מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

מספר השאלות: **משקל המטלה: נקודה אחת**

סמסטר: 2021א **מועד הגשה: 26.10.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,
ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. הביטוי $x^2 - y^2 - (x+y)(x-y)$ הוא פסוק
2. הביטוי $x^2 - y^2 - (x+y)(x-y) \neq 0$ הוא פסוק

שאלה 2

נתבונן בפסוק "לכל מספר חיובי יש שורש ריבועי"

1. **שלילת** הפסוק היא: "אם מספר הוא שלילי אז אין לו שורש ריבועי"
2. **שלילת** הפסוק היא: "קיים מספר חיובי שאינו שורש ריבועי של אף מספר"

שאלה 3

1. הפסוק: " $1+101+101^2+\cdots+101^{100} = 0.01(101^{101}-1)$ **או** $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ " הוא אמת.
2. הפסוק: " $1:(2:(3:4)) = (1:2):(3:4))$ **וגם** $1:(2:(3:4)) = ((1:2):3):4$ " הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק: "**אם** לכל x ממשי, $x^2+x+1>0$ **אז** לכל x ממש מתקיים $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) = (1-x^2)(1+x^2+x^4)$" הוא אמת.
2. הפסוק: "**אם** קיים x ממשי כך ש- $x^2-x+1=0$ **אז** לכל x ממשי $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5) = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$" הוא אמת.

שאלה 5

1. הפסוק: "**אם** $((2>3)$ **וגם** $(1<2))$ **אז** $(1=-1)$" הוא אמת.
2. הפסוק: "**אם** $((a<b)$ **וגם** $(c<d))$ **אז** $((a<b)$ **או** $(c<d))$" הוא אמת.

שאלה 6

בטבלה מופיעים לוחות האמת של פסוקים ל α ו- β. מתקיים:

1. $\beta \equiv (\neg p \wedge q) \to \alpha$
2. $\alpha \equiv (q \vee r) \to \beta$

p	q	r	α	β
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**F**

שאלה 7

1. $(p \vee q) \to r$ שקול טאוטולוגית ל- $(p \to r) \wedge (q \to r)$.
2. $\neg p \to (q \vee r)$ שקול טאוטולוגית ל- $\neg q \to (p \vee r)$.

שאלה 8 (בשאלה זו a,b הם מספרים ממשיים)

1. שלילת הפסוק $a \neq 2$ וגם $b \neq 3$ שקולה לפסוק $ab = 6$ או $a+b=5$.
2. שלילת הפסוק $a \neq 2$ או $b \neq 3$ שקולה לפסוק $ab=6$ וגם $a+b=5$.

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(\neg\beta) \to (\neg\alpha)$ נובע טאוטולוגית הפסוק $((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta$.
2. מתוך הפסוק $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to ((\neg\beta) \to \alpha)$ נובע טאוטולוגית הפסוק β.

שאלה 10 (בשאלה זו α,β הם פסוקים)

1. אם מ- α נובע טאוטולוגית $\beta \to (\neg\alpha)$ אז α הוא סתירה או β הוא סתירה.
2. אם $\neg\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ טאוטולוגיה אז α טאוטולוגיה.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: "לא כל מספר חיובי הוא גדול מהריבוע שלו"

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\exists x((x>0) \to (x^2 \leq x))$.
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\neg\forall x\big((x>0) \to (x^2 \leq x)\big)$.

שאלה 12

נתבונן בפסוק: "כל מספר חיובי שקטן מ- 1 הוא גדול מהריבוע שלו"

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x<1) \wedge (x>0) \wedge (x^2 < x))$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x<1) \wedge (x>0)) \to \forall x(x^2 < x)$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021א | **מועד הגשה: 08.11.2020**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $1\in\{1,\{1\}\}$ ב. $1\in\{\{1\}\}$ ג. $\{2\}\subseteq\{1,\{1\},\{2\}\}$ ד. $\{\varnothing\}\subseteq\{1,\{\varnothing\}\}$

ה. $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{1\}\}$ ו. $\{1\}\in\{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}|=|\{1,2\}|$ ח. $|\mathcal{P}(\{2,\varnothing\})|=2\cdot|\mathcal{P}(\{\varnothing\})|$

שאלה 2 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

ב. אם $\{A\}\subseteq\mathcal{P}(B)$ אז $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$.

