ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס סתיו 2025א

רן לנצט

אוקטובר 2025 – סמסטר סתיו תשפ״ה

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il .

הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://www.openu.ac.il/shoham .

מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:

https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library . פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il .

מרכז ההוראה בקורס הוא רן לנצט. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 052-5552734, בימי א' בשעות 19:00–20:00.
- בדוא"ל ranlan@openu.ac.il.
- דרך אתר הקורס.
- דרך מערכת **שאילתא** – לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור "פניה חדשה" ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה "פניות סטודנטים": השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

בברכה ,
צוות הקורס

שימו לב:

חובה להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.

ללא הגשת מטלות במשקל זה

אי-אפשר לעבור את הקורס.

ראו הסבר בעמוד ה'.

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס / א2025)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	תאריך אחרון למשלוח	
			ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	01.11.2024-29.10.2024 (יום ג' – פתיחת הסמסטר)	מבוא מהיר ללוגיקה	ממ"ח 01 עד 10.11.24	
2	08.11.2024-03.11.2024	תורת הקבוצות פרק 1		
3	15.11.2024-10.11.2024	תורת הקבוצות פרקים 1, 2		ממ"ן 11 עד 24.11.24
4	22.11.2024-17.11.2024	תורת הקבוצות פרקים 2, 3	ממ"ח 02 עד 1.12.24	
5	29.11.2024-24.11.2024	תורת הקבוצות פרק 3		ממ"ן 12 עד 8.12.24
6	06.12.2024-01.12.2024	תורת הקבוצות פרקים 3, 4	ממ"ח 03 15.12.24	
7	13.12.2024-08.12.2024	תורת הקבוצות פרק 4		ממ"ן 13 עד 22.12.24
8	20.12.2024-15.12.2024	קומבינטוריקה סעיפים 2.3–1.1		
9	27.12.2024-22.12.2024 (ה-ו חנוכה)	קומבינטוריקה סעיפים 3.2–2.4		
10	03.01.2025-29.12.2024 (א-ה חנוכה)	קומבינטוריקה פרקים 4, 5		ממ"ן 14 עד 12.1.25
11	10.01.2025-05.01.2025	קומבינטוריקה פרקים 6, 7	ממ"ח 04 עד 19.1.25	
12	17.01.2025-12.01.2025	תורת הגרפים פרקים 1, 2		ממ"ן 15 עד 26.1.25
13	24.01.2025-19.01.2025	תורת הגרפים פרקים 3, 4		
14	31.01.2025-26.01.2025	תורת הגרפים פרקים 5, 6	ממ"ח 05 עד 2.2.25	
15	03.02.2025-02.02.2025 (יום ב' סיום הסמסטר)			ממ"ן 16 עד 10.2.25

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים בלוח המפגשים שנשלח בנפרד.*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ"ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ"חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

בכל מטלה מספר שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה, אלא אם כן צוין אחרת.

אנו מאשרים לכל תלמידי הקורס לשלוח את מטלות המנחה דרך האתר, בפורמט PDF.

אפשר לשלוח בפורמט זה גם סריקה של כתב-יד בתנאי שהוא ברור ומסודר.

כל מטלה חייבת להיות בקובץ אחד. (לא אוסף של קבצים או תמונות). מטלה שתוגש כמספר קבצים נפרדים תמחק מהמערכת ולא תבדק.

ניקוד המטלות

בקורס שש מטלות מנחה (ממ"נים) וחמש מטלות מחשב (ממ"חים).

משקלן של מטלות המחשב 01 ו-02 הוא נקודה אחת כל אחת. משקל כל אחת מיתר המטלות הוא 2 נקודות.

בהגשת כל המטלות ניתן, אפוא, לצבור 20 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות:

חובה להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
אי-אפשר לעבור את הקורס.

תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. להגיש מטלות במשקל של 10 נק' לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות, הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ, לדון עם עמיתים, וכן עם סגל ההוראה של הקורס, על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

אם בכוונתכם לשלוח ממ"ן בדואר, השאירו לעצמכם עותק של המטלה.
האוניברסיטה הפתוחה אינה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ״ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: החוברת ״מבוא מהיר ללוגיקה״.**

מספר השאלות: 12 | **משקל המטלה: נקודה אחת.**

סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 10.11.24.**

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ״ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. **סמנו**:

א' – אם רק טענה 1 נכונה; **ב'** – אם רק טענה 2 נכונה;
ג' – אם שתי הטענות נכונות; **ד'** – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. הביטוי $\forall x \forall y (x^2 - y^2 - (x+y)(x-y))$ הוא פסוק.
2. הביטוי $\exists x \exists y (x^2 - y^2 - (x+y)(x-y) \neq 0)$ הוא פסוק.

