BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (GV LÊ VĂN HỢP)

CHƯƠNG I : HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực dưới đây (*nghiệm duy nhất*) và kiểm tra ĐL Kronecker Capelli :

a) $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ y+2z+5x=29 \\ z+3x-y=10 \\ z+2y-7x=-8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ z+2x+y=2 \\ y+5z+x=-7 \\ -3z+3y+2x=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ 3y-z-t+2x=-6 \\ -2t+3x-y-z=-4 \\ 3z-t+x+2y=-4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ 2z-2x+3t+y=-2 \\ 2y+2t+3x-z=-5 \\ t+2z-3y+2x=11 \end{cases}$

2/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực dưới đây (*vô nghiệm*) và kiểm tra Định lý Kronecker Capelli :

a) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ y-2z+2x=1 \\ z+x+y=3 \\ 2y+x-3z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 2t+5x+y-z=-1 \\ 2z-8t+3x-2y=2 \\ -y+z-3t+2x=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3z+3x-t-7y=-1 \\ 2t+6z-9y+5x=7 \\ -6y-t+4x+3z=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-2y+z-t+u=1 \\ t-z-2u+2y+x=1 \\ 7u+5z-10y+4x-5t=1 \\ 7z+2x-7t+11u-14y=1 \end{cases}$

3/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực dưới đây (*vô số nghiệm*) và kiểm tra Định lý Kronecker Capelli :

a) $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 3z+2x+y=0 \\ 5y+4z+3x=0 \\ 4z-17y+x=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y-5z+7t=0 \\ 16t+4x+11y-13z=0 \\ 3z-2t+2x-3y=0 \\ -2y+z+3t+7x=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+2z-3t=1 \\ 3z+x-2t-4y=-2 \\ 4y-2t+x-z=-2 \\ -2t+5z-8y+x=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+3y+7z-3t+6u=3 \\ -t+4z+3u+2y+2x=-2 \\ -3u-5z-3y-3x+2t=-1 \\ 8z+2x-3t+9u+2y=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y+2z+7t-3u=1 \\ -6y-5u+15t+3x+4z=2 \\ -5t-2x+4y-z+u=-1 \\ -20u+14z+8x-16y+50t=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-z+t-2u=1 \\ z+2x-t+u-2y=1 \\ 7u+5z-10y+4x-5t=1 \\ -7t+11u+2x+7z-14y=-1 \end{cases}$

4/ Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính thực dưới đây theo các tham số thực m, a, b, c và d rồi kiểm tra Định lý Kronecker Capelli :

a) $\begin{cases} x+3y+8z-t=-3 \\ 5z-2x-5t+y=m \\ 13t-19z-5y+4x=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y+4z-17t=11m+7 \\ 8z+5x-27t+6y=18m+10 \\ 3y-12t+2x+2z=8m+5 \\ -19t+2z+5y+3x=13m+8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-z+2t=1 \\ -3z+x+4t+2y=2 \\ -y-t+x+4z=m \\ mt-z+3y+4x=m^2-6m+4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+z-t+u=m \\ 2t-z+2x-2u+y=3m \\ -u+3x+t-2y-z=m+1 \\ z+2u-5y+2x-2t=m-1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y+z+2t-3u=a \\ 6y+13u-8t+3x+5z=b \\ t+4x+8y+5z-u=c \\ -5u-3z-2x-4y+3t=d \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y-z+3t=12 \\ -2z+x+t+2y=3 \\ -y+2x+3z=9 \\ mt-z+y+2x=21 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ mz+2x+3y=3 \\ my+3z+x=2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-2y+z+2t=m \\ t-z+y+x=2m+1 \\ 7y-t+x-5z=-m \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ (m-1)z+mx+y=m \\ my+z+x=1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ mz+2x+y=m+1 \\ my+3z+x=2 \end{cases}$

CHƯƠNG II : TÍNH TOÁN MA TRẬN VÀ MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

1/Cho các ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Tính $E = CDBA$, $F = DBAC$ và $G = ACDB$.