ג. אם $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ אז $B\subseteq A$ או $A\subseteq B$.

שאלה 3 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $(A\cap B)^c\subseteq A$ אז $A=U$

ב. $A^c\Delta B=A\Delta C$ אז $C=B^c$

ג. אם $x\in(A\cap B)\setminus C$ אז $x\notin A\Delta B\Delta C$.

שאלה 4 (28 נק')

בשאלה זו $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית. לכל $n\in\mathbf{N}$ נסמן $A_n=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$.

עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו אם היא שווה או לא לאחת הקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\setminus\{0\}$, $\varnothing$.

נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n^{\,c}$ ב. $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n^{\,c}$ ג. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n}\setminus A_n)$ ד. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}\cap A_n^{\,c})$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2,1
מספר השאלות: 20 | משקל המטלה: 2 נקודות
סמסטר: 2021א | מועד הגשה: 15.11.2020

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

א - אם הטענה נכונה | **ב - אם הטענה לא נכונה**

במטלה זו A,B,C הן קבוצות, R,S הם יחסים והאות n מייצגת מספר טבעי

שאלה 1
$\{2,3\}\cap\{\{2\},\{3\}\}=\{\{2\},3\}\cap\{2,\{3\}\}$

שאלה 2
אם $A\cup C=A\cup B$ אז $B=C$

שאלה 3
אם $A\subseteq B\cup C$ אז $A\subseteq B$ או $A\subseteq C$

שאלה 4
אם A,B קבוצות סופיות זרות אז $|\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)|=2^{|A|}+2^{|B|}$

שאלה 5
$A\subseteq\mathcal{P}(A)$

שאלה 6
אם $A\Delta B=A\setminus B$ אז $B\subseteq A$

שאלה 7
אם $x\in A\Delta B\Delta C$ אז $x\notin A\cap B$

שאלה 8
אם $x\notin A^c\cap B^c$ אז $x\in A\cap B$

שאלה 9
אם $A\subset B\times C$ אז $B\neq\varnothing$ וגם $C\neq\varnothing$

שאלה 10

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$$

שאלה 11

אם כל איבר של A הוא זוג סדור אז קיימות קבוצת B,C כך ש- $A = B \times C$

שאלה 12

אם R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2 = R$.

שאלה 13

אם יחס R מקיים $R^2 = R$ אז R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

שאלה 14

אם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי אז גם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים

שאלה 15

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

שאלה 16

כל יחס רפלקסיבי R המקיים $R^2 = R$ הוא יחס שקילות.

שאלה 17

אם ליחס שקילות R על $\{1,2,3,\ldots,n\}$ יש פחות מ- n מחלקות אז $|R| \geq n+2$

שאלה 18

אם $1 < n < m$ מספרים טבעיים אז החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

שאלה 19

אם A קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית אז אין ב- A איבר אחרון

שאלה 20

אם $A = \{1,2,3,4\}$ ואם $\langle A, \prec \rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים אז כל איבר של A הוא מינימלי או מקסימלי.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה   **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2, 3**

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021א   **מועד הגשה: 25.11.2020**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}\subset B\cap\{1,2\}$.

א. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. קבעו אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 2

על הקבוצה $A=\mathbf{N}\setminus\{0\}$ מגדירים שני יחסים, R,S כך: לכל $x,y\in A$, xRy אם ורק אם

קיים מספר **טבעי** $i>0$ כך ש- $\frac{y}{x}=2^i$ ו- xSy אם ורק אם קיים מספר **שלם** j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$.

א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א׳.

ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים (אם יש) לגבי היחס האחרון.

שאלה 3

לכל n טבעי נסמן $A_n = \{0,1,2,\ldots,n\}$ ובנוסף נסמן $A_{-1} = \varnothing$. תהי $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ פונקציה.

