GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG IV

KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

1.1/ KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$:

Cho số nguyên $n \geq 1$ và $\mathbf{R}^n = \{ X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \mid x_1, x_2, \dots , x_n \in \mathbf{R} \}$.
Ta gọi $X = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ là *vector X* trong $\mathbf{R}^n$. Ta thường ‘‘ hình học hóa ’’ X bằng một đoạn thẳng có gốc, ngọn, phương, chiều và độ dài. Ta định nghĩa các phép toán *cộng vector* (+) và *nhân số thực với vector* (.) trên $\mathbf{R}^n$ như sau:
$\forall X = (x_1, x_2, \dots , x_n), Y = (y_1, y_2, \dots , y_n) \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}$,
$X + Y = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , \dots , x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$ và $c.X = (cx_1, cx_2, \dots , cx_n) \in \mathbf{R}^n$.
Về mặt hình học, phép *nhân số thực với vector* có thể thay đổi chiều và độ dài nhưng không thay đổi phương của vector. Phép *cộng vector* có thể tạo ra ra các vector có phương mới.
Cấu trúc đại số $(\mathbf{R}^n, +, .)$ gọi là *không gian vector* $\mathbf{R}^n$ (*trên* $\mathbf{R}$).
Ta cũng có thể đồng nhất $\mathbf{R}^n$ với $M_{1 \times n}(\mathbf{R})$ trong đó phép *nhân số thực với vector* và phép *cộng vector* chính là phép *nhân số thực với ma trận* và phép *cộng ma trận* .

<u>Ví dụ:</u>

Với $X = (-5, 1, -4, 9), Y = (8, 0, -2, -7) \in \mathbf{R}^4$ và $c = \frac{2}{3} \in \mathbf{R}$, ta có

$X + Y = (3, 1, -6, 2) \in \mathbf{R}^4$ và $cX = \frac{2}{3}(8, 0, -2, -7) = (\frac{16}{3}, 0, \frac{-4}{3}, \frac{-14}{3}) \in \mathbf{R}^4$.

1.2/ MINH HỌA HÌNH HỌC:

$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ được đồng nhất với Không gian các vector gốc O trên trục x’Ox .
$\mathbf{R}^2 = \{ X = (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ được đồng nhất với “ Không gian các vector gốc O trên mặt phẳng (Oxy) ”.
$\mathbf{R}^3 = \{ X = (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$ được đồng nhất với “ Không gian các vector gốc O trên trong hệ trục tọa độ (Oxyz) ”.

1.3/ TÍNH CHẤT:

Không gian vector $(\mathbf{R}^n, +, .)$ trên $\mathbf{R}$ thỏa 7 tính chất sau đây:
(A_1) Phép (+) *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$,
$X + Y = Y + X$ và $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$.
(A_2) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, \dots , 0) \in \mathbf{R}^n, \forall X \in \mathbf{R}^n, \mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.
Ta nói $\mathbf{O}$ là “ vector không ” và $\mathbf{O}$ là *phần tử trung hòa* của phép (+)
(A_3) $\forall X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \mathbf{R}^n , \exists X’ = (-x_1, -x_2, \dots , -x_n) \in \mathbf{R}^n$ thỏa
$X’ + X = X + X’ = \mathbf{O}$. Ký hiệu $X’ = -X = (-1)X$ là *vector đối* của X.

(A_1), (A_2) và (A_3) là các tính chất riêng của phép $(+)$.
(B_1) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $1.X = X$.
(B_2) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $c.(d.X) = (c.d).X$
(B_1) và (B_2) là các tính chất riêng của phép $(.)$
(C_1) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $(c + d).X = c.X + d.X$
(C_2) $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $c.(X + Y) = c.X + c.Y$
(C_1) và (C_2) là các tính chất liên quan giữa phép $(+)$ và phép $(.)$

1.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$, ta có
a) $c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0 \text{ hay } X = \mathbf{O})$
b) $c.X \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0 \text{ và } X \neq \mathbf{O})$

II. KHÔNG GIAN VECTOR CON TRONG $\mathbf{R}^n$:

2.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \subset \mathbf{R}^n$.
Các phép toán $(+)$ và $(.)$ trên $\mathbf{R}^n$ vẫn được sử dụng trên W.
a) Ta nói W là *một không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$ (ký hiệu $W \leq \mathbf{R}^n$) nếu W thỏa các điều kiện sau đây:
* $\mathbf{O} \in W$ (1)
* $\forall \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2)
* $\forall \alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3)

b) Suy ra $W \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4)
Khi giải thích $W \leq V$, ta thường sử dụng (4).
c) $\mathbf{R}^n$ luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^n$.
Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^n$.
Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của $\mathbf{R}^n$ và ký hiệu $W < \mathbf{R}^n$.

