TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

ĐỀ THI CUỐI KÌ – MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2012)

Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

<u>Bài 1</u>: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = m \\ mx_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>Bài 2</u>: Cho W là không gian con của R^3 sinh bởi các vecto $u_1 = (1; 1; 2)$; $u_2 = (1; 2; 1)$; $u_3 = (1; -1; 4)$.

a) Tìm một cơ sở và xác định chiều của không gian W.
b) Xác định m để vecto u = (m; 4; m + 2) thuộc W.

<u>Bài 3</u>: Trong không gian R^3 cho các vecto $u_1 = (1; 2; 3)$; $u_2 = (1; 3; 2)$; $u_3 = (2; 5; 4)$ và u = (3; 8; 4).

a) Chứng minh tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của R^3 và xác định tọa độ của vecto u theo cơ sở B.
b) Chứng minh tập hợp $B' = \{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$ cũng là cơ sở của R^3 và xác định ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

<u>Bài 4</u>: Cho toán tử tuyến tính $f \in L(R^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x + y + 4z).$$

a) Tìm một cơ sở của Im f và một cơ sở của Ker f.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $B = \{(1; 0; 1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ của R^3.

- - - HẾT - - -

Bài 1: Ta có ma trận: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 2 & m \\ m & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 3 & 3 \end{vmatrix} = (3-m).(m-2)$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ m & m & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4.(m-2)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = (m+1).(2-m)$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & m \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.(m+1).(m-2)$

- Khi $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

  $(x_1,x_2,x_3) = (\frac{\Delta_1}{\Delta};\frac{\Delta_2}{\Delta};\frac{\Delta_3}{\Delta}) = (\frac{4}{(3-m)};-\frac{(m+1)}{(3-m)};\frac{2(m+1)}{(3-m)})$
- Khi $\Delta = 0$ thì có hai trường hợp:
  - Với m = 3 thì $\Delta_1 = 4 \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm.
  - Với m = 2 ta có ma trận: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{chuẩn hoa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $\Longrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm: $(x_1, x_2, x_3) = (-4; 3-t; t)$ với $t \in R$.

Kết luận:
- m = 3: Hệ phương trình vô nghiệm.
- m = 2: Hệ có vô số nghiệm: $(x_1, x_2, x_3) = (-4; 3-t; t)$ với $t \in R$.
- $m \neq 2$ và $m \neq 3$: Hệ có nghiệm duy nhất: $(x_1,x_2,x_3) = (\frac{4}{(3-m)};-\frac{(m+1)}{(3-m)};\frac{2(m+1)}{(3-m)})$.

Bài 2: a) Ta có ma trận: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vậy: B = {(1 ; 1 ; 2) ; (0 ; 1 ; –1)} là một cơ sở của W và dim W = 2.

b) Để u thuộc W $\Leftrightarrow$ u phải là tổ hợp tuyến tính của 3 vectơ u_1, u_2, u_3. Ta có ma trận sau:

$$(u_1^T\ u_2^T\ u_3^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & m+2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -2 & 4-m \\ 0 & 0 & 0 & 6-2m \end{array}\right)$$

u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 $\Leftrightarrow$ 6 – 2m = 0 $\Leftrightarrow$ m = 3.

Vậy: Vecto u thuộc W $\Leftrightarrow$ m = 3.

Bài 3: a) • Ta có ma trận: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

det A = –1 ≠ 0 $\Longrightarrow$ B = {u_1, u_2, u_3} độc lập tuyến tính.

Mà u_1, u_2, u_3 thuộc R^3 $\Longrightarrow$ B là cơ sở của R^3.

- Ta có ma trận: $(u_1^T\ u_2^T\ u_3^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow [u]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) • Ta có: $\begin{cases} u_1 = (1;2;3) \\ u_2 = (1;3;2) \\ u_3 = (2;5;4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = (2;5;5) \\ u_2 + u_3 = (3;8;6) \\ u_1 + u_2 + u_3 = (4;10;9) \end{cases} \Longrightarrow$ Ta có ma trận:

$$A' = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim B' = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim B = 3$$

$\Longrightarrow$ dim B = dim B'.
Mặt khác: B' độc lập tuyến tính (det A' = –1 ≠ 0) $\Longrightarrow$ B' là cơ sở của R^3.

• Ta có ma trận:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1^T & u_2^T & u_3^T & (u_1+u_2)^T & (u_2+u_3)^T & (u_1+u_2+u_3)^T \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy: $(B \to B') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

<u>**Bài 4**</u>**:** a) Ta có ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm: $(x_1 ; x_2 ; x_3) = (-3t ; 2t ; t)$ với t ∈ R.
Nghiệm căn bản: u = (–3 ; 2 ; 1) $\Longrightarrow$ B = {u = (–3 ; 2 ; 1)} là cơ sở của Ker f .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ C = {u_1, u_2} với u_1 = (1 ; 1 ; 2) và u_2 = (0 ; 1 ; –1) là cơ sở của Im f .

b) Ta có: B = {u_1 = (1 ; 0 ; 1) ; u_2 = (0 ; 1 ; 1); u_3 = (1 ; 1 ; 1)}

$\Longrightarrow$ $f(u_1) = (2 ; 0 ; 6)$; $f(u_2) = (2 ; 1 ;5)$; $f(u_3) = (3 ; 2 ; 7)$.

Ta có ma trận:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1^T & u_2^T & u_3^T & f(u_1)^T & f(u_2)^T & f(u_3)^T \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Vậy: $[f]_{B,B'} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)$.

- - - HẾT - - -