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם $f[A_n] \neq f[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

ב. הוכיחו ש- f היא על אם ורק אם $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

שאלה 4

נתונה פונקציה $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך: לכל $m,n \in \mathbf{Z}$, $f\langle m,n\rangle = \langle 2m+3n, 3m+2n\rangle$.

נסמן ב- $\pi_1 : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ את ההטלה על הרכיב הראשון ($\pi_1(m,n) = m$ לכל $m,n \in \mathbf{Z}$)

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית ולא על.

ב. הוכיחו ש- $\pi_1 \circ f$ היא על ולא חד-חד-ערכית.

ג. הוכיחו שהפונקציה $g : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $g\langle x,y\rangle = \langle 2x+3y, 3x+2y\rangle$ לכל $x,y \in \mathbf{Q}$ היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההפכית לה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,3**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2021א | **מועד הגשה: 03.12.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

במטלה זו האותיות f,g מסמנות פונקציות

שאלה 1
עבור כל מספר $n \in \mathbf{N}$ השלשות $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle x, 1+x+x^2+\cdots+x^n \rangle \mid x \in \mathbf{R}\} \rangle$
ו- $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle 1, n+1 \rangle\} \cup \{\langle x, (1-x^{n+1})/(1-x) \rangle \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\} \rangle$ הן פונקציות שוות.

שאלה 2
אם $f : A \to B$ היא פונקציה ו- $C_1, C_2 \subseteq A$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ אז גם $f[C_1] \cap f[C_2] = \varnothing$.

שאלה 3
אם $f : A \to B$ פונקציה ו- $D_1, D_2 \subseteq B$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ אז גם $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \varnothing$.

שאלה 4
$f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל קבוצה סופית $C \subseteq A$ מתקיים $|f[C]| = |C|$

שאלה 5
$f : A \to B$ היא על אם ורק אם לכל קבוצה סופית $D \subseteq B$ מתקיים $|f^{-1}[D]| = |D|$

שאלה 6
אם A,B תת-קבוצות של קבוצה אוניברסלית U אז $\chi_A^{-1}(\{1\}) \cap \chi_B^{-1}(\{0\}) = A \setminus B$

שאלה 7
אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ היא חד-חד-ערכית אז f היא על.

שאלה 8
אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ היא על אז f היא חד-חד-ערכית.

שאלה 9
אם $f,g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ואם $f \circ g = I_{\mathbf{N}}$ אז f היא פונקציה הפיכה.

שאלה 10
אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbf{N}$ אז קיימת פונקציה **קבועה** $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש- $f\circ g=g\circ f$

שאלה 11
קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 7 שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים שאינם מתחלקים ב- 7.

שאלה 12
אם קבוצה אינסופית A שקולה לכל קבוצה אינסופית שחלקית לה אז $|A|=\aleph_0$.

שאלה 13
אם A קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ ששקולות ל- $\mathbf{N}$ ו- B קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שאינן שקולות ל- $\mathbf{N}$ אז A שקולה ל- B .

שאלה 14
אם $A\subseteq\mathbf{R}$ ואם $|A|>\aleph_0$ אז A מכילה קטע לא מנוון.

שאלה 15
$|\mathbf{R}\setminus[0,\infty)|<|\mathbf{R}\setminus[0,1)|$

שאלה 16
הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\mathbf{N}^{\{1,2,3\}}$ הן שקולות זו לזו. (להבנת הסימונים עיינו בפרק 3.9)

שאלה 17
הקבוצות $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ ו- $\{1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 18
הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 19
אם $\mathcal{F}$ היא קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ אז $\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(A)\right|<\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A\right|$

שאלה 20
אם κ_1 עוצמה סופית ו- κ_2 עוצמה אינסופית אז $\aleph_0+\kappa_2\neq\aleph_0+\kappa_1$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021א **08.12.2020**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (28 נק׳)

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי, מופיעות לאחר הנקודה רק ספרות אי-זוגיות.