<u>Ví dụ:</u>
a) $\mathbf{R}^1$ chỉ có hai không gian con là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^1$.
(chúng đều là các không gian con tầm thường).
b) $\mathbf{R}^2$ luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^2$.
Ta mô tả dưới dạng hình học các không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^2$.
Xét đường thẳng tùy ý (D) trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ sao cho (D) đi qua gốc O.
Đặt H = { các vector gốc O trên đường thẳng (D) }. Ta có $H \subset \mathbf{R}^2$ và H thỏa (4) trong (**2.1**). Do đó $H \leq \mathbf{R}^2$ và H được gọi là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^2$. Suy ra $\mathbf{R}^2$ có vô số không gian con kiểu đường thẳng vì có vô số đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ đi qua gốc O.
c) $\mathbf{R}^3$ luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^3$.
Ta mô tả dưới dạng hình học các không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^3$.
– $\mathbf{R}^3$ có vô số không gian con kiểu đường thẳng (mỗi đường thẳng thuộc về không gian $\mathbf{R}^3$ và đi qua gốc O).

– Xét mặt phẳng (P) tùy ý trong $\mathbf{R}^3$ sao cho (P) đi qua gốc O.
Đặt K = { các vector gốc O trên mặt phẳng (P) }. Ta có $K \subset \mathbf{R}^3$ và K thỏa (4) trong (**2.1**). Do đó $K \le \mathbf{R}^3$ và K được gọi là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$. Suy ra $\mathbf{R}^3$ có vô số không gian con kiểu mặt phẳng vì có vô số mặt phẳng trong $\mathbf{R}^3$ đi qua gốc O.

d) Tổng quát, $\mathbf{R}^n$ ($n \ge 4$) có các không gian con như sau:
– Không gian con tầm thường $\{\mathbf{O}\}$ (ta gọi là không gian con *0_phẳng*).
– vô số không gian con kiểu đường thẳng (ta gọi là không gian con *1_phẳng*).
– vô số không gian con kiểu mặt phẳng (ta gọi là không gian con *2_phẳng*).
– vô số không gian con *3_phẳng*, … , vô số không gian con *(n − 1)_phẳng*.
Các không gian con *(n − 1)_phẳng* của $\mathbf{R}^n$ được gọi là *các siêu phẳng* trong $\mathbf{R}^n$.
– Không gian con tầm thường $\mathbf{R}^n$ (gọi là không gian con *n_phẳng*).

2.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Khi $W \le \mathbf{R}^n$ thì W cũng được gọi là không gian vector (W, +, .) trên **R** và nó cũng thỏa 7 tính chất sau đây [tương tự như $(\mathbf{R}^n, +, .)$] :

(A_1) $\forall X, Y, Z \in W, X + Y = Y + X$ và $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$.
(A_2) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, ... , 0) \in W, \forall X \in W, \mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.
(A_3) $\forall X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in W, \exists X' = -X = (-x_1, -x_2, \dots , -x_n) \in W$ thỏa
$X' + X = X + X' = \mathbf{O}$.
(B_1) $\forall X \in W, 1.X = X$.
(B_2) $\forall X \in W, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.X) = (c.d).X$
(C_1) $\forall X \in W, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).X = c.X + d.X$
(C_2) $\forall X, Y \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.(X + Y) = c.X + c.Y$
Suy ra $\forall X \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0$ hay $X = \mathbf{O})$
$c.X \ne \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \ne 0$ và $X \ne \mathbf{O})$

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (nhận diện không gian con của $\mathbf{R}^n$)
Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

$$W \le \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) : W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \}$$

Như vậy mỗi không gian con của $\mathbf{R}^n$ đều là k*hông gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* nào đó.

<u>Ví dụ:</u> Giải thích tập hợp sau là một không gian con của $\mathbf{R}^4$:

$W = \{ X = (u,v,w,t) \in \mathbf{R}^4 \mid 4u - v + 5w - 8t = -7u + 2w + t = 6u + 9v - 3w =$
$= -9u - 4v + 7w + 3t \}$

Ta có thể sử dụng [(1), (2), (3)] hoặc (4) của (**2.1**) để giải thích $W \le \mathbf{R}^4$.
Tuy nhiên ta sẽ sử dụng (**2.3**) để giải thích $W \le \mathbf{R}^4$ một cách đơn giản hơn.
Ta viết lại (bằng cách lần lượt phối hợp các vế sau với vế đầu tiên)

$W = \{ X = (u,v,w,t) \in \mathbf{R}^4 \mid 11u - v + 3w - 9t = 2u + 10v - 8w + 8t =$
$= 13u + 3v - 2w - 11t = 0 \}$, nghĩa là

$W = \{ X \in \mathbf{R}^4 \mid AX = \mathbf{O} \}$ với $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -4 & 4 \\ 13 & 3 & -2 & -11 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R})$. Do đó $W \leq \mathbf{R}^4$.

2.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (phủ nhận không gian con của $\mathbf{R}^n$)

Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

a) $W \not\leq \mathbf{R}^n$ (W *không phải là không gian con của* $\mathbf{R}^n$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \notin W (5) \\ hay \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W (6) \\ hay \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in R, c\alpha \notin W (7) \end{array} \right.$

b) $W \not\leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W$.