2/ Tính A^k theo k nguyên ≥ 0 nếu A là một trong các ma trận thực sau :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sin t \\ -1 & 0 & -\cos t \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{pmatrix}$$

3/ Cho đa thức thực $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$. Tính ma trận $f(A)$ nếu $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ hay $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

4/ Giải các phương trình ma trận thực sau (X là ma trận ẩn phải tìm) :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $X \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ d) $X^2 = I_2$

e) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ g) $X^2 = X$ ($X \in M_2(\mathbf{R})$)

h) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X + X^t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -11 & -8 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X^t + X \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

5/ Cho các ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Chứng minh $(AB)^n \neq A^n B^n$ và $(CD)^n \neq C^n D^n$ $\forall n$ nguyên ≥ 2.

6/ Cho $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ và số nguyên $k \geq 1$.

a) Khai triển $(5A - 2B + 3C)(6B - C - 4A)(2C + 3A + B)$.

b) Giả sử $A^2 = A$. Khai triển và rút gọn $(ABA - AB)^2$ và $(ABA - BA)^2$.

c) Giả sử $C^2 = I_n$. Tính C^k .

d) Giả sử $A^2 = A$ và $B = (2A - I_n)$. Tính A^k và B^k .

e) Giả sử $A^2 = \mathbf{O}_n$ và $C = (A + I_n)$. Tính C^k và $S_k = I_n + C + C^2 + \ldots + C^k$.

f) Giả sử $A^k = \mathbf{O}_n$ và $AB = BA$. Tính $(AB)^k$ và A^m với m nguyên $\geq k$.

g) Giả sử $AB = \mathbf{O}_n$.Chứng minh $(BA)^m = \mathbf{O}_n$ $\forall m$ nguyên ≥ 2. Cho ví dụ để thấy có thể $BA \neq \mathbf{O}_n$.

h) Giả sử $A^3 = \mathbf{O}_n = B^4$ và $AB = BA$. Chứng minh $(cA + dB)^6 = \mathbf{O}_n$ $\forall c,d \in \mathbf{R}$.
Tổng quát hóa kết quả trên khi có r, s nguyên ≥ 1 thỏa $A^r = \mathbf{O}_n = B^s$ và $AB = BA$.

i) Ký hiệu Tr là hàm vết (trace) lấy tổng các hệ số trên đường chéo chính của một ma trận vuông.
Chứng minh $Tr(A \pm B) = Tr(A) \pm Tr(B)$ và $Tr(AB) = Tr(BA)$. Suy ra $(AB - BA) \neq cI_n$ $\forall c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
.

7/ Dùng phương pháp Gauss - Jordan để xét tính khả nghịch của các ma trận thực sau và tìm ma trận nghịch đảo của chúng (nếu có) :

a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

A **B** **C** **D** **E** **F**

g) Từ đó tính nhanh $(-4A)^{-1}$, $(A^t)^{-1}$, $(2^{-1}A^{-1})^{-1}$, $(A^3)^{-1}$, $(-A^{-4})^{-1}$, $(BA)^{-1}$, $(A^{-1}B)^{-1}$, $(AB^{-1})^{-1}$ và $(B^{-1}A^{-1})^{-1}$.

8/ Cho $A,B \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Giả sử A khả nghịch. Chứng minh $(A^{-1}BA)^k = A^{-1}B^kA \quad \forall k \geq 1$.

Chứng minh $(A + B)$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $(I_n + A^{-1}B)$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $(I_n + BA^{-1})$ khả nghịch

b) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh $A = I_n$.

c) Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = B^8A^4 = I_n$. Chứng minh $A = I_n = B$.

9/ Áp dụng ma trận khả nghịch để giải các phương trình ma trận thực sau (X là ma trận ẩn phải tìm) :

a) $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $X \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -7 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}^{-4}$ h) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}^3 X^5 \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2$

10/ Cho $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$, số nguyên $k \geq 1$ và $c,d \in \mathbf{R}$.

a) Giả sử $A^k = \mathbf{O}_n$ và $L = (I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})$.

Chứng minh $H = (I_n - A)$ khả nghịch và $H^{-1} = L$.

Suy ra $K = (I_n + A)$ cũng khả nghịch và tính K^{-1} theo A.

b) Giả sử $A^2 = cA$ và $cd \neq -1$. Đặt $Q = (I_n - \dfrac{d}{cd+1} A)$.