שאלה 2

נתון הפסוק

(*) לכל מספר חיובי יש שורש ריבועי.

1. שלילת הפסוק (*) שקולה לוגית ל: ״אם מספר הוא שלילי אז אין לו שורש ריבועי״.
2. שלילת הפסוק (*) שקולה לוגית ל: ״קיים מספר חיובי שאינו שורש ריבועי של אף מספר״.

שאלה 3

1. הפסוק: ״ $1+101+101^2+\ldots+101^{100} = 0.01(101^{101}-1)$ **או** $\sqrt{11.12^2+8.88^2} = 20$ ״ הוא אמת.
2. הפסוק: ״ $1:(2:(3:4)) = (1:2):(3:4)$ **וגם** $1:(2:(3:4)) = ((1:2):3):4$ ״ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק הבא הוא אמת: ״**אם** לכל x ממשי מתקיים $x^2+x+1>0$, **אז** לכל x ממשי מתקיים $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) = (1-x^2)(1+x^2+x^4)$״.
2. הפסוק הבא הוא אמת: ״**אם** קיים x ממשי כך ש- $x^2-x+1=0$, **אז** לכל x ממשי $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5) = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$״.

שאלה 5

1. הפסוק הבא הוא אמת: "**אם** $((2>3)$ **וגם** $(1<2))$, **אז** $(1=-1)$".
2. הפסוק הבא הוא אמת:

"**לכל** a,b,c,d ממשיים, **(אם** $[(a<b)$ **וגם** $(c<d)]$, **אז** $[(a<b)$ **או** $(c<d)]$".

שאלה 6

נתון כי לוח האמת המאוחד של הפסוקים α ו- β הוא זה שמשמאל.

1. $\beta \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow \alpha$
2. $\alpha \equiv (q \vee r) \rightarrow \beta$

p	q	r	α	β
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	T	F

שאלה 7

1. $(p \vee q) \rightarrow r$ שקול טאוטולוגית ל- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$.
2. $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ שקול טאוטולוגית ל- $\neg q \rightarrow (p \vee r)$.

שאלה 8

נתונים פסוקים α, β. נתון שהפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ גורר טאוטולוגית את $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$.

1. מהנתון נובע כי α הוא טאוטולוגיה.
2. מהנתון נובע כי β הוא טאוטולוגיה.

שאלה 9

1. יהיו α, β פסוקים כלשהם. אז הפסוק $(\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)$ גורר טאוטולוגית את הפסוק $((\neg\beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$.
2. יהיו α, β פסוקים כלשהם. אז הפסוק $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\beta) \rightarrow \alpha)$ גורר טאוטולוגית את הפסוק β.

שאלה 10

1. יהיו α, β פסוקים כלשהם. אם α גורר טאוטולוגית את $\beta \rightarrow (\neg\alpha)$, אז α הוא סתירה או ש- β הוא סתירה.
2. יהיו α, β פסוקים כלשהם. אם $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$ טאוטולוגיה, אז α טאוטולוגיה.

שאלה 11

נתבונן בפסוק:

(*) כל מספר ממשי חיובי שקטן מ-1 הוא גדול מהריבוע של עצמו.

מבקשים להצרין את (*), כאשר ההקשר (התחום) הוא קבוצת כל המספרים הממשיים.

1. את הפסוק (*) ניתן להצרין כ: $\forall x((x<1)\wedge(x>0)\wedge(x^2<x))$.
2. את הפסוק (*) ניתן להצרין כ: $\forall x((x<1)\wedge(x>0))\rightarrow\forall x(x^2<x)$.

שאלה 12

מבקשים להצרין את הפסוק:

(*) לכל מספר ממשי יש מספר שלם שגדול ממנו.

נניח שההקשר (התחום) הוא קבוצת כל המספרים הממשיים, וש- Iy מייצג את " y הוא מספר שלם". כמו כן, נקבל כאן כנכונה כל הצרנה ששקולה לוגית להצרנה נכונה.

1. את הפסוק (*) ניתן להצרין כ: $\forall x\exists y(Iy\rightarrow y>x)$.
2. את הפסוק (*) ניתן להצרין כ: $\neg(\exists x\forall y\{(\neg Iy)\vee[\neg(y>x)]\})$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה — **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות, פרק 1.**

מספר השאלות: 4 — **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א — **מועד הגשה: 24.11.24.**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט באתר הקורס):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק: די לרשום בכל סעיף "נכון" / "לא נכון".

