לוגיקה למדעי המחשב – שיעור 4:
שפת היחסים, תחביר וסמנטיקה

דוד קסלר 054-4511925

חזרה קצרה על השיעור הקודם

מנגנון הוכחה פורמלי

- מנגנון הוכחה פורמלי: קב' אקסיומות וכללי היסק / צעדי גזירה
- סדרת הוכחה פורמלית: סדרה המתקבלת רק מהאקסיומות ומצעדי הגזירה נקראת סדרת הוכחה פורמלית של הפסוק האחרון
- מנגנון הוכחה פורמלי נקרא "תחשיב"

תחשיב הילברט

- האקסיומות הלוגיות:
  1. $\left(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)\right)$
  2. $((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)))$
  3. $((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
- כלל הגזירה היחיד MP:

$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

הוכחה בתחשיב – דוגמה חדשה

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$
2. $((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)))$
3. $((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi))$

- הוכח את המשפט $(\neg A \to (A \to B))$

(Ax. 3) 1. $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$

(Ax. 1) 2. $(((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))))$

(MP 1,2) 3. $(\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$

(Ax. 2) 4. $((\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))) \to ((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B))))$

(MP3,4) 5. $((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$

(Ax. 1) 6. $(\neg A \to (\neg B \to \neg A))$

(MP5,6) 7. $(\neg A \to (A \to B))$

משפט הדדוקציה

- אם $K \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ אזי $K \vdash (\psi \to \varphi)$
- איך באמצעות משפט הדדוקציה נוכיח $(\neg A \to (A \to B))$?
- עפ"י משפט הדדוקציה צריך להוכיח $\{\neg A\} \vdash (A \to B)$

(Ax. 1)	$1. (\neg A \to (\neg B \to \neg A))$
(הנחה)	$2. \neg A$
(MP1,2)	$3. (\neg B \to \neg A)$
(Ax. 3)	$4. ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$
(MP3,4)	$5. (A \to B)$

נושאים נוספים שלמדנו

- קבוצת פסוקים K נקראת לא עקבית אם"ם קיים פסוק φ כך ש $\varphi \vdash \mathrm{K}$ וגם $\mathrm{K} \vdash \neg\varphi$. אם לא קיים פסוק כזה, הקבוצה עקבית (קונסיסטנטית).
- הוכחה בדרך השלילה: אם $K \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית אזי $\mathrm{K} \vdash \varphi$
  - שימוש: נניח בשלילה $\neg\varphi$, נגיע לסתירה ב$K \cup \{\neg\varphi\}$ ונסיק $\mathrm{K} \vdash \varphi$
- נאותות התחשיב: לכל קבוצת פסוקים K ופסוק φ אם $\mathrm{K} \vdash \varphi$ אזי $\mathrm{K} \Rightarrow \varphi$ – כל משפט שניתן להוכיח הוא נכון.
- שלמות התחשיב: לכל קבוצת פסוקים K ופסוק φ אם $\mathrm{K} \Rightarrow \varphi$ אזי $\mathrm{K} \vdash \varphi$ – כל פסוק נכון ניתן להוכחה.

יחידה 5 – שפת היחסים, תחביר ופירוש

שפת היחסים

- שפה חזקה יותר משפת הפסוקים
- ניתן לבטא טענות כגון:
  - "כל אדם הוא בן תמותה"
  - "יש אנשים שאוהבים לשתות יין"
  - "יש לפחות אדם אחד שמגדל כלב ולא מגדל חתול"
- נלמד סימנים נוספים כגון כמתים, ומודלים יותר מורכבים

הא"ב של שפת היחסים

- סימנים משותפים לכל השפות:
  - משתנים $x,y,z\ldots$ או $v_0,v_1,v_2\ldots$
  - הקשרים שאנו מכירים: $\{\vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow , \neg\}$
  - סוגרים: (,)
  - כמתים: $\forall,\exists$
  - יחס שיוויון
- סימני חתימה ספציפיים לכל שפה:
  - קבועים: $c_0,c_1,c_2\ldots$
  - פונקציות: $f(,), g(), h(,,),\ldots$
  - יחסים: $R_1(,), R_2(),\ldots$

