Bài tập

1. Hỏi các tập dưới đây có là một không gian con của hay không ?

a) $W_1 = \{(a,0,0) | a \in \mathbb{R}\}$.

b) $W_2 = \{(a,1,1) | a \in \mathbb{R}\}$.

ĐS: a) W_1 là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ vì với $u = (a,0,0), v = (b,0,0) \in W_1$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và với $k \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có $u + v = (a+b,0,0), ku = (ka,0,0) \in W_1$.

b) W_2 không là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ vì với $u = (a,1,1), v = (b,1,1) \in W_2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và với $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$, bất kỳ, ta có $u + v = (a+b,2,2), ku = (ka,k,k) \notin W_2$.

2. Cho không gian vectơ V và a là một vectơ cố định thuộc V. Chứng minh rằng tập hợp $W = \{ka | k \in \mathbb{R}\}$ là một không gian vectơ con của V.

ĐS: Với $u = ha, v = ka \in W$ ($h, k \in \mathbb{R}$) và $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có $u + v = (h+k)a, \alpha u = (\alpha h)a \in W$.

3. Trong $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,-2,3)$, $u_2 = (0,1,-3)$. Xét xem vectơ $u = (2,-3,3)$ có phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2 hay không ?

ĐS: Xét hệ $\begin{cases} k_1 & & = 2 \\ -2k_1 & + k_2 & = -3 \\ 3k_1 & - 3k_2 & = 3 \end{cases}$, ta có

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)-3(1)]{(2):=(2)+2(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3):=(3)+(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Hệ vô nghiệm : u không là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2.

4. Trong $\mathbb{R}^3$, xét xem vectơ u có phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không

a) $u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (0,1,1), u = (1,2,1)$.

b) $u_1 = (-2,1,0), u_2 = (3,-1,1), u_3 = (2,0,-2), u = (0,0,0)$.

ĐS: a) Xét hệ $\begin{cases} k_1 & + k_2 & & = 1 \\ & k_2 & + k_3 & = 2 \\ k_1 & & + k_3 & = 1 \end{cases}$, ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3):=(3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3):=(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Hệ có nghiệm $(0,1,1)$: u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 ($u = 0u_1 + u_2 + u_3$).

b) Xét hệ $\begin{cases} -2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \\ k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$, ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\sim(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2):=(2)+2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm $(0,0,0)$: u là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 ($u = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$).

5. Trong không gian vectơ các ma trận vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho bốn vectơ

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hỏi vectơ u có phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không ?

ĐS: Xét hệ $\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_2 + k_3 = 3 \\ k_1 + k_3 = 2 \\ k_3 = 2 \end{cases}$, ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3):=(3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(4):=(4)-\frac{1}{2}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm $(0,1,2)$: u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 ($u = 0u_1 + u_2 + 2u_3$).

6. Trong $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,-2,3), u_2 = (0,1,-3)$. Tìm m để vectơ $u = (1,m,-3)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2.

ĐS: Xét hệ $\begin{cases} k_1 & & = 1 \\ -2k_1 + k_2 & & = m \\ 3k_1 - 3k_2 & & = -3 \end{cases}$, ta có

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)-3(1)]{(2):=(2)+2(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)+3(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & 0 & -6+3(m+2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & 0 & 3m \end{array}\right)$$

Khi $m = 0$ thì u là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2. Khi $m \neq 0$ thì u không là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2.

7. Trong $\mathbb{R}^3$, các hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

a) $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)$.

b) $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (2,3,1)$.

c) $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,2), u_3 = (1,2,3)$.

d) $u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,2,5), u_3 = (0,1,3)$.

ĐS: a) Xét hệ $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$: Hệ độc lập tuyến tính.

b) Xét hệ $\begin{cases} k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: Hệ phụ thuộc tuyến tính.

c) Xét hệ $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(3):=(3)-(1)]{(2):=(2)-(1)}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\sim(3)}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$: Hệ độc lập tuyến tính.

d) Xét hệ $\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1+2k_2+k_3=0\\2k_1+5k_2+3k_3=0\end{cases}$.

Ta có $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(3):=(3)-2(1)]{(2):=(2)-(1)}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{(3):=(3)-3(2)}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$: Hệ phụ thuộc tuyến tính.

8. Chứng minh rằng hệ vectơ $v_1,v_2,...,v_r$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ $v_i,\ i\in\{1,2,...,r\}$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

ĐS: Chiều thuận : Khi hệ vectơ $v_1,v_2,...,v_r$ phụ thuộc tuyến tính, ta có các hệ số $k_1,k_2,...,k_r\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $k_1v_1+k_2v_2+...+k_rv_r=0$. Bấy giờ, nếu $k_1\neq 0$ thì $v_1=\left(-\frac{k_2}{k_2}\right)v_2+...+\left(-\frac{k_r}{k_2}\right)v_r$, nghĩa là v_1 là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $v_2,...,v_r$.