ב. $\{x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} \mid x, y, z \in \mathbf{Q}\}$

ג. $\mathcal{P}((0,1) \setminus \mathbf{Q})$

ד. $\mathcal{P}(\mathbf{Q} \cap (0, 10^{-10}))$

שאלה 2 (28 נק׳)

(הערה: למדנו שקבוצת המספרים הרציונליים היא בת מניה. ידוע שיש גם מספרים לא רציונליים כמו למשל $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \pi, e$, ועוד. ידוע שקבוצת כל המספרים האי-רציונליים אינה בת-מניה. השאלה שלפנינו מנסה לברר מהי עוצמת קבוצת המספרים שהם בנויים ממספרים רציונליים בעזרת שימוש חוזר של פעולות חשבון ושורשים. אלה נקראים מספרים אלגבריים)

א. מיצאו את העוצמה של הקבוצה $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}^n$. נמקו את התשובה.

ב. פולינום ממעלה n עם מקדמים רציונליים הוא ביטוי מהצורה $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ כאשר $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$ ו- x משתנה . מיצאו את עוצמת קבוצת כל הפולינומים בעלי מקדמים רציונליים (מכל המעלות האפשריות) . נמקו את התשובה.

ג. הגדרה: מספר ממשי שהוא שורש של פולינום עם מקדמים רציונליים נקרא מספר **אלגברי**.

הוכיחו שהמספר $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ הוא אלגברי (הראו ש- α הוא שורש של פולינום ממעלה 6 עם מקדמים רציונליים).

ד. הוכיחו שקבוצת כל המספרים האלגבריים היא אינסופית ובת מנייה.

שאלה 3 (16 נק׳)

עיגול במישור מוגדר כקבוצת כל הנקודות הנמצאות במרחק קטן או שווה r מנקודה נתונה, כאשר r מספר ממשי חיובי. נסמן :

A קבוצת כל הקבוצות של נקודות במישור (שאותו מזהים כרגיל כ- $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$).

B קבוצת כל העיגולים במישור.

C קבוצה של עיגולים במישור שזרים זה לזה.

הוכיחו ש- $|C|<|B|<|A|$.

שאלה 4 (28 נק׳)

סדרת פיבונצ׳י מוגדרת באופן הבא : $F_0=1$, $F_1=1$, ולכל $n\geq 2$ טבעי : $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים : $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2}-1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n>1$ טבעי קיימים מספר טבעי k ומספרים $a_0,a_1,...,a_k\in\{0,1\}$ כך ש- $n=\sum_{i=0}^{k} a_iF_i$. (כל מספר טבעי חיובי הוא סכום של מספרי פיבונצ׳י שונים זה מזה).

נסמן ב- A את קבוצת כל הסדרות האינסופיות $\langle a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle$ של מספרים ממשיים המקיימות את התנאי $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ לכל $n\geq 2$.

ג. מיצאו את העוצמה של A .

רמז : מיצאו פונקציה הפיכה המתאימה לכל איבר של $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ סדרה ב- A .

ד. מהי העוצמה של קבוצת כל הסדרות מ- A שבהן מופיעים רק מספרים רציונליים?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 4,3**

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021א | **מועד הגשה: 27.12.2020**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נקודות)

א. מיצאו את מספר הקבוצות החלקיות לקבוצה A בעלת n אברים המכילות **ממש** קבוצה נתונה של k איברים מתוך A.

ב. לבובספוג יש $n \geq 4$ חברים. בכל ערב הוא מזמין מספר כלשהו $k \geq 4$ של חברים לסעוד אתו ולאחר מכן הוא תמיד מזמין שלושה מהם לשחק בביתו. (אף אחד לא מסרב!)
ספרו בשתי דרכים את מספר האופציות השונות שיש לבובספוג לבלות עם חברים בערב אחד, והוכיחו עבור $n \geq 4$ את הזהות $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}=\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ בדרך קומבינטורית.
(כלומר ללא פישוט מראש של האגפים).

ג. הוכיחו את השוויון מסעיף ב' בדרך אלגברית (על ידי חישוב ישיר).

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. בשאלה זו נתייחס לפונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא A.

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A \to \{2,3,4\}$ המקבלות כל אחד מן הערכים $i \in \{2,3,4\}$ בדיוק i פעמים.

ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A \to \{2,3,4,5,6\}$ המקבלות כל אחד מהערכים $2,3,4$ בדיוק פעמיים.

ג. מיצאו את מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: A \to A$ המקיימות את התנאי:
$\{f(1), f(2), f(3)\} \cap \{1,2,3\} = \varnothing$

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$.

א. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כאשר $x_1+x_2+x_3\neq 5$.

ב. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כך ש- $x_{2i-1}+x_{2i}\neq 2$ לכל $1\leq i\leq 4$.

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל המילים באורך 10 הכתובות באותיות A,A,A,B,B,C,C,D,D,D.

א. מיצאו את מספר המילים ש**אין** בהן **שלוש אותיות מאותו סוג** הצמודות זו לזו.

ב. מיצאו את מספר המילים שבהן יש **לפחות שתי אותיות** מסוג A הצמודות זו לזו.

שאלה 5 (20 נקודות)

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:

דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10\leq n\leq 36$.

רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם,** שני סכומים שווים.

למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10,11,12,15,18,25,32,36$

רמי יכול לרשום את השוויון $36=25+11$.

לחלופין, הוא יכול לרשום $25+15=18+12+10$.

כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.

אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,

הוכיחו כי רמי תמיד ינצח!

הדרכה: עקרון שובך היונים.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-7**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2021א | **מועד הגשה: עד 03.01.2021**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

בשאלות 1-3 האות A מסמנת קבוצה בעלת 3 איברים.

שאלה 1

מספר היחסים שניתן להגדיר על A הוא 9

שאלה 2

מספר היחסים האנטי רפלקסיביים על A הוא 2^6

שאלה 3

מספר היחסים על A שווה למספר הפונקציות מ- A ל- $\mathcal{P}(A)$

בשאלות 4 - 11 נתייחס לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

שאלה 4

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ שווה מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f^{-1}[\{1,2\}]=\varnothing$.

שאלה 5

מספר הפונקציות $f:A\to A$ שהן חד-חד-ערכיות שווה למספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to A$ שהן חד-חד-ערכיות.

שאלה 6

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות את הערך 1 פעם אחת, את הערך 2 פעמיים ואת הערך 3 שלוש פעמים, גדול ממספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות פעמיים כל אחד מן הערכים 1,2,3.

שאלה 7

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2\}]=\{1,2\}$ קטן ממספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$.

שאלה 8

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=2$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1,2 מופיעה פעמיים.

שאלה 9

מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C \subseteq A$, $|B|=|C|=3$ ו- $B \cap C = \varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1 מופיעה שלוש פעמים.

שאלה 10

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C \rangle$ שבהם $B,C \subseteq A$, $|B|=2,\ |C|=3$ ו- $B \cap C = \varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן 0 מופיע פעם אחת, 1 מופיע פעמיים ו- 2 מופיע שלוש פעמים.

שאלה 11

מספר יחסי השקילות השונים על A שהם בעלי שלוש מחלקות בדיוק הוא גדול מ- 100.

שאלה 12

יש בדיוק 78 הפונקציות $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שאלה 13

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq f[\{1,2,3,4\}]$
שווה למספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2\} \not\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך שבשני התאים הראשונים ביחד יימצאו לפחות 10 כדורים, הוא 396

שאלה 15

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^8$

שאלה 16

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו לפחות 5 כדורים כל אחד, הוא 1008

שאלה 17

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $(x^5+x^6+x^7+\cdots)^2(1+x+x^2+\cdots)^8$

שאלה 18

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו ביחד לפחות 10 כדורים הוא $28 \cdot 316$

בשאלות 19-20 נסמן ב- $P(mn,m)$ את מספר כל הפיזורים האפשריים של mn כדורים שונים ב- m תאים זהים כך שבכל תא יימצאו בדיוק n כדורים.

שאלה 19

$P(8,4) = (8!)/2^4$.

