ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס קיץ 2021ג

כתב: ישראל פרידמן

יוני 2021 - סמסט קיץ תשפ"א

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים

בכתובת http://opal.openu.ac.il .

הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://www.openu.ac.il/shoham .
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:
https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library . פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il .

מרכז ההוראה בקורס הוא ישראל פרידמן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781431, בימי ג' בשעות 12:00 - 13:00 וניתן לשלוח אי-מייל בכל עת דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

שימו לב:

חובה להגיש מטלות במשקל של 14 נקודות לפחות.

ללא הגשת מטלות במשקל זה

אי-אפשר לעבור את הקורס.

ראו הסבר בעמוד ה'

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**
מספר השאלות: | **משקל המטלה: נקודה אחת**
סמסטר: 2021ג | **מועד הגשה: 11.7.2021**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,
ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. הביטוי $\forall x \forall y(x^2 - y^2 - (x+y)(x-y))$ הוא פסוק
2. הביטוי $\exists x \exists y(x^2 - y^2 - (x+y)(x-y) \neq 0)$ הוא פסוק

שאלה 2

נתבונן בפסוק "לכל מספר חיובי יש שורש ריבועי"

1. **שלילת** הפסוק היא: "אם מספר הוא שלילי אז אין לו שורש ריבועי"
2. **שלילת** הפסוק היא: "קיים מספר חיובי שאינו שורש ריבועי של אף מספר"

שאלה 3

1. הפסוק: " $1+101+101^2+\cdots+101^{100} = 0.01(101^{101}-1)$ **או** $\sqrt{11.12^2+8.88^2} = 20$ "
הוא אמת.
2. הפסוק: " $1:(2:(3:4)) = (1:2):(3:4))$ **וגם** $1:(2:(3:4)) = ((1:2):3):4$ "
הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק: "**אם** לכל x ממשי, $x^2+x+1>0$ **אז** לכל x ממש מתקיים
$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) = (1-x^2)(1+x^2+x^4)$ " הוא אמת.
2. הפסוק: "**אם** קיים x ממשי כך ש- $x^2-x+1=0$ **אז** לכל x ממשי
$(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5) = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ " הוא אמת.

שאלה 5

1. הפסוק: "**אם** ($(2>3)$ **וגם** $(1<2)$) **אז** $(1=-1)$" הוא אמת.
2. הפסוק: "**לכל** a,b,c,d (**אם** ($(a<b)$ **וגם** $(c<d)$) **אז** ($(a<b)$ **או** $(c<d)$))" הוא אמת.

שאלה 6

בטבלה מופיעים לוחות האמת של פסוקים ל α ו- β . מתקיים:

p	q	r	α	β
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	T	F

1. $\beta \equiv (\neg p \wedge q) \to \alpha$
2. $\alpha \equiv (q \vee r) \to \beta$

שאלה 7

1. $(p \vee q) \to r$ שקול טאוטולוגית ל- $(p \to r) \wedge (q \to r)$.
2. $\neg p \to (q \vee r)$ שקול טאוטולוגית ל- $\neg q \to (p \vee r)$.

שאלה 8 (בשאלה זו a,b הם מספרים ממשיים)

1. שלילת הפסוק $a \neq 2$ וגם $b \neq 3$ שקולה לפסוק $ab = 6$ או $a+b=5$.
2. שלילת הפסוק $a \neq 2$ או $b \neq 3$ שקולה לפסוק $ab = 6$ וגם $a+b=5$.

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(\neg\beta) \to (\neg\alpha)$ נובע טאוטולוגית הפסוק $((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta$.
2. מתוך הפסוק $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to ((\neg\beta) \to \alpha)$ נובע טאוטולוגית הפסוק β .

שאלה 10 (בשאלה זו α,β הם פסוקים)

1. אם מ- α נובע טאוטולוגית $\beta \to (\neg\alpha)$ אז α הוא סתירה או β הוא סתירה.
2. אם $\neg\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$ טאוטולוגיה אז α טאוטולוגיה .

שאלה 11

נתבונן בפסוק: "לא כל מספר חיובי הוא גדול מהריבוע שלו"

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\exists x((x>0) \to (x^2 \leq x))$.
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\neg\forall x\big((x>0) \to (x^2 \leq x)\big)$.