שפה ומבנה/מודל בשפה היחסים

- השפה מגדירה
  - כמה קבועים יש
  - כמה פונקציות יש ובאיזה ערכיות
  - כמה יחסים יש ובאיזה ערכיות
- מבנה בשפה מגדיר
  - תחום המבנה
  - פירוש לקבועים
  - פירוש לפונקציות
  - פירוש ליחסים

דוגמאות

- תהי $L =< S,T,R >$ כאשר S,T יחסים חד מקומיים וR יחס דו מקומי.
- $M1 =< D,S,T,R >$ כאשר D – אנשים $S(x)$ – x סטודנט באו"פ, $T(x)$ – x מנחה באו"פ, $R(x,y)$ – x לומד בקורס של המנחה y.
  - לכל מנחה יש לפחות 2 סטודנטים:

$$\forall x(T(x) \rightarrow \exists y \exists z(S(y) \land S(z) \land R(y,x) \land R(z,x) \land \neg(y = z))$$

- $M2 =< D,S,T,R >$ כאשר D – חיות $S(x)$ – x חיה אוכלת בשר, $T(x)$ – x חיה אוכלת פירות, $R(x,y)$ – x טורפת את y.
  - יש חיה שאוכלת בשר, שגם טורפת חיה שאוכלת פירות

$$\exists x(S(x) \land \exists y\ (T(y) \land R(x,y))$$

  - יש חיה שטורפת את בני מינה

$$\exists x R(x,x)$$

דוגמאות

- תהי $L =< c_0, c_1, s, f, g, R >$ כאשר c_0, c_1 קבועים, s פונקציה חד מקומית, f, g פונקציות דו מקומיות, וR יחס דו מקומי.
- $M =< N, 0, 1, s, + , * , < >$ כאשר s היא פונקציית העוקב
  - למספרים הטבעיים יש איבר מינימלי:
    $\exists x \forall y (x < y \lor x = y)$
  - למספרים הטבעיים אין איבר מקסימלי:
    $\forall x \exists y (x < y)$

דוגמאות

- תהי $L =< c_0,c_1,s,f,g,R >$ כאשר c_0,c_1 קבועים, s פונקציה חד מקומית, f,g פונקציות דו מקומיות, וR יחס דו מקומי.
- $M =< N,0,1,s, + , * , < >$ כאשר s היא פונקציית העוקב
  - הגדרת המספרים הזוגיים:

$$\varphi(x): \exists z f(z,z) = x$$

  - יש אינסוף מספרים ראשוניים:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \forall a \forall b (a * b = y \rightarrow (y = a \vee y = b))$$

הגדרת שמות עצם

- **שם עצם** בשפת היחסים הינו:
  - מחרוזת t בת סימן אחד שהוא משתנה או קבוע היא שם עצם אלמנטרי בעומק מבני $d(t) = 0$.
  - אם f היא פונקציה k מקומית, ו $t_k \ldots t_1$ שמות עצם, אזי $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ הוא שם עצם בעומק מבני $d(t) = 1 + \max(d(t_1), \ldots, d(t_k))$
- דוגמאות:

$$0, 1, x, x + 1, (x * y) + 1$$
$$f(x), g(f(y), x), f(f(f(y)))$$

שמות עצם - תרגיל

- הוכיחו שאם t ו-s הם שמות עצם, ו-x שם של משתנה, אזי $t[s/x]$ הוא שם עצם
- נוכיח באינדוקציה על הבנייה של שם העצם t.
  - בסיס: אם t ש"ע אלמנטרי הוא או קבוע או משתנה. אם $t = x$ (t הוא המשתנה x) אזי $t[s/x] = s$. אחרת (בין אם t קבוע או משתנה אחר) $t[s/x] = t$
  - צעד: אם $t = f(t_1, \dots, t_k)$: x משתנה והוא לא בסוגריים או בפסיקים. לכן $t[s/x] = f(t_1[s/x], \dots, t_k[s/x])$ לפי הנחת האינדוקציה $t_i[s/x]$ ש"ע ולכן $t[s/x]$ ש"ע.