Khi giải thích $W \not\leq \mathbf{R}^n$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.

<u>Ví dụ:</u> Giải thích các tập hợp sau đây không phải là không gian con của $\mathbf{R}^3$:

a) $H = \{ X = (u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid uvw = 0 \}$. Để ý H không thỏa (5) và (7).

H thỏa (6) vì $\exists \alpha = (1,0,0), \beta = (0,1,1) \in H, \alpha + \beta = (1,1,1) \notin H$. Vậy $H \not\leq \mathbf{R}^3$.

b) $K = \{ X = (u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid 2u - 5v + 8w \geq 1 \}$. K thỏa (5) vì $\mathbf{O} = (0,0,0) \notin K$.

Vậy $K \not\leq \mathbf{R}^3$. Để ý K cũng thỏa (7) nhưng không thỏa (6).

c) $L = \{ X = (u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid u^2 + 3v - 4w^3 = -3 \}$

L thỏa (7) vì $\exists \alpha = (0,-1,0) \in L, \exists c = -1 \in \mathbf{R}, c\alpha = (0,1,0) \notin L$. Vậy $L \not\leq \mathbf{R}^3$.

Để ý L cũng thỏa (5) và (6).

2.5/ <u>KHÔNG GIAN GIAO VÀ KHÔNG GIAN TỔNG:</u>

Cho $V, W, V_1, V_2, \ldots, V_k$ là các không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ $(k \geq 2)$.

a) Đặt $V \cap W = \{ \alpha \mid \alpha \in V$ và $\alpha \in W \}$ và

$V + W = \{ \alpha = \beta + \gamma \mid \beta \in V$ và $\gamma \in W \}$.

Ta có $(V \cap W)$ và $(V + W)$ đều là các không gian vector con của $\mathbf{R}^n$.

Ta nói $(V \cap W)$ và $(V + W)$ lần lượt là các *không gian giao* và *không gian tổng* của V và W.

b) Đặt $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k = \bigcap_{j=1}^{k} V_j = \{ \alpha \mid \alpha \in V_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k \}$ và

$V_1 + V_2 + \ldots + V_k = \sum_{j=1}^{k} V_j = \{ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \mid \alpha_j \in V_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k \}$

Ta có $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ và $\sum_{j=1}^{k} V_j$ đều là các không gian vector con của $\mathbf{R}^n$.

Ta nói $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ và $\sum_{j=1}^{k} V_j$ lần lượt là các *không gian giao* và *không gian tổng* của $V_1, V_2, \ldots$ và V_k .

c) Đặt $V \cup W = \{ \alpha \mid \alpha \in V$ hay $\alpha \in W \}$ và

$$V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = \bigcup_{j=1}^{k} V_j = \{\, \alpha \mid \exists j = 1, 2, \ldots, k \text{ thỏa } \alpha \in V_j \,\}.$$

Ta có $V \cup W$ và $\bigcup_{j=1}^{k} V_j$ *không nhất thiết* là các không gian vector con của $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) V và W là các không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^2$ sao cho hai đường thẳng tương ứng giao nhau tại O. Ta có $V \cap W = \{\mathbf{O}\}$ và $V + W = \mathbf{R}^2$.

b) H và K lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho đường thẳng và mặt phẳng tương ứng giao nhau tại O.
Ta có $H \cap K = \{\mathbf{O}\}$ và $H + K = \mathbf{R}^3$.

c) P và Q là các không gian con kiểu mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho hai mặt phẳng tương ứng giao nhau theo giao tuyến (D) qua O. Ta có $P \cap Q = Z$ (Z là không gian con kiểu đường thẳng tương ứng với (D) của $\mathbf{R}^2$) và $P + Q = \mathbf{R}^3$.

d) E, F và G là các không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho ba đường thẳng tương ứng không đồng phẳng và giao nhau tại O. Ta có $E \cap F \cap G = \{\mathbf{O}\}$ và $E + F + G = \mathbf{R}^3$.

2.6/ ĐỊNH NGHĨA: Cho V và W là các không gian vector con của $\mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \subset V$ thì ta cũng nói W là *một không gian vector con* (*trên* **R**) của V và ký hiệu $W \leq V$.

b) Không gian $\{\mathbf{O}\}$ chỉ có duy nhất một không gian con là chính $\{\mathbf{O}\}$.
Nếu $V \neq \{\mathbf{O}\}$ thì V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và V.
Nếu $W \leq V$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V.
Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu là $W < V$.

Ví dụ:
W và V lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho đường thẳng chứa trong mặt phẳng và chúng đều qua O. Ta có $\{\mathbf{O}\} < W < V < \mathbf{R}^3$.

III. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Chọn tùy ý $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ và đặt $\alpha = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k) \in \mathbf{R}^n$.
Ta nói α là *một tổ hợp tuyến tính của S* (hay *của* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$).
Như vậy từ một số hữu hạn các vector cho trước, ta có thể tạo ra được nhiều tổ hợp tuyến tính khác nhau của các vector đó.

b) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

γ là *một tổ hợp tuyến tính của* S $\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *có nghiệm trên* **R**.