Chứng minh $P = (I_n + dA)$ khả nghịch và $P^{-1} = Q$.

c) Giả sử A, B, C khả nghịch.

Tìm X và Y nếu $A^{-5}XB^6 = -7A^{-3}C^2B^4$ và $A^9C^8YB^{-4}C^{-2} = 2A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2}$.

<u>CHƯƠNG III :</u> ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

1/ Tính các định thức sau :

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3m & 2m(1-m) & -7m \\ 4 & 5(1-m) & 2 \\ 2 & 4(m-1) & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5a & 8 \\ -3b & 2b & 4ab & -6b \\ 2 & -5 & -7a & 5 \\ 4(b-a) & 3(a-b) & 5a(a-b) & 6(b-a) \end{vmatrix}$

2/ Khi nào các ma trận thực sau có định thức bằng 0 ?

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & x^3 \\ a & 1 & a^3 \\ b & 1 & b^3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ c & a & b & 1 \\ b & c & a & 1 \\ a+b & b+c & c+a & 2 \end{vmatrix}$

3/ Dùng phương pháp định thức để xét tính khả nghịch của các ma trận thực sau và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của chúng :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 13 & -12 & 6 \\ 8 & -7 & 4 \\ -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -1 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4/ Khi nào các ma trận thực sau khả nghịch và tìm ma trận nghịch của chúng lúc đó :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m+3 & 1 & 2 \\ m & m-1 & 1 \\ 3m+3 & m & m+3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sin a \\ -1 & 1 & -\cos a \\ \sin a & -\cos a & 1 \end{pmatrix}$

5/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực sau bằng qui tắc CRAMER :

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ -4 & 4 & -1 & -22 \\ 2 & 3 & 1 & -11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 15 \\ -3 & -5 & 6 & -19 \end{array}\right)$

6/ Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính thực sau theo tham số thực m bằng qui tắc CRAMER :

a) $\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} m & m+2 & m+1 \\ m+2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{cc|c} m+1 & 1 & m+2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{cc|c} 2m+5 & 9 & m \\ -3 & m-4 & 1-m \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5-m & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3m-1 & m+3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 4m-2 & -1 \\ 3 & m+1 & -9 & 0 \end{array}\right)$ g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array}\right)$ h) $\left(\begin{array}{ccc|c} m^2 & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 0 \\ m & 1 & m & -1 \end{array}\right)$

<u>CHƯƠNG IV :</u> KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$

1/ Tập hợp nào dưới đây là không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ (n = 3, 4, 5) ? Tại sao ?

a) W = { X = (x,y,z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / 2x – | y | + 3z = 0 } b) W = { X = (x,y,z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / xy + yz + zx = 0 }

c) W = { X = (x,y,z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / y – 4x + 3z = 0 = 5x + 8y – 7z }

d) W = { X = (x,y,z,t) ∈ $\mathbf{R}^4$ / x – y + 9z = 3t – x – z = 2t – 7y – 5z = 8x + 4y – t }

e) W = { X = (x,y,z,t) ∈ $\mathbf{R}^4$ / x + 5y – 2z – 4t ≤ 0 } f) W = { X = (x,y,z,t) ∈ $\mathbf{R}^4$ / $x^2 - y + 3z - t^3 \geq 1$ }

g) W = { X = (x,y,z,t) ∈ $\mathbf{R}^4$ / $(5x + 4y + z - 6t)^2 + (9x - y + 7z + 2t)^2 + (8x - 6y + 3z - t)^2 \leq 0$ }

h) W = { X = (x,y,z,t,u) ∈ $\mathbf{R}^5$ / 3x = –2y = 6z = –9t = 4u }

2/ Khi nào $\alpha = (u,v,w)$ (hay $\alpha = (u,v,w,t)$) $\in W = < S >$ nếu

a) $S = \{ X = (1,1,2), Y = (2,3,3) \} \subset \mathbf{R}^3$ b) $S = \{ X = (3,1,-1), Y = (-1,-5,7), Z = (1,-2,3) \} \subset \mathbf{R}^3$

c) $S = \{ X = (1,2,1,0), Y = (2,1,0,1), Z = (0,1, 2,1) \} \subset \mathbf{R}^4$

d) $S = \{ X = (-2,1,3,-1), Y = (1,4,0,-3), Z = (-3,6,6,-5), T = (2,-1,-3,1) \} \subset \mathbf{R}^4$

e) $\alpha = (m, 4, m + 2) \in \mathbf{R}^3$ và $S = \{ X = (1,1,2), Y = (1,2,1), Z = (1,-1,4) \} \subset \mathbf{R}^3$