השמת משתנים במבנה

- השמה S במבנה היא התאמת עצמים במבנה למשתנים
  - x^S או $S(x)$ זהו סימון לעצם שההשמה מתאימה למשתנה x, או הפירוש של x בהשמה.
- השמה רלוונטית: השמה S רלוונטית לש"ע t אם היא מתאימה ש"ע לכל משתנה ב-t.
  - דוגמה: השמה רלוונטית ל-$g(f(y),x)$ היא השמה המתאימה ש"ע גם ל-x וגם ל-y.
  - מהי השמה רלוונטית ל-c_0?

פירוש שמות עצם בהשמה

- יהי M מודל וS השמה. נגדיר באינדוקציה פירוש t^S לכל ש"ע t (S השמה רלוונטית לt)
  - בסיס:
    - אם t קבוע c, $S(c) = c^M$
    - אם t משתנה x, $S(x)$ מוגדר ישירות בהשמה
  - מעבר:
    - אם $t = f(t_1 \dots t_n)$ ו-S השמה, עפ"י הנחת האינדוקציה $S(t_i)$ מוגדר לi מ1 עד n, ונגדיר $t^S = S(t) = f^M(S(t_1) \dots S(t_n))$

השמת משתנים - דוגמה

- תהי L שפה עם שני קבועים ושתי פונקציות דו מקומיות:
$$L =< c_1,c_2,f_1,f_2 >$$
- יהי M המודל $M =< N,0,1, + , \cdot>$
- תהי S ההשמה $S(x) = 7, S(y) = 11$ מהו $S(f_2(x,y))$?

$$S\big(f_2(x, y)\big) = f_2\big(S(x), S(y)\big) = f_2(7,11) = 7 \cdot 11 = 77$$

- תהי S ההשמה $S(x) = 2, S(y) = 4$ מהו $S(f_2(x,f_1(y,y)))$?

$$S\Big(f_2\big(x, f_1(y, y)\big)\Big) = f_2\Big(S(x), f_1\big(S(y), S(y)\big)\Big)$$
$$= 2 \cdot (4 + 4) = 16$$

סביבה

- הסביבה $\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ הינה כל ההשמות המתאימות x_i ל-a_i עבור $i = 1..n$. למשל, הסביבה $\begin{bmatrix} x & y \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$
- אפשר לסמן בש"ע את סדר המשתנים כך $t[x,y]$
- אם נגדיר $t[x,y] = f_2\big(x, f_1(y,y)\big)$ מה יהיה $t^M\ (3,5)$?

$$t^M\ (3,5) = f_2\big(3, f_1(5,5)\big) = 3 \cdot (5+5) = 30$$

נוסחאות בשפת היחסים

- נגדיר באינדוקציה מבנית נוסחאות בשפת היחסים
  - בסיס: אם R יחס n מקומי ו-$t_1 \ldots t_n$ ש"ע אזי $R(t_1 \ldots t_n)$ נוסחה אטומית
  - אם φ,ψ נוסחאות גם $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ נוסחאות
  - אם φ נוסחה וx משתנה, גם $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ נוסחאות
- דוגמה, מי מהמחרוזות הבאות נוסחה?

$$R(x,y), \forall x \exists y f(x,y), \forall x \exists y R(x,y) \to R(y,x)$$

משתנים חופשיים וקשורים

- בהנתן יחס חד מקומי R במודל מסוים, מהו $R(x)$?
  - תלוי בהשמה ובערך שהיא נותנת לx
- האם גם $\forall x R(x)$ תלוי בהשמה?
- בנוסחה הראשונה, x נקרא משתנה חופשי, ובשניה x קשור
- האם x חופשי או קשור בנוסחה $R_1(x) \wedge \exists x R_2(x)$?