א. $1\in\{1,\{1\}\}$ ב. $1\in\{\{1\}\}$ ג. $\{2\}\subseteq\{1,\{1\},\{2\}\}$ ד. $\{\emptyset\}\subseteq\{1,\{\emptyset\}\}$

ה. $\{\emptyset\}\subseteq\{\emptyset,\{1\}\}$ ו. $\{1\}\in\{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}|=|\{1,2\}|$ ח. $|\mathcal{P}(\{2,\emptyset\})|=2\cdot|\mathcal{P}(\{\emptyset\})|$

שאלה 2 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

ב. אם $\{A\}\subseteq\mathcal{P}(B)$, אז $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$.

ג. אם $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$, אז $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

שאלה 3 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה U. נתייחס אל U כאל קבוצה אוניברסלית.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $(A\cap B)^c\subseteq A$, אז $A=U$.

ב. אם $A^c\Delta B=A\Delta C$, אז $C=B^c$.

ג. אם $x\in(A\cap B)\setminus C$, אז $x\notin A\Delta B\Delta C$.

שאלה 4 (28 נק')

בשאלה זו $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית. לכל $n\in\mathbf{N}$ נסמן $A_n=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$.

עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו אם היא שווה או לא לאחת הקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\setminus\{0\}$, $\emptyset$.

נמקו את טענותיכם.

א. $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n^{\,c}$ ב. $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n^{\,c}$ ג. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n}\setminus A_n)$ ד. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}\cap A_n^{\,c})$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2,1.**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: נקודה אחת.**
סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 1.12.24.**

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. **סמנו**:
א' – אם הטענה נכונה; **ב'** – אם הטענה אינה נכונה.

שאלה 1
$\{2,\{3\}\} \cap \{\{2\},3\} = \{\{2\},\{3\}\} \cap \{2,3\}$.

שאלה 2
יהיו A,B,C קבוצות. אם $A \cup B = A \cup C$, אז $B = C$.

שאלה 3
יהיו A,B,C קבוצות. אם $A \subseteq B \cup C$, אז $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$.

שאלה 4
יהיו A,B קבוצות סופיות זרות. אזי: $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = 2^{|A|} + 2^{|B|}$.

שאלה 5
תהי A קבוצה. אזי: $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

שאלה 6
יהיו A,B קבוצות. אם $A \Delta B = A \setminus B$, אז $B \subseteq A$.

שאלה 7
יהיו A,B,C קבוצות. אם $x \in A \Delta B \Delta C$, אז $x \notin A \cap B$.

שאלה 8
יהיו A,B קבוצות. אם $x \notin A^c \cap B^c$, אז $x \in A \cap B$.

שאלה 9
יהיו A,B,C קבוצות. אם $A \subset B \times C$, אז $B \neq \emptyset$ וגם $C \neq \emptyset$.

שאלה 10
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$$

שאלה 11
תהי A קבוצה. אם כל איבר של A הוא זוג סדור, אז קיימות קבוצת B,C כך ש- $A = B \times C$.

שאלה 12

יהי R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי. אזי $R^2 = R$.

שאלה 13

יהי R יחס המקיים $R^2 = R$. אזי R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

שאלה 14

יהיו R,S יחסים. אם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי, אז גם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים.

שאלה 15

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

שאלה 16

כל יחס רפלקסיבי R המקיים $R^2 = R$ הוא יחס שקילות.

שאלה 17

יהי n מספר שלם וחיובי, ויהי R יחס שקילות על $\{1,2,3,\ldots,n\}$. אם ל- R יש פחות מ- n מחלקות שקילות, אז $|R| \geq n+2$.

שאלה 18

אם $1 < n < m$ מספרים טבעיים, אז החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

(הגדרת היחס $\equiv_k$, עבור k שלם וחיובי, מופיעה בראש עמ' 90. הגדרת עידון של חלוקה מופיעה בעמ' 96.)

שאלה 19

אם A קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית, אז אין ב- A איבר אחרון.

שאלה 20

אם $A = \{1,2,3,4\}$, ואם $\langle A, \prec \rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים, אז כל איבר של A הוא מינימלי או מקסימלי בסדר חלקי זה.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות, פרקים 2, 3.**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 8.12.24.**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט באתר הקורס):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת״א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (25 נקי)

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}\subset B\cap\{1,2\}$.

א. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. קבעו אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 2 (25 נקי)

על הקבוצה $A=\mathbf{N}\setminus\{0\}$ מגדירים שני יחסים, R,S כך: לכל $x,y\in A$, xRy אם״ם

קיים מספר **טבעי** $i>0$ כך ש- $\frac{y}{x}=2^i$ ו- xSy אם״ם קיים מספר **שלם** j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$.

א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א׳.

ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים (אם יש) לגבי היחס האחרון.

שאלה 3 (25 נק')

לכל n טבעי נסמן $A_n = \{0,1,2,\ldots,n\}$ ובנוסף נסמן $A_{-1} = \emptyset$. תהי $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ פונקציה.

