לוגיקה למדעי המחשב – שיעור 6: המשך הוכחות, איזומורפיזם, תתי מודלים

דוד קסלר 054-4511925

חזרה קצרה על השיעור הקודם

צורה פרנקסית נורמלית

- הגדרה: צורה פרנקסית נורמלית היא נוסחה שבה כל הכמתים בראש הנוסחה, והקטע שלאחר מכן הוא דיסיונקטיבי נורמל, כלומר דיסיונקציה של קוניוקציה של נוסחאות בסיסיות
- נוסחה בסיסית – נוסחה אטומית או שלילתה
- דוגמה:
  - $\forall x \exists y \forall z (R_1(x,y) \wedge \neg R_2(F_1(y,z)) \vee (\neg R_1(F_2(x),z) \wedge \neg R_2(x) \wedge R_3(z))$
- על מנת לעבור לצורה פרנקסית נורמלית:
  - נעביר את הפסוק לצורה פרנקסית
  - את הפסוק שנשאר נעביר לצורה נורמלית כמו במשפט הצורה הנורמלית של לוגיקה פסוקית

מעבר לצורה פרנקסית

- אלגוריתם להפיכת כל פסוק לפסוק בצורה פרנקסית:
  - אם נוסחה אטומית – אין כמתים
  - עבור $\neg\varphi$ כאשר ב-φ כל הכמתים בהתחלה, "נפעפע" את השלילה פנימה על פי הנוסחאות $(\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi)$, $(\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi)$
  - עבור $\varphi@\psi$ כאשר בφ ובψ כל הכמתים בהתחלה
    - אם @ הוא $\rightarrow$ נחליף אותו באמצעות הנוסחה $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$ ונכניס את השלילה
    - אם @ הוא $\leftrightarrow$ נחליף אותו באמצעות הנוסחה $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ ונכניס את השלילה
    - לאחר שמכיל רק $\wedge$, $\vee$, נרענן את המשתנים כדי שלא יהיה משתנה משותף בשתי הנוסחאות ואז נעביר את הכמתים שמאלה על פי הנוסחאות שהראנו

תחשיב בשפת היחסים

- בסיס ההוכחה – האקסיומות
  - אקסיומות תחשיב הפסוקים
  - Ax1: $\big(\alpha \to (\beta \to \alpha)\big)$
  - Ax2: $\Big(\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)\Big)$
  - Ax3: $\big((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)\big)$
  - אקסיומת ההצבה - $\forall x\varphi \to \varphi[t/x]$, ובתנאי שזו הצבה כשרה
  - אקסיומת הזזת כמת - $(\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta))$, x לא חופשי ב-α
  - אקסיומות השיוויון – השיוויון רפלקסיבי, קומוטטיבי וטרנזיטיבי,אקס' החלפה
- כללי היסק
  - MP: $\frac{\varphi,(\varphi\to\psi)}{\psi}$
  - כלל ההכללה GR: $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$

הוכחות בשפת היחסים המלאה

- עד עכשיו למדנו את תחשיב הילברט מעל השפה המצומצמת הכוללת את $(\forall, \rightarrow, \neg)$
- כמו בשפת הפסוקים, גם כאן אפשר להגדיר תחשיב עבור השפה המלאה הכוללת את כל הכמתים $(\forall, \exists)$ וכל הקשרים $(\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee)$
- עבור הקשרים הנוספים נוסיף את האקסיומות הנוספות של השפה הפסוקית, למשל $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$
- עבור הכמת $\exists$ נוסיף את כלל היצירה והאקסיומה:
  - נוסף לכלל ההכללה בכמת לכל : $\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$ נוסיף כלל הכללה כמת קיים: $\frac{\varphi}{\exists x \varphi}$
  - אקסיומת ההצבה בכמת $\exists$: האקסיומה: $\exists x \varphi \rightarrow \varphi[t/x]$, כאשר t קבוע חדש

הוכחות בשפת היחסים המלאה – תרגיל חדש

- קבעו אילו מהפסוקים הבאים אמיתיים לוגית. כתבו סדרת הוכחה או תנו דוגמה נגדית

1. $\vdash \forall x P(x) \to \exists y P(y)$

1. $\{\forall x P(x)\} \vdash \exists y P(y)$	(דדוקציה)
2. $\forall x P(x) \to P(t)$	(אקס' ההצבה)
3. $\forall x P(x)$	(הנחה)
4. $P(t)$	(MP2,3)
5. $\exists y P(y)$	(כלל הכללה קיים)

הוכחות בשפת היחסים המלאה – תרגיל חדש

- קבעו אילו מהפסוקים הבאים אמיתיים לוגית. כתבו סדרת הוכחה או תנו דוגמה נגדית

2. $\vdash \exists x P(x) \rightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow (\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))))$

(דדוקציה) $1.\{\exists x P(x)\} \vdash (\exists x Q(x) \rightarrow (\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))))$