3/ Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp dưới đây :

a) $S = \{ X = (3,1,-1), Y = (-1,-5,7), Z = (1,-2,3), T = (9,0,4) \} \subset \mathbf{R}^3$

b) $S = \{ X = (-3,2,7,-1), Y = (9,-6,-21,3) \} \subset \mathbf{R}^4$ c) $S = \{ X = (2,-1,0,9), Y = (-5,7,3,-4) \} \subset \mathbf{R}^4$

d) $S = \{ X = (-1,-1,-7,2), Y = (5,-1,1,18), Z = (-5,2,8,-16) \} \subset \mathbf{R}^4$

e) $S = \{ X = (1,-2,3,-4), Y = (3,3,-5,1), Z = (-5,-8,13,-6) \} \subset \mathbf{R}^4$

f) $S = \{ X = (1,2, 3m + 1), Y = (3,1,m - 3), Z = (m + 5, 2,-4) \} \subset \mathbf{R}^3$

4/ Tập hợp nào dưới đây là cơ sở của $\mathbf{R}^3$? ($s = \sin x$ và $c = \cos x$)

a) $S = \{ X = (-3,2,7), Y = (8,-2,3) \}$ b) $S = \{ X = (-1,-1,-7), Y = (5,-1,1), Z = (-5,2,8), T = (4,0,-3) \}$

c) $S = \{ X = (3,2,1), Y = (2,-1,-1), Z = (12, 1,-1) \}$ d) $S = \{ X = (2,-3,1), Y = (4,-5,-2), Z = (5,-7,3) \}$

e) $S = \{ X = (1,1,-c), Y = (1,-1,s), Z = (s,-c,1) \}$ f) $S = \{ X = (0,-1,-s), Y = (1,0,c), Z = (-s,c,0) \}$

5/ Giải thích B là một cơ sở của không gian $W = < B > \leq V = \mathbf{R}^n$ (n = 3, 4, 5) rồi tìm điều kiện để $\alpha = (u,v,w)$ (hay $\alpha = (u,v,w,t)$ hay $\alpha = (u,v,w,t,z)$) $\in W$.

Nếu $W \neq V$, hãy bổ sung thêm các vector vào B để có một cơ sở C của V.

a) $B = \{ X = (2,3,-1), Y = (-4,-6,5) \}$($V = \mathbf{R}^3$) b) $B = \{ X = (0,3,1,-2), Y = (0,9,3,-8) \}$($V = \mathbf{R}^4$)

c) $B = \{ X = (-1,4,2,-5), Y = (2,-5,-3,9), Z = (1,2,-1,4) \}$($V = \mathbf{R}^4$)

d) $B = \{ X = (0,-2,1,-7,3), Y = (0,6,0,25,-10), Z = (0,-4,-13,-34,13) \}$($V = \mathbf{R}^5$)

e) $B = \{ X = (1,2,-5,-2,3), Y = (4,8,-16,-7,6) \}$($V = \mathbf{R}^5$)

6/ Tìm một cơ sở B cho không gian $W = < S > \leq V = \mathbf{R}^n$ (n = 3, 4) rồi tìm điều kiện để $\alpha = (u,v,w) \in W$ (hay $\alpha = (u,v,w,t) \in W$) Nếu $W \neq V$, hãy bổ sung thêm các vector vào B để có một cơ sở C của V.

a) $S = \{ X = (2,-3,1), Y = (3,-1, 5), Z = (1,-5,-3) \} \subset \mathbf{R}^3$

b) $S = \{ X = (1,2,-3), Y = (-2,-1,4), Z = (-3,0,5), T = (2,7,-8) \} \subset \mathbf{R}^3$

c) $S = \{ X = (-1,-2,4,0), Y = (2,3,3,-1), Z = (1,-4,2,-3), T = (-1,9,3,5) \} \subset \mathbf{R}^4$

d) $S = \{ X = (2,-17,43,-12), Y = (0,5,5,2), Z = (-1,11,-19,7), T = (1,-1,29,-3) \} \subset \mathbf{R}^4$

7/ Chỉ ra một tập sinh hữu hạn S cho W để thấy $W \leq V = \mathbf{R}^n$ (n = 3, 4) .