משתנים חופשיים וקשורים - הגדרה

- בנוסחה אטומית, כל מופעי המשתנים נקראים מופעים חופשיים
- אם φ,ψ נוסחאות, בנוסחאות $\neg\varphi$ ו-$(\varphi @ \psi)$ כל כמת קושר את אותם משתנים שקשר ב- φ וב-ψ וכל שאר המשתנים שלא היו קשורים חופשיים
- אם φ נוסחה, בנוסחה $Qx\varphi$ (כאשר Q הוא $\forall$ או $\exists$) קושר Qx את כל המופעים החופשיים של x ב-φ. המשתנים שהיו קשורים נשארים קשורים לאותו כמת, וכל השאר חופשיים
- x משתנה חופשי ב- φ אם יש לו מופע חופשי אחד לפחות
- נוסחה נקראת פסוק אם אין בה משתנים חופשיים

משתנים חופשיים וקשורים - תרגול

- לאיזה כמת x ו-y קשורים בנוסחאות הבאות?
  - $(\forall x R(x,y) \wedge \exists y R(y,x))$
    - בצד שמאל x קשור ל$\forall x$ וy חופשי. בצד ימין y קשור ל$\exists y$ ו-x חופשי. שני המשתנים חופשיים בנוסחה.
  - $\forall x(R(x,y) \wedge \exists y R(y,x))$
    - שני מופעי x קשורים ל$\forall x$ וy חופשי מצד שמאל וקשור מצד ימין. סה"כ בנוסחה y חופשי וx קשור.
  - $\forall x(R(x,y) \wedge \exists x \exists y R(y,x))$
    - בצד שמאל x קשור ל$\forall x$ וy חופשי. בצד ימין y קשור ל$\exists y$ ו-x קשור ל$\exists x$. סה"כ בנוסחה y חופשי וx קשור.

הצבה

- יהיו φ נוסחה ו-t ש"ע
  - הצבה: $\varphi[t/x]$ היא הצבה המחליפה כל מופע <u>חופשי</u> של x ב-t
  - הצבה $\varphi[t/x]$ היא הצבה כשרה אם אין לה "תופעות לוואי" – אף משתנה לא הופך לקשור בעקבות ההצבה.
- דוגמה:
  - תהי $\varphi = \forall x(R(x,y) \land \exists y R(y,x))$ מהי $\varphi[t/x]$? $\varphi[t/y]$?
    - x קשור ואין לו מופעים חופשיים. $\varphi[t/x] = \varphi$
    - המופע השמאלי של y חופשי.

$$\varphi[t/y] = \forall x(R(x,t) \land \exists y R(y,x))$$

הצבה - תרגילים

- תהי φ הנוסחה $(\forall x(R_1(f_1(x),y)) \to \exists y(R_2(x,y)))$
  - אילו מבין ההצבות הבאות כשרות?
    - $\varphi[y/x]$
    - $\varphi[x/y]$
    - $\varphi[t/y]$
  - פתרון:
    - $\varphi[y/x]$ – לא הצבה כשרה. מצד שמאל אין הצבה. מצד ימין y מחליף את x ונקשר
    - $\varphi[x/y]$ – לא הצבה כשרה. x מחליף את y מצד שמאל ונקשר. מצד ימין אין הצבה
    - כשרה

הצרנה בתחשיב היחסים

- כל עצם בעל התכונה P הינו בעל תכונה Q:
  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- כל עצם בעל התכונה P הוא לא בעל תכונה Q:
  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
- קיים עצם בעל התכונה P שהוא בעל תכונה Q:
  $\exists x(P(x) \land Q(x))$
- קיים עצם בעל התכונה P שהוא לא בעל תכונה Q:
  $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