(דדוקציה) $2.\{\exists x P(x), \exists x Q(x)\} \vdash (\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)))$

(אקס' ההצבה) $3.\exists x Q(x) \rightarrow Q(c)$

(אקס' ההצבה) $4.\exists x P(x) \rightarrow P(d)$

(MP2,3) $5.\ Q(c)$

(MP2,4) $6.\ P(d)$

(Ax. 1) $7.\ Q(c) \rightarrow (P(c) \rightarrow Q(c))$

(MP5,6) $8.\ (P(c) \rightarrow Q(c))$

(הכללה) $9.\big(P(c) \rightarrow Q(c)\big) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$

(MP8,9) $10.\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$

הוכחות בשפת היחסים המלאה – תרגיל חדש

- קבעו אילו מהפסוקים הבאים אמיתיים לוגית. כתבו סדרת הוכחה או תנו דוגמה נגדית

.3 $\vdash \forall x P(x) \to \forall y P(y)$

1. $\{\forall x P(x)\} \vdash \forall y P(y)$	(דדוקציה)
2. $\forall x P(x) \to P(t)$	(אקס' ההצבה)
3. $\forall x P(x)$	(הנחה)
4. $P(t)$	(MP2,3)
5. $\forall y P(y)$	(כלל הכללה לכל)

הוכחות בשפת היחסים המלאה – תרגיל חדש

- קבעו אילו מהפסוקים הבאים אמיתיים לוגית. כתבו סדרת הוכחה או תנו דוגמה נגדית

4. $\vdash \forall y \exists x R(x,y) \to \exists x \forall y R(x,y)$

   - הטענה אינה נכונה. לדוגמה בתחום המספרים הטבעיים, כאשר R הוא היחס: ל-x ול-y אותה שארית בחלוקה ל-3. לכל y קיים מספר x כך של-x ול-y יש את אותה שארית בחלוקה ל-3, אבל לא קיים x כך שלכל המספרים יש את אותה שארית בחלוקה ל-3 כמוהו.

5. $\vdash (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \to \exists x(A(x) \wedge B(x))$

   - הטענה אינה נכונה. לדוגמה בתחום המספרים הטבעיים, A הוא היחס x מספר זוגי, ו-B הוא היחס x מספר אי זוגי.

גדירות קב' מודלים K בשפה L

- קבוצת מודלים K גדירה בשפה L אם קיימת קבוצת נוסחאות Σ כך שמתקיים
$K = \{M | M \vDash \Sigma\}$
- ניתן להגדיר קבוצת נוסחאות כך שכל הנוסחאות נכונות בכל מודל בקבוצה, ועבור כל מודל שאינו בקבוצה קיימת השמה שבה לפחות אחת מהנוסחאות לא נכונה
- דוגמה: עבור השפה L=<> (שפה ללא קבועים, פונ' ויחסים פרט לשיוויון) נגדיר את קב' כל המודלים שבתחום שלהם יש רק איבר בודד:
$K = \{M | M \vDash \forall x \forall y\ x = y\}$ כלומר, K מוגדרת ע"י הנוסחה
$\forall x \forall y\ x = y$

גדירות קבוצת אובייקטים או יחסים במודל

- נתונה שפה L ונתון מודל M של השפה L (פירוש לפונקציות, לקבועים וליחסים). המטרה – להגדיר יחס או קבוצת אובייקטים מהתחום בעזרת נוסחאות.
- דוגמה: תהי $L =< c_0,c_1,s,f,g >$ כאשר c_0,c_1 קבועים, s פונקציה חד מקומית, ו- f,g פונקציות דו מקומיות. $M =< N,0,1,s,+,*>$ כאשר s היא פונקציית העוקב. הגדר את קבוצת הזוגיים:

$$\varphi(x) = \exists y f(y,y) = x \circ$$

סיום יחידה 6 – תורה, הומומורפיזם, איזומורפיזם

איזומורפיזם בין מודלים

- נגדיר את המושגים הומומורפיזם ואיזומורפיזם כאשר איזומורפיזם הוא מושג חזק יותר מהומומורפיזם
- במושג החזק ביותר, איזומורפיזם, אם עבור שפה L שני מודלים M ו-M' הינם מודלים איזומורפיים אזי כל נוסחה שנכונה בM תהיה נכונה גם בM' ולהיפך
- תרגיל: נתונה שפה $L =<>$, ושני מודלים: $M' =< \{1,2\} >$, $M =< \{1\} >$. האם שני המודלים יכולים להיות איזומורפיים?
- פתרון: לא. הנוסחה $\forall x \forall y x = y$ נכונה בM אבל לא נכונה בM'.