שאלה 12

נתבונן בפסוק: "כל מספר חיובי שקטן מ- 1 הוא גדול מהריבוע שלו"

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x<1) \wedge (x>0) \wedge (x^2 < x))$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x<1) \wedge (x>0)) \to \forall x(x^2 < x)$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021ג | **מועד הגשה: 19.7.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $2\in\{\{1\},\{2\}\}$ ב. $\{2\}\in\{\{1\},\{2\}\}$ ג. $\{2,3\}\subseteq\{1,\{2,3\}\}$ ד. $\varnothing\subseteq\{1,\{2\}\}$

ה. $\{\varnothing\}\subseteq\{\{1\}\}$ ו. $\{1,2\}\subseteq\{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}|=|\{1,\varnothing\}|$ ח. $\{1,\{2\}\}\cap\mathcal{P}(\{1,2\})\neq\varnothing$

שאלה 2 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(B\cap C)$.

ב. אם $\mathcal{P}(C)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ אז $C=A$ או $C=B$.

ג. אם A,B קבוצות סופיות ואם $|\mathcal{P}(A)|=2\cdot|\mathcal{P}(A\setminus B)|$ אז $|A\cap B|=1$.

שאלה 3 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $A\subset B$ אז $A\cup B^c\neq U$.

ב. אם $A^c\Delta B=B^c\Delta C$ אז $A=C$.

ג. אם $A\cap B\subseteq A\Delta B\Delta C$ אז $A\cap B\subseteq C$.

שאלה 4 (28 נק')

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k\in\mathbf{N}$ נסמן $A_k=\{0k,1k,2k,3k,...\}=\{nk\mid n\in\mathbf{N}\}$.

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מיצאו מספר טבעי k כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- A_k.
נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{2k}$ ב. $\bigcap_{k=1}^{5}A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ ד. $A_6\cup\{x+3\mid x\in A_6\}$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2,1**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2021ג | **מועד הגשה: 25.7.2021**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

א - אם הטענה נכונה **ב - אם הטענה לא נכונה**

במטלה זו A,B,C הן קבוצות, R,S הם יחסים והאות n מייצגת מספר טבעי

שאלה 1

$\{2,3\}\cap\{\{2\},\{3\}\}=\{\{2\},3\}\cap\{2,\{3\}\}$

שאלה 2

אם $A\cup B=A\cup C$ אז $B=C$

שאלה 3

אם $A\subseteq B\cup C$ אז $A\subseteq B$ או $A\subseteq C$

שאלה 4

אם A,B קבוצות סופיות זרות אז $|\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)|=2^{|A|}+2^{|B|}$

שאלה 5

$A\subseteq\mathcal{P}(A)$

שאלה 6

אם $A\Delta B=A\setminus B$ אז $B\subseteq A$

שאלה 7

אם $x\in A\Delta B\Delta C$ אז $x\notin A\cap B$

שאלה 8

אם $x\notin A^c\cap B^c$ אז $x\in A\cap B$

שאלה 9

אם $A\subset B\times C$ אז $B\neq\varnothing$ וגם $C\neq\varnothing$

שאלה 10

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$$

שאלה 11

אם כל איבר של A הוא זוג סדור אז קיימות קבוצת B,C כך ש- $A = B \times C$

שאלה 12

אם R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2 = R$.

שאלה 13

אם יחס R מקיים $R^2 = R$ אז R הוא יחס טרנזיטיבי.

שאלה 14

אם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי אז גם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים

שאלה 15

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

שאלה 16

כל יחס רפלקסיבי R המקיים $R^2 = R$ הוא יחס שקילות.

שאלה 17

אם ליחס שקילות R על $\{1,2,3,\ldots,n\}$ יש פחות מ- n מחלקות אז $|R| \geq n+2$

שאלה 18

אם $1 < n < m$ מספרים טבעיים אז החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

שאלה 19

אם A קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית אז אין ב- A איבר אחרון.