הצרנה - דוגמאות

- דוגמה להצרנה שגויה: "כל נמר הוא טורף":
  - $L(x)$ – x נמר
  - $P(x)$ – x טורף

$$\forall x(L(x) \wedge P(x))$$

- איזה דוגמה סותרת את המשפט המוצרן אבל לא את הטענה המקורית?
- האם יש דוגמה שסותרת את הטענה המקורית אבל לא את המשפט המוצרן?
- איך היה צריך להצרין את המשפט?

הצרנה – תרגיל 1

- נתונים אינסוף היחסים $P_i(x)$ - x מספר המתחלק בi.
- הצרינו: כל מספר זוגי המתחלק ב3 מתחלק ב6
  $$\forall x\big((P_2(x) \land P_3(x)\big) \to P_6(x))$$
- נוסיף את היחסים: $U(x) - x$ קבוצת מספרים. $L(x,y)$ x איבר בy.
- הצרינו: קיים מספר זוגי השייך לכל הקבוצות בתחום
  $$\exists x(P_2(x) \land \forall y(U(y) \to L(x,y)))$$
- הצרינו: כל קבוצה מכילה לפחות מספר אחד
  $$\forall x(U(x) \to \exists y(P_1(y) \land L(y,x)))$$

הצרנה – תרגיל 1

- נתונים אינסוף היחסים $P_i(x)$ - x מספר המתחלק בi.
- והיחסים: $U(x)$ – x קבוצת מספרים. $L(x,y)$ x איבר בy.
- הצרינו: כל 2 מספרים המתחלקים ב4 שייכים לאותן קבוצות

$$\forall x \forall y\big(\big(P_4(x) \wedge P_4(y)\big) \rightarrow (\forall z U(z)$$
$$\rightarrow \big(\big(U(x,z) \rightarrow U(y,z)\big) \wedge \big(U(y,z) \rightarrow U(x,z)\big)\big)\big)\big)$$

- הצרינו: כל מספר שמתחלק ב3 שייך לפחות לשתי קבוצות

$$\forall x(P_3(x) \rightarrow \exists y \exists z(\neg(y=z) \wedge U(y) \wedge L(x,y) \wedge U(z) \wedge L(x,z)))$$

הצרנה – תרגיל 2

- הצרינו את הטענות הבאות:
  - אין כנר שהוא לא עשיר
  - אין פסנתרן שהוא עשיר
  - (לכן) כנר לעולם איננו פסנתרן
- השתמשו בשפה הבאה:
  - $K(x)$ – x כנר
  - $P(x)$ – x פסנתרן
  - $A(x)$ – x עשיר

$$\neg\exists x(K(x) \land \neg A(x))$$

$$\neg\exists x(P(x) \land A(x))$$

$$\neg\exists x(K(x) \land P(x))$$

הגדרה פורמלית של מבנה / מודל

- תזכורת: השפה מגדירה: כמה קבועים, פונקציות ויחסים (כולל ערכיות) יש.
- מבנה M זהו רביעייה סדורה הכוללת קב' A שנקראת תחום המודל, התאמת עצם מהתחום c^M לכל קבוע c, פונ' F^M מהערכיות הנדרשת לכל פונקציה F בשפה, ויחס R^M מהערכיות הנדרשת לכל יחס R בשפה