הומומורפיזם

- נתונה שפה L ושני מודלים M_1 ו-M_2 . נגדיר פונקציה H:
$$H: D^{M_1} \to D^{M_2}$$
- H נקראת הומומורפיזם אם מתקיים:
  - $H(c^{M_1}) = c^{M_2}$
  - $H(f^{M_1}(a_1,a_2)) = f^{M_2}(H(a_1),H(a_2))$
  - $(a_1,a_2) \in R^{M_1} \Rightarrow (H(a_1),H(a_2)) \in R^{M_2}$

הומומורפיזם - תרגיל

- נתונה שפה $L =< c,f >$ כאשר c קבוע ו- f פונקציה דו מקומית,
ונתונים שני המודלים $M =< N,0,+>$ ו- $M_1 =< Even,0,+>$
ונתונה פונקציה $H_1: N \to Even: H_1(x) = 2x$ האם H_1 הומומורפיזם?
- נבדוק לפי ההגדרה:
  - עבור הקבוע c: $H_1(c^M) = H_1(0) = 2 \cdot 0 = 0 = c^{M_1}$
  - עבור הפונקציה $+$:
$$H_1(a+b) = 2(a+b) = 2a+2b = H_1(a) + H_1(b)$$
  - עבור היחס $=$:
$$a = b \Longrightarrow 2a = 2b \Longrightarrow H_1(a) = H_1(b)$$
  - כל התנאים מתקיימים ולכן הומומורפיזם

הומומורפיזם - תרגיל

- נתונה שפה $L =< c,f >$ כאשר c קבוע ו- f פונקציה דו מקומית, ונתונים שני המודלים $M =< N,0, +>$ ו- $M_2 =< Odd,1, +>$ ונתונה פונקציה $H_2: N \rightarrow Odd: H_2(x) = 2x + 1$ האם H_2 הומומורפיזם?
- נבדוק לפי ההגדרה:
  - עבור הקבוע c: $H_2(c^M) = H_2(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = c^{M_2}$
  - עבור הפונקציה $+$:

$$H_2(a + b) = 2(a + b) + 1 \neq 2a + 1 + 2b + 1 = H_2(a) + H_2(b)$$

  - הפונקציה $+$ לא נשמרת ולכן לא הומומורפיזם

הומומורפיזם - תרגיל

- נתונה שפה $L =< c,f >$ כאשר c קבוע ו- f פונקציה דו מקומית, ונתונים שני המודלים $M =< N,0,+>$ ו- $M_3 =< \{0,1\},0,+>$ ונתונה פונקציה $H_3(x) = 0$ $H_3: N \to \{0,1\}:$ האם H_3 הומומורפיזם?
- נבדוק לפי ההגדרה:
  - עבור הקבוע c: $H_3(c^M) = H_3(0) = 0 = c^{M_3}$
  - עבור הפונקציה $+$:
    $H_3(a+b) = 0 = 0+0 = H_3(a) + H_3(b)$
  - עבור היחס $=$:
    $a = b \Longrightarrow H_3(a) = H_3(b)$ כי עבור כל a,b מתקיים $H_3(a) = H_3(b)$
  - כל התנאים מתקיימים ולכן הומומורפיזם

איזומורפיזם

- נתונה שפה L ושני מודלים M_1 ו-M_2 . נגדיר פונקציה H:
$H: D^{M_1} \rightarrow D^{M_2}$
- H נקראת נקראת איזומורפיזם אם מתקיים:
  - $H(c^{M_1}) = c^{M_2}$
  - $H(f^{M_1}(a_1,a_2)) = f^{M_2}(H(a_1),H(a_2))$
  - $(a_1,a_2) \in R^{M_1} \Leftrightarrow (H(a_1),H(a_2)) \in R^{M_2}$
  - H היא פונקציה חח"ע (נכלל בדרישה 3) ועל
- משפט Scolem Levinhem: שפת תחשיב היחסים מסוגלת להבחין בין מודלים עד כדי איזומורפיזם

איזומורפיזם – תרגיל 1

- נתונה שפה $L =< c,f >$ כאשר c קבוע ו-f פונקציה דו מקומית, ונתון המודל $M =< N,0,+>$ והמודלים והפונקציות שבדקנו קודם:
  - $M_1 =< Even,0,+>$, $H_1: N \to Even: H_1(x) = 2x$
  - $M_2 =< Odd,1,+>$, $H_2: N \to Odd: H_2(x) = 2x+1$
  - $M_3 =< \{0,1\},0,+>$, $H_3: N \to \{0,1\}: H_3(x) = 0$
- מי מהפונקציות הנ"ל איזומורפיזם?
  - כן. $a \neq b \Longrightarrow 2a \neq 2b \Longrightarrow H_1(a) \neq H_1(b)$ + הפונ' על
  - לא, אפילו לא הומומורפיזם
  - לא $1 \neq 2 \not\Leftrightarrow H(1) \neq H(2)$ כי מתקיים $H(1) = H(2) = 0$

