2. מיצאו את f^{-1} .

ב. נתונות מהפונקציות $g,h:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ המוגדרות כך: $\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$,

$g\langle x,y\rangle=\langle 2x+3y,3x+5y\rangle$, $h\langle x,y\rangle=\langle x+3y,x+5y\rangle$.

הוכיחו ש**רק אחת** משתי הפונקציות היא הפיכה ומיצאו את ההפכית שלה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,3**

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2022ב **מועד הגשה: 18.04.2022**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

במטלה זו האותיות f,g מסמנות פונקציות

שאלה 1

עבור כל מספר $n\in\mathbf{N}$ השלשות $\left\langle \mathbf{N},\mathbf{N},\{\langle x,1-x+x^2-x^3\cdots+x^{2n}\rangle \mid x\in\mathbf{N}\}\right\rangle$
ו- $\left\langle \mathbf{N},\mathbf{N},\{\langle x,\ (1+x^{2n+1})/(1+x)\rangle \mid x\in\mathbf{N}\}\right\rangle$ הן פונקציות שוות.

שאלה 2

אם $f:A\to B$ היא פונקציה ו- $C_1,C_2\subseteq A$, כך ש- $f[C_1]\cap f[C_2]=\varnothing$ אז $C_1\cap C_2=\varnothing$.

שאלה 3

אם $f:A\to B$ פונקציה ו- $D_1,D_2\subseteq B$ כך ש- $f^{-1}[D_1]\cap f^{-1}[D_2]=\varnothing$ אז $D_1\cap D_2=\varnothing$.

שאלה 4

$f:A\to B$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל קבוצה סופית $C\subseteq A$ מתקיים $|f[C]|=|C|$

שאלה 5

$f:A\to B$ היא על אם ורק אם לכל קבוצה סופית $D\subseteq B$ מתקיים $|f^{-1}[D]|=|D|$

שאלה 6

אם A,B תת-קבוצות של קבוצה אוניברסלית U אז $\chi_A^{-1}[\{1\}]\cap\chi_B^{-1}[\{0\}]=A\setminus B$

שאלה 7

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ היא חד-חד-ערכית אז f היא על.

שאלה 8

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ היא על אז f היא חד-חד-ערכית.

שאלה 9

אם $f,g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ואם $f \circ g = I_{\mathbf{N}}$ אז f היא פונקציה הפיכה.

שאלה 10

אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n + 3$ לכל $n \in \mathbf{N}$ אז קיימת פונקציה **קבועה** $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ כך ש-

$f \circ g = g \circ f$

בשאלות 11- 20 נתייחס ל- $B = \{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ ו- $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ כאשר $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

שאלה 11

קיימים $m,n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ כך ש- $|A_n \cap \mathbf{Q}| < |A_m \cap \mathbf{Q}|$

שאלה 12

לכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$: $|A_n \cap \mathbf{Q}| < |A_n \setminus \mathbf{Q}|$

שאלה 13

לכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$: $|A_n \cap \mathbf{Q}| = |A_n \cap B|$

שאלה 14

קיים $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ כך ש- $|B \setminus A_n| = \aleph_0$

שאלה 15

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}} \mathcal{P}(B \setminus A_n) \right| = \aleph_0$$

שאלה 16

לכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$: $|A_n \setminus A_{n+1}| = |\mathcal{P}(B)|$

שאלה 17

לכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$: $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_{n+1}|$

שאלה 18

לכל $\mathbf{N} \setminus \{0,1\}$: $|B|^{|B \setminus A_n|} = |B|$

שאלה 19

קיים $\mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ כך ש- $|B \setminus A_n|^{|B|} = |B|^{|B \setminus A_n|}$

שאלה 20

לכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$: $|A_n^B| < |B^{A_n}|$

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2022ב **מועד הגשה: 25.04.2022**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד או סרוק בפורמט** *PDF*).
  כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי מופיעות רק הספרות 0 ו- 1 ומימין לכל ספרה שהיא 0 מופיע תמיד הספרה 1.