שאלה 20

אם $A = \{1,2,3,4\}$ ואם $\langle A,\prec\rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים אז כל איבר של A הוא מינימלי או מקסימלי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2, 3**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021ג | **מועד הגשה: 1.8.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (28 נקודות)

א. יהיו A,B,C,D קבוצות.

הוכיחו שאם $A\Delta B\subseteq D$ ו- $B\Delta C\subseteq D$ אז $A\Delta C\subseteq D$.

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$:

ARB אם ורק אם $A\Delta B\subseteq\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\Delta\{1,2\}\subset B\Delta\{1,2\}$.

ב. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, נמקו מדוע ומיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ג. קבעו אם אחד היחסים הוא סדר חלקי או סדר מלא. נמקו את התשובה.

שאלה 2 (30 נקודות)

על הקבוצה $A=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ מגדירים שני יחסים R,T כך:

לכל $\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\in A$, $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle$ אם ורק אם $a_1b_2=a_2b_1$ ו- $\langle a_1,b_1\rangle T\langle a_2,b_2\rangle$ אם ורק אם $a_1b_2<a_2b_1$.

א. הוכיחו שאחד היחסים הוא יחס שקילות והאחר הוא יחס סדר.

ב. לכל $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ נסמן ב- $S_{\langle n,1\rangle}$ את מחלקת השקילות של $\langle n,1\rangle$ (לפי יחס השקילות מסעיף א')

האם $S_{\langle n,1\rangle}\cap S_{\langle m,1\rangle}=\varnothing$ כאשר $m\neq n$? האם אוסף הקבוצות $\{S_{\langle n,1\rangle}\mid n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ הוא חלוקה של A? נמקו את התשובות.

ג. קבעו אם יחס הסדר שמצאתם בסעיף א' הוא סדר מלא והאם קיימים איברים מינימליים או מקסימליים. נמקו את התשובה.

שאלה 3 (21 נקודות)

בשאלה זו, לכל שתי קבוצות A,B ולכל פונקציה $f : A \to B$ נסמן ב- $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ את הפונקציה המוגדרת כך: לכל $D \in \mathcal{P}(B)$, $g(D) = f^{-1}[D]$.

א. הוכיחו ש- f היא על אם ורק אם g היא חד-חד ערכית. (אפשר להיעזר בשאלה 16 בספר)

ב. בסעיף זה נניח ש- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ מוגדרת על-ידי $f(n) = n-1$ לכל $n > 0$ ו- $f(0) = 0$.
הוכיחו שבמקרה זה הפונקציה $g : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ המתאימה ל- f (לפי הדרך שמוצגת בתחילת השאלה) , היא חד-חד ערכית
ותארו את הקבוצות: $g(\{0,1,2,\ldots,n\})$, $g(\mathbf{N})$ ו- $g(\mathbf{N}\backslash\{0\})$.

ג. האם הפונקציה g מסעיף ב' היא על? נמקו את התשובה.

שאלה 4 (21 נקודות)

נתונות הפונקציות $f,g : \mathbf{N}\times\mathbf{Z} \to \mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ המוגדרת כך:

לכל $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$, $f\langle m,n\rangle = \langle m, 2m-n\rangle$ ו- $g\langle m,n\rangle = \langle m, m-2n\rangle$.

א. הוכיחו ש- f היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההפכית שלה. נמקו את התשובה.

ב. הוכיחו ש- g אינה הפיכה. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו את $g[\mathbf{N}\times\{0\}]$ ואת $g^{-1}[\mathbf{N}\times\{0\}]$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה   **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,3**

מספר השאלות: 20   **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2021ג   **מועד הגשה: 6.8.2021**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

במטלה זו האותיות f,g מסמנות פונקציות, χ_A מסמנת פונקציה אופיינית של קבוצה A.

שאלה 1

עבור כל מספר $n \in \mathbf{N}$ השלשות $\left\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle x, 1+x+x^2+\cdots+x^n\rangle \mid x \in \mathbf{R}\}\right\rangle$
ו- $\left\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle 1, n+1\rangle\} \cup \{\langle x, (1-x^{n+1})/(1-x)\rangle \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\}\right\rangle$ הן פונקציות שוות.