שאלה 20

$P(6,3) > P(6,2)$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 7,6**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021א **מועד הגשה: 10.01.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (15 נק')

שאלה זו מתייחסת לפיתוח המולטינומי $(a+b+c+d)^{10}$

(3 נק') א. מהו מספר האיברים בפיתוח? (לאחר כינוס איברים דומים)

(6 נק') ב. לכמה איברים יש מקדם שלא מתחלק ב- 5?

(6 נק') ג. מהו מספר האיברים שבהם החזקות של כל האותיות a,b,c,d שונות מ- 2 ?

(מותר לחזקות של אותיות אלה להיות מספרים זוגיים אחרים, ששונים מ- 2)

שאלה 2 (30 נק')

לכל $n \geq 1$ טבעי, נסמן ב- A_n את קבוצת המספרים הטבעיים בעלי n ספרות, שבהם מופיעות רק הספרות 1,2,3,4,5,6 אך 1 לא מופיע בצמוד ל- 1 ו- 2 לא מופיע בצמוד ל- 2.

למשל $12121 \in A_5$ ו- $33215 \in A_5$ אבל $12114 \notin A_5$ ו- $12256 \notin A_5$.

לכל $n \geq 1$ טבעי נסמן $a_n = |A_n|$, כאשר a_0 מוגדר כשווה ל- 1 ובנוסף נסמן:

b_n = מספר המספרים השייכים ל- A_n שבהם הספרה השמאלית ביותר היא 1

c_n = מספר המספרים השייכים ל- A_n שבהם הספרה השמאלית ביותר היא 2.

א. מיצאו את $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$.

ב. לכל $n \geq 2$, הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} , b_n ו- c_n ,
את b_n בעזרת c_{n-1} ו- a_{n-2} ואת c_n בעזרת b_{n-1} ו- a_{n-2}

ג. השתמשו בתוצאות של סעיף ב' כדי למצוא יחס נסיגה a_n .

ד. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n .

שאלה 3 (25 נקי)

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון ש- $f(x)(1+2x+2x^2+x^3)=\frac{1}{(1-x)^3}$

(5 נקי) א. חשבו את a_0,a_1,a_2 .

(10 נקי) ב. מצאו מספרים r,s,t כך ש- $a_n=D(3,n)-ra_{n-1}-sa_{n-2}-ta_{n-3}$ לכל $n\ge 3$. חשבו את a_7 בעזרת הנוסחה הזו.

(10 נקי) ג. רשמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1+2x_2+3x_3=n$. מצאו את מספר הפתרונות במקרה ש- $n=7$

(רמז : שימו לב לקשר שבין $f(x)$ לבין הפונקציה מסעיף ג׳)

שאלה 4 (30 נקי)

א. מיצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ כאשר כל הנעלמים הם מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב- 3.

(רמז לפישוט : אפשר להוציא את x^2+x^4 כגורם משותף מהסכום האינסופי).

ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א׳ כאשר $k=10$, $n=32$.

ג. מצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_k+y_1+\cdots+y_k=n$ כאשר k הנעלמים הראשונים הם מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב- 3 ו- $0\le y_i\le 5$ לכל $1\le i\le k$. (רמז לפישוט : $1+x+\cdots+x^5=\frac{1-x^6}{1-x}$)

ד. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף ג׳ כאשר $k=10$, $n=24$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2021א | **מועד הגשה: 18.01.2021**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

כל גרף פשוט על 6 צמתים שבו 11 קשתות הוא קשיר

שאלה 2

אם $G=(A\cup B,E)$ הוא גרף דו-צדדי (כמו בהגדרה 1.5) אז $\sum_{v\in A}\deg_G(v)=|E|$

שאלה 3

אם לגרף G יש שני מרכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי

שאלה 4

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ יש שני מרכיבי קשירות בדיוק,

בשאלות 9-5 G הוא גרף שבו קיים מסלול אוילר שאינו מעגל ו- G_1 הוא גרף קשיר המתקבל מ- G לאחר מחיקת קשת אחת המחברת בין שני צמתים שונים של G.