ב. $\{\langle x, y\sqrt{2}\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{R} \mid x+y=1\}$

ג. $\{\langle x,y,z\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x+y+z=1\}$

ד. $\mathcal{P}(\mathbf{Q}\cap(11^{-10},10^{-10}))$

שאלה 2

פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ נקראת **ריבועית** אם קיימים $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$ כך ש-

$f(x)=ax^2+bx+c$ לכל $x\in\mathbf{R}$. נסמן:

A - קבוצת כל הפונקציות הריבועיות.

$B=\{f\in A \mid f(0)\in\mathbf{Q}\}$

$C=\{f\in A \mid f[\mathbf{Q}]\subseteq\mathbf{Q}\}$

מיצאו את היחסים ("=" או "<") בין כל שתיים מהעוצמות הבאות:

$|A|, |B|, |C|, |\mathcal{P}(B)|, |\mathcal{P}(C)|$. נמקו את התשובות.

שאלה 3

א. נניח ש- A,B,C קבוצות כך ש- $C = A \cup B$ ו- $A \cap B = \varnothing$.

הוכיחו שהפונקציה $f : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ המוגדרת על ידי $f(X) = \langle X \cap A, X \cap B \rangle$

לכל $X \in \mathcal{P}(C)$ היא הפיכה. הסיקו ש- $2^{|A \cup B|} = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|}$

ב. בחרו קבוצות A,B מתאימות והשתמשו בתוצאה מסעיף א' כדי להוכיח את הטענות הבאות :

1. $\aleph \cdot \aleph = \aleph$ (מותר להיעזר בטענות 4.14 ו- 4.15)
2. $\aleph' \cdot \aleph' = \aleph'$ (ראו ההגדרה של $\aleph'$ בפסקה המופיעה לפני סעיף 4.7 בספר)

שאלה 4

א. יהי a מספר ממשי כך ש- $a+\frac{1}{a}$ הוא מספר שלם. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי

המספר $a^n + \frac{1}{a^n}$ הוא שלם.

ב. נתונה הפונקציה $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{x}{1+x}$ לכל $x \geq 0$.

לכל $n \geq 1$ טבעי נסמן ב- $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$ (ההרכבה של f על עצמה n פעמים).

מיצאו נוסחה ל- $f^{(n)}$ והוכיחו אותה באינדוקציה על n .

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 1-4**

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2022ב | **מועד הגשה: 09.05.2022**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד או סרוק בפורמט** *PDF*).
כניסה מאתר הקורס או משאילתא"
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו את זהות $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$ בשתי הדרכים הבאות:

א. אינדוקציה על n.

ב. שיקול קומבינטורי: ספירת מספר הקבוצות בנות $m+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{0,1,\ldots,n\}$ שבהן המספר הגדול ביותר הוא k.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\to\{1,2,3,4\}$ המקיימות

$$|f^{-1}[\{1\}]|=|f^{-1}[\{2\}]|=|f^{-1}[\{3\}]|=|f^{-1}[\{4\}]|$$

ב. בשמונה מקומות המסומנים ב- $1,2,3,4,5,6,7,8$ מסדרים את הסימנים $1,1,2,2,3,3,4,4$.
מיצאו את מספר הסידורים שבהם אף אחד מהמספרים $1,2,3,4$ לא יושב במקום שמסומן במספר הזהה לו.

שאלה 3 (20 נקודות)

מפזרים 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

א. מיצאו את מספר הפיזורים שבהם שלושת התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 10 כדורים.

ב. מיצאו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. יהיו $p_1, p_2, \ldots, p_n$ מספרים ראשוניים **שונים** ו- $k_1, k_2, \ldots, k_n$ מספרים טבעיים. מיצאו את מספר המספרים הטבעיים המחלקים את $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

ב. מיצאו את מספר המספרים הטבעיים המחלקים לפחות אחד מהמספרים $10^{40}, 20^{30}, 40^{20}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. מיצאו את כל השלשות $\langle j,k,l \rangle$ של מספרים טבעיים המקיימות $2j + 3k + 5l = 10$.