שאלה 2

אם $f : A \to B$ היא פונקציה ו- $C_1, C_2 \subseteq A$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ אז גם $f[C_1] \cap f[C_2] = \varnothing$.

שאלה 3

אם $f : A \to B$ פונקציה ו- $D_1, D_2 \subseteq B$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ אז גם $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \varnothing$.

שאלה 4

$f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל קבוצה סופית $C \subseteq A$ מתקיים $|f[C]| = |C|$

שאלה 5

$f : A \to B$ היא על אם ורק אם לכל קבוצה סופית $D \subseteq B$ מתקיים $\left|f^{-1}[D]\right| = |D|$

שאלה 6

אם A, B תת-קבוצות של קבוצה אוניברסלית U אז $\chi_A^{-1}[\{1\}] \cap \chi_B^{-1}[\{0\}] = A \setminus B$

שאלה 7

אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ היא חד-חד-ערכית אז f היא על.

שאלה 8

אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ היא על אז f היא חד-חד-ערכית.

שאלה 9

אם $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ואם $f\circ g=I_{\mathbf{N}}$ אז f היא פונקציה הפיכה.

שאלה 10

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbf{N}$ אז קיימת פונקציה **קבועה** $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש-
$f\circ g=g\circ f$

שאלה 11

קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 7 שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים שאינם מתחלקים ב- 7.

שאלה 12

אם קבוצה אינסופית A שקולה לכל קבוצה אינסופית שחלקית לה אז $|A|=\aleph_0$.

שאלה 13

אם A קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ ששקולות ל- $\mathbf{N}$ ו- B קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שאינן שקולות ל- $\mathbf{N}$ אז A שקולה ל- B .

שאלה 14

אם $A\subseteq\mathbf{R}$ ואם $|A|>\aleph_0$ אז A מכילה קטע לא מנוון.

שאלה 15

$|\mathbf{R}\setminus[0,\infty)|<|\mathbf{R}\setminus[0,1)|$

שאלה 16

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\mathbf{N}^{\{1,2,3\}}$ הן שקולות. (להבנת הסימונים עיינו בפרק 3.9)

שאלה 17

הקבוצות $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ ו- $\{1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות.

שאלה 18

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות.

שאלה 19

אם $\mathcal{F}$ היא קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ אז $\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(A)\right|<\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A\right|$

שאלה 20

אם κ_1 עוצמה סופית ו- κ_2 עוצמה אינסופית אז $\aleph_0+\kappa_2\neq\aleph_0+\kappa_1$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4**

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021ג **מועד הגשה: 13.8.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (40 נק')

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי כל ספרה מופיעה בסמיכות לספרה השווה לה. (למשל, אם בפיתוח מופיע הרצף $a3c$ אז לפחות אחת מהספרות a,c היא 3).

ב. $(\mathbf{N}\times(0,1))\cap(\mathbf{R}\times\mathbf{Q})$

ג. $\mathcal{P}((0,1)\setminus\mathbf{I})$, כאשר $\mathbf{I}$ היא קבוצת כל המספרים הממשיים האי-רציונליים.

ד. $\mathcal{P}((0,10^{-10})\setminus\mathbf{Q})$

שאלה 2 (40 נק')

נתונות הקבוצות הבאות (המשלימים המופיעים להלן הם ביחס לקבוצה $\mathbf{N}$)

$K=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\mid |A^c|=\aleph_0\}$ ו- $M=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\mid |A|=\aleph_0 \;\wedge\; |A^c|=\aleph_0\}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. $|K|=\aleph_0$

ב. $|M|=\aleph_0$

ג. $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K|=\aleph_0$

ד. $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus M|=\aleph_0$

שאלה 3 (20 נק')

נתונות הקבוצות הבאות :

$A=\{A_i \mid i\in \mathbf{N}\}$ כאשר $A_i \subseteq \mathbf{N}$, $A_i \neq A_j$ ו- $A_i \cap A_j = \varnothing$ לכל $i,j\in\mathbf{N}$, $i\neq j$.

B - קבוצה של קטעים פתוחים לא ריקים ב- $\mathbf{R}$ כך שלאף שניים מהם אין נקודה משותפת.