Chiều đảo. Giả sử v_1 là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $v_2,...,v_r$, nghĩa là tồn tại các hệ số $k_2,...,k_r\in\mathbb{R}$ sao cho $v_1=k_2v_2+...+k_rv_r$. Do $v_1-k_2v_2-...-k_rv_r=0$ với các hệ số $1,k_2,...,k_r$ không đồng thời bằng 0, ta suy ra hệ vectơ $v_1,v_2,...,v_r$ phụ thuộc tuyến tính.

9. Trong không gian các ma trận vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho bốn vectơ

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng hệ $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ độc lập tuyến tính.

ĐS: Xét hệ $\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0\\k_2+k_3+k_4=0\\k_3+k_4=0\\k_4=0\end{cases}$. Ta suy ra hệ độc lập tuyến tính.

10. Mỗi hệ vectơ sau đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không ?

a) $v_1=(1,1,1),v_2=(2,2,0),v_3=(3,0,0)$.

b) $v_1=(2,-1,3),v_2=(4,1,2),v_3=(8,-1,8)$.

ĐS: a) Xét hệ $\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=a\\k_1+2k_2=b\\k_1=c\end{cases}$. Ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)-(1)]{(2):=(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & -3 & b-a \\ 0 & -2 & -3 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\sim(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & -3 & c-a \\ 0 & 0 & -3 & b-a \end{array}\right).$$

Hệ phương trình luôn luôn có nghiệm : hệ vectơ có sinh ra $\mathbb{R}^3$.

b) Xét hệ $\begin{cases} 2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = a \\ -k_1 + k_2 - k_3 = b \\ 3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = c \end{cases}$. Ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & a \\ -1 & 1 & -1 & b \\ 3 & 2 & 8 & c \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\sim(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b \\ 2 & 4 & 8 & a \\ 3 & 2 & 8 & c \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)+3(1)]{(2):=(2)+2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 6 & 6 & a+2b \\ 0 & 5 & 5 & c+5b \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-\frac{5}{6}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 6 & 6 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & c+5b-\frac{5}{6}(a+2b) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 6 & 6 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & c+\frac{10}{3}b-\frac{5}{6}a \end{array}\right)$$

Hệ phương trình không luôn luôn có nghiệm : hệ vectơ không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

11. Hệ vectơ nào trong các hệ vectơ sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $\mathscr{B}_1 = \{(1,2,3),(0,2,3)\}$.

b) $\mathscr{B}_2 = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,5)\}$.

c) $\mathscr{B}_3 = \{(1,1,2),(1,2,5),(0,1,3)\}$.

d) $\mathscr{B}_4 = \{(-1,0,1),(-1,1,0),(1,-1,1),(2,0,5)\}$.

ĐS: a) $\mathscr{B}_1$ không là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ($\mathscr{B}_1$ không sinh ra $\mathbb{R}^3$).

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. $\mathscr{B}_2$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. $\mathscr{B}_3$ không là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

d) $\mathscr{B}_4$ không là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ($\mathscr{B}_4$ không độc lập tuyến tính).

12. Tìm hạng của các hệ vectơ sau (trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$)

a) $u_1 = (-1,2,0,1)$, $u_2 = (1,2,3,-1)$, $u_3 = (0,4,3,0)$.

b) $v_1 = (-1,4,8,12)$, $v_2 = (2,1,3,1)$, $v_3 = (-2,8,16,24)$, $v_4 = (1,1,2,3)$.

ĐS: a) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)+(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Rank} = 2$$

b) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 16 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)+(1)]{\substack{(2):=(2)+2(1) \\ (3):=(3)-2(1)}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 9 & 19 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)\sim(3)]{(3)\sim(4)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 9 & 19 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-\frac{9}{5}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank = 3.

13. Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ $v_1 = (1,2,0,-1)$, $v_2 = (0,1,3,-2)$, $v_3 = (-1,0,2,4)$, $v_4 = (3,1,-11,0)$.

ĐS: Biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)-3(1)]{(3):=(3)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -11 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)+5(2)]{(3):=(3)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4):=(4)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim = 3$ và một cơ sở là $\{e_1 = (1,2,0,-1), e_2 = (0,1,3,-2), e_3 = (0,0,-4,7)\}$.