γ *không là tổ hợp tuyến tính của* S $\Leftrightarrow \forall c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma \neq c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *vô nghiệm trên* $\mathbf{R}$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{ \alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,3,-1,0), \alpha_3 = (-1,-1,1,1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

a) $\alpha = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = -2(1,1,1,1) + 3(2,3,-1,0) - 5(-1,-1,1,1) = (9,12,-10,-7) \in \mathbf{R}^4$.

$\beta = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4(1,1,1,1) - 3(2,3,-1,0) + 2(-1,-1,1,1) = (-4,-7,9,6) \in \mathbf{R}^4$.

b) Cho $\gamma = (u,v,w,t) \in \mathbf{R}^4$.

γ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma \Leftrightarrow c_1(1,1,1,1) + c_2(2,3,-1,0) + c_3(-1,-1,1,1) = (u,v,w,t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = u \\ c_1 + 3c_2 - c_3 = v \\ c_1 - c_2 + c_3 = w \\ c_1 + c_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & -1 & v \\ 1 & 2 & -1 & u \\ 1 & -1 & 1 & w \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 & v-u \\ 0 & 2 & -2 & u-t \\ 0 & -1 & 0 & w-t \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & t \\ 0 & 1^* & 0 & v-u \\ 0 & 0 & -2^* & u+2w-3t \\ 0 & 0 & 0 & v+w-u-t \end{array}\right) \end{array}$$

$\gamma = (u,v,w,t)$ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow v + w - u - t = 0$ (*). Lúc đó ta có biểu diễn duy nhất $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ với $c_3 = 2^{-1}(3t - u - 2w)$, $c_2 = v - u$ và $c_1 = 2^{-1}(u + 2w - t)$ ($\square$)

$\gamma = (u,v,w,t)$ không là tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow v + w - u - t \neq 0$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (9,10,-2,-1)$ và $\theta = (-7,1,4,-8) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên ε là một tổ hợp tuyến tính của S với $\varepsilon = (3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3)$ do ($\square$) và θ không là tổ hợp tuyến tính của S.

3.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Đặt W là *tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính có từ* S (ký hiệu $W = \langle S \rangle$), nghĩa là $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R} \} \subset \mathbf{R}^n$.

Ta chứng minh được $W = \langle S \rangle$ là một không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ [sử dụng (**2.1**)].

Ta nói $W = \langle S \rangle$ là *không gian vector con (của* $\mathbf{R}^n$*) sinh bởi tập hợp* S.

b) Nếu $S = \varnothing$ thì ta qui ước $\langle S \rangle = \{\mathbf{O}\}$ ($\varnothing$ sinh ra không gian con $\{\mathbf{O}\}$ của $\mathbf{R}^n$)

c) $\langle S \rangle$ là *không gian vector con nhỏ nhất chứa được* S của $\mathbf{R}^n$, nghĩa là $\forall V \leq \mathbf{R}^n, S \subset V \Rightarrow \langle S \rangle \subset V$.

d) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

$\gamma \in W = \langle S \rangle \Leftrightarrow \gamma$ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Suy ra $\gamma \notin W = \langle S \rangle \Leftrightarrow \gamma$ không là tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) vô nghiệm trên $\mathbf{R}$.

<u>Ví dụ:</u>

Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3,2,1,5), \alpha_2 = (4,-3,-1,-7), \alpha_3 = (1,-3,2,-4), \alpha_4 = (-2,5,-3,7) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta mô tả $W = \langle S \rangle$ và tìm điều kiện để vector $\gamma = (u,v,w,t) \in W$.

a) $W = < S > = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$

$= \{\alpha = c_1(-3,2,1,5) + c_2(4,-3,-1,-7) + c_3(1,-3,2,-4) + c_4(-2,5,-3,7) \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$

$= \{ \alpha = (-3c_1 + 4c_2 + c_3 - 2c_4 , 2c_1 - 3c_2 - 3c_3 + 5c_4 , c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 , 5c_1 - 7c_2 - 4c_3 + 7c_4)$
$\mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$

b) Cho $\gamma = (u,v,w,t) \in \mathbf{R}^4$.

$\gamma \in W = < S > \Leftrightarrow \gamma$ là một tổ hợp tuyến tính của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$

$\Leftrightarrow c_1(-3,2,1,5) + c_2(4,-3,-1,-7) + c_3(1,-3,2,-4) + c_4(-2,5,-3,7) = (u,v,w,t)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & w \\ -3 & 4 & 1 & -2 & u \\ 2 & -3 & -3 & 5 & v \\ 5 & -7 & -4 & 7 & t \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -1 & 2 & -3 & w \\ 0 & 1 & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & -1 & -7 & 11 & v-2w \\ 0 & -2 & -14 & 22 & t-5w \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 9 & -14 & u+4w \\ 0 & 1^* & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+v+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+w+t \end{array}\right) \end{array}$$

$\gamma = (u,v,w,t) \in W = < S > \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w = 0 = 2u + w + t)$ (*).
Lúc đó ta có vô số biểu diễn $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4$ với $c_3 = a, c_4 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$),
$c_1 = 14b - 9a + u + 4w$ và $c_2 = 11b - 7a + u + 3w$ (□).