C - קבוצה אינסופית של קטעים פתוחים ב- $\mathbf{R}$ שאינה בת מניה.

א. הוכיחו ש- $|B|\leq|A|$.

ב. הוכיחו שקיימים קטעים $I,J\in C$ כך ש- $|I\cap J|=|\mathbf{R}|$

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 4,3**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021ג **מועד הגשה: 20.8.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (30 נקודות)

נסמן $A=\{1,2,3,...,n\}$ כאשר $n\geq 1$ טבעי, ונניח ש- k מספר טבעי כך ש- $1\leq k\leq n$.

א. מהו מספר המחרוזות באורך n הכתובות בספרות $0,1,2$ שבהן 1 מופיע k פעמים בדיוק?

ב. מצאו את מספר הזוגות $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=k$ ו- $B\cap C=\varnothing$. (רמז: סעיף א')

ג. נניח ש- $n=7$. מצאו את מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$, $|B|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$.

שאלה 2 (8+3+9 נקודות)

א. הוכיחו ש- $\frac{5^n+(-3)^n}{2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^k$

ב. הוכיחו שסכום המספרים בעלי **אינדקס זוגי**, מתוך $a_0,a_1,...,a_n$ הוא: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot a_k$

ג. מיצאו את מספר המילים באורך n הכתובות באותיות A,B,C,D,E שבהן האות A מופיעה מספר זוגי של פעמים.

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ המקיימות $|f^{-1}[\{i\}]|\neq i$ לכל $1\leq i\leq 4$.

שאלה 4 (30 נקודות)

מפזרים 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

א. חשבו את מספר הפיזורים שבהם שלושת התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 10 כדורים.

ב. חשבו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק.

ג. מה התשובה לסעיף א' במקרה ש- 13 הכדורים שונים זה מזה?

מטלת מחשב (ממ״ח) 04

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: ״קומבינטוריקה״ פרקים 1-7**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2021ג | **מועד הגשה: 27.8.2021**

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

בשאלות 1-6 נתונות $A=\{1,2,3,4\}$ ו- $B=\{1,2,3,4,5,6\}$

שאלה 1

מספר היחסים R שניתן להגדיר על A כך שיתקיים $1R1$ שווה ל- 2^{15}.

שאלה 2

מספר היחסים האנטי-סימטריים על A הוא 3^6.

שאלה 3

מספר היחסים על A שווה ל- $|\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)|$.

שאלה 4

מספר הפונקציות $f:B\to A$ המקיימות $|f[A]|=|A|$ הוא $4^3\cdot 3!$.

שאלה 5

מספר הפונקציות $f:B\to B$ המקיימות $f[A]\not\subseteq A$ הוא $6^6-36\cdot 4^4$.

שאלה 6

יש בדיוק 60 הפונקציות $f:B\to A$ המקיימות $|f^{-1}[\{1\}]|=1$, $|f^{-1}[\{2\}]|=2$ ו- $|f^{-1}[\{3\}]|=3$.

בשאלות 7-9 נתון ש- $B=\{1,2,3,...,m\}$, $C=\{m+1,m+2,m+3,...,m+n\}$ ו- $A=B\cup C$.

שאלה 7

מספר הקבוצות $\{x,y\}$ כך ש- $\{x,y\}\subseteq A$ ו- $x\neq y$ הוא $\binom{m}{2}+\binom{n}{2}+mn$.

שאלה 8

מספר הקבוצות $X\subseteq A$ המקיימות $|X\cap B|=|X\cap C|=2$ הוא $\frac{1}{2}\binom{m}{2}\binom{n}{2}$.

שאלה 9

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $|f^{-1}[\{1\}]|=m$ ו- $|f^{-1}[\{2\}]|=n$ הוא $\binom{m+n}{m}$.

בשאלות 10-14 נתייחס למילים באורך 9 הכתובות באותיות A,A,B,B,B,C,C,C,C .

שאלה 10

מספר המילים הנ"ל יגדל פי שניים אם נוסיף אות C אחת לאותיות הנתונות.

שאלה 11

מספר המילים שבהן האותיות A אינן צמודות זו לזו הוא $36\binom{7}{3}$.