14. Xác định số chiều và tìm một cơ sở cho không gian nghiệm của các hệ sau

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$

ĐS: a) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\sim(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3):=(3)+3(2)]{(2)\sim(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

dim = 0

b) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3):=(3)-3(1)]{(2):=(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ cho nghiệm } \begin{cases} k_1 = 3m - n \\ k_2 = m \\ k_3 = n \end{cases}, \text{ với } m, n \in \mathbb{R}.$$

Không gian nghiệm $\{(3m-n, m, n) | m, n \in \mathbb{R}\} = \langle (3,1,0), (-1,0,1) \rangle$. dim = 2 và một cơ sở là $\{e_1 = (3,1,0), e_2 = (-1,0,1)\}$.

c) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)-2(1)]{\substack{(2):=(2)-2(1) \\ (3):=(3)-3(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\sim(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)+5(2)]{(3):=(3)+4(2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4):=(4)-(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cho nghiệm } \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2}m + \frac{7}{8}n \\ k_2 = -\frac{1}{8}(4m - 5n) = -\frac{1}{2}m + \frac{5}{8}n \\ k_3 = \frac{1}{8}(4m - 5n) = \frac{1}{2}m - \frac{5}{8}n \\ k_4 = m \\ k_5 = n \end{cases}, \text{ với } m, n \in \mathbb{R}.$$

Không gian nghiệm

$$\left\{\left(-\tfrac{1}{2}m+\tfrac{7}{8}n,-\tfrac{1}{2}m+\tfrac{5}{8}n,\tfrac{1}{2}m-\tfrac{5}{8}n,m,n\right)\middle|\, m,n\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,0\right),\left(\tfrac{7}{8},\tfrac{5}{8},-\tfrac{5}{8},0,1\right)\right\rangle$$
$$=\left\langle(-1,1,1,2,0),(7,5,-5,0,8)\right\rangle.$$

dim = 2 và một cơ sở là $\{e_1=(-1,1,1,2,0),e_2=(7,5,-5,0,8)\}$.

d) Biến đổi

$$\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&4&4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[(4):=(4)-(1)]{\substack{(2):=(2)-2(1)\\(3):=(3)-3(1)}}\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&2&-2&-6\\0&0&3&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(4):=(4)-3(2)]{(3):=(3)-2(2)}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&4&12\end{pmatrix}\xrightarrow[(3):=\frac{1}{4}(3)]{(3)\sim(4)}\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

cho nghiệm $\begin{cases}k_1=-\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}n\\k_2=m\\k_3=0\\k_4=-3n\\k_5=n\end{cases}$, với $m,n\in\mathbb{R}$.

Không gian nghiệm

$$\left\{\left(-\tfrac{2}{3}m+\tfrac{4}{3}n,m,0,-3n,n\right)\middle|\, m,n\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left(-\tfrac{2}{3},1,0,0,0\right),\left(\tfrac{4}{3},0,0,-3,1\right)\right\rangle$$
$$=\left\langle(-2,3,0,0,0),(4,0,0,-9,3)\right\rangle.$$

dim = 2 và một cơ sở là $\{e_1=(-2,3,0,0,0),e_2=(4,0,0,-9,3)\}$.

15. Tìm tọa độ của vectơ u trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ và trong cơ sở $\mathscr{B}'=\{f_1,f_2,f_3\}$ với $f_1=(1,0,0),f_2=(1,1,0),f_3=(1,1,1)$.

a) $u=(3,1,-4)$. b) $u=(1,3,1)$.

ĐS: a) $[u]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$. Hệ $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=3\\k_2+k_3=1\\k_3=-4\end{cases}$ cho $\begin{cases}k_1=2\\k_2=5\\k_3=-4\end{cases}$ và $[u]_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$.

b) $[u]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Hệ $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1\\k_2+k_3=3\\k_3=1\end{cases}$ cho $\begin{cases}k_1=-2\\k_2=2\\k_3=1\end{cases}$ và $[u]_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

16. Trong $\mathbb{R}^4$, xét tập

$$W=\{(a_1,a_2,a_3,a_4):a_1+a_2+a_3+a_4=0\}$$

a) Kiểm chứng rằng W là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$.