א. הוכיחו ש- f היא חח"ע אם"ם $f[A_n] \neq f[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$ שונים.

ב. הוכיחו ש- f היא על אם ורק אם $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$ שונים.

שאלה 4 (25 נק')

נתונה פונקציה $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך : לכל $m,n \in \mathbf{Z}$, $f\langle m,n\rangle = \langle 2m+3n, 3m+2n\rangle$.

נסמן ב- $\pi_1 : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ את ההטלה על הרכיב הראשון ($\pi_1(m,n) = m$ לכל $m,n \in \mathbf{Z}$).

א. הוכיחו ש- f היא חח"ע ולא על.

ב. הוכיחו ש- $\pi_1 \circ f$ היא על ולא חח"ע.

ג. הוכיחו שהפונקציה $g : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $g\langle x,y\rangle = \langle 2x+3y, 3x+2y\rangle$ לכל $x,y \in \mathbf{Q}$ היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההופכית לה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות, פרקים 4,3.**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 15.12.24.**

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה. **סמנו**:

א' – אם הטענה נכונה; **ב'** – אם הטענה אינה נכונה.

שאלה 1

לכל $n \in \mathbf{N}$, השלשות הבאות הן פונקציות שוות:

$\left\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle x, 1+x+x^2+\ldots+x^n \rangle \mid x \in \mathbf{R}\} \right\rangle$;

$\left\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle 1, n+1 \rangle\} \cup \{\langle x,\ (1-x^{n+1})/(1-x) \rangle \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\} \right\rangle$.

שאלה 2

יהיו A,B קבוצות, תהי $f: A \to B$, ויהיו $C_1, C_2 \subseteq A$.

אם $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, אז גם $f[C_1] \cap f[C_2] = \emptyset$.

שאלה 3

יהיו A,B קבוצות, תהי $f: A \to B$, ויהיו $D_1, D_2 \subseteq B$.

אם $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, אז גם $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \emptyset$.

שאלה 4

יהיו A,B קבוצות, ותהי $f: A \to B$.

אזי: f היא חח"ע אם"ם לכל $C \subseteq A$ סופית מתקיים $|f[C]| = |C|$.

שאלה 5

יהיו A,B קבוצות, ותהי $f: A \to B$.

אזי: f היא על אם"ם לכל $D \subseteq B$ סופית מתקיים $|f^{-1}[D]| = |D|$.

שאלה 6

יהיו A,B תת-קבוצות של קבוצה U, ויהיו χ_A, χ_B הפונקציות האופייניות של A,B (בהתאמה) ביחס ל- U. אזי: $\chi_A^{-1}[\{1\}] \cap \chi_B^{-1}[\{0\}] = A \setminus B$.

שאלה 7

תהי $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. אם f היא חח"ע, אז היא על.

שאלה 8

תהי $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. אם f היא על, אז היא חח״ע.

שאלה 9

יהיו $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. אם $f\circ g=I_{\mathbf{N}}$, אז f היא פונקציה הפיכה.

שאלה 10

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ו-$f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbf{N}$, אז קיימת פונקציה **קבועה** $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש- $f\circ g=g\circ f$.

שאלה 11

קבוצת כל המספרים הטבעיים שמתחלקים ב-7 שקולה לקבוצת כל המספרים הטבעיים שאינם מתחלקים ב-7.

שאלה 12

תהי A קבוצה אינסופית ששקולה לכל קבוצה אינסופית שחלקית לה. אזי: $|A|=\aleph_0$.

שאלה 13

תהי A קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל-$\mathbf{N}$ ששקולות ל- $\mathbf{N}$, ותהי B קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל-$\mathbf{N}$ שאינן שקולות ל-$\mathbf{N}$. אזי: A שקולה ל-B.

שאלה 14

תהי $A\subseteq\mathbf{R}$, ונניח כי $|A|>\aleph_0$. אזי: A מכילה קטע בלתי מנוון.

(קטע בלתי מנוון הוא קטע שיש לו יותר מאיבר אחד.)

שאלה 15

$$\left|\mathbf{R}\setminus[0,\infty)\right|<\left|\mathbf{R}\setminus[0,1)\right|$$

שאלה 16

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\mathbf{N}^{\{1,2,3\}}$ הן שקולות זו לזו. (להבנת הסימונים, עיינו בפרק 3.9.)

שאלה 17

הקבוצות $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ ו- $\{1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 18

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 19

תהי $\mathcal{F}$ היא קבוצת כל תת-הקבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$. אזי: $\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A\right|<\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(A)\right|$.