Sau đó tìm một cơ sở B cho $W = < S >$ rồi tìm điều kiện để $\alpha = (u,v,w)$ (hay $\alpha = (u,v,w,t)$) $\in W$?

Nếu $W \neq V$, hãy bổ sung thêm các vector vào B để có một cơ sở C của V.

a) $W = \{ U = (2a + 3b + c, -3a - b - 5c, a + 5b - 3c) / a,b,c \in \mathbf{R} \}$

b) $W = \{ U = (a -2b -3c + 2d, 2a - b + 7d, -3a + 4b + 5c - 8d) / a,b,c,d \in \mathbf{R} \}$

c) $W = \{ U = (-a + 2b + c - d, -2a + 3b - 4c + 9d, 4a + 3b + 2c + 3d, 5d - b - 3c) / a,b,c,d \in \mathbf{R} \}$

d) $W = \{ U = (2a - c + d, 5b - 17a + 11c - d, 5b + 43a - 19c + 29d, 2b -12a + 7c - 3d) / a,b,c,d \in \mathbf{R} \}$

8/ Tìm một cơ sở B cho không gian $W = \{ X \in \mathbf{R}^n / AX = \mathbf{O} \}$ (n = 4, 5) nếu A là

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 3 & -20 \\ 3 & 7 & 22 & 15 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & -11 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

Nếu $W \neq \mathbf{R}^n$, hãy bổ sung thêm các vector vào B để có một cơ sở C của $\mathbf{R}^n$.

9/ Kiểm tra S và T là các cơ sở của $\mathbf{R}^3$ rồi viết $P(S \to T)$ và $P(T \to S)$.
Tìm X, $[X]_T$, $[Y]_S$, $[Y]_T$, Z và $[Z]_S$ nếu

a) $S = \{ X_1 = (-1,1,2), X_2 = (2,-1,2), X_3 = (1,0,3) \}$, $T = \{ Y_1 = (2,5,-2), Y_2 = (2,1,-3), Y_3 = (1,-2,-2) \}$

$$[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Y = (4,1,-2) \text{ và } [Z]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $S = \{ X_1 = (1,1,0), X_2 = (0,1,1), X_3 = (1,0,1) \}$, $T = \{ Y_1 = (-1,0,0), Y_2 = (1,-1,0), Y_3 = (1,1,-1) \}$

$$[X]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y = (3,-4,0) \text{ và } [Z]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10/ Cho $S = \{ X, Y, Z \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ và $T = \{ E, F, G \} \subset \mathbf{R}^3$.
Kiểm tra T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ rồi viết $P(S \to T)$ và $P(T \to S)$ nếu

a) $E = 2X - 2Y - 3Z$, $F = -3X + 2Y + 4Z$ và $G = -4X + 3Y + 6Z$.

b) $X = E - F + G$, $Y = 3E - F + 2G$ và $Z = E + 3F + G$.

11/ Cho $S = \{ X = (a,c), Y = (b,d) \} \subset \mathbf{R}^2$ thỏa $ab + cd = 0$ và $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$.
Chứng minh S là một cơ sở của không gian vector $\mathbf{R}^2$. Tìm $[Z]_S$ nếu $Z = (u,v) \in \mathbf{R}^2$.

