# פתרון ממ"ן 11

**שאלה 1**

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $2 \in \{\{1\},\{2\}\}$ ב. $\{2\} \in \{\{1\},\{2\}\}$ ג. $\{2,3\} \subseteq \{1,\{2,3\}\}$ ד. $\varnothing \subseteq \{1,\{2\}\}$

ה. $\{\varnothing\} \subseteq \{\{1\}\}$ ו. $\{1,2\} \subseteq \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{1,\varnothing\}|$ ח. $\{1,\{2\}\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\}) \neq \varnothing$

**תשובה**

א. לא נכון מפני האיברים היחידים של הקבוצה $\{\{1\},\{2\}\}$ הם $\{1\}$ ו- $\{2\}$.

ב. נכון, לפי מה שהסברנו בסעיף א.

ג. לא נכון מפני שלמשל $2 \in \{2,3\}$ אבל $2 \notin \{1,\{2,3\}\}$.

ד. נכון, הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה.

ה. לא נכון מפני ש- $\varnothing \in \{\varnothing\}$ אבל $\varnothing \notin \{\{1\}\}$.

ו. לא נכון מפני שלמשל $1 \in \{1,2\}$ אבל $1 \notin \{\mathbf{N}\}$ (שימו לב: האיבר **היחיד** של $\{\mathbf{N}\}$ הוא $\mathbf{N}$ )

ז. נכון, כי לכל אחת משתי הקבוצות יש בדיוק שני איברים.

ח. נכון מפני ש- $\{2\} \in \{1,\{2\}\}$ וגם $\{2\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$.

**שאלה 2**

יהיו $A,B,C$ קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

ב. אם $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $C = A$ או $C = B$.

ג. אם $A,B$ קבוצות סופיות ואם $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$ אז $|A \cap B| = 1$.

**תשובה**

א. נראה שכל אחת משתי הקבוצות חלקית האחרת.

**נניח קודם** ש- $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

אז $x \in (A \setminus B)$ **או** $x \in (B \setminus C)$ כלומר ($x \in A$ **וגם** $x \notin B$ ) **או** ( $x \in B$ **וגם** $x \notin C$ ). נביט כעת על כל אחד משני המצבים האפשריים הנ"ל. במקרה הראשון $x \in A$ **וגם** $x \notin B$ לכן $x \in A \cup B$ (כי $x \in A$ ) ו- $x \notin B \cap C$ (כי $x \notin B$ ). מכאן ש- $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

במקרה השני, $x \in B$ **וגם** $x \notin C$ לכן $x \in A \cup B$ (כי $x \in B$ ) ו- $x \notin B \cap C$ (כי $x \notin C$ ). מכאן שגם במקרה זה $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$. לפיכך הוכנו שלכל $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ מתקיים $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ כלומר $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

**להפך** נניח ש- $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$. אז $x \in A \cup B$ **וגם** $x \notin B \cap C$.

נבחין כעת בין שני מקרים שבכל אופן מכסים את כל האופציות האפשריות עבור $x$ .

**מקרה 1:** $x \notin B$

מאחר ש- $x \in A \cup B$ הרי שבמקרה זה, בהכרח $x \in A$ ולכן $x \in A \setminus B$ .

**מקרה 2**: $x \in B$

מאחר ש- $x \notin B \cap C$ , מקרה זה מחייב ש- $x \notin C$ ואז ברור ש- $x \in B \setminus C$ .

בשני המקרים מצאנו ש- $x \in A \setminus B$ או $x \in B \setminus C$ כלומר $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ .

לפיכך הוכחנו שלכל $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ מתקיים $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ כלומר

$(A \cup B) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ . משתי ההכלות שהוכחנו נובע השוויון הנדרש.

ב. $C \in \mathcal{P}(C)$ (מפני ש- $C \subseteq C$) לכן מהנתון נובע ש- $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ . לכן $C \in \mathcal{P}(A)$ או

$C \in \mathcal{P}(B)$ ומכאן ש- $C \subseteq A$ או $C \subseteq B$ .

נניח ש- $C \subseteq A$ . מפני ש- $A \in \mathcal{P}(A)$ נקבל ש- $A \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ לכן מהנתון, $A \in \mathcal{P}(C)$ ולכן

$A \subseteq C$ . משתי ההכלות נובע ש- $C = A$ .

במקרה ש- $C \subseteq B$ נקבל בדרך דומה ש- $C = B$ .

ג. ידוע שלכל קבוצה סופית $A$ , $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

כמו כן, לכל שתי קבוצות $A, B$ מתקיים $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ (קל להוכיח שוויון זה כי לכל איבר

של $A$ יש שני מצבים אפשריים בלבד: או ששייך ל- $B$ (ואז הוא איבר של $A \cap B$) או שלא שייך ל-

$B$ (ואז הוא איבר של $A \setminus B$). ברור שהקבוצות $A \cap B$ ו- $A \setminus B$ הן זרות זו לזו (אין להן איברים

משותפים) ולכן $|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|$ .

מכאן ש- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{|A \cap B| + |A \setminus B|} = 2^{|A \cap B|} \cdot 2^{|A \setminus B|} = 2^{|A \cap B|} \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$ .

לפי הנתון $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$ לפיכך $2^{|A \cap B|} = 2$ דבר המחייב ש- $|A \cap B| = 1$ .

## שאלה 3

יהיו $A, B, C$ קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית $U$ . הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $A \subset B$ אז $A \cup B^c \neq U$ .

ב. $A^c \Delta B = B^c \Delta C$ אז $A = C$ .

ג. אם $A \cap B \subseteq A \Delta B \Delta C$ אז $A \cap B \subseteq C$ .

