Bài tập chương 1

Bài 1.1. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tính $3A \pm 2B$.

b) Tìm ma trận C sao cho $2A + 3B - 4C = 0$.

Bài 1.2. Tính các tích sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Bài 1.3. Tính $A^\top A$ và $AA^\top$ với

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.4. Tính $AB - BA$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.5. Tìm hai ma trận A, B khác ma trận 0 sao cho AB là ma trận không.

Bài 1.6. Cho $A = \text{diag}(2, 3, 1, 4)$ và $B = \text{diag}(1, -1, 3, 2)$. Tính

a) $A + B$.

b) $2A - 3B$.

c) AB.

d) A^3.

Bài 1.7. Cho $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$. Chứng minh rằng, với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$.

Bài 1.8. Tính $A^k, k \in \mathbb{N}$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Bài 1.9. Cho $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh rằng

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 1.10. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB \neq BA$. Chứng minh rằng:

a) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

b) $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

Bài 1.11. Tìm một ma trận A sao cho $A \neq 0$ nhưng $A^2 = 0$.

Bài 1.12. Hãy xác định $f(A)$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 5$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $f(x) = 4x^2 - 3x + 4$.

Bài 1.13. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh rằng $A = I_n$.

b) Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

c) Giả sử $ABA = BAB = A^4B^7 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

Bài 1.14. Một ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *lũy đẳng* nếu $A^2 = A$.

a) Kiểm tra $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ là ma trận lũy đẳng.

b) Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = A$ và $BA = B$ thì A và B là các ma trận lũy đẳng.

c) Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A và B cùng lũy đẳng thì $A+B$ lũy đẳng khi và chỉ khi $AB = BA = 0$.

Bài 1.15. Xác định hạng của các ma trận sau bằng cách đưa ma trận về dạng bậc thang:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Bài 1.16. Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$.

Bài 1.17. Tìm dạng chính tắc theo dòng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Bài 1.18. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Bài 1.19. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}$.

Bài 1.20. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.21. Cho $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$. Chứng minh rằng A khả nghịch khi và chỉ khi $a_1 a_2 ... a_n \neq 0$. Trong trường hợp A khả nghịch, hãy tìm A^{-1}.

Bài 1.22. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu AB khả nghịch thì A và B cùng khả nghịch.

Bài 1.23. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu $AB = A + B$ thì A và B giao hoán nhau, nghĩa là $AB = BA$.

Bài 1.24. Giải các phương trình ma trận

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.25. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tính B^2 và tìm ma trận X thỏa mãn $AXA = -2I_3$.

Bài 1.26. Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $XA = B$.

Bài 1.27. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A và B khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $AXB = C$.

Bài 1.28. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa $A^2XA = ABA$.

Bài 1.29. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 1; \\ 2y - 5z = 2; \\ 4z = 8. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 11; \\ 5y + z = 2; \\ 3z = -9. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 9; \\ 5y - z + 3t = 1; \\ 7z - t = 3; \\ 2t = 8. \end{cases}$

Bài 1.30. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3; \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1; \\ x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 6; \\ x_4 - 5x_5 = 5. \end{cases}$

Bài 1.31. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4; \\ 3x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 7. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9; \\ 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 22. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$

Bài 1.32. Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

Bài 1.33. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3; \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Xác định giá trị $k \in \mathbb{R}$ sao cho:

a) hệ có nghiệm duy nhất;

b) hệ vô nghiệm;

c) hệ có vô số nghiệm.

Bài 1.34. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1. \end{cases}$$

Xác định giá trị $k \in \mathbb{R}$ sao cho:

a) hệ có nghiệm duy nhất;

b) hệ vô nghiệm;

c) hệ có vô số nghiệm.

Bài tập chương 2

Bài 2.1. Tính các định thức cấp 3 sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Bài 2.2. Tính các định thức cấp 4 sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

Bài 2.3. Chứng tỏ rằng các giá trị định thức sau bằng 0:

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$.

Bài 2.4. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ có $\det A = 3$. Tính các định thức sau:

a) $\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2a & b & -c \\ 2d & e & -f \\ 2g & h & -i \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} c & b & 3a \\ i & h & 3g \\ f & e & 3d \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d+5a & e+5b & f+5c \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4a & 8b & 4c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -a & b-3a & c+2a \\ -d & e-3d & f+2d \\ -g & h-3f & i+2g \end{pmatrix}$.

