TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

ĐỀ THI CUỐI KÌ – MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học (Khóa 2013)

Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Bài 1: (*2,0 điểm*). Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thoả mãn điều kiện XA = B.

Bài 2: *(2,0 điểm)*. Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (m+1)x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = 2 - m; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Bài 3: (*2,0 điểm*).

a) Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $u, v \in V$. Chứng minh rằng $\{u; v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u + v; u - v\}$ độc lập tuyến tính.

b) Cho $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y = 3z\}$, $W' = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | xy = z^2\}$. Kiểm tra W và W' có là không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ hay không? Giải thích?

Bài 4: (*2,0 điểm*). Cho $u_1 = (1; -2; 1)$; $u_2 = (2; 1; 3)$; $u_3 = (1; 2; 2)$ và $u = (2; 5; 3)$.

a) Chứng minh tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định toạ độ của vectơ u theo cơ sở B.

b) Xác định cơ sở $B' = \{u'_1; u'_2; u'_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở B' sang B là:

$$(B' \to B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 5: (*2,0 điểm*). Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + 2z, 2x + 5y + 7z)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian Imf và một cơ sở của Ker$f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $B = \{(1,0,-1), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

- - - HẾT - - -

(Trong phần này, các phép biến đổi ma trận sẽ không được trình bày, vì đây là các thao tác giải bài tập cơ bản, các bạn đã biết. Mặt khác, mình chỉ cung cấp kết quả - được giải bằng các phần mềm trên máy tính như Maple, Matlab, ... để các bạn tham khảo sau khi tự giải xong)

<u>Câu 1</u>: a) $|A| = -1 \neq 0 \implies$ A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

b) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -10 \\ -4 & -7 & 14 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

<u>Câu 2</u>: $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 1 \\ 1 & m & 2 & 2-m \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$|A| = -(m-3)(m-1)$ $\quad$ $|A_2| = (m-1)^2$

$|A_1| = -2(m-1)(2m-1)$ $\quad$ $|A_3| = 2(m-1)$

- Nếu $|A| \neq 0 \iff \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì: Hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{|A_1|}{|A|}; \frac{|A_2|}{|A|}; \frac{|A_3|}{|A|}\right) = \left(\frac{2(2m-1)}{m-3}; -\frac{m-1}{m-3}; \frac{-2}{m-3}\right)$
- Nếu $m = 1 \implies |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$ thì: Hệ có vô số nghiệm với dạng (–t ; 1 – t ; t).
- Nếu $m = 3 \implies |A_1| = -20 \neq 0$ thì: Hệ phương trình vô nghiệm.

<u>Câu 3</u>: a) • Ta có: {u,v} độc lập tuyến tính.

Với $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho a(u + v) + b(u – v) = 0 $\iff$ (a + b)u + (a – b)v = 0.

Do {u, v} độc lập tuyến tính nên $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \implies a = b = 0 \implies \{u + v\,; u - v\}$ độc lập tuyến tính.

• Ta có: {u + v ; u – v} độc lập tuyến tính.

Với $a + b, a - b \in \mathbb{R}$ sao cho (a + b)u + (a – b)v = 0 $\iff$ a(u + v) + b(u – v) = 0.

Do {u + v ; u – v} độc lập tuyến tính nên a = b = 0 $\implies$ {u ; v} độc lập tuyến tính.

Vậy: $\{u; v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u + v; u - v\}$ độc lập tuyến tính.

b) • $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y = 3z\}$

Xét $c \in \mathbb{R}$ và 2 vector $\begin{cases} u = (x, y, z) \\ v = (x', y', z') \end{cases} \in W \implies \begin{cases} x + 2y = 3z \\ x' + 2y' = 3z' \end{cases}$

Ta có: u + v = (x + x' , y + y' , z + z')

(x + x') + 2(y + y') = (x + 2y) + (x' + 2y') = 3z + 3z' = 3(z + z') $\implies u + v \subset W$

Lại có: cu = (cx , cy, cz)

cx + 2cy = c(x + 2y) = 3cz $\implies cu \subset W$

Vậy: W là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

• $W' = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \,| xy = z^2\}$

Xét $c \in \mathbb{R}$ và 2 vector $\begin{cases} u = (x, y, z) \\ v = (x', y', z') \end{cases} \in W' \implies \begin{cases} xy = z^2 \\ x'y' = z'^2 \end{cases}$

Ta có: u + v = (x + x' , y + y' , z + z')

(x + x')(y + y') = xy + x'y' + xy' + x'y = $z^2 + z'^2$ + xy' + x'y ≠ $(z + z')^2 \implies u + v \not\subset W'$

Vậy: W' không phải là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

Câu 4: a) Ta có: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

$\implies$ $r(A) = 3$ (bằng số vector) nên B độc lập tuyến tính.

Mà $B \subset \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \implies$ B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ta có: $\left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \mid u^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \implies [u]_B = \begin{pmatrix} -20 \\ 25 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Xét ma trận mở rộng:

$$\left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \mid I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\implies (B \longrightarrow B_o) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ta có: $(B' \longrightarrow B) = (B' \longrightarrow B_o)(B_o \longrightarrow B) \implies (B' \longrightarrow B_o) = (B' \longrightarrow B)(B_o \longrightarrow B)^{-1}$

$$\implies (B' \longrightarrow B_o) = (B' \longrightarrow B)(B \longrightarrow B_o) = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -2 & 7 \end{pmatrix} \implies (B_o \longrightarrow B') = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies (B_o \longrightarrow B') = \left([u_1']_{B_o} \quad [u_2']_{B_o} \quad [u_3']_{B_o}\right) = \left(u_1'^T \quad u_2'^T \quad u_3'^T\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy: Tập hợp $\{u_1' = (-2, 9, 0);\ u_2' = (1, -1, 1);\ u_3' = (3, -14, 0)\}$ là cơ sở của B'.

Câu 5: a) Ta có ma trận biểu diễn *f* theo cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm dạng $(x_1, x_2, x_3) = (4t, -3t, t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\implies$ Nghiệm căn bản là $u = (4; -3; 1) \implies C = \{ u = (4; -3; 1)\}$ là cơ sở của Ker *f*.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Hệ $A^TX = 0$ có vô số nghiệm dạng $(x_1, x_2, x_3) = (t, -3t, t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\implies$ Nghiệm căn bản là $v = (1; -3; 1) \implies D = \{ v = (1; -3; 1)\}$ là cơ sở của Im *f*.

b) $f(u_1) = (2; -1; -5)$, $f(u_2) = (2; 3; 7)$, $f(u_3) = (1; 5; 14)$.

$$\left(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \mid f(u_1)^T \ f(u_2)^T \ f(u_3)^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -5 & 7 & 14 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 10 \end{array}\right)$$

$$\implies [f]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

- - - HẾT - - -

Ivanpham