$$M =< A; c_1^M, c_2^M, \ldots; F_1^M, F_2^M, \ldots; R_1^M, R_2^M, \ldots >$$

ערך האמת של נוסחה

- השמה S רלוונטית לנוסחה φ אם היא אם היא מתאימה בן זוג לכל המשתנים החופשיים ב-φ.
- ערך האמת של נוסחה במודל בהשמה רלוונטית:
  - אם $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$ נוסחה אטומית $S(\varphi) = T$ אם"ם $(t_1, \dots, t_n) \in R^M$
  - אם $\varphi = \neg\psi$ אזי $S(\varphi) = T$ אם"ם $S(\psi) = F$
  - אם $\varphi = \psi @ \theta$ אזי $S(\varphi)$ מתקבל על פי הנכונות של ψ, θ וטבלת האמת של $@ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - אם $\varphi = \exists x \psi$ אזי $S(\varphi) = T$ אם"ם קיים איבר a במודל M כך ש-ψ נכונה בהשמה $S < x|a >$ (קיים איבר a בתחום ששיגור x אליו יעשה את ψ נכונה)
  - אם $\varphi = \forall x \psi$ אזי $S(\varphi) = T$ אם"ם לכל איבר a במודל M ψ נכונה בהשמה $S < x|a >$

ערך האמת של נוסחה - דוגמאות

- תהי $L =< R >$
  - מה ערך האמת של $\varphi = \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$?
  - תלוי במודל – צריך פירוש ל-R. עבור $M_1 =< N, < >$ נקבל ערך T, ועבור $M_2 =< N, \leq >$ נקבל ערך F
  - נסמן $M_1 \vDash \varphi$ ו- $M_2 \nvDash \varphi$
  - מה ערך האמת של $\psi = \forall y R(x,y)$ במודל M_2?
  - ψ בניגוד ל-φ הוא לא פסוק. יש משתנה חופשי x. במקרה הזה מודל לא מספיק וצריך השמה כדי לדעת את ערך האמת.
  - מה ערך האמת של ψ בהשמה $S_1(x) = 1$? ובהשמה $S_2(x) = 0$?
  - נסמן $M_2 \nvDash_{S_1} \psi$ ו- $M_2 \vDash_{S_2} \psi$

פרוש פסוק במודל, נוסחה נכונה במודל

- אם שתי השמות S_1 ו- S_2 מתלכדות עבור כל המשתנים החופשיים בφ אזי $S_1(\varphi) = S_2(\varphi)$
  - מקרה פרטי: עבור פסוק ערך האמת מתלכד עבור כל ההשמות. פסוק יכול להיות נכון או לא נכון במודל
- נתונה שפה $L =< c,R >$, מודל $M =< \{1,2,3\},1, \geq >$ **והשמה** $S(x) = 2$
  - מה ערך האמת של $\varphi = R(x,c)$? האם זה תלוי בהשמה S?
  - למרות שx חופשי ערך האמת של הנוסחה לא תלוי בהשמה. $M \vDash \varphi$
- נוסחה נכונה במודל: נוסחה הנכונה במודל M עבור כל השמה S

נוסחאות נכונות במודל / השמה – תרגיל 1

- הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, כאשר M מודל, S השמה ו-φ נוסחה:
  - אם $M \vDash_S \forall x\varphi$ אז $M \vDash_S \varphi$
    - כן. $\forall x\varphi$ לא תלויה בהשמה, אבל אם מתקיימת לכל השמה S מתקיים $M \vDash_S \varphi$
  - אם $M \vDash_S \varphi$ אז $M \vDash_S \exists x\varphi$
    - כן. קיימת השמה S שבה המשתנה שמשוגר לx מקיים את φ ולכן $M \vDash_S \exists x\varphi$
  - $M \vDash \forall x\varphi$ אם"ם $M \vDash \varphi$
    - כן. מהגדרת $\forall$. $M \vDash \forall x\varphi$ אם"ם φ נכון לכל השמה של x כלומר $M \vDash \varphi$
  - אם $M \nvDash \varphi$ אז $M \vDash \neg\varphi$
    - לא. יכול להיות שבהשמה אחת φ נכון ובאחרת לא.
  - אם $\nvDash \varphi$ אז $\vDash \neg\varphi$
    - לא. יכול להיות שבמודל והשמה מסוימת φ נכון ובאחרת לא

נוסחאות נכונות במודל / השמה – תרגיל 2

- יהי $M = [D,I]$ מבנה שתחומו המספרים הטבעיים N כלומר $D = \{0,1,2, \dots\}$. פונקציית הפירוש: $I[F(x,y)] = (x \cdot y)$, $I[c] = 1$.