Bài 2.5. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0. Chứng minh rằng $\det A = 0$.

Bài 2.6. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ rằng

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Bài 2.7. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, n lẻ. Chứng tỏ rằng, nếu A là ma trận phản xứng (nghĩa là $A^\top = -A$) thì $\det A = 0$.

Bài 2.8. Tìm ma trận phụ hợp của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.9. * Cho $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên và $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Chứng tỏ rằng $\det A \in \mathbb{Z}$, đồng thời nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow |\det A| = 1.$$

Bài 2.10. Hãy tính các định thức sau và cho biết khi nào ma trận tương ứng khả nghịch?

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a-b+c & a-b & b+2c+2a \\ b-c+a & b-c & c+2a+2b \\ c-a+b & c-a & a+2b+2c \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$.

Bài 2.11. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng cách áp dụng công thức định thức:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.12. Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.13. Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1; \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

Bài 2.14. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số m $\in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + (m-1)x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 4x_2 + (4m-2)x_3 = -1; \\ 3x_1 + (m+1)x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1; \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m; \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m, \end{cases}$

e) $\begin{cases} (m+2)x_1 + 2x_2 + x_3 = m; \\ (m-5)x_1 + (m-2)x_2 - 3x_3 = 2m; \\ (m+5)x_1 + 2x_2 + (m+3)x_3 = 3m, \end{cases}$

f) $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \\ 2x_1 + mx_2 + 2x_3 = m; \\ 2x_1 + 2x_2 + mx_3 = m, \end{cases}$

g) $\begin{cases} (3m+5)x_1 + (m+2)x_2 + (m+1)x_3 = m; \\ (4m+5)x_1 + (m+2)x_2 + (2m+1)x_3 = m; \\ (3m+5)x_1 + (2m+1)x_2 + 2x_3 = m, \end{cases}$

h) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m; \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m; \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m, \end{cases}$

k) $\begin{cases} (2m+1)x_1 + (m-2)x_2 + (m+2)x_3 = m-1; \\ (2m-1)x_1 + (2m-5)x_2 + mx_3 = m-1; \\ (3m+4)x_1 + (m-2)x_2 + (2m+5)x_3 = m-1. \end{cases}$

Bài 2.15. Cho hệ phương trình phụ thuộc vào các tham số $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất;
b) Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tương ứng.

Bài tập chương 3

Bài 3.3. Thực hiện các phép tính:

a) $(3,-4,5,-6)+(1,1,-2,4)$.

b) $-3(4,-5,-6)+2(1,3,2)$.

Bài 3.4. Cho $u=(3,-2,1,4)$ và $v=(7,1,-3,6)$. Tính:

a) $u+v$.

b) $4u$.

c) $2u-3v$.

Bài 3.5. Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1,u_2,u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u=(1,3,2)$, $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,0,1)$, $u_3=(0,1,1)$.

b) $u=(1,4,-3)$, $u_1=(2,1,1)$, $u_2=(1,-1,1)$, $u_3=(1,1,-2)$.

c) $u=(4,1,2)$, $u_1=(1,2,3)$, $u_2=(2,1,2)$, $u_3=(1,-1,-1)$.

d) $u=(1,3,5)$, $u_1=(1,2,3)$, $u_2=(3,2,1)$, $u_3=(2,1,0)$.

Bài 3.6. Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1,u_2,u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u=(10,6,5,3)$, $u_1=(1,1,-1,0)$, $u_2=(3,1,2,1), u_3=(2,1,3,1)$.

b) $u=(1,1,1,0)$, $u_1=(1,1,0,1)$, $u_2=(1,0,1,1), u_3=(0,1,1,1)$.

c) $u=(1,3,7,2)$, $u_1=(1,2,1,-2)$, $u_2=(3,5,1,-6), u_3=(1,1,-3,-4)$.

Bài 3.7. Trong các câu sau, hãy tìm mối liên hệ giữa a,b,c,d để vectơ $u=(a,b,c,d)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1,u_2,u_3.

a) $u_1=(1,2,1,1), u_2=(1,1,2,1), u_3=(1,1,1,2)$.

b) $u_1=(1,1,1,0), u_2=(1,1,0,1), u_3=(1,0,1,1)$.

c) $u_1=(1,-2,0,3), u_2=(2,3,0,-1), u_3=(2,-1,2,1)$.