ב. מיצאו את המקדם של x^{10} בביטוי $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ על-ידי שימוש בפיתוח המולטינומי שבעמוד 79 בספר. (היעזרו בסעיף א׳)

ג. מיצאו את המקדם של x^{10} בביטוי $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ על ידי שימוש בפירוק $1+x^2+x^3+x^5=(1+x^2)(1+x^3)$ ובנוסחת הבינום של ניוטון.
השוו עם התוצאה מסעיף ב׳.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-7**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2022ב | **מועד הגשה: 18.05.2022**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

בשאלות 1-3 האות A מסמנת את הקבוצה בעלת 3 איברים.

שאלה 1

מספר היחסים שניתן להגדיר על A הוא 9

שאלה 2

מספר היחסים האנטי רפלקסיביים על A הוא 2^6

שאלה 3

מספר היחסים על A שווה למספר הפונקציות מ- A ל- $\mathcal{P}(A)$

בשאלות 4 - 11 נתייחס לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

שאלה 4

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ שווה מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f^{-1}[\{1\}]=\{1,2\}$.

שאלה 5

מספר הפונקציות $f:A\to A$ שהן חד-חד-ערכיות שווה למספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to A$ שהן חד-חד-ערכיות.

שאלה 6

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות את הערך 1 פעם אחת, את הערך 2 פעמיים ואת הערך 3 שלוש פעמים, גדול ממספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות פעמיים כל אחד מן הערכים 1,2,3.

שאלה 7

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2\}]=\{1,2\}$ קטן ממספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$.

שאלה 8

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=2$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1,2 מופיעה פעמיים.

שאלה 9

מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C \subseteq A$, $|B|=|C|=3$ ו- $B \cap C = \varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1 מופיעה שלוש פעמים.

שאלה 10

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C \rangle$ שבהם $B,C \subseteq A$, $|B|=2,\ |C|=3$ ו- $B \cap C = \varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן 0 מופיע פעם אחת, 1 מופיע פעמיים ו- 2 מופיע שלוש פעמים.

שאלה 11

מספר יחסי השקילות השונים על A שהם בעלי שלוש מחלקות בדיוק הוא גדול מ- 100.

שאלה 12

יש בדיוק 84 הפונקציות $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שאלה 13

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq f[\{1,2,3,4\}]$
שווה למספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2\} \not\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך שבשני התאים הראשונים ביחד יימצאו לפחות 10 כדורים, הוא 396

שאלה 15

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^8$

שאלה 16

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו לפחות 5 כדורים כל אחד, הוא 1008

שאלה 17

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $(x^5+x^6+x^7+\cdots)^2(1+x+x^2+\cdots)^8$

שאלה 18

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו ביחד לפחות 10 כדורים הוא $28 \cdot 316$

בשאלות 20-19 נסמן ב- $P(mn,m)$ את מספר כל הפיזורים האפשריים של mn כדורים שונים ב- m תאים זהים כך שבכל תא יימצאו בדיוק n כדורים.

שאלה 19

$P(8,4) = (8!)/2^4$.

שאלה 20

$P(6,3) > P(6,2)$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 5-7**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2022ב | **מועד הגשה: 24.05.2022**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד או סרוק בפורמט** *PDF*). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נק')

א. הוכיחו שלא ניתן לבחור 28 נקודות בקובייה בעלת צלע באורך 3 כך שכל שתי נקודות יימצאו במרחק של 1.75 לפחות.

ב. נתונה קבוצה $A \subseteq \mathbf{N}$ כך ש- $|A| = 20$ וכך ש- $1 \le k \le 63$ לכל $k \in A$.

הוכיחו שקיימים 4 **זוגות שונים** $\{m_i, n_i\}$, $1 \le i \le 4$ של מספרים מתוך A כך שבכל הזוגות האלה, ההפרש בין המספר הגדול לבין המספר הקטן בזוג שווה לאותו מספר שלם חיובי, כלומר ארבעת המספרים $|m_i - n_i|$, $1 \le i \le 4$ חיוביים ושווים זה לזה.