לפניכם הנוסחה φ הבאה:

$$\varphi(x, y, z) = \forall z\Big(\Big(\big(\exists x_1(F(x_1, z) = x)\big) \land \big(\exists y_1(F(y_1, z) = y)\big)\Big) \rightarrow (z = c)\Big)$$

  - מיצאו השמה S כך ש-$M_S(\varphi) = T$
  - מיצאו השמה S_1 כך ש-$M_{S_1}(\varphi) = F$

- פתרון: z משתנה קשור. צריך למצוא x,y כך שקיימים / לא קיימים x_1,y_1 המקיימים לכל z:

$$(x_1 \cdot z = x \land y_1 \cdot z = y) \rightarrow z = 1$$

- עבור $x = y = 5$ קיימים $x_1 = y_1 = 5$ כך ש$(5 \cdot z = 5 \land 5 \cdot z = 5) \rightarrow z = 1$
- עבור $x = y = 0$ לא קיימים x_1,y_1 המקיימים לכל z $(x_1 \cdot z = 0 \land y_1 \cdot z = 0) \rightarrow z = 1$ כי לכל ערך יכול להתקיים $z = 0$

הסגור הכולל של φ

- אם $x_n,\ldots,x_1$ כל המשתנים החופשיים ב- φ הסגור הכולל של φ הוא הפסוק $\forall x_1 \ldots \forall x_k \varphi$
- יהיו φ נוסחה, x משתנה וM מודל. אזי φ נכונה במודל M אם"ם $\forall x \varphi$ נכונה במודל M.
- הנוסחה φ נכונה במודל M אם"ם הסגור הכולל שלה $\forall x_1 \ldots \forall x_k \varphi$ נכון במודל M

טאוטולוגיה

- מה ערך האמת של $\varphi = (R(x,y) \vee \neg R(x,y))$?
- ערך האמת של הפסוק לא תלוי בהשמה וגם לא תלוי במודל. אם נוסחה φ נכונה בכל מודל ובכל השמה היא נקראת טאוטולוגיה או אמת לוגית, ונסמן $\vDash \varphi$
- ניתן לבנות טאוטולוגיות מקבילות בתחשיב היחסים לכל טאוטולוגיה בתחשיב הפסוקים ע"י החלפת האטומים בנוסחאות אטומטיות.
- הנוסחה הנ"ל מקבילה לנוסחה $(P \vee \neg P)$ בתחשיב הפסוקים
- נוסחה φ שאינה נכונה בשום מודל והשמה נקראת סתירה.
- נוסחה φ שקיים מודל והשמה בו היא נכונה נקראת ספיקה.

טאוטולוגיה – תרגיל 1

- אילו מהנוסחאות הבאות טאוטולוגיות?
  - $\big(R(x,y) \rightarrow R(x,y)\big)$
    - כן – נובע ישירות מטאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים
  - $\big(\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)\big)$
    - לא – למשל, R הוא היחס < (קטן מ-) במספרים השלמים. לכל x קיים y כך ש$x < y$, אבל לא קיים y כך שלכל x מתקיים $x < y$
  - $\big(\exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)\big)$
    - כן – אם קיים x כך שלכל y מתקיים $R(x,y)$ אזי לכל y קיים x המקיים $R(x,y)$ (אותו x שהופיע בצד שמאל)