Bài 3.8. Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1=(1,1,0)$, $u_2=(1,1,1)$, $u_3=(0,1,-1)$;

b) $u_1=(-1,1,1)$, $u_2=(1,2,1)$, $u_3=(1,5,3)$;

c) $u_1=(1,1,1,1)$, $u_2=(1,2,1,-1)$, $u_3=(0,1,-2,2)$.

d) $u_1=(1,2,3,-4)$, $u_2=(3,5,1,1)$, $u_3=(1,1,-5,9)$.

e) $u_1=(1,3,1,-1)$, $u_2=(2,5,1,1)$ $u_3=(1,1,-3,13)$,
$u_4=(1,3,2,-5)$.

Bài 3.9. Xét xem các đa thức sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2$, $f_2 = -4 - t + 6t^2$, $f_3 = 6 + 3t - 4t^2$;

b) $f_1 = 1 - 2t$, $f_2 = 1 - t + t^2$, $f_3 = 1 - 7t + 10t^2$;

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2$, $f_2 = 1 + t + 4t^2$, $f_3 = 2 + 5t + 9t^2$;

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3$, $f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3$, $f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$.

Bài 3.10. Xét xem các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

Bài 3.11. Cho V là một không gian vectơ và $u, v, w \in V$. Chứng minh rằng, $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u + v, v + w, w + u\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 3.12. Trong các tập hợp W sau đây thì tập hợp nào là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$?

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq 0\}$.

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$.

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 3x_2 = 1\}$.

d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = x_3\}$.

e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 = x_2 x_3\}$.

f) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 x_2 = 0\}$.

Bài 3.13. Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n?

a) Tập các ma trận đường chéo cấp n.

b) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 0$.

c) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 1$.

d) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A khả nghịch.

e) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^\top = A$.

Bài 3.14. Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $\mathbb{P}[t]$?

a) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(-t) = f(t)$.

b) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(-t) = -f(t)$.

c) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(0) = f(1) + f(2)$.

d) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $(f(t))^2 = f(t)$.

Bài 3.15. Cho W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng $W_1 \cup W_2$ là không gian con của V khi và chỉ khi $W_1 \subseteq W_2$ hoặc $W_2 \subseteq W_1$.

Bài 3.16. Chứng minh rằng:

a) $\mathcal{S} = \{(1,\ -1), (-2,\ 3)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathcal{S} = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ -1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{S} = \{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Bài 3.17. Chứng minh rằng tập hợp các đa thức $f_1 = 1 + 2t - 7t^2$, $f_2 = 3 + t + t^2$, $f_3 = 7 + 2t + 4t^2$ là một tập sinh của không gian $\mathbb{P}_2[t]$.

Bài 3.18. Cho S_1, S_2 là các tập hợp con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng, nếu mọi phần tử thuộc S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 và ngược lại thì $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

Bài 3.19. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ Chứng minh rằng tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính dạng $AX = B$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $B = 0$.

Bài 3.20. Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{B} = \{u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 2)\}$.

b) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$.

c) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 1, -1)\}$.

d) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 5, 3)\}$.

Bài 3.21. Chứng minh rằng tập hợp $\{1,\ t-1,\ (t-1)^2,\ \ldots,\ (t-1)^n\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_n[t]$.

Bài 3.22. Kiểm tra tập hợp $\{1 + t,\ t + t^2, t^2 + t^3,\ \ldots, t^{n-1} + t^n\}$ có là cơ sở của $\mathbb{P}_n[t]$ hay không?

Bài 3.23. Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 2, 1, -1)$. Kiểm tra tập hợp $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ có là cơ sở của W hay không? Hãy xác định $\dim W$.

Bài 3.24. Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (1,2,5),\ u_3 = (5,3,4)\}$ và $W = \langle \mathcal{S} \rangle$.

a) Chứng minh $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W.

b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của W sao cho $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ và xác định $\dim W$.

Bài 3.25. Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (1,2,5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Chứng minh $\mathcal{S}$ độc lập tuyến tính.

b) Cho $u = (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm điều kiện của $a,\ b,\ c$ sao cho $\mathcal{S} \cup \{u\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Bài 3.26. Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các vectơ sau:

a) $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,3,4)$, $u_3 = (3,4,5)$.

b) $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$.

c) $u_1 = (1,2,3,1)$, $u_2 = (1,2,1,-2)$, $u_3 = (1,3,2,1)$, $u_4 = (2,1,3,-7)$.

d) $u_1 = (1,1,-1,2)$, $u_2 = (1,-1,-2,1)$, $u_3 = (1,3,2,1)$; $u_4 = (2,1,2,-1)$.