שאלה 20

תהי κ_1 עוצמה סופית, ותהי κ_2 עוצמה אינסופית. אזי: $\aleph_0+\kappa_1\neq\aleph_0+\kappa_2$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות, פרק 4.**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א **מועד הגשה: 22.12.24.**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט באתר הקורס):

- במערכת המטלות המקוונות (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילתא״א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (28 נק׳)

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי מופיעות לאחר הנקודה רק ספרות אי-זוגיות.

ב. $\{x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} \mid x, y, z \in \mathbf{Q}\}$

ג. $\mathcal{P}((0,1) \setminus \mathbf{Q})$

ד. $\mathcal{P}(\mathbf{Q} \cap (0, 10^{-10}))$

שאלה 2 (28 נק׳)

(בשאלה שלפנינו נברר מהי העוצמה של קבוצת כל המספרים הבנויים ממספרים רציונליים בעזרת שימוש חוזר בפעולות חשבון ושורשים. מספרים אלה נקראים מספרים אלגבריים.)

א. מיצאו את עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}^n$. נמקו את התשובה.

ב. **פולינום ממעלה** n **עם מקדמים רציונליים** הוא ביטוי מהצורה $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, כאשר $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$ ו-x משתנה. מיצאו את עוצמת קבוצת כל הפולינומים בעלי מקדמים רציונליים (מכל המעלות האפשריות). נמקו את תשובתכם.

ג. <u>הגדרה</u>: מספר ממשי β הוא **שורש** של פולינום $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ עם מקדמים רציונליים אם מתקיים $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots + a_n\beta^n = 0$.

<u>הגדרה</u>: מספר ממשי נקרא **אלגברי** אם הוא שורש של פולינום עם מקדמים רציונליים שאינו הפולינום 0.

1) הוכיחו שהמספר $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ הוא אלגברי (הראו ש-α הוא שורש של פולינום ממעלה 6 עם מקדמים רציונליים). **[המשך השאלה בעמוד הבא.]**

2) הוכיחו שקבוצת כל המספרים הממשיים האלגבריים היא אינסופית ובת מנייה. תוכלו להסתמך על הטענה הבאה מבלי להוכיח אותה: קבוצת השורשים של כל פולינום שאינו 0 היא סופית.

שאלה 3 (16 נק׳)

עיגול במישור מוגדר כקבוצת כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק קטן או שווה r מנקודה נתונה, כאשר r מספר ממשי חיובי. נסמן:

A = קבוצת כל הקבוצות של נקודות במישור (שאותו מזהים כרגיל כ- $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$).

B = קבוצת כל העיגולים במישור.

כמו כן, תהי C קבוצה של עיגולים במישור, שכל שניים מהם זרים זה לזה.

הוכיחו ש- $|A|>|B|>|C|$.

תוכלו להסתמך על הטענה הבאה מבלי להוכיח אותה: לכל זוג מספרים ממשיים $x<y$ קיים מספר רציונלי q כך ש- $x<q<y$ ("בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונלי").

שאלה 4 (28 נק׳)

א. **סדרת פיבונצ׳י** מוגדרת באופן הבא: $F_0=1$, $F_1=1$, ולכל $n\geq 2$ טבעי: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $\sum_{i=0}^{n}F_i=F_{n+2}-1$.

ב. נסמן ב- A את קבוצת כל הסדרות האינסופיות $\langle a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle$ של מספרים ממשיים המקיימות את התנאי $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ לכל $n\geq 2$.

מיצאו את העוצמה של A.

רמז: מיצאו פונקציה הפיכה המתאימה לכל איבר של $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ סדרה ב- A.

ג. תהי A הקבוצה שהוגדרה בסעיף ב׳. מהי העוצמה של קבוצת כל הסדרות מ-A שבהן מופיעים רק מספרים רציונליים?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 4,3.**

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 12.01.25.**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט באתר הקורס):

- במערכת המטלות המקוונות (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (20 נקודות)

א. תהי A קבוצה בת n איברים, ותהי B קבוצה חלקית ל-A בת k איברים. מצאו את מספר הקבוצות החלקיות ל-A המכילות **ממש** את B.

ב. לבובספוג יש $n \geq 4$ חברים. בכל ערב הוא מזמין מספר כלשהו $k \geq 4$ של חברים לסעוד אתו ולאחר מכן הוא תמיד מזמין שלושה מהם לשחק בביתו. (אף אחד לא מסרב!)
ספרו בשתי דרכים את מספר האופציות השונות שיש לבובספוג לבלות עם חברים בערב אחד,
והוכיחו עבור $n \geq 4$ את הזהות $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}=\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ בדרך קומבינטורית.
(כלומר ללא פישוט מראש של האגפים).

ג. הוכיחו את השוויון מסעיף ב' בדרך אלגברית (על ידי חישוב ישיר).

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. בשאלה זו נתייחס לפונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא A.