איזומורפיזם – תרגיל 2

- נתונה שפה $L =< R >$ כאשר R יחס דו מקומי, ונתונים שני המודלים $M =< N, <>$ ו- $M' =< Z, >>$ ונתונה פונקציה $H: N \to Z: H(x) = -x$ האם H הומומורפיזם / איזומורפיזם?
- נבדוק לפי ההגדרה:
  - הפונקציה H אינה על כי לא לכל המס' ב-Z יש מקור (לכל החיוביים אין מקור) ולכן לא איזומורפיזם
  - נותר לבדוק הומומורפיזם. אין קבועים ופונקציות. נבדוק יחסים:
    - $a < b \Rightarrow -a > -b \Longrightarrow H(a) > H(b)$
    - $a = b \Rightarrow -a = -b \Longrightarrow H(a) = H(b)$
  - מכאן, זהו הומומורפיזם

איזומורפיזם – תרגיל 3

- נתונה שפה $L =< c,f >$ כאשר c קבוע ו- f פונקציה דו מקומית, ונתונים שני המודלים $M =< Z,0, +>$ ו- $M' =< \{-1,1\},1, \cdot>$ ונתונה פונקציה $H: Z \to \{-1,1\}: H(x) = (-1)^x$ האם H הומומורפיזם / איזומורפיזם?
- נבדוק לפי ההגדרה:
  - הפונקציה H אינה חח"ע. למשל: $H(2) = H(0) = 1, H(-3) = H(7) = -1$ מתקבל $2 \neq 0 \not\Leftrightarrow H(2) \neq H(0)$
  - נותר לבדוק הומומורפיזם
    - $H(c^M) = H(0) = -1^0 = 1 = c^{M'}$
    - $H(a+b) = (-1)^{a+b} = (-1)^a \cdot (-1)^b = H(a) \cdot H(b)$
    - $a = b \Rightarrow (-1)^a = (-1)^b \Longrightarrow H(a) = H(b)$
  - מכאן, זהו הומומורפיזם

תורה

- תורה: קבוצת פסוקים קונסיסטנטית (שלא ניתן להוכיח בה פסוק ושלילתו)
- תורה שלמה: תורה שבה עבור כל פסוק φ ניתן להוכיח את φ או את $\neg\varphi$
- בתחשיב הפסוקים לתורה שלמה בדיוק מודל אחד. בתחשיב היחסים לתורה שלמה יש מודל אחד עד כדי איזומורפיזם עבור כל עוצמה

האריתמטיקה של פאנו

- דוגמה לתורה: האריתמטיקה של פאנו (Peano) הכוללת את הפסוקים הבאים בשפה הכוללת חיבור, כפל ועוקב:
  1. $\forall x(\neg s(x) = 0)$
  2. $\forall x \forall y[s(x) = s(y) \to x = y]$
  3. $\forall x(x + 0) = x$
  4. $\forall x \forall y[x + s(y) = s(x + y)]$
  5. $\forall x(x \cdot 0) = 0$
  6. $\forall x \forall y\ [x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x]$

  ולכל נוסחה $\varphi[\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{k}, \mathrm{y}]$ מוגדרת אקסיומת האינדוקציה:
  - $\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y((\varphi[0/y] \wedge \forall y(\varphi \to \varphi[s(y)/y])) \to \forall y \varphi)$

תרגיל – תורת הסדר

- תהי L שפה עם יחס דו מקומי יחיד וM המבנה $M =< < >$
- נגדיר את תורת הסדר:
$$T_{ord} = \{\forall x \neg(x < x), \forall x \forall y \forall z\big(\big((x < y) \land (y < z)\big) \to (x < z)\big)\}$$
- תרגיל: הוכח שהיחס לא קומוטטיבי
- פתרון: יש להוכיח $\vdash \forall x \forall y((x < y) \to \neg(y < x))$
- הוכחה: נניח בשלילה$\neg \forall x \forall y((x < y) \to \neg(y < x))$ מכאן
כלומר $\exists x \exists y \neg((x < y) \to \neg(y < x))$ קיימים a,b כך ש
$$\neg((a < b) \to \neg(b < a)) \equiv \neg(\neg(a < b) \lor \neg(b < a)) \equiv (a < b) \land (b < a))$$
אבל, מכאן אפשר להוכיח באמצעות נוסחה 2 ש(a<a) וזו סתירה לנוסחה 1