b) Kiểm chứng các vectơ sau nằm trong W

$$v_1 = (1,0,0,-1),\ v_2 = (0,1,0,-1),\ v_3 = (0,0,1,-1), v_4 = (1,1,-1,-1)$$

c) Xác định số chiều và tìm một cơ sở cho W.
ĐS: W là không gian nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ nên là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$.
b) $1+0+0+(-1)=0$ nên $v_1 \in W$; $0+1+0+(-1)=0$ nên $v_2 \in W$;
$0+0+1+(-1)=0$ nên $v_3 \in W$; $1+1+(-1)+(-1)=0$ nên $v_4 \in W$.
c) Với $x_2 = m$, $x_3 = n$, $x_4 = p$, $m,n,p \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta được $x_1 = -m-n-p$. Suy ra $W = \{(-m-n-p, m, n, p) \mid m,n,p \in \mathbb{R}\}$. Vì

$(-m-n-p, m, n, p) = m(-1,1,0,0) + n(-1,0,1,0) + p(-1,0,0,1)$

ta suy ra $W = \langle (-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$. Do đó, $\dim W = 3$ và

$\mathscr{B} = \{e_1 = (-1,1,0,0), e_2 = (-1,0,1,0), e_3 = (-1,0,0,1)\}$

là một cơ sở cho W.

17. Trong $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở chính tắc

$$\mathscr{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

và cơ sở

$$\mathscr{B}' = \{f_1 = (2,1,1), f_2 = (1,2,1), f_3 = (1,1,2)\}.$$

Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ và ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}'$ qua $\mathscr{B}$.

ĐS: $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

18. Trong, cho hai cơ sở $\mathscr{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$ và $\mathscr{B}' = \{v_1 = (2,1,1), v_2 = (1,2,1), v_3 = (1,1,2)\}$.

Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ và ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}'$ qua $\mathscr{B}$.

ĐS: Gọi $\mathscr{C}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Suy ra $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathscr{B} = \{u_1 = (1,2,0), u_2 = (1,3,2), u_3 = (0,1,3)\}$$

$$\mathscr{B}' = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,4,6)\}$$

và vectơ $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Tìm tọa độ của vectơ u trong cơ sở $\mathscr{B}$ và cơ sở $\mathscr{B}'$.

b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ và ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}'$ qua $\mathscr{B}$.

c) Kiểm chứng $[u]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}[u]_{\mathscr{B}'}$ và $[u]_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}}$.

ĐS: a) Ta có

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = a \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 = b \\ 2k_2 + 3k_3 = c \end{cases}$$

Biến đổi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 0 & 2 & 3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{(2):=(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-2a \\ 0 & 2 & 3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{(3):=(3)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & c-2b+4a \end{array}\right)$$

ta được $k_3 = 4a - 2b + c$; $k_2 = -6a + 3b - c$; $k_1 = 7a - 3b + c$. Vậy

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 7a - 3b + c \\ -6a + 3b - c \\ 4a - 2b + c \end{pmatrix}$$

Tương tự,

$$[u]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = a \\ 2k_1 + k_2 + 4k_3 = b \\ k_1 + 2k_2 + 6k_3 = c \end{cases}$$

Biến đổi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 4 & b \\ 1 & 2 & 6 & c \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)-(1)]{(2):=(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 2 & 5 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{(3):=(3)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & c-2b+3a \end{array}\right)$$

ta được $k_3 = 3a - 2b + c$; $k_2 = -8a + 5b - 2c$; $k_1 = -2a + 2b - c$. Vậy

$$[u]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ -8a + 5b - 2c \\ 3a - 2b + c \end{pmatrix}$$

b) Gọi $\mathscr{C}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix};\ P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -8 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$$P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -8 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Kiểm chứng

$$\begin{pmatrix} 7a - 3b + c \\ -6a + 3b - c \\ 4a - 2b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ -8a + 5b - 2c \\ 3a - 2b + c \end{pmatrix};\text{ và}$$

$$\begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ -8a + 5b - 2c \\ 3a - 2b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7a - 3b + c \\ -6a + 3b - c \\ 4a - 2b + c \end{pmatrix}$$

20. Trong $\mathbb{R}^3$, cho các hệ vectơ

$$\mathscr{B}_1 = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,2), u_3 = (1,2,3)\}$$

và

$$\mathscr{B}_2 = \{v_1 = (2,1,-1), v_2 = (3,2,5), v_3 = (1,-1,m)\}$$

a) Chứng minh rằng $\mathscr{B}_1$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a,b,c)$ trong cơ sở $\mathscr{B}_1$.

c) Tìm m để $\mathscr{B}_2$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&2&5\\1&-1&m\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)\sim(3)}\begin{pmatrix}1&-1&m\\3&2&5\\2&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[(3):=(3)-2(1)]{(2):=(2)-3(1)}\begin{pmatrix}1&-1&m\\0&5&5-3m\\0&3&-1-2m\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-\frac{3}{5}(2)}\begin{pmatrix}1&-1&m\\0&5&5-3m\\0&0&-1-2m-\frac{3}{5}(5-3m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&m\\0&5&5-3m\\0&0&-4-\frac{1}{5}m\end{pmatrix}$$

d) Với $m=0$, tìm các ma trận đổi cơ sở $P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}$ và $P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}$.