Bài 3.27. Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức sau:

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2$, $f_2 = -4 - t + 6t^2$, $f_3 = 6 + 3t - 4t^2$;

b) $f_1 = 1 - 2t$, $f_2 = 1 - t + t^2$, $f_3 = 1 - 7t + 10t^2$;

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2$, $f_2 = 1 + t + 4t^2$, $f_3 = 2 + 5t + 9t^2$;

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3$, $f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3$, $f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$.

Bài 3.28. Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các ma trận sau:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

Bài 3.29. Cho $S = \{(1,1,2,4), (2,-1,-5,2), (1,-1,4,0), (2,1,1,6)\}$.

a) Chứng tỏ rằng S phụ thuộc tuyến tính.

b) Tìm một cơ sở cho không gian $W = \langle S \rangle$.

Bài 3.30. Tìm cơ sở và chiều cho không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$

Bài 3.31. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của vectơ $u = (3,1,4)$ theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1),\, u_2 = (0,1,1),\, u_3 = (0,0,1)\}$.

Bài 3.32. Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho các đa thức

$$f_1(t) = 1 + t - t^2, f_2(t) = t + t^2, f_3(t) = 3 + 4t - t^2.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_2[t]$.

b) Cho $f(t) = 3 + t - 2t^2$. Hãy tìm tọa độ của f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.33. Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$, cho các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của A theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.34. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2), u_3 = (1, 1, -1).$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$, biết rằng $u = (1, 3, -2)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$, biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bài 3.35. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, -2)$, $u_3 = (0, -3, 2)$ và đặt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ và $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.36. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, -1)$, $u'_1 = (1, 1, 2)$, $u'_2 = (1, -2, 1)$ $u'_3 = (2, 1, 4)$.

a) Chứng minh các tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ biết rằng $u = (1, 2, 3)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$ biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Tìm $[w]_{\mathcal{B}'}$ biết rằng $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Bài 3.37. Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho các đa thức $f_1(t) = 1+t+t^2$, $f_2(t) = 2+2t+t^2$, $f_3(t) = 2 + 3t + t^2$, $g_1(t) = 1 + 2t$, $g_2(t) = t$, $g_3(t) = 1 + t^2$.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{P}_2[t]$.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Bài 3.38. Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy xác định $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Đặt $\mathcal{B}' = \{u_1' = (0, 1, 2, -3), u_2' = (2, 0, 1, 3), u_3' = (0, 1, -2, 1)\}$. Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của W và xác định $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Bài 3.39. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$ và $u_3 = (2, 3, 1, 1)$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Cho $u_1' = (1, 1, -1, 2)$, $u_2' = (2, 4, 1, -2)$, $u_3' = (1, 0, 0, 5)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

Bài 3.40. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 2, -2, 2)$ và $W = \langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Cho $u_1' = (2, 1, 0, 1)$, $u_2' = (2, 3, -3, 4)$, $u_3' = (3, 3, -2, 3)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

d) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$ biết $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bài 3.41. Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm tọa độ $[u]_{\mathcal{B}}$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ của vectơ $u = (2, 1, -1)$.

b) Xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.42. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (3, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, -5)$, $u_3 = (-3, -1, 15)$. Đặt

$$\begin{cases} v_1 &= u_1 - u_2 - u_3, \\ v_2 &= -2u_1 + 5u_2 + 3u_3, \\ v_3 &= u_1 - 2u_2 - u_3. \end{cases}$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

Bài tập chương 4

Bài 4.1. Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$? Giải thích.

a) $f(x, y) = (xy,\ x + y)$.

b) $f(x, y) = (x + y,\ x - y)$.

c) $f(x, y) = (x,\ 0)$.

d) $f(x, y) = (x^2,\ 0)$.

Bài 4.2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ 2x + 2y + z).$$

Chứng minh $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Bài 4.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z).$$

Chứng minh f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.4. Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 1, 2) = (1, 3)$, $f(1, 2, 1) = (2, -1)$.

Bài 4.5. Cho $u_1 = (1, -1)$, $u_2 = (-2, 3)$. Hãy xác định toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho $f(u_1) = u_2$ và $f(u_2) = -u_1$.