תת מודל

- נתונה שפה L ושני מודלים M_1 ו-M_2 . M_2 הוא תת מודל של M_1 אם הוא נותן את אותו הפירוש לקבועים, לפונקציות וליחסים, ומתקיים $D^{M_2} \subseteq D^{M_1}$
- דוגמה: תהי $L =< c_0,c_1,R >$ כאשר c_0,c_1 קבועים ו-R יחס דו מקומי, ונתונים המודלים:

$$M_1 =< N, 0,1, <> , M_2 =< Q, 0,1, <>, M_3 =< R, 0,1, <>, M_4 =< N, 0,1, \gg$$

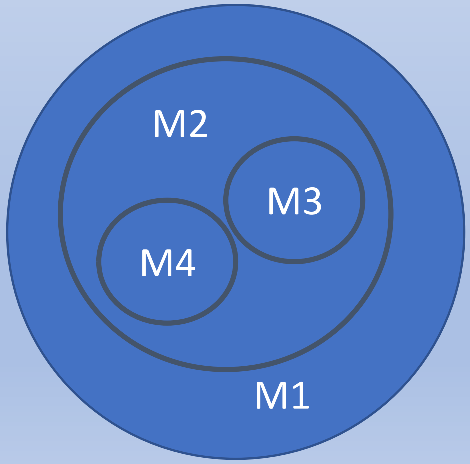
  - האם M_1 הוא תת מודל של M_2?
    - כן. $Q \subseteq N$ ויש את אותו פירוש לקבועים וליחס
  - האם M_2 הוא תת מודל של M_3?
    - כן. $R \subseteq Q$ ויש את אותו פירוש לקבועים וליחס
  - האם M_4 הוא תת מודל של M_3?
    - לא. היחס מפורש אחרת

תת מודל - המשך

- תהי $L=<>$ נתונים המודלים:

$M_1 =< R > , M_2 =< N >, M_3 =< \{x \in N | x \text{ is even}\} >, M_4 =< \{5,11\} >$

  - האם M_2 הוא תת מודל של M_1?
    - כן. $N \subseteq R$
  - האם M_1 הוא תת מודל של M_2?
    - לא
  - האם יש תת תחום משותף לכל המודלים של L? ומה לגבי $L =< \mathrm{c} >$?
  - אם יש קבועים 2 תתי מודלים אף פעם לא יהיו זרים



תת מודל מינימלי

- נתונה שפה L, מודל M ותת מודלים $M_1,M_2...$. אם ב-L יש לפחות קבוע אחד אזי ניתן להגדיר תת מודל מינימלי, הכולל את החלק המשותף לכל תתי המודלים האפשריים לM: $\bigcap_i M_i$
- תת מודל מינימלי הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם
- התחום של תת המודל המינימלי הוא כל שמות העצם חסרי המשתנים, כלומר הסגור של העצמים המפרשים את הקבועים בשפה תחת הפונקציות בשפה
- מודל M נקרא מינימלי אם אין לו שום תת מודל פרט לM עצמו

תת מודל מינימלי - דוגמה

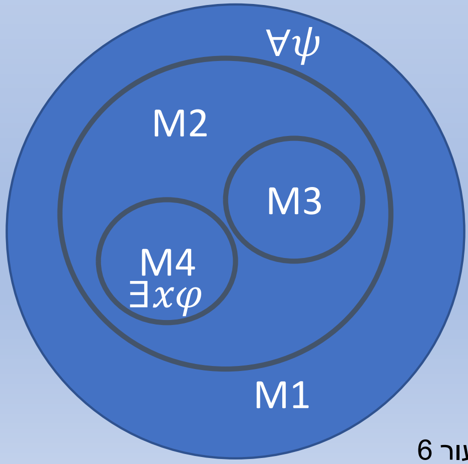
- נתונה השפה $L =< c,f,g >$
  - מהו התת מודל המינימלי של $M =< \mathrm{N},0, + , \cdot>$?
    - $M' =< \{0\},0, + , \cdot>$ הפעלת הפונקציות על 0 תמיד תחזיר 0
  - מהו התת מודל המינימלי של $M =< \mathrm{N},1, + , \cdot>$?
    - $M' =< \{\mathrm{x} \in N|x > 0\},0, + , \cdot>$ - ניתן לקבל כל מספר גדול מ-0 על ידי הפעלת הפונקציות על קבועים, למשל $c = 1,f(c,c) = 2,f(f(c,c),c) = 3 \ldots$

נוסחאות קיים / נוסחאות לכל

- נוסחת קיים פרנקסית: נוסחה מהצורה $\exists x_n \varphi$ ... $\exists x_1$ כאשר φ נוסחה חסרת כמתים
- נוסחה ישית / נוסחת קיים: חיבור נוסחאות קיים פרנקסיות ע"י $\vee$, $\wedge$, $\exists$
- נוסחת לכל פרנקסית: נוסחה מהצורה $\forall x_n \varphi$ ... $\forall x_1$ כאשר φ נוסחה חסרת כמתים
- נוסחת לכל / כוללת: חיבור נוסחאות לכל פרנקסיות ע"י $\vee$, $\wedge$, $\forall$