12/ Cho $V = \mathbf{R}^3$ (hay $V = \mathbf{R}^4$) và $X = (u,v,w)$ (hay $X = (u,v,w,t)$) $\in V$. Xét $S,T \subset V$ và $W = \langle S \rangle \leq V$.
Tìm điều kiện để $X \in W$ rồi giải thích S và T là các cơ sở của W. Tính $[X]_S$ (khi $X \in W$) và viết ma trận $P(S \to T)$. Từ đó suy ra $P(T \to S)$ và $[X]_T$.

a) $S = \{ Y = (3,2,1), Z = (-1,1,2) \}$ và $T = \{ E = (1,4,5), F = (-2,-3,-3) \}$

b) $S = \{ Y = (1,1,-1,0), Z = (-2,3,4,1), U = (-1,4,3,2) \}$ và
$T = \{ E = (1,1,-1,-1), F = (2,7,0,3), G = (3,8,-1,3) \}$

13/ Cho $H, K \leq \mathbf{R}^4$ và các ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 17 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{và } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 2 & 2 & -9 & -13 \\ 3 & 3 & -14 & -19 \\ 5 & 5 & -23 & -32 \end{pmatrix}$$

Tìm một cơ sở cho H, K, $(H + K)$, $(H \cap K)$ trong các trường hợp dưới đây và cho biết trường hợp nào có tổng trực tiếp $H \oplus K$?

a) $H = \langle S \rangle$, $K = \langle T \rangle$, $S = \{ Y = (1,2,0,1), Z = (1,1,1,0) \}$ và $T = \{ E = (1,0,1,0), F = (1,3,0,1) \}$

b) $H = \langle S \rangle$, $K = \langle T \rangle$, $S = \{ Y = (1,2,1,0), Z = (2,-1,0,1), U = (-1,1,1,1), P = (1,1,1,1) \}$ và
$T = \{ E = (1,2,0,1), F = (2,1,3,1), G = (7,8,9,5) \}$.

c) $H = \langle S \rangle$, $K = \langle T \rangle$, $S = \{ Y = (1,1,1,1), Z = (1,-1,1,-1), U = (1,3,1,3) \}$ và
$T = \{ E = (1,2,0,2), F = (1,2,1,2), G = (3,1,3,1) \}$.

d) $H = \langle S \rangle$, $S = \{ Y = (3,6,0,2), Z = (-1,-1,3,3), U = (2,3,2,4), E = (-5,-9,-2,-6) \}$ và
$K = \{ X \in \mathbf{R}^4 / AX = \mathbf{O} \}$.

e) $H = \{ X \in \mathbf{R}^4 / BX = \mathbf{O} \}$ và $K = \{ X \in \mathbf{R}^4 / CX = \mathbf{O} \}$.

14/ Cho $H, K \leq \mathbf{R}^n$. Đặt $L = (H \cup K) \subset \mathbf{R}^n$.

a) Chứng minh $L \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow (H \subset K \text{ hay } K \subset H)$.

b) Cho một ví dụ cụ thể mà trong đó L không phải là một không gian con của $\mathbf{R}^n$.

CHƯƠNG V: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1/ $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ có các cơ sở chính tắc lần lượt là A, B và C.

a) Cho $f(u,v,w) = (u-2v+3w,\ v-w+3u,\ 4w-2u-3v,\ 5u-3v+5w)$ $\forall(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$. Giải thích $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ và viết $[\ f\ ]_{B,C}$. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào $Y = (x,y,z,t) \in \mathrm{Im}(f)$?

b) Giải thích $D = \{\ \delta_1 = (-4,3),\ \delta_2 = (-3,2)\ \}$ và $E = \{\ \alpha_1 = (1,-2,2),\ \alpha_2 = (3,-2,3),\ \alpha_3 = (2,-3,3)\ \}$ lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$. Xét $g, h \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ có $[\ g\ ]_{A,B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ và $[\ h\ ]_{D,E} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm biểu thức của g và viết $[\ g\ ]_{D,B}$, $[\ g\ ]_{A,E}$ và $[\ g\ ]_{D,E}$.

c) Viết $[\ h\ ]_{D,B}$, $[\ h\ ]_{A,E}$ và $[\ h\ ]_{A,B}$ rồi suy ra biểu thức của h.