שאלה 2 (20 נק')

תהי A קבוצת כל המספרים הטבעיים שבהם מופיעות רק הספרות 1,2,3. נסמן:

a_n את מספר איברי A שהם בעלי n ספרות והספרה 2 מופיעה בהם מספר זוגי של פעמים.

b_n את מספר איברי A שהם בעלי n ספרות והספרה 2 מופיעה בהם מספר אי- זוגי של פעמים.

א. מיצא את $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

ב. לכל $n \ge 2$ הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}, את b_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}.

ג. היעזרו בתוצאות של סעיף ב' כדי למצוא יחסי נסיגה עבור כל אחת מהסדרות a_n, b_n.

ד. פתרו את יחסי הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n, b_n.

ה. בדקו ש- $a_n + b_n$ שווה למספר האיברים של A שהם בעלי n ספרות.

שאלה 3 (20 נק')

נתונה $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ המקיימת: $1 + x(7+8x)f(x) = f(x)$

א. מיצאו יחס רקורסיה עבור a_n.

ב. חשבו את a_n לכל $n \ge 0$.

שאלה 4 (20 נק')

א. מיצאו את המקדם של x^{13} בפיתוח של $\dfrac{1}{(1-x^2-x^3+x^5)^n}$. (פרקו את המכנה לגורמים).

ב. חשבו את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n=13$

כאשר $x_1,x_2,\ldots,x_n$ הם מספרים זוגיים ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מתחלקים ב- 3.

שאלה 5 (20 נק')

בשאלה זו נתייחס לפתרונות בטבעיים של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+3x_8+3x_9+3x_{10}=n$

כאשר $x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 \le 2$, (אין תנאים נוספים על שאר הנעלמים)

א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות של המשוואה.

פשטו את הביטוי בעזרת: $1+x+x^2=(1-x^3)/(1-x)$.

ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה   **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים**

מספר השאלות: 20   **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2022ב   **מועד הגשה: 10.06.2022**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

קיים גרף פשוט שבו דרגות הצמתים הן 6.6.6.4.4.4.2

שאלה 2

אם G,H הם שניהם גרפים על קבוצת הצמתים $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ ואם $\deg_G(v_i)=\deg_H(v_i)$ לכל $1\le i\le n$, אז G,H גרפים איזומורפיים.

שאלה 3

לכל $n\ge 2$ הגרף הדו-צדדי המלא $K_{n,n}$ מכיל מעגל באורך $2n$.

שאלה 4

לכל $n\ge 2$ הגרף הדו-צדדי המלא $K_{n,n}$ מכיל מעגל באורך n.

שאלה 5

קיים גרף מלא שבו מספר הקשתות שווה למספר הקשתות של $K_{35,35}$

שאלה 6

$K_{n,n}$ הוא תת-גרף של K_m אם ורק אם $2n\le m$.

בשאלות 7-9 , G הוא גרף פשוט על 9 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא לפחות 4.

שאלה 7

G הוא גרף קשיר

שאלה 8

G הוא גרף מישורי

שאלה 9

G הוא גרף לא מישורי

בשאלות 10-13 , $G = (V,E)$ הוא הגרף שבו $V = \{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \mid |A| = 3\}$ ולכל $A,B \in V$ הקבוצה $\{A,B\}$ היא קשת ב- E אם ורק אם $|A \cap B| = 1$.

שאלה 10

G הוא גרף אוילרי

שאלה 11

G המילטוני

שאלה 12

G הוא דו-צדדי

שאלה 13

G הוא מישורי

בשאלות 14-16 , נתייחס לעצים המתוייגים שבהם 10 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,\ldots,10$.

שאלה 14

קיים עץ כזה שבו הדרגה של כל צומת שאינו עלה היא 4.

שאלה 15

מספר העצים שבהם יש שני צמתים בעלי דרגה 5 הוא 3150.

שאלה 16

כל העצים עם שני צמתים בעלי דרגה 5 הם איזומורפיים כגרפים לא מתוייגים (הגדרה 2.7)

שאלה 17

כל גרף פשוט על 6 צמתים שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה 4 הוא לא מישורי.