Bài 4.6. Hãy xây dựng một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ thỏa điều kiện

$$f(1, -1, 1) = (1, 0) \text{ và } f(1, 1, 1) = (0, 1).$$

Bài 4.7. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ xét các họ vectơ

$u_1 = (1, -1), u_2 = (-1, 2), u_3 = (0, -1)$ và

$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)$.

Tồn tại hay không một toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(u_i) = v_i, \forall i = 1, 2, 3$.

Bài 4.8. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3).$$

a) Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vectơ $u = (a, b, c)$ nằm trong $\mathrm{Im} f$. Từ đó hãy tìm hạng của f.

c) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vectơ $u = (a, b, c)$ nằm trong $\ker f$. Tìm một cơ sở cho không gian con $\ker f$.

Bài 4.9. Tìm một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $\mathrm{Im} f = \langle (1,0,-1), (2,1,1) \rangle$.

Bài 4.10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở

$\mathcal{B} = (u_1 = (1,0,-1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0))$ và

$\mathcal{B}' = (v_1 = (1,1), v_2 = (1,0))$.

Bài 4.11. Giả sử toán tử tuyến tính f trong không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm một cơ sở cho $\mathrm{Im} f$ và một cơ sở cho $\ker f$.

Bài 4.12. Cho ánh xạ tuyến tính

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z - t, x + 2y - z - 2t, x + 3y - 3z - 3t).$$

Tìm một cơ sở của $\ker f$ và một cơ sở của $\mathrm{Im} f$.

Bài 4.13. Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\ker f = \langle (1,1,1),\ (0,1,2) \rangle$ và $\mathrm{Im} f = \langle (1,1,1) \rangle$.

Bài 4.14. Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\ker f = \langle (1,1,1) \rangle$ và $\mathrm{Im} f = \langle (1,1,1),\ (0,1,2) \rangle$.

Bài 4.15. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}_0$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1), u_2 = (-1,2)).$$

Bài 4.16. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + x_1, -2x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + 4x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1,2,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,-3,-2)).$$

Bài 4.17. Cho ánh xạ tuyến tính f từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^2$, được xác định như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

a) Tìm cơ sở và số chiều của không gian $Kerf$ và Imf.

b) Cho $\mathcal{A} = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{B} = (v_1 = (1,1), v_2 = (1,2))$. Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (kí hiệu $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$).

Bài 4.18. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}_0$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1), u_2 = (-1,2)).$$

Bài 4.19. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + x_1, -2x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + 4x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1,2,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,-3,-2)).$$

Bài 4.20. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z,\ 2x - 4y + 5z).$$

a) Kiểm tra các vectơ $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,1,0)$, $u_3 = (0,0,0)$, $u_4 = (0,1,2)$ có thuộc $\ker f$ hay không?

b) Kiểm tra các vectơ $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (1,-1,2)$, $v_3 = (0,0,0)$, $v_4 = (1,1,1)$ có thuộc $\mathrm{Im} f$ hay không?

Bài 4.21. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z,\ 2x - 3y + z).$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$ và $\ker(f)$.

Bài 4.22. Cho f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x + 3y - z,\ x - 2y + 4z,\ 2x - y + 5z).$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$ và $\ker(f)$.

Bài 4.23. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ có dạng ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$ và $\ker(f)$.

Bài 4.24. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - 3y + z).$$

a) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

b) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{B}' = \{(1, 1),\ (2, 3)\}$ (của $\mathbb{R}^2$).

Bài 4.25. Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (x-2y,\ 2x+y)$.

a) Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$, với $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$, với $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -3), u_2 = (-1, 2)\}$.

Bài 4.26. Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y,\ 3y - z,\ 2x + z).$$

a) Xác định dạng ma trận của f.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$, với $u_1 = (-1, 2, 1),\ u_2 = (0, 1, 1),\ u_3 = (0, -3, -2)$.

Bài 4.27. Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - y + z,\ x + 2y - 2z,\ x - 3y + 3z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im} f$ và một cơ sở của $\ker f$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, -2, 0), (2, 1, 3)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.28. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = u_2 + u_3$, $f(u_2) = u_3 + u_1$ và $f(u_3) = u_1 + u_2$, với $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$.

a) Hãy xác định ánh xạ tuyến tính f.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 4.29. Cho $\mathcal{B} = \{(1, -1),\ (-2, 3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.30. Cho $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.31. Cho cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{C} = \{(2,-1),\ (-3,2)\}$ (của $\mathbb{R}^2$). Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$