Đáp án Đề 7 – Thi cuối kỳ I Đại Số K60

Câu 1:

$A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow \bar{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C})$

$\leftrightarrow \bar{A} \vee (\bar{B} \vee C)$

$\leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B}) \cup C$

$\leftrightarrow \overline{A \wedge B} \vee C$

$\leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$ (dpcm)

Câu 2:

$$z_{k+1} = \sqrt[2015]{1+i} = \sqrt[2015]{\sqrt{2}^{2015}\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin(\frac{\pi}{4})}}$$

$$= \sqrt[2015]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{2015} + isin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{2015}\right) \qquad (\text{Với } k = \overline{0{,}2014}\ )$$

$k = 0 \qquad z_1 = \sqrt[2015]{2}(cos\frac{\pi}{8060} + isin\frac{\pi}{8060})$

$k = 1 \qquad z_2 = z_1\left(cos\frac{2\pi}{2015} + isin\frac{2\pi}{2015}\right) = z_1 a \qquad (\text{Với } a = cos\frac{2\pi}{2015} + isin\frac{2\pi}{2015}\ )$

$k = 2 \qquad z_3 = z_1\left(cos\frac{4\pi}{2015} + isin\frac{4\pi}{2015}\right) = z_1 a^2$

… … … … … ..

$z_{k+1} = z_1 a^k$

Ta có:

$S = \sum_{i=1}^{2015} a_i^2 = \sum_{k=0}^{2014} z_{k+1}^2 = z_1^2(1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{4028}) = z_1^2\frac{a^{4028}-1}{a^2-1}$

Mà $a^{4028} = \left(cos\frac{2\pi}{2015} + isin\frac{2\pi}{2015}\right)^{4028} = cos4\pi + isin4\pi = 1$

$\rightarrow S = z_1^2\frac{1-1}{a^2-1} = 0$ (dpcm)

Vậy S = 0

Câu 3:

$XA + 3B = C^t$

$$\leftrightarrow X\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\leftrightarrow X\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -4\\ -5 & 2\\ -2 & -8\end{bmatrix}$

$\leftrightarrow X = \begin{bmatrix}6 & -4\\ -5 & 2\\ -2 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}^{-1}$

$\leftrightarrow X = \begin{bmatrix}6 & -4\\ -5 & 2\\ -2 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$

$\leftrightarrow X = \begin{bmatrix}-62 & 26\\ 45 & -19\\ -20 & 10\end{bmatrix}$

Vậy $X = \begin{bmatrix}-62 & 26\\ 45 & -19\\ -20 & 10\end{bmatrix}$

Câu 4:

a) Số ẩn là 4 mà chỉ có 3 phương trình. Do đó, không tồn tại m,n để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Khi $m = 2$, ta có:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 4 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & 1 & n\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 6 & -3 & -3\\ 0 & -3 & 6 & -3 & n-4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 6 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1\end{bmatrix}$$

+ Với $n \neq 1 \to Hệ\ vô\ nghiệm$

+ Với $n = 1$, hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\\ \quad\ \ x_2 - 2x_3 \ \ + x_4 = 1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b + 1\\ x_2 = 2a - b + 1\\ x_3 = a\\ x_4 = b\end{cases}$$

Câu 5:

Xét $\quad c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = \theta$

$\leftrightarrow c_1(1;0;1;1) + c_2(-3;2;1;-1) + c_3(2;1;0;2) + c_4(1;2;1;m) = 0$

$$\leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 3c_2 + 2c_3 + c_4 = 0\\ \qquad 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0\\ c_1 + \ c_2 \qquad\quad + c_4 = 0\\ c_1 - c_2 + 2c_3 + mc_4 = 0\end{cases} \quad \overset{c_1 = -c_2 - c_4}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2c_2 + c_3 \qquad\qquad + 2c_4 = 0\\ -4c_2 + 2c_3 \qquad\qquad\quad = 0\\ -2c_2 + 2c_3 + (m-1)c_4 = 0\end{cases}$$

$$\overset{c_3 = 2c_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4c_2 \qquad\quad + 2c_4 = 0\\ 2c_2 + (m-1)c_4 = 0\end{cases} \qquad \overset{2c_2 = -c_4}{\Longrightarrow} (m-2)c_4 = 0$$

$S = \{u_1; u_2; u_3; u_4\}$ pttt khi c_1, c_2, c_3, c_4 không đồng thời bằng $0 \leftrightarrow (m-2) = 0 \leftrightarrow m = 2$

Vậy $m = 2$ thì S pttt.

Câu 6:

a) Chọn $B = \{1, x, x^2\}$ là cs của $P_2[x]$. Ta có:

$f(1) = 1 + 2x$

$f(x) = 1 - x + 3x^2$

$f(x^2) = 2x - 2x^2$

Ma trận A của f đối với csct B là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $r(f) = r(A) = 2$

b) Xét $|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{10} \\ \lambda_3 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

+)TH1: $\lambda = 0, ta\ có: (A - 0E)X = \theta$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases}$$

Suy ra $X_1 = t(-2; 2; 3)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ $(t \in R, t \neq 0)$

Tương tự với các trị riêng $\lambda_2 = -1 - \sqrt{10}$ và $\lambda_3 = -1 + \sqrt{10}$ ta có:

$X_2 = t\left(1; \sqrt{10} - 2; 4 - \sqrt{10}\right)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1 - \sqrt{10}$ $\quad (t \in R, t \neq 0)$

$X_2 = t\left(1; -\sqrt{10} - 2; 4 + \sqrt{10}\right)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_3 = -1 + \sqrt{10}$ $\quad (t \in R, t \neq 0)$

Câu 7:

Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra cơ sở của W là $B = \{u_1, u_2\}$ mà $u_1 = (1; 2; -1; 1), u_2 = (0; -1; 1; 0)$

Áp dụng tiêu chuẩn Gram Smidth, ta có:

$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; -1; 1)$

$\overline{v_2} = u_2 - \langle u_2; v_1 \rangle v_1 = (0; -1; 1; 0) + \frac{3}{7}(1; 2; -1; 1) = \frac{1}{7}(3; -1; 4; 3)$

Nên $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{|\overline{v_2}|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3; -1; 4; 3)$

Suy ra cơ sở trực chuẩn của W là $B' = \{v_1, v_2\}$ với $v_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; -1; 1)$ và $v_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}(3; -1; 4; 3)$

Hình chiếu trực giao của véc-tơ u(2;3;1;5) lên kgian W là:

$u' = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 = \frac{12}{7}(1; 2; -1; 1) + \frac{22}{35}(3; -1; 4; 3) = \frac{2}{5}(9; 7; 2; 9)$

Vậy hình chiếu của vct u lên kgian W là $u' = \frac{2}{5}(9; 7; 2; 9)$