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f : A \to \{2,3,4\}$ המקבלות כל אחד מן הערכים $i \in \{2,3,4\}$ בדיוק i פעמים.

ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f : A \to \{2,3,4,5,6\}$ המקבלות כל אחד מהערכים $2,3,4$ בדיוק פעמיים.

ג. מיצאו את מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f : A \to A$ המקיימות את התנאי:
$\{f(1), f(2), f(3)\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 8$.

א. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כאשר $x_1 + x_2 + x_3 \neq 5$.

ב. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כך ש- $x_{2i-1} + x_{2i} \neq 2$ לכל $1 \le i \le 4$.

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל המילים באורך 10 הכתובות באותיות $A, A, A, B, B, C, C, D, D, D$.

א. מיצאו את מספר המילים ש**אין** בהן **שלוש אותיות מאותו סוג** הצמודות זו לזו.

ב. מיצאו את מספר המילים שבהן יש **לפחות שתי אותיות** מסוג A הצמודות זו לזו.

שאלה 5 (20 נקודות)

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:

דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם מבין $10, 11, 12, \ldots, 36$.

רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם**, ומבלי לחזור על אותו מספר פעמיים, שני סכומים שווים.

למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10, 11, 12, 15, 18, 25, 32, 36$, אז

רמי יכול לכתוב את השוויון $11 + 25 = 36$.

לחלופין, הוא יכול לכתוב את השוויון $10 + 12 + 18 = 15 + 25$.

כאמור, כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין לחזור על אותו מספר פעמיים.

אם רמי מצליח לכתוב שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

הראו כי רמי יכול לנצח תמיד – בהנחה שיש לו מספיק זמן לבדוק את כל האפשרויות, אחרי הבחירה של דינה.

הדרכה: היעזרו בעקרון שובך היונים.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 19
סמסטר: 2025א

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה, פרקים 1–7.
משקל המטלה: 2 נקודות.
מועד הגשה: 19.1.25.

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה. **סמנו**:
א' – אם הטענה נכונה; **ב'** – אם הטענה לא נכונה.

בשאלות 1–3 האות A מסמנת קבוצה בעלת 3 איברים.

שאלה 1
מספר היחסים שניתן להגדיר על A הוא 9.

שאלה 2
מספר היחסים האנטי רפלקסיביים על A הוא 2^6.

שאלה 3
מספר היחסים על A שווה למספר הפונקציות מ- A ל- $\mathcal{P}(A)$.

בשאלות 4–11 נתייחס לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

שאלה 4
מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ שווה מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f^{-1}[\{1,2\}]=\varnothing$.

שאלה 5
מספר הפונקציות $f:A\to A$ שהן חד-חד-ערכיות שווה למספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to A$ שהן חד-חד-ערכיות.

שאלה 6
מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות את הערך 1 פעם אחת, את הערך 2 פעמיים ואת הערך 3 שלוש פעמים, גדול ממספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות פעמיים כל אחד מן הערכים 1,2,3.

שאלה 7
מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2\}]=\{1,2\}$ קטן ממספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$.

שאלה 8

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=2$ ו- $B\cap C=\emptyset$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1,2 מופיעה פעמיים.

שאלה 9

מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=3$ ו- $B\cap C=\emptyset$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1 מופיעה שלוש פעמים.

שאלה 10

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=2, |C|=3$ ו- $B\cap C=\emptyset$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן 0 מופיע פעם אחת, 1 מופיע פעמיים ו- 2 מופיע שלוש פעמים.

שאלה 11

מספר יחסי השקילות השונים על A שהם בעלי שלוש מחלקות בדיוק הוא גדול מ- 100.

שאלה 12

יש בדיוק 78 הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$.

שאלה 13

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$
שווה למס' הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2\}\not\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$.

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך שבשני התאים הראשונים ביחד יימצאו לפחות 10 כדורים, הוא 396.

שאלה 15

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $x^{10}(1+x+x^2+\dots)^8$.

שאלה 16

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים, כך ששניים מן התאים יכילו לפחות 5 כדורים כל אחד, הוא 1008.

שאלה 17

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $(x^5+x^6+x^7+\dots)^2(1+x+x^2+\dots)^8$.

בשאלות 18–19 נסמן ב- $g(mn,m)$ את מספר כל הפיזורים האפשריים של mn כדורים שונים ב-m תאים זהים כך שבכל תא יימצאו בדיוק n כדורים.

שאלה 18

$$g(8,4)=\frac{8!}{2^4}$$

שאלה 19

$$g(6,3)>g(6,2)$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה, פרקים 7,6.**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 26.1.25.**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט באתר הקורס):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (15 נק׳)

שאלה זו מתייחסת לפיתוח המולטינומי של $(a+b+c+d)^{10}$.