ĐS: a) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$

b) Ta có

$$[u]_{\mathscr{B}_1}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow u=k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3\Leftrightarrow\begin{cases}k_1+k_2+k_3=a\\k_1+k_2+2k_3=b\\k_1+2k_2+3k_3=c\end{cases}$$

Biến đổi

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&1&2&b\\1&2&3&c\end{array}\right)\xrightarrow[(3):=(3)-(1)]{(2):=(2)-(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&0&1&b-a\\0&1&2&c-a\end{array}\right)\xrightarrow{(3)\sim(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&c-a\\0&0&1&b-a\end{array}\right)$$

ta được $k_3=b-a$; $k_2=c-2b+a$; $k_1=-c+b+a$. Vậy $[u]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}a+b-c\\a+2b-c\\b-a\end{pmatrix}$.

c) Gọi $\mathscr{C}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}_1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix};\ P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{C}}=\left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}_1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}_2}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\-1&5&0\end{pmatrix};\ P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{C}}=\left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}_2}\right)^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}5&5&-5\\1&1&3\\7&-13&1\end{pmatrix}$$

Suy ra $P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}=P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{C}}\cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}_2}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\-1&5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&4&3\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$;

$$P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}=P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{C}}\cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}_1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}5&5&-5\\1&1&3\\7&-13&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}5&0&0\\5&8&12\\-5&-4&-16\end{pmatrix}.$$

21. Cho hai hệ vectơ trong không gian $\mathbb{R}^4$

$\mathscr{B}$: $a_1=(0,1,0,2)$, $a_2=(1,1,0,1)$, $a_3=(1,2,0,1)$, $a_4=(-1,0,2,1)$,

$\mathscr{B}'$: $b_1 = (1,0,2,-1)$, $b_2 = (0,3,0,2)$, $b_3 = (0,1,3,1)$, $b_4 = (0,-1,0,1)$.

a) Chứng minh chúng là hai cơ sở của $\mathbb{R}^4$.
b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$.
c) Tìm tọa độ của $v = (2,0,4,0)$ đối với cơ sở $\mathscr{B}'$.

ĐS: a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15$.

b) Gọi $\mathscr{C}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$. Ta có

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}\right)^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 3 \\ -10 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & -6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}'} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ -8 & 8 & -4 & -6 \\ 0 & -8 & -2 & 6 \\ -4 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 3 \\ -10 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & -6 & -1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 15 & -15 \\ 9 & 13 & 16 & -8 \\ 0 & -10 & -10 & 20 \\ 12 & 14 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

.

c) $$[v]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \; [v]_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{C}} \cdot [v]_{\mathscr{C}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 3 \\ -10 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & -6 & -1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

d) Tìm tọa độ của v đối với cơ sở $\mathscr{B}$.

$$[v]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \cdot [v]_{\mathscr{C}} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

22. Xác định số chiều và tìm một cơ sở của không gian con W sinh bởi hệ vectơ sau
a) $u_1 = (1,0,0,-1)$, $u_2 = (2,1,1,0)$, $u_3 = (1,1,1,1)$, $u_4 = (1,2,3,4)$, $u_5 = (0,1,2,3)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $u_1 = (1,1,1,1,0)$, $u_2 = (1,1,-1,-1,-1)$, $u_3 = (2,2,0,0,-1)$, $u_4 = (1,1,5,5,2)$, $u_5 = (1,-1,-1,0,0)$ trong $\mathbb{R}^5$.

ĐS: a) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)-(1)]{\substack{(2):=(2)-2(1) \\ (3):=(3)-(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5):=(5)-(2)]{\substack{(3):=(3)-(2) \\ (4):=(4)-2(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)\sim(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4):=(4)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim = 3$ và một cơ sở là $\mathscr{B} = \{e_1 = (1,0,0,-1); e_2 = (0,1,1,2); e_3 = (0,0,1,1)\}$

b) Biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(4):=(4)-(1) \\ (5):=(5)-(1)}]{\substack{(2):=(2)-(1) \\ (3):=(3)-2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\sim(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5):=(5)-(3)]{(4):=(4)+2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim = 3$ và một cơ sở là $\mathscr{B} = \{e_1 = (1,1,1,1,0); e_2 = (0,-2,-2,-1,0); e_3 = (0,0,-2,-2,-1)\}$