$\gamma = (u,v,w,t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w \neq 0$ hay $2u + w + t \neq 0)$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (5,-6, 1,-11)$ và $\theta = (-3,2,7,-4) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên $\theta \notin W = < S >$ và $\varepsilon \in W = < S >$ với vô số biểu diễn $\varepsilon = (14b - 9a + 9)\alpha_1 + (11b - 7a + 8)\alpha_2 + a\alpha_3 + b\alpha_4$ ($a, b \in \mathbf{R}$) do (□).

3.3/ <u>MINH HỌA:</u> Các vector β, γ, δ trong $\mathbf{R}^n$ dưới đây đều có gốc là O.

a) Nếu $S = \{\mathbf{O}\} \subset \mathbf{R}^n$ thì $< S > = \{ \alpha = c\mathbf{O} = \mathbf{O} \mid c \in \mathbf{R} \} = \{\mathbf{O}\} = S$.

b) Nếu $S = \{ \beta\} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{O}\}$ thì $< S > = \{ \alpha = c\beta \mid c \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và đường thẳng này chứa β.

c) Nếu $S = \{ \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ *khác phương*) thì $< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^n$ và mặt phẳng này chứa β, γ.

d) Nếu $S = \{ \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n \setminus\{\mathbf{O}\}$ (β, γ *cùng phương*) thì $< S > = \{\alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R}\}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và Đường thẳng này chứa β và γ

e) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^3$ (β, γ, δ *không đồng phẳng*) thì
$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d,e \in \mathbf{R} \}$ và $< S > = \mathbf{R}^3$.

f) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ, δ *khác phương đôi một nhưng đồng phẳng*) thì
$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d,e \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^n$ và mặt phẳng này chứa β, γ và δ.

g) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^n \setminus\{\mathbf{O}\}$ (β, γ, δ *cùng phương với nhau*) thì
$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d,e \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và đường thẳng này chứa β, γ và δ.

3.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

Cho các tập hợp hữu hạn $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset \mathbf{R}^n$ ($k \geq 2$) và $< S_j > = W_j \leq \mathbf{R}^n$ ($1 \leq j \leq k$).
Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$. Ta có $< S > = W_1 + W_2 + \ldots + W_k$.

Ví dụ: Cho $S_1 = \{\alpha\}$, $S_2 = \{ \beta, \gamma \}$, $S_3 = \{ \delta, \varepsilon, \theta \} \subset \mathbf{R}^n$ và $< S_j > = W_j \le \mathbf{R}^n$ $(1 \le j \le 3)$.
Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta \}$. Ta có $< S > = W_1 + W_2 + W_3$.

IV. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \ge 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.
Xét phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = \mathbf{O}$ (*) với các ẩn số thực $c_1, c_2, \ldots, c_k$.
(*) có ít nhất một nghiệm thực là $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ (*nghiệm tầm thường*).

a) Nếu (*) có *nghiệm thực duy nhất* (*nghiệm tầm thường*) thì ta nói S *độc lập tuyến tính* (nghĩa là không có vector nào của S được tính theo các vector khác trong S dưới dạng tổ hợp tuyến tính).

b) Nếu (*) có *vô số nghiệm thực* (có *nghiệm tầm thường* và *vô số nghiệm không tầm thường*) thì ta nói S *phụ thuộc tuyến tính* (nghĩa là có ít nhất một vector của S được tính theo các vector khác trong S dưới dạng tổ hợp tuyến tính).

c) Nếu $S = \varnothing$ thì ta qui ước S *độc lập tuyến tính.*

Ví dụ:

a) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3,1,2,7), \alpha_2 = (1,-2,5,-4), \alpha_3 = (2,4,1,6) \} \subset \mathbf{R}^4$.
Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{O} \Leftrightarrow c_1(-3,1,2,7) + c_2(1,-2,5,-4) + c_3(2,4,1,6) = \mathbf{O}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 14 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -22 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 182 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) nên S độc lập tuyến tính.

b) Cho $T = \{\beta_1 = (3,-4,1,7), \beta_2 = (-2,6,8,-1), \beta_3 = (-13,24,13,-23)\} \subset \mathbf{R}^4$.
Phương trình $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = \mathbf{O} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c_1(3,-4,1,7) + c_2(-2,6,8,-1) + c_3(-13,24,13,-23) = \mathbf{O}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 13 & 0 \\ 3 & -2 & -13 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & 0 \\ 7 & -1 & -23 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 8 & 13 & 0 \\ 0 & -26 & -52 & 0 \\ 0 & 19 & 38 & 0 \\ 0 & -57 & -114 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Phương trình có vô số nghiệm là [$c_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $c_1 = 3a$, $c_2 = -2a$] nên T phụ thuộc tuyến tính.
Trích ra một nghiệm không tầm thường (bằng cách chọn $a = 1$), ta có ($c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$) và được hệ thức $3\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 = \mathbf{O}$. Suy ra $\beta_3 = 2\beta_2 - 3\beta_1$, nghĩa là β_3 được tính theo β_1 và β_2 dưới dạng tổ hợp tuyến tính.