שאלה 5

בגרף G_1 אין מסלול אוילר שאינו מעגל

שאלה 6

G_1 אינו אוילרי

שאלה 7

G_1 הוא גרף אוילרי

שאלה 8

אם G_1 המילטוני אז גם G המילטוני

שאלה 9

בגרף G קיים מסלול המילטון

בשאלות 10-14 נתייחס לעצים המתוייגים שבהם הצמתים מסומנים במספרים עוקבים $1,2,3,\ldots$ שהם בעלי סדרת פרופר מהצורה $(3,3,k,5,5)$, כאשר k מספר שלם חיובי.

שאלה 10

כל עץ כזה הוא בעל 5 צמתים בדיוק

שאלה 11

מספר העצים המקיים את התנאים הנתונים הוא 7

שאלה 12

לכל העצים הנ״ל יש אותו מספר עלים.

שאלה 13

כל שניים מן העצים הנתונים הם איזומורפיים (לפי הגדרה 2.8)

שאלה 14

כל שניים מן העצים הנתונים הם לא איזומורפיים (לפי הגדרה 2.8)

בשאלות $15-20$ G הוא גרף פשוט על 6 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא 4.

שאלה 15

G הוא גרף אוילרי

שאלה 16

G הוא גרף המילטוני

שאלה 17

קיים ב- G זיווג מושלם

שאלה 18

G הוא גרף מישורי

שאלה 19

G הוא לא גרף מישורי

שאלה 20

מספר הצביעה של G הוא 5

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס: 20476 – מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים**

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021א **מועד הגשה: 25.01.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20נקודות)

נתון גרף אוילרי פשוט וקשיר $G=(V,E)$.

א. הוכיחו שלכל קשת $e\in E$ הגרף $(V,E-\{e\})$ הוא קשיר.

ב. הוכיחו שאם קיימות קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$ כך ש- $(V,E-\{e_1,e_2,e_3\})$ אוילרי אז G הוא לא גרף דו-צדדי.

ג. הוכיחו שאם $|V|=2n+1, n\geq 1$ אז קיימים ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.

שאלה 2 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לעצים על 8 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,\ldots,8$

א. מיצאו את מספר העצים שבהם העלים הם חמשת הצמתים $4,5,6,7,8$ ורק הם.

ב. מיצאו את מספר העצים שבהם קיים צומת בעל דרגה 5.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי T עץ על n צמתים שבו יש k עלים.

א. הוכיחו שלכל צומת $v\in V$, $\deg_T(v)\leq k$

ב. הוכיחו שאם $k\leq \frac{n}{2}-1$ אז הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו $A = P(\{1,2,3\}) \setminus \{\varnothing\}$ (קבוצת כל הקבוצות הלא ריקות החלקיות ל- $\{1,2,3\}$) ,

$B = \{1,2,3,4,5,6\}$ ו- $G = (A \cup B, E)$ הגרף הדו-צדדי המוגדר כך : לכל $S \in A$ ולכל $t \in B$

יש קשת בין S ל- t אם ורק אם t שווה לסכום או למכפלה או למספר האיברים של S .

הוכיחו על ידי דוגמה או הפריכו בעזרת משפט הול כל אחת מן הטענות הבאות

א. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A

ב. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי B

ג. אם משמיטים ב- G את הצומת $\{3\}$ ואת כל הקשתות הסמוכות לו, מתקבל גרף שיש בו זיווג מושלם.

שאלה 5 (20 נקודות)

בגרף **פשוט וקשיר** G קיימים 5 צמתים בעלי דרגות $3,4,5,6,7$, n צמתים הם בעלי דרגה 2 ו- m צמתים בעלי דרגה 1.

(9 נק׳) א. הוכיחו שקיים מספר טבעי k כך ש- $m = 2k + 1$ ומיצאו את מספר הקשתות של G .

(9 נק׳) ב. הוכיחו ש- G הוא גרף מישורי

(9 נק׳) ג. הראו שמספר הפאות של G אינו תלוי כלל במספר הצמתים בעלי דרגה 2.

(9 נק׳) ד. הראו שהמספר המקסימלי של צמתים בעלי דרגה 1 הוא 17 ובמקרה זה G הוא עץ.