נוסחאות קיים ולכל ותתי מודלים

- משפט:
  - שמות עצם, ונוסחאות חסרות כמתים מקבלים את אותו ערך במודל ותת מודל
  - תהי φ נוסחת קיים. אם היא נכונה בתת מודל אזי היא נכונה גם בכל תת מודל שמכיל אותו
  - תהי ψ נוסחת לכל. אם היא נכונה בתת מודל אזי היא נכונה גם בכל תת מודל שמוכל בו
- בציור:
  - $\exists\varphi$ תהיה נכונה במודלים 1,2,4
  - $\forall\psi$ תהיה נכונה בכל המודלים



תת מודל – תרגיל 1

א- יהי $\varphi = \forall x\ (\forall z R(x,z) \rightarrow (\exists y R(y,x) \land \neg(x = y)))$ ויהי M מודל של φ. האם φ אמיתי גם בכל תת מודל של M?

- לא. נראה דוגמה: נניח ש-$M =< \{1,2,3\}, R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\} >$ M הינו מודל של הפסוק: לכל x למעט 1 מתקיים ש-$\forall z R(x,z)$ מקבל ערך F ולכן הפסוק הפנימי מקבל ערך T, ועבור $x = 1$ אכן קיים $y = 2$ המקיים את החלק הימני. לעומת זאת בתת המודל: $M' =< \{1,3\}, R = \{(1,1),(1,3)\ \} >$ הצד השמאלי מקבל ערך T עבור 1, אבל אין y כך ש-$R(y,x)$ ולכן הפסוק כולו מקבל ערך F

תת מודל – תרגיל 1

ב- העבירו את הפסוק $\varphi = \forall x\,(\forall z R(x,z) \to (\exists y R(y,x) \wedge \neg(x = y)))$ לפסוק פרנקסי נורמלי φ'. יהי M מודל של φ'. האם φ' אמיתי גם בכל תת מודל של M?

- נעביר לצורה פרנקסית נורמלית:

$$\forall x\ \Big(\forall z R(x,z) \to \big(\exists y R(y,x) \wedge \neg(x = y)\big)\Big)$$
$$\equiv \forall x\ \Big(\neg\forall z R(x,z) \vee \big(\exists y R(y,x) \wedge \neg(x = y)\big)\Big)$$
$$\equiv \forall x\ \Big(\exists z \neg R(x,z) \vee \big(\exists y R(y,x) \wedge \neg(x = y)\big)\Big)$$
$$\equiv \forall x \exists z \exists y \Big(\neg R(x,z) \vee \big(R(y,x) \wedge \neg(x = y)\big)\Big)$$

- הפסוק המקורי שקול לפסוק החדש ולכן קיים מודל לפסוק שיש לו תת מודל שאינו מודל של הפסוק (הודגם בסעיף הקודם)

תת מודל – תרגיל 2

- נתונה השפה $L =< 0,1,s, + , \cdot >$ בתחום N

א- רישמו את הפסוק φ שמשמעותו: "לכל מספר a יש מספר b שמתחלק בכל המספרים 1,2,...,a-1"

ב- היפכו את הפסוק לפסוק פרנקסי נורמלי φ'

- $\forall a \exists b \forall x(\exists t((x+t=a) \wedge \neg(t=0)) \rightarrow \exists r(x \cdot r = b))$
- $\equiv \forall a \exists b \forall x(\neg\exists t((x+t=a) \wedge \neg(t=0)) \vee \exists r(x \cdot r = b))$
$\equiv \forall a \exists b \forall x(\forall t \neg((x+t=a) \wedge \neg(t=0)) \vee \exists r(x \cdot r = b))$
$\equiv \forall a \exists b \forall x \forall t \exists r(\neg((x+t=a) \wedge \neg(t=0)) \vee \ (x \cdot r = b))$

תת מודל – תרגיל 2

- נתונה השפה $L =< 0,1,s, + , \cdot >$ בתחום N

ג- האם הפסוק המקורי אמיתי במודל המינימלי? האם הפסוק φ' אמיתי במודל המינימלי?

- המודל המינימלי כולל את הקבועים ואת הסגור של הפעלת הפונקציות על הקבועים. נסתכל על $\{0,s(0),ss(0), \dots ,s \dots s(0), \dots \}$. עבור כל מספר x טבעי ניתן להפעיל את s x פעמים ולקבל אותו, ולכן המודל המינימלי הוא כל קבוצת הטבעיים N ולכן הוא שקול למודל המקורי
- הפסוק המקורי אמיתי בקבוצת הטבעיים ולכן גם במודל המינימלי

$$b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot a$$

- הפסוק φ' שקול לפסוק המקורי ולכן גם הוא אמיתי במודל המינימלי

סקולמיזציה של פסוק

- תהליך החלפת פסוק בפסוק כולל בשפה מועשרת, כך שאם לאחד יש מודל גם לשני יש
- תהליך ההחלפה:
  - נעביר את הפסוק לצורה פרנקסית נורמלית
  - בפסוק $\exists y\varphi$ נחליף את y בקבוע $\varphi\ [c/y]$
  - בפסוק מהצורה $\forall x_1, \dots, \forall x_n \exists y\varphi$ נבחר פונקציה חדשה f שלא בשפה ונחליף את y בשם עצם שתלוי ב- $x_1, \dots, x_n$ שלפניו, כלומר נחליף בפסוק $\forall x_1, \dots, \forall x_n \varphi\ [f(x_1, \dots, x_n)/y]$
  - נחזור על שני השלבים האחרונים לכל כמתי קיים מהחוץ פנימה