2/ $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ có các cơ sở chính tắc lần lượt là A, B và C.

a) Cho $f(u,v,w,t) = (2v+4w-u-3t,\ 2u+v-2w+5t,\ 3u+4v+7t)$ $\forall(u,v,w,t) \in \mathbf{R}^4$. Giải thích $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ và viết $[\ f\ ]_{C,B}$. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào $Y = (x,y,z) \in \mathrm{Im}(f)$?

b) Giải thích $D = \{\ \delta_1 = (5,2),\ \delta_2 = (3,1)\ \}$ và $E = \{\ \alpha_1 = (-5,1,-3),\ \alpha_2 = (3,-1,2),\ \alpha_3 = (1,0,1)\ \}$ lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$. Xét $g,h \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ có $[\ g\ ]_{B,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ và $[\ h\ ]_{E,D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tìm biểu thức của g và viết $[\ g\ ]_{B,D}$, $[\ g\ ]_{E,A}$ và $[\ g\ ]_{E,D}$.

c) Viết $[\ h\ ]_{B,D}$, $[\ h\ ]_{E,A}$ và $[\ h\ ]_{B,A}$ rồi suy ra biểu thức của h.

3/ $\mathbf{R}^3$ có cơ sở chính tắc là B.

a) Cho $f(u,v,w) = (u-3w+3v,\ v+w+2u,\ -10u-12w)$ $\forall(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$. Giải thích $f \in L(\mathbf{R}^3)$ và viết $[\ f\ ]_B$. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào $Y = (x,y,z) \in \mathrm{Im}(f)$?

b) Giải thích $E = \{\ \alpha_1 = (1,0,2),\ \alpha_2 = (2,-2,1),\ \alpha_3 = (3,-3,2)\ \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Xét $g, h \in L(\mathbf{R}^3)$ có $[\ g\ ]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $[\ h\ ]_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của g và viết $[\ g\ ]_{E,B}$, $[\ g\ ]_{B,E}$ và $[\ g\ ]_E$

c) Viết $[\ h\ ]_B$, $[\ h\ ]_{B,E}$ và $[\ h\ ]_{E,B}$ rồi suy ra biểu thức của h. Xác định các không gian Im(h) và Ker(h).

4/ $\mathbf{R}^3$ có cơ sở chính tắc là B.

a) Cho $f(u,v,w) = (u+2w+3v,\ 4v+w+2u,\ 3u+7v+3w)$ $\forall(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$. Giải thích $f \in L(\mathbf{R}^3)$ và viết $[\ f\ ]_B$ Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào $Y = (x,y,z) \in \mathrm{Im}(f)$?

b) Giải thích $E = \{\ \alpha_1 = (-3,0,2),\ \alpha_2 = (4,1,-3),\ \alpha_3 = (6,1,-4)\ \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Xét $g, h \in L(\mathbf{R}^3)$ có $[\ g\ ]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ và $[\ h\ ]_E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của g và viết $[\ g\ ]_{E,B}$, $[\ g\ ]_{B,E}$ và $[\ g\ ]_E$

c) Viết $[\ h\ ]_B$, $[\ h\ ]_{B,E}$ và $[\ h\ ]_{E,B}$ rồi suy ra biểu thức của h. Xác định các không gian Im(h) và Ker(h).

5/ $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ có các cơ sở chính tắc lần lượt là B và C.

a) Giải thích $E = \{\ \alpha_1 = (2,-1,5),\ \alpha_2 = (-1,0,-1),\ \alpha_3 = (-4,-2,1)\ \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Tìm $[\ \alpha\ ]_E$ nếu $\alpha = (u,v,w) \in \mathbf{R}^3$.

b) Cho $\beta_1 = (-2,3,1)$, $\beta_2 = (1,0,-3)$ và $\beta_3 = (3,4,1) \in \mathbf{R}^3$. Tìm $f \in L(\mathbf{R}^3)$ thỏa $f(\alpha_j) = \beta_j$ $\forall\ j = 1,2,3$ (dùng $[\ \alpha\ ]_E$ hay $[\ f\ ]_{E,B}$) .

c) Cho $\gamma_1 = (1,-1,0,1)$, $\gamma_2 = (-2,1,3,0)$ và $\gamma_3 = (3,0,-4,-1) \in \mathbf{R}^4$. Tìm $g \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ thỏa $g(\alpha_j) = \gamma_j$ $\forall\ j = 1,2,3$ (dùng $[\ \alpha\ ]_E$ hay $[\ g\ ]_{E,C}$) .