4.2/ NHẬN XÉT:

a) $S = \{\alpha\} \subset \mathbf{R}^n$ **.**

Nếu $\alpha = \mathbf{O}$ thì S *phụ thuộc tuyến tính*

(phương trình $c.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ có vô số nghiệm $c \in \mathbf{R}$).

Nếu $\alpha \neq \mathbf{O}$ thì S *độc lập tuyến tính.*

(phương trình $c.\alpha = \mathbf{O}$ có nghiệm thực duy nhất $c = 0$).

b) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu α cùng phương với β (α và β có các thành phần tỉ lệ với nhau) thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

Nếu α khác phương với β (α và β có các thành phần không tỉ lệ với nhau) thì S *độc lập tuyến tính*.

c) $S = \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbf{R}^3$.

Nếu α, β, γ đồng phẳng thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

Nếu α, β, γ không đồng phẳng thì S *độc lập tuyến tính*.

d) Cho $S \subset T \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì T cũng phụ thuộc tuyến tính.

Nếu T độc lập tuyến tính thì S cũng độc lập tuyến tính.

Nếu $\mathbf{O} \in S$ thì S phụ thuộc tuyến tính (vì $\{\mathbf{O}\}$ phụ thuộc tuyến tính).

Nếu S độc lập tuyến tính thì $\mathbf{O} \notin S$.

Ví dụ:

Xét $S = \{\alpha = (-2,4,-8,6), \beta = (3,-6,12,-9)\}$ và $T = \{ \gamma = (5,1,-4,7), \delta = (-1,8,2,-3)\} \subset \mathbf{R}^4$

Ta có S phụ thuộc tuyến tính ($\beta = \frac{-3}{2}\alpha$) và T độc lập tuyến tính (γ không tỉ lệ với δ).

4.3/ MỆNH ĐỀ: (xác định sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính)

Cho $m \geq 3$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và ta có thể hoán đổi các dòng của A.Tìm $r(A)$ và $r(A) \leq m$.

a) Nếu $m > n$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

b) Xét trường hợp $m \leq n$.

Nếu $r(A) < m$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu $r(A) = m$ thì S độc lập tuyến tính.

c) Xét trường hợp đặc biệt $m = n$ và $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Nếu A không khả nghịch ($|A| = 0$) thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu A khả nghịch ($|A| \neq 0$) thì S độc lập tuyến tính.

Ví dụ:

a) Cho $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \} \subset \mathbf{R}^3$. Do $m = |Z| = 5 > n = 3$ nên Z phụ thuộc tuyến tính.

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3,1,2,7), \alpha_2 = (1,-2,5,-4), \alpha_3 = (2,4,1,6) \} \subset \mathbf{R}^4$ và

$T = \{ \beta_1 = (3,-4,1,7), \beta_2 = (-2,6,8,-1), \beta_3 = (-13,24,13,-23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Đặt $A = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & -4\\ -3 & 1 & 2 & 7\\ 2 & 4 & 1 & 6\end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 7\\ -2 & 6 & 8 & -1\\ -13 & 24 & 13 & -23\end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$.

$A \to \begin{pmatrix}1^* & -2 & 5 & -4\\ 0 & -5 & 17 & -5\\ 0 & 8 & -9 & 14\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1^* & -2 & 5 & -4\\ 0 & -5^* & 17 & -5\\ 0 & 0 & 91^* & 30\end{pmatrix} = S_A$ có $r(A) = 3 = m = 3 < n = 4$.

$B \to \begin{pmatrix}1^* & 2 & 9 & 6\\ 0 & 10 & 26 & 11\\ 0 & 50 & 130 & 55\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1^* & 2 & 9 & 6\\ 0 & 10^* & 26 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = S_B$ có $r(B) = 2 < m = 3 < n = 4$.

Do đó S độc lập tuyến tính và T phụ thuộc tuyến tính.

c) Cho $H = \{ \gamma_1 = (a,1,1), \gamma_2 = (1,a,1), \gamma_3 = (1,1,a) \} \subset \mathbf{R}^3$ ($m = n = 3$).

Đặt $C = \begin{pmatrix}\gamma_2\\ \gamma_1\\ \gamma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và

$$| C | = \begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1-a & 1-a^2\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 1^* & 1 & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-a & 1-a^2\\ a-1 & 1-a\end{vmatrix} = (a-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1+a\\ -1 & 1\end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2).$$

Như vậy H độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ C khả nghịch $\Leftrightarrow$ $| C | \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $-2 \neq a \neq 1$

H phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ C không khả nghịch $\Leftrightarrow$ $| C | = 0$ $\Leftrightarrow$ ($a = -2$ hoặc $a = 1$)

V. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR:

5.1/ VẤN ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$. Có nhiều tập hợp hữu hạn của $\mathbf{R}^n$ sinh ra W. Ta muốn tìm một tập sinh S nào đó của W sao cho S *có số lượng vector là ít nhất*. Khi đó ta nói S là *một tập sinh tối ưu* của W.