סקולמיזציה של פסוק – תרגיל 1

- נתון הפסוק $\varphi = \forall x(R(x) \to \forall y(T(x,y) \to \exists x Q(x)))$. מיצאו פסוק כולל ψ כך ש-ψ ספיק אם"ם φ ספיק
- פתרון:

1. נהפוך לצורה פרנקסית נורמלית:

א- נטפל ב-$\to$ באמצעות השקילות $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$:

$$\varphi \equiv \forall x(\neg R(x) \lor \forall y(T(x,y) \to \exists x Q(x)))$$
$$\equiv \forall x(\neg R(x) \lor \forall y(\neg T(x,y) \lor \exists x Q(x)))$$

ב- נרענן משתנים כדי שנוכל להוציא כמתים:

$$\varphi \equiv \forall x(\neg R(x) \lor \forall y(\neg T(x,y) \lor \exists z Q(z)))$$

ג- נוציא את הכמתים החוצה:

$$\varphi \equiv \forall x \forall y \exists z(\neg R(x) \lor \neg T(x,y) \lor Q(z))$$

הגענו לפסוק בצורה פרנקסית נורמלית

סקולמיזציה של פסוק – תרגיל 1

- נתון הפסוק $\varphi = \forall x(R(x) \to \forall y(T(x,y) \to \exists x Q(x)))$. מיצאו פסוק כולל ψ כך ש-ψ ספיק אם"ם φ ספיק
- פתרון:

2. נבצע סקולמיזציה להוצאת כמת $\exists$ של z:

$$\varphi \equiv \forall x \forall y \exists z(\neg R(x) \lor \neg T(x,y) \lor Q(z))$$
$$\psi \equiv \forall x \forall y\ (\neg R(x) \lor \neg T(x,y) \lor Q(f(x,y)))$$

- הערות:
  - הפסוקים ψ ו- φ אינם שקולים זה לזה, אבל ψ ספיק אם"ם φ ספיק
  - הפסוקים אינם באותה שפה, ψ בשפה מועשרת
  - ψ לא יחיד

סקולמיזציה של פסוק – תרגיל 2

- נתון הפסוק $\varphi = \forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$. מיצאו פסוק כוללל ψ כך ש-ψ ספיק אם"ם φ ספיק
- פתרון:

1. נהפוך לצורה פרנקסית נורמלית:

א- נטפל ב-$\rightarrow$ באמצעות השקילות $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ ונכניס את השלילה:

$$\varphi \equiv \neg \forall x \exists y R(x, y) \vee \forall y \exists x R(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg R(x, y) \vee \forall y \exists x R(x, y)$$

ב- נרענן משתנים כדי שנוכל להוציא כמתים:

$$\varphi \equiv \exists z \forall t \neg R(z, t) \vee \forall y \exists x R(x, y)$$

ג- נוציא את הכמתים החוצה:

$$\varphi \equiv \forall y \exists x \exists z \forall t (\neg R(z, t) \vee R(x, y))$$

הגענו לפסוק בצורה פרנקסית נורמלית

סקולמיזציה של פסוק – תרגיל 2

- נתון הפסוק $\varphi = \forall x \exists y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$. מיצאו פסוק כולל ψ כך ש-ψ ספיק אם"ם φ ספיק
- פתרון:

2. נבצע סקולמיזציה להוצאת כמת $\exists$ של x ושל z:

$$\varphi \equiv \forall y \exists x \exists z \forall t(\neg R(z,t) \lor R(x,y))$$

נחליף את x ב-$f(y)$, ולאחר מכן את z ב-$g(y)$:

$$\psi \equiv \forall y \forall t(\neg R(g(y),t) \lor R(f(y),y))$$

סיום יחידה 8 – משפט הרברנד ומשפט סקולם

משפט הרברנד

- רלוונטי לשפות עם קבוע אחד לפחות
- מתרכזים בשמות העצם הקבועים שאין בהם משתנים ... $c, f(c), f\left(g(c)\right),$
- המודלים של הרברנד – מייצגים את כל המודלים המינימליים בשפה
- סתירה בנוסחת כולל במודל מינימלי $\Leftarrow$ סתירה בכל המודלים
- הראינו את שיטת סקולם שהופכת פסוק φ לפסוק כולל φ' כך של-φ יש מודל אם"ם ל- φ' יש מודל
- משפט / אלגוריתם הרברנד מאפשר אם כן ליצור פסוק כולל, לבדוק אם הוא מוביל לסתירה במודל מינימלי וכך להוכיח שהפסוק המקורי מוביל לסתירה.