שאלה 18

כל גרף פשוט על 6 צמתים שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה 3 הוא לא מישורי.

שאלה 19

לכל גרף פשוט על 6 צמתים שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה 4 יש מספר צביעה גדול מ- 2

שאלה 20

קיים גרף פשוט על 6 צמתים שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה 4 אשר מספר צביעה שלו הוא 3

מטלת מנחה (ממ״ן) 16

קורס: 20476 – מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים**

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2022ב | **מועד הגשה: 15.06.2022**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד או סרוק בפורמט *PDF***).
  כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

הערה חשובה: במטלה זו כל הגרפים הם פשוטים!

שאלה 1 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לעצים על n צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,...,n$ שבהן יש בדיוק 5 צמתים שאינם עלים והם בעלי דרגות 2,3,4,5,6.

א. מיצאו את n.

ב. מיצאו את מספר העצים המקיימים את נתוני השאלה.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון גרף פשוט $G=(V,E)$ שבו $|V|=n\geq 3$.

א. הוכיחו שאם $u,v\in V$ צמתים לא סמוכים ו- $H=(V\setminus\{u,v\},F)$ הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת u,v וכל הקשתות הסמוכות להם אז: $|F|=|E|-(\deg_G(u)+\deg_G(v))$.

ב. הוכיחו שאם $|E|>\binom{n-1}{2}+1$ אז $G=(V,E)$ המילטוני. (רמז: משפט *Ore*)

שאלה 3

יהיו $k,n>0$ מספרים טבעיים. נתון גרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ כך ש- $\deg_G(v)=k$ לכל $v\in A$ ו- $\deg_G(w)=n$ לכל $w\in B$.

א. תהי $X\subseteq A$ קבוצת צמתים. מיצאו את מספר הקשתות ב- G שיש להן קצה אחד ב- X.

ב. תהי $Y\subseteq B$ קבוצת צמתים. מיצאו את מספר הקשתות ב- G שיש להן קצה אחד ב- Y.

ג. הוכיחו שלכל $X\subseteq A$ מתקיים: $k|X|\leq n|\Gamma_G(X)|$ (ראו הגדרת $\Gamma_G(X)$ בפרק 4 בספר)

ד. הוכיחו שאם $n\leq k$ אז קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A.

ה. יהי $G=(A\cup B,E)$ כאשר $A=\{1,2,3,...,100\}$, $B=\{S\subseteq A\mid |S|=99\}$ ו- E היא קבוצת כל הקשתות מהצורה $\{i,S\}$ שבהן $S\in B$ ו- $i\in S$.

הוכיחו שקיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A.

שאלה 4

יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר, מישורי ופשוט על n צמתים שבו לפחות שלוש קשתות.

בשאלה נתייחס לשיכון מישורי נתון של G.

תהי F קבוצת הפאות של G. ידוע שהאורך המינימלי של מעגל ב- G הוא c.

נסמן ב- A את קבוצת כל הזוגות $(e,f) \in E \times F$ שבהם e קשת המקיפה את f.

א. הוכיחו ש- $|A| \le 2|E|$ ו- $|A| \ge c|F|$.

ב. הוכיחו ש- $|E| \le \frac{c}{c-2}(n-2)$. (היעזרו בנוסחת אוילר)

ג. הסיקו מסעיף ב' ש- $K_{3,3}$ אינו מישורי.

שאלה 5

א. נתונות שתי קבוצות של n צמתים: $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$,

ושתי קבוצות של קשתות: $E = \{v_i v_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{w_i w_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$F = \{v_i w_j \mid 1 \le i, j \le n\}$.

נסמן: $G = (V \cup W, E)$ ו- $H = (V \cup W, F)$.

מיצאו את $\chi(G)$ ואת $\chi(H)$. נמקו את התשובה.

ב. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם G ו- H הם גרפים על אותה קבוצת צמתים אז

$\chi(G \cup H) \le \chi(G) + \chi(H)$