5.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle S \rangle$ với S là một tập hợp hữu hạn của $\mathbf{R}^n$.

a) Nếu S *độc lập tuyến tính* thì S chính là *một tập sinh tối ưu* của W.
(nghĩa là $\forall T \subset S, T \neq S \Rightarrow \langle T \rangle \neq W$)

b) Nếu S *phụ thuộc tuyến tính* thì S là *một tập sinh chưa tối ưu* của W.
(nghĩa là $\exists T \subset S, T \neq S$ và $\langle T \rangle = W$)

Ví dụ: $W = \mathbf{R}^2$.

a) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^2$ (α khác phương với β). Ta có $\langle S \rangle = \mathbf{R}^2$ và S độc lập tuyến tính nên S chính là một tập sinh tối ưu của $\mathbf{R}^2$. Xét $T = \{\alpha\} \subset S$ và $T \neq S$. Ta có $\langle T \rangle \neq \mathbf{R}^2$ vì $\langle T \rangle$ là một không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^2$.

b) $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^2$ (α, β, γ đôi một khác phương nhau). Ta có $\langle Z \rangle = \mathbf{R}^2$ và Z phụ thuộc tuyến tính nên Z là một tập sinh chưa tối ưu của $\mathbf{R}^2$. Xét $T = \{ \alpha, \beta \} \subset S$ thì $T \neq S$ và $\langle T \rangle = \mathbf{R}^2$.

5.3/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$.

Một cơ sở của W là *một tập sinh độc lập tuyến tính* (*một tập sinh tối ưu*) của W.

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \neq \{\mathbf{O}\}$ thì W *có vô số cơ sở*.

b) Nếu $W \neq \{\mathbf{O}\}$ và W có cơ sở B gồm m vector thì mọi cơ sở khác cũng có m vector. Ta gọi m là *số chiều của không gian vector* W và ký hiệu $m = \dim_{\mathbf{R}} W$ (viết gọn là $m = \dim W$). Như vậy *số chiều của một không gian vector* là *số lượng vector hiện diện trong mỗi cơ sở* của nó.

<u>Ví dụ:</u>

a) $< \varnothing > = \{\mathbf{O}\}$ và $\varnothing$ độc lập tuyến tính (theo qui ước) nên không gian $\{\mathbf{O}\}$ có *cơ sở duy nhất* là $\varnothing$ và $\dim\{\mathbf{O}\} = |\varnothing| = 0$. Ta nói $\{\mathbf{O}\}$ là không gian 0 chiều.

b) $\mathbf{R}^1$ có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của $\mathbf{R}^1$ gồm một vector $\alpha \neq \mathbf{O}$ tùy ý vì $B = \{ \alpha \}$ độc lập tuyến tính và $< B > = \mathbf{R}^1$.
Suy ra $\dim\mathbf{R}^1 = |B| = 1$ và ta nói $\mathbf{R}^1$ là không gian 1 chiều.

c) $\mathbf{R}^2$ có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của $\mathbf{R}^1$ gồm hai vector α, β *khác phương nhau* tùy ý vì $B = \{ \alpha, \beta \}$ độc lập tuyến tính và $< B > = \mathbf{R}^2$.
Suy ra $\dim\mathbf{R}^2 = |B| = 2$ và ta nói $\mathbf{R}^2$ là không gian 2 chiều.

d) $\mathbf{R}^3$ có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của $\mathbf{R}^3$ gồm ba vector α, β, γ *không đồng phẳng* tùy ý vì $B = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ độc lập tuyến tính và $< B > = \mathbf{R}^3$.
Suy ra $\dim\mathbf{R}^3 = |B| = 3$ và ta nói $\mathbf{R}^3$ là không gian 3 chiều.

e) $\mathbf{R}^n$ $(n \ge 1)$ có vô số cơ sở khác nhau. Trong đó có một cơ sở đơn giản thông dụng gọi là *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1,0, ..., 0), \varepsilon_2 = (0,1, ..., 0), ..., \varepsilon_n = (0,0, ..., 1) \}$.
Suy ra $\dim\mathbf{R}^n = |B_o| = n$ và ta nói $\mathbf{R}^n$ là không gian n chiều.

f) $S = \{ \alpha = (8,7) \} \subset \mathbf{R}^2$ và $V = < S > = \{ \delta = a\alpha \mid a \in \mathbf{R} \} \le \mathbf{R}^2$. Do $\alpha \neq \mathbf{O}$ nên S độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của V. Ta có V là một không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^2$ có $\dim V = |S| = 1 < \dim\mathbf{R}^2 = 2$. Như vậy $\{\mathbf{O}\} < V < \mathbf{R}^2$ và V là một không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^2$.

g) $T = \{ \beta = (5,-2,4), \gamma = (-3,1,8) \} \subset \mathbf{R}^3$ và $W = < T > = \{ \delta = b\beta + c\gamma \mid b, c \in \mathbf{R} \} \le \mathbf{R}^3$
Do β không tỉ lệ với γ nên T độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của W. Ta có W là một không gian con kiểu mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ có $\dim W = |T| = 2 < \dim\mathbf{R}^3 = 3$.
Như vậy $\{\mathbf{O}\} < W < \mathbf{R}^3$ và W là một không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^3$.