(3 נק׳) א. מהו מספר האיברים בפיתוח, לאחר כינוס איברים דומים?

(6 נק׳) ב. לכמה מאיברי הפיתוח יש מקדם שאינו מתחלק ב-5?

(6 נק׳) ג. מהו מספר האיברים בפיתוח שבהם החזקות של כל אחד מ- a,b,c,d שונות מ-2?
(מותר לחזקות אלה להיות מספרים זוגיים אחרים, ששונים מ-2.)

שאלה 2 (30 נק׳)

לכל $n \geq 1$ טבעי, נסמן ב- A_n את קבוצת המספרים הטבעיים בעלי n ספרות, שבהם מופיעות רק הספרות 1,2,3,4,5,6 אך 1 לא מופיע בצמוד ל- 1 ו- 2 לא מופיע בצמוד ל- 2.

למשל $12121 \in A_5$ ו- $33215 \in A_5$ אבל $12114 \notin A_5$ ו- $12256 \notin A_5$.

לכל $n \geq 1$ טבעי, נסמן $a_n = |A_n|$, וכן נגדיר את a_0 כשווה ל- 1. בנוסף לכך, נסמן:

b_n = מספר המספרים השייכים ל- A_n שבהם הספרה השמאלית ביותר היא 1;

c_n = מספר המספרים השייכים ל- A_n שבהם הספרה השמאלית ביותר היא 2.

א. מיצאו את $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$.

ב. לכל $n \geq 2$, הביעו את a_n בעזרת a_{n-1}, b_n ו- c_n,
את b_n בעזרת c_{n-1} ו- a_{n-2} ואת c_n בעזרת b_{n-1} ו- a_{n-2}.

ג. השתמשו בתוצאות של סעיף ב׳ כדי למצוא יחס נסיגה a_n.

ד. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.

שאלה 3 (25 נק׳)

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון ש- $f(x)(1+2x+2x^2+x^3) = \frac{1}{(1-x)^3}$.

(6 נק׳) א. חשבו את a_0, a_1, a_2 .

(12 נק׳) ב. מצאו מספרים r,s,t כך ש- $a_n = D(3,n) - ra_{n-1} - sa_{n-2} - ta_{n-3}$ לכל $n \geq 3$. חשבו את a_7 בעזרת הנוסחה הזו.

(12 נק׳) ג. כתבו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$. מצאו את מספר הפתרונות במקרה ש- $n = 7$.

(רמז: שימו לב לקשר בין הפונקציה שמצאתם כאן לבין $f(x)$ שעליה מדובר בפתיחת השאלה.)

שאלה 4 (30 נק׳)

א. מיצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ כאשר כל הנעלמים הם מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב- 3.

(רמז לפישוט: אפשר להוציא את $x^2 + x^4$ כגורם משותף מהסכום האינסופי).

ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א׳ כאשר $k = 10$, $n = 32$.

ג. מצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + y_1 + \ldots + y_k = n$ כאשר k הנעלמים הראשונים הם מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב- 3 ו- $0 \leq y_i \leq 5$ לכל $1 \leq i \leq k$. (רמז לפישוט: $1 + x + \ldots + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$.)

ד. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף ג׳ כאשר $k = 10$, $n = 24$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים.**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות.**
סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 2.2.25.**

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה. **סמנו:**

א' – אם הטענה נכונה; **ב'** – אם הטענה אינה נכונה.

שאלה 1

כל גרף פשוט על 6 צמתים שבו 11 קשתות הוא קשיר.

שאלה 2

אם G הוא גרף דו-צדדי ש-A,B צדדים שלו (ראו הגדרה 1.5), אז $\sum_{v\in A}\deg_G(v)=|E(G)|$.

שאלה 3

אם לגרף G יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי.

שאלה 4

אם G הוא גרף דו-צדדי אז לגרף המשלים $\overline{G}$ יש שני רכיבי קשירות בדיוק.

בשאלות 5–9, נתון ש-G הוא גרף שבו יש מסלול אוילר שאינו מעגל, ו-G_1 הוא גרף קשיר המתקבל מ-G על-ידי מחיקת קשת אחת המחברת בין שני צמתים שונים של G.

שאלה 5

מהנתון נובעי כי ב-G_1 אין מסלול אוילר שאינו מעגל.

שאלה 6

מהנתון נובע כי G_1 אינו אוילרי.

שאלה 7

מהנתון נובע כי G_1 הוא גרף אוילרי.

שאלה 8

מהנתון נובע כי אם G_1 המילטוני, אז גם G המילטוני.

שאלה 9

מהנתון נובע כי ב- G קיים מסלול המילטון.