**תשובה**

א. אם $A \subset B$ אז קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A$ . במילים אחרות $x \in B$ וגם $x \in A^c$ כלומר

$x \in A^c \cap B$ ולכן $A^c \cap B \neq \varnothing$ .

מכאן ש- $(A^c \cap B)^c \neq U$ (שכן אם $(A^c \cap B)^c = U$ נקבל ש- $A^c \cap B = U^c = \varnothing$ - סתירה).

לפי חוקי דה מורגן $(A^c \cap B)^c = A^{cc} \cup B^c = A \cup B^c$ . לכן $A \cup B^c \neq U$ .

ב. לפי הטענה שבשאלה 43, מתקיים $A^c \Delta B = A \Delta B^c$ .

לכן $A^c \Delta B = B^c \Delta A$ (שכן ההפרש הסימטרי הוא חילופי).

לפי הנתון $A^c \Delta B = B^c \Delta C$ נחליף כאן את $A^c \Delta B$ ב- $B^c \Delta A$ ונקבל: $B^c \Delta A = B^c \Delta C$.

אז על ידי שימוש בחוק הצמצום של הפעולה $\Delta$ (שאלה 32 ג) נקבל ש- $A = C$.

ג. ההפרש הסימטרי הוא קיבוצי לכן נוכל לרשום את הנתון כך: $A \cap B \subseteq (A \Delta B) \Delta C$.

מכאן שלכל $x \in A \cap B$ מתקיים $x \in (A \Delta B) \Delta C$ ומהגדרה ההפרש הסימטרי נובע ש-

$x \in A \Delta B$ או $x \in C$ (ו- $x$ לא שייך לשתי הקבוצות גם יחד).

אבל, אם $x \in A \cap B$ אז לא ייתכן ש- $x \in A \Delta B$ (שכן $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$) מכאן

שבהכרח $x \in C$.

הראנו אם כן שלכל $x \in A \cap B$ מתקיים $x \in C$ ומכאן ש- $A \cap B \subseteq C$.

**שאלה 4**

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbf{N}$ נסמן $A_k = \{0k, 1k, 2k, 3k, ...\} = \{nk \mid n \in \mathbf{N}\}$.

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מיצאו מספר טבעי $k$ כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- $A_k$.
נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ ב. $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ד. $A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$

**תשובה**

א. נראה ש- $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2$

מצד אחד, $A_2$ היא אחת הקבוצות המשתתפת באיחוד הנתון (מקבלים אותה עבור $k = 1$),

לכן $A_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$.

מצד שני, לכל $k \in \mathbf{N}$ הקבוצות $A_{2k}$ מכילות אך ורק מספרים טבעיים זוגיים, לכן גם

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ מכיל רק מספרים טבעיים זוגיים ולכן הקבוצה $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ חלקית ל- $A_2$ (כי $A_2$ היא

קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים). במילים אחרות $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} \subseteq A_2$.

משתי ההכלות שהוכחנו נובע $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2$.

ב. נראה ש- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k = A_{60}$.

לשם כך נשים לב שלכל $k \geq 1$, $A_k$ היא קבוצת כל המספרים הטבעיים המתחלקים ב- $k$

(אומרים אז גם שהם כפולות של $k$) שימו לב: 0 מתחלק ב- (הוא כפולה של) כל מספר טבעי!

מכאן ש- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ הוא קבוצת המספרים המחלקים בו זמנית ב- 1,2,3,4,5.

כל מספר שמתחלק ב- 3,4,5 מתחלק ב- 60 ולכן $A_{60} \subseteq \bigcap_{k=1}^{5} A_k$ .

מצד שני כל מספר $x \in A_{60}$ מתחלק ב- 60 לכן מחלק בכל אחד מן המפרים 1,2,3,4,5 ולכן

הוא שייך ל- $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ , $A_4$ ו- $A_5$ כלומר שייך ל- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ . במילים אחרות : $\bigcap_{k=1}^{5} A_k \subseteq A_{60}$ .

משתי ההכלות שהוכחנו נובע ש- $A_{60} = \bigcap_{k=1}^{5} A_k$ .

ג. נראה ש- $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ .

נשים לב שלפי הנתון $A_0 = \{0\}$ .

כמו כן, לכל $k \geq 1$ , $A_k$ היא קבוצת כל המספרים הטבעיים המתחלקים ב- $k$ .

לכן אם $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ אז $x$ מתחלק בכל מספר טבעי $k \geq 1$ .

אין מספר טבעי שיכול להתחלק **בכל** מספר טבעי חיובי למעט 0 לכן $x = 0$ .

מכאן ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \{0\}$ . מצד שני, לפי ההגדרה, $x \in A_k$ עבור כל $k \geq 1$ , לכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq \{0\}$ .

משתי ההכלות נובע ש- $A_0 = \{0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ .

ד. נראה ש- $A_3 = A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$ .

לפי הנתון $A_6 = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{3 \cdot 2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ וזו קבוצות כל הכפולות של 3 במספר זוגי.

(גם 0 זוגי!)

מצד שני מפני ש- $A_6 = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$ נקבל ש- $\{x+3 \mid x \in A_6\} = \{6n+3 \mid n \in \mathbf{N}\}$ ומכאן ש-

$\{x+3 \mid x \in A_6\} = \{3(2n+1) \mid n \in \mathbf{N}\}$ וזו קבוצת כל הכפולות של 3 במספר אי-זוגי.

לפיכך $A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$ היא קבוצת כל הכפולות של 3 (גם זוגיות וגם אי-זוגיות) ולכן

$A_3 = A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$ .