משפט הרברנד

- עבור תורה T אוניברסלית עם קבוע אחד לפחות, T ספיקה אם"ם T^* ספיקה, כאשר T^* הוא קב' כל ההשמות של שמות עצם לתוך משתנים בפסוקים של T
- דוגמאות:
  - בשפה עם הקבועים a,b והתורה האוניברסלית T הבאה:
    $T=\{\forall x\forall yR(x,y)\}$ נקבל את
    $$T^*=\{R(a,a),R(a,b),R(b,a),R(b,b)\}$$
  - אם בשפה הייתה גם פונקציה חד מקומית f היינו מקבלים:
    $$T^*=\{R(a,a),R(a,b),R(b,a),R(b,b),R(f(a),a),R(a,f(a)),\\ R\big(f(b),f(a)\big),R(f\Big(f\big(f(a)\big)\Big),f\big(f(b)\big),\ldots\}$$

האלגברה של הרברנד

- התחום של הרברנד / מרחב הרברנד: D_H – קבוצת שמות העצם ללא משתנים (הקבועים והפעלת פונקציות עליהם) בשפה עם קבוע אחד לפחות
    - בדוגמאות מהשקף הקודם: ללא הפונקציה: $U = \{a,b\}$
      עם הפונקציה f: $U = \{a,b,f(a),f(b),f\big(f(a)\big),f\big(f(b)\big) \ldots\}$
- המודלים של הרברנד: כל המודלים עם תחום הרברנד ופירוש כלשהו ליחסים. כל מודל הרברנד הוא מודל מינימלי
- בסיס הרברנד: בסיס הרברנד של קבוצת פסוקים זו הקבוצה המתקבלת ע"י הצבת אברים ממרחב הרברנד לפסוקים מהקבוצה (T^* מהשקף הקודם)
- בשאלות נתחיל לרשום את בסיס הרברנד, נראה שמגיעים לסתירה ונעצור

האלגוריתם של הרברנד

- אלגוריתם כריע למחצה, העוצר אם יש סתירה

1. כאשר רוצים לבדוק אם ל-φ יש מודל נבחן את $\neg\varphi$
2. נתרגם את הפסוק לפסוק כולל בצורת סקולם (סקולמיזציה)
3. נבנה את מרחב הרברנד - קבוצת שמות העצם חסרי המשתנים בשפה.
4. נבדוק אם יש לו מודל שתחומו הוא מרחב הרבנד וננסה להגיע לסתירה. נבנה את בסיס הרברנד - נתחיל עם הקבועים הבסיסיים, ונתחיל להפעיל עליהם את הפונקציות ולהציב בפסוקים עד שנגיע לסתירה.

האלגוריתם של הרברנד – תרגיל

- הוכיחו באמצעות משפט הרברנד שהפסוק
  $\varphi = \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$ הוא אמת לוגית
- פתרון:

1. ניקח את השלילה שלו: $\neg\varphi = \neg(\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y))$
2. נמצא פסוק כולל ψ שספיק רק אם הפסוק $\neg\varphi$ ספיק

א- נהפוך לצורה פרנקסית נורמלית:

$$\neg\varphi = \neg(\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)) \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg\exists x \forall y P(x,y) \vee \forall y \exists x P(x,y)) \equiv (\neg\neg\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg\forall y \exists x P(x,y))$$
$$\equiv (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg\forall y \exists x P(x,y)) \equiv (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists y \forall x \neg P(x,y))$$
$$\equiv (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists z \forall w \neg P(w,z)) \equiv \exists x \forall y \exists z \forall w (P(x,y) \wedge \neg P(w,z))$$

האלגוריתם של הרברנד – תרגיל

א- צורה פרנקסית נורמלית:

$\exists x \forall y \exists z \forall w (P(x,y) \wedge \neg P(w,z))$

ב- סקולמיזציה:

$\psi = \forall y \forall w (P(a,y) \wedge \neg P(w,f(y)))$

3. מרחב הרברנד: $U = \{a, f(a), f\left(f(a)\right), \ldots\}$

4. נבנה בסיס הרברנד ע"י הצבת איברים מתוך מרחב הרברנד במקום המשתנים:

$$H = \{P(a,a) \wedge \neg P\big(a,f(a)\big), P\big(a,f(a)\big) \wedge \neg P\left(a, f\big(f(a)\big)\right), \ldots\}$$

הגענו לסתירה (צד ימין במשוואה הראשונה עם צד שמאל בשניה) ולכן H לא ספיק, הפסוק המקורי טאוטולוגיה

תודה רבה ☺