בשאלות 10–14 נתייחס לעצים המתוייגים שבהם הצמתים מתוייגים במספרים עוקבים $1,2,3,...$ וסדרת פרופר שלהם היא מהצורה $\langle 3,3,k,5,5\rangle$, כאשר k מספר שלם חיובי.

שאלה 10

כל עץ כנ״ל הוא בעל 5 צמתים בדיוק.

שאלה 11

אם נתייחס לעצים מתויגים איזומורפיים (במובן של הגדרה 2.8) כאל זהים, אז מספר העצים הנ״ל הוא 7.

שאלה 12

לכל העצים הנ״ל יש אותו מספר עלים.

שאלה 13

כל שניים מבין העצים הנ״ל הם איזומורפיים במובן של הגדרה 2.8.

שאלה 14

אף שניים מבין העצים הנ״ל אינם איזומורפיים במובן של הגדרה 2.8.

בשאלות 15–20 נתון כי G הוא גרף פשוט על 6 צמתים, ודרגת כל צומת בו היא 4.

שאלה 15

מהנתון נובע כי G הוא אוילרי.

שאלה 16

מהנתון נובע כי G הוא המילטוני.

שאלה 17

מהנתון נובע כי קיים ב- G זיווג מושלם.

שאלה 18

מהנתון נובע כי G הוא מישורי.

שאלה 19

מהנתון נובע כי G אינו גרף מישורי.

שאלה 20

מהנתון נובע כי מספר הצביעה של G הוא 5.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס: 20476 – מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים.**

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 2 נקודות.**

סמסטר: 2025א | **מועד הגשה: 10.2.25.**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט באתר הקורס):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון כי G גרף אוילרי פשוט וקשיר.

א. תהי $e \in E(G)$. הוכיחו כי הגרף המתקבל מ- G על-ידי מחיקת הקשת e הוא קשיר.

ב. נניח שקיימות $e_1, e_2, e_3 \in E(G)$ כך שהגרף המתקבל מ- G על-ידי מחיקת הקשתות e_1, e_2, e_3 הוא אוילרי. הוכיחו כי G אינו דו-צדדי.

ג. הוכיחו שאם $|V(G)| = 2n+1$, כאשר $n \geq 1$, אז קיימים לפחות שלושה צמתים שדרגותיהם ב- G שוות זו לזו.

שאלה 2 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לעצים על 8 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,...,8$. כמו כן, נתייחס לעצים מתוייגים איזומורפיים (במובן של הגדרה 2.8) כאל זהים, כלומר: נספור אותם כאילו היו עץ יחיד.

א. מיצאו את מספר העצים שבהם העלים הם חמשת הצמתים $4,5,6,7,8$ ורק הם.

ב. מיצאו את מספר העצים שבהם קיים צומת בעל דרגה 5.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי T עץ על n צמתים, שמספר העלים בו הוא k.

א. הוכיחו כי לכל $v \in V(G)$ מתקיים $\deg_T(v) \leq k$.

ב. הוכיחו שאם $k \leq \frac{n}{2} - 1$, אז הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $A=P(\{1,2,3\})\setminus\{\emptyset\}$ ותהי $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. יהי G גרף פשוט דו-צדדי המקיים את התנאים הבאים: $V(G)=A\cup B$; לכל $s\in A$ ו-$t\in B$, יש ב-G קשת המחברת את s,t אם״ם [המספר t שווה לסכום האיברים של הקבוצה s או למכפלת האיברים של s או למספר האיברים של s]; אין ל-G קשתות מלבד אלה שתארנו כאן.

הוכיחו בעזרת דוגמה או הפריכו בעזרת משפט הול כל אחת מהטענות הבאות:

א. קיים ב-G זיווג המזווג את כל צומתי A.

ב. קיים ב-G זיווג המזווג את כל צומתי B.

ג. אם מוחקים מ-G את הצומת $\{3\}$ ואת כל הקשתות הסמוכות לו, מתקבל גרף שיש בו זיווג מושלם.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתון גרף **פשוט וקשיר** G. דרגות חמישה מהצמתים ב-G הן: $3,4,5,6,7$, דרגת n מהצמתים ב-G היא 2, ודרגת m מהצמתים ב-G היא 1. אין ל-G צמתים נוספים, מלבד אלה שהוזכרו כאן.

א. הוכיחו שקיים מספר טבעי k כך ש-$m=2k+1$ ומיצאו את מספר הקשתות של G.

ב. הוכיחו ש-G הוא גרף מישורי.

ג. הראו כי מספר הפאות של בכל שיכון מישורי של G אינו תלוי ב-n (כלומר: במספר הצמתים בעלי דרגה 2).

ד. הראו ש-$m\leq 17$ ושאם $m=17$ אז G הוא עץ.