שאלה 12

מספר המילים בהן מופיע לפחות אחד מהרצפים AA , BBB , $CCCC$ הוא $\frac{6!}{2!3!1!}+\frac{7!}{2!1!4!}+\frac{8!}{1!3!4!}$.

שאלה 13

מספר הדרכים לפיזור 6 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 3 תאים שונים שווה למספר הדרכים לפיזור 2 כדורים שונים ב- 9 תאים שונים.

בשאלות 15-20 נתייחס לפתרונות בטבעיים של המשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=10$

שאלה 15

מספר הפתרונות שבהם כל הנעלמים שונים מ- 3 הוא $\binom{16}{6}-7\binom{12}{5}+21\binom{8}{4}-35\binom{4}{3}$

שאלה 16

מספר פתרונות המשוואה המקיימים $x_1+x_2+x_3\geq 7$ הוא $\binom{9}{3}\binom{9}{2}$.

שאלה 17

מספר פתרונות המשוואה המקיימים $x_1+x_2+x_3\geq 8$ הוא 736.

שאלה 18

מספר הפתרונות שבהם אף נעלם אינו כפולה של 2 או של 3 הוא המקדם של x^3 בפיתוח של $(1+x^4+x^6)^7$.

שאלה 19

מספר הפתרונות שבהם בדיוק שלושה מן הנעלמים שווים ל- 2 הוא $\binom{7}{3}$.

שאלה 20

מספר הפתרונות שבהם כל הנעלמים קטנים מ- 3 שווה למקדם של x^{10} בפיתוח של

$$(1-x^3)^7\frac{1}{(1-x)^7}$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 5-7**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021ג **מועד הגשה: 1.9.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (16 נק')

נתונים: A קבוצה לא ריקה בעלת n איברים, פונקציה $f: A \to A$ ואיבר $a \in A$.

לכל $k > 1$ נסמן $f^2(a) = f(f(a))$, $f^3(a) = f(f^2(a))$ ... $f^k(a) = f(f^{k-1}(a))$.

א. הוכיחו שקיימים מספרים i, j כך ש- $1 \leq i < j \leq n+1$ וכך ש- $f^i(a) = f^j(a)$.

ב. הוכיחו שאם f היא חד-חד- ערכית אז קיים $k > 1$ כך ש- $f^k(a) = a$.

שאלה 2 (30 נק')

תהי A קבוצת כל המספרים הטבעיים שבהם מופיעות רק הספרות 1,2. נסמן:

ב- a_n את מספר האיברים ב- A שהם מספרים בעלי n ספרות ומתחלקים ב- 3.

ב- b_n את מספר האיברים ב- A שהם בעלי n ספרות ושארית החילוק שלהם ב- 3 היא 1

ב- c_n את מספר האיברים ב- A שהם בעלי n ספרות ושארית החילוק שלהם ב- 3 היא 2

א. מיצא את $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

ב. לכל $n \geq 2$ הביעו את a_n בעזרת b_{n-1} ו- c_{n-1}, את b_n בעזרת a_{n-1} ו- c_{n-1} ואת c_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}.

ג. היעזרו בתוצאות של סעיף ב' כדי למצוא יחסי נסיגה עבור כל אחת מהסדרות a_n , b_n , c_n.

ד. פתרו את יחסי הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n , b_n , c_n.

ה. בדקו ש- $a_n + b_n + c_n$ שווה למספר האיברים של A שהם בעלי n ספרות.

שאלה 3 (27 נקי)

א. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

ב. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה מסעיף א' .

ג. מיצאו את מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

כאשר לפחות אחד מהנעלמים הוא אי-זוגי .

שאלה 4 (27 נקי)

א. מיצאו את המקדם של- x^{19} בפיתוח של הפונקציה $\dfrac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$

ב. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 19$$

כאשר $x_i \le 4$ לכל $1 \le i \le 10$ וכל חמשת הנעלמים האחרים הם מספרים המתחלקים ב- 5 .

ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף ב'

(הערות מועילות : 0 הוא מספר טבעי שמתחלק ב- 5. $1 + x + \cdots + x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$)

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה	**חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3**
מספר השאלות: 20	**משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2021ג	**מועד הגשה: 8.9.2021**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

קיים גרף פשוט על 7 צמתים, בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,4

שאלה 2

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,8

שאלה 3

קיים גרף פשוט על 7 צמתים בעלי דרגות 2,2,2,2,2,6,6

שאלה 4

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 1,1,3,3,2,6,6

שאלה 5

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 2 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 6

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 7

אם בגרף פשוט על **8** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 8

בגרף פשוט ולא קשיר על **7** צמתים יש לכל היותר 15 קשתות.

שאלה 9

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי.

שאלה 10

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ אינו דו-צדדי.

שאלה 11

אם בעץ T על 6 צמתים יש בדיוק 3 עלים אז ב- T קיים צומת בעל דרגה 3.

שאלה 12

אם סכום דרגות הצמתים בעץ T הוא 10 אז T הוא עץ על 6 צמתים.

שאלה 13

העצים **המתוייגים** בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים
(לפי הגדרה 2.8)

שאלה 14

העצים בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים כגרפים **לא מתוייגים**.
(לפי הגדרה 2.7)

שאלה 15

בכל עץ בעל שני עלים בלבד יש מסלול אוילר

שאלה 16

אם G הוא גרף אוילרי דו-צדדי קשיר, אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

שאלה 17

אם G הוא גרף אוילרי בעל מספר זוגי של הצמתים אז G הוא גרף דו-צדדי.

שאלה 18

אם G הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $3,3,3,3,4,4,4$ אז G המילטוני.

שאלה 19

אם G הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$ אז G לא המילטוני.

שאלה 20

קיים G גרף פשוט על 7 צמתים לא המילטוני שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2021ג **מועד הגשה: 15.9.2021**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (30 נקודות)

נתון $T = (V,E)$, עץ על n צמתים שבו יש בדיוק 3 עלים. נתון ש- $n \geq 5$.

א. הוכיחו שב- T יש בדיוק צומת אחד בעל דרגה 3.(הדרכה: ניתן להוכיח בדרך השלילה שחייב להיות צומת כזה, אך לא יותר מאחד).

ב. הוכיחו שלכל $v \in V$, אם $\deg_T(v) \neq 1,3$ אז $\deg_T(v) = 2$.

ג. הוכיחו שהגרף המשלים $\overline{T}$ אינו אוילרי.

ד. הוכיחו שבגרף המשלים $\overline{T}$ קיים מסלול אוילר אם ורק אם $n = 6$.

ה. הוכיחו שלכל $n \geq 7$ הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני

שאלה 2 (30 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל העצים T בעלי 10 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,\ldots,10$ שבהם 4 עלים המתויגים ב- $1,2,3,4$ (ייתכנו עוד צמתים שהם עלים)

א. מיצאו את העצים T בעלי סדרת פרופר $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ ו- $(5,6,7,8,9,10,9,8)$.

ב. מיצאו את מספר העצים T המקיימים את תנאי השאלה.

ג. מיצאו את מספר העצים T, שבהם העלים הם $1,2,3,4$ בלבד (אין עלים נוספים)

ד. הוכיחו שלעץ T בעל סדרת פרופר $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ אין זיווג מושלם.

שאלה 3 (20 נקודות)

G הוא גרף **דו-צדדי מלא** על 7 צמתים. ידוע ש- G הוא גרף **מישורי** ושקיים בו **מסלול אוילר**.

א. מיצאו את מספר הקשתות של G. נמקו את התשובה.

ב. מיצאו את מספר הפאות של G. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו את מספר הצביעה של G. נמקו את התשובה.

שאלה 4 (20 נקודות)

בגרף **מישורי פשוט** G קיים **מסלול אוילר** באורך 9.

ידוע ש- u,v הם צמתים לא סמוכים ב- G וידוע שהגרף $G \cup \{uv\}$ (המתקבל מ- G לאחר הוספת הקשת uv) אינו גרף משורי. **הוכיחו או הפריכו** כל אחת מן הטענות הבאות:

א. קיים גרף G על 5 צמתים שמקיים את תנאיי השאלה

ב. קיים גרף G על 6 צמתים שמקיים את תנאיי השאלה