טאוטולוגיה – תרגיל 2

- האם הפסוק $(\forall x(p(x) \vee q(x)) \leftrightarrow (\forall xp(x) \vee \forall xq(x)))$ טאוטולוגיה?
  - לא. למשל, $p(x)$ – זוגי, $q(x)$– אי זוגי. צד ימין מתקיים צד שמאל לא
- האם הפסוק ספיק?
  - כן. למשל במודל שמפרש בצורה זהה את p ואת q, או מודל שמקיים $\forall xp(x)$

טאוטולוגיה – תרגיל 3

- עבור כל אחד מהפסוקים הבאים הוכיחו האם הוא טאוטולוגיה, ספיק או סתירה
- $\big(\exists x P(x) \rightarrow \forall x G(x)\big) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow G(x))$
  - הפסוק טאוטולוגיה. אם קיים x שעבורו $P(x)$ גורר $\forall x G(x)$ אזי עבור אותו x גם $P(x)$ גורר $G(x)$ ולכן $\exists x(P(x) \rightarrow G(x))$
- $\big(\forall x P(x) \rightarrow \exists x G(x)\big) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow G(x))$
  - לא טאוטולוגיה אבל ספיק
    - עבור $P(x)$ – x זוגי ו- $G(x)$– x אי זוגי – לא מתקיים
    - עבור $P(x)$ – טאוטולוגיה ו- $G(x)$– סתירה - מתקיים

גרירה לוגית

- נוסחה ψ נגררת לוגית מנוסחה φ אם בכל מודל M ובכל השמה S בה מתקיים $M \vDash_S \varphi$ מתקיים $M \vDash_S \psi$. נסמן $\varphi \vDash \psi$ או $\varphi \Longrightarrow \psi$
   - שימו לב לשימוש הכפול בסימן $\vDash$
- קבוצת נוסחאות $K = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ גוררת לוגית נוסחה ψ אם בכל מודל M ובכל השמה S שמספקת את כל הנוסחאות בקבוצה מתקיים $M \vDash_S \psi$. נסמן $K \vDash \psi$ או $K \Longrightarrow \psi$
- משפט:
   - $\varphi \vDash \psi$ אם"ם $\vDash (\varphi \to \psi)$
   - עבור $K = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ $K \vDash \psi$ אם"ם $\vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi$

נוסחאות שקולות לוגית

- הנוסחאות φ ו- ψ שקולות לוגית, $\psi \equiv \varphi$, אם"ם $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- הגדרה שקולה: בכל מודל M והשמה S שבה φ נכונה גם ψ נכונה ולהיפך
- אם $\varphi \equiv \psi$ אזי מתקיים $\neg\psi \equiv \neg\varphi$ וגם $(\psi @ \theta) \equiv (\varphi @ \theta)$, $\forall x\psi \equiv \forall x\varphi$, $\exists x\psi \equiv \exists x\varphi$
- אם $\psi \equiv \psi'$ ו- ψ תת נוסחה של φ, אז ניתן להחליף את ψ ב-ψ' ולקבל נוסחה φ' שקולה ל-φ

נוסחאות שקולות לוגית - תרגיל

- קיבעו עבור כל זוג נוסחאות האם הן שקולות זו לזו:
  - $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \equiv (\forall x\varphi(x) \rightarrow \psi)$
    - לא שקולות. דוגמה נגדית: התחום הוא N. ψ סתירה כלשהי. $\varphi(x)$ - x זוגי. צד ימין מקבל ערך T (כי $\forall x\varphi(x)$ מקבל ערך F). צד שמאל מקבל ערך F: לא מתקיים שלכל x המשוואה $\varphi(x) \rightarrow \psi$ מקבלת ערך T. עבור x זוגי היא מקבלת ערך F.
  - $\exists x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi) \equiv (\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \psi)$
    - לא שקולות. דוגמה נגדית: אותה דוגמה כמו בסעיף הקודם. הפעם צד ימין מקבל ערך F (כי קיים x זוגי, ו ψ סתירה) וצד שמאל מקבל ערך T (כי קיים x אי זוגי עבורו זה מתקיים).

תודה רבה ☺