5.5/ <u>NHẬN DIỆN CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$:</u>

Cho $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \} \subset \mathbf{R}^n$ với $|S| = n$. Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) S là một cơ sở của $\mathbf{R}^n$ $\Leftrightarrow$ A khả nghịch $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

b) S không là cơ sở của $\mathbf{R}^n$ $\Leftrightarrow$ A không khả nghịch $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.

Ví dụ:

a) Cho $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ và $T = \{ \delta, \varepsilon, \theta, \eta, \lambda \}$ trong $\mathbf{R}^4$. Ta có $|Z| = 3$ và $|T| = 5$ nên Z và T không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^4$ vì mỗi cơ sở của $\mathbf{R}^4$ có 4 vector.

b) Cho $S = \{ \alpha = (1, -2, a), \beta = (2, a-2, 1), \gamma = (2, a-5, a+1) \} \subset \mathbf{R}^3$ có $|S| = 3$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -2 & a \\ 0 & 3 & -a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 3 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3).$$

S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow A$ khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$

S không là cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow A$ không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (a = 1$ hoặc $a = 3)$.

5.6/ Ý NGHĨA CỦA CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và W có cơ sở $B = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$ ($\dim W = |B| = m$).

a) $\forall \alpha \in W$, có duy nhất $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m$ (*).
Muốn tìm $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ta phải giải phương trình vector (*).
Như vậy không gian W hoàn toàn được xác định bởi một cơ sở bất kỳ của nó (vì mỗi vector trong W được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính theo các vector trong cơ sở). Do đó muốn xác định một không gian vector trong $\mathbf{R}^n$, ta chỉ cần giới thiệu một cơ sở của nó là đủ. Điều này rất thuận lợi vì các không gian vector $\neq \{\mathbf{O}\}$ có vô hạn vector trong khi mỗi cơ sở của nó chỉ có hữu hạn vector.

b) Các không gian vector ($\neq \{\mathbf{O}\}$) có vô hạn vector nên ta không thể so sánh " tầm vóc (độ lớn) " của các không gian dựa trên số lượng vector của chúng được. Chúng ta dùng đại lượng " số chiều " để thấy được " tầm vóc (độ lớn) " của các không gian. Không gian có số chiều càng cao thì " tầm vóc " càng lớn.

Ví dụ:

a) Cho $B = \{X_1 = (7,-2), X_2 = (-4,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^2$ (vì $\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$).

$\forall X = (u,v) \in \mathbf{R}^2$, ta có biểu diễn tổ hợp tuyến tính duy nhất
$X = (-u-4v)X_1 + (-2u-7v)X_2$ bằng cách giải hệ $X = c_1X_1 + c_2X_2$ với các ẩn số thực c_1 và c_2:

$$(X_1^t \; X_2^t \mid X^t) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & u \\ -4 & 1 & v \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & -1 & u+3v \\ 0 & -1 & 2u+7v \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & 0 & -u-4v \\ 0 & 1^* & -2u-7v \end{array}\right) \end{array}$$

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,3,-1,0), \alpha_3 = (-1,-1,1,1) \} \subset \mathbf{R}^4$.
Xét $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \mid a, b, c \in \mathbf{R} \} \leq \mathbf{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1^* & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2^* & 2 \end{pmatrix} = S_A$$ thì $r(A) = 3$ nên S độc lập tuyến

tính và cũng là một cơ sở của W với $\dim W = |S| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$. Suy ra $W < \mathbf{R}^4$.

Theo **Ví dụ** của (**3.1**), $\forall \gamma = (u,v,w,t) \in W$ (γ thỏa $v + w - u - t = 0$), ta có biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính $\gamma = \dfrac{u + 2w - t}{2}\alpha_1 + (v - u)\alpha_2 + \dfrac{3t - u - 2w}{2}\alpha_3$.

5.7/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

a) Vấn đề: Cho $W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Tìm một cơ sở cho W.

b) Giải quyết:

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm ma trận dạng bậc thang S_A của A.

S_A có k dòng *không tầm thường* tạo thành các vector $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$.

$C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \}$ là một cơ sở của $W = \langle S \rangle$ và $\dim W = |S| = k = r(A)$.

Ta cũng nói W là *không gian dòng* của ma trận A.

Ví dụ: Trong $\mathbf{R}^4$, cho tập hợp (được mô tả theo các tham số thực a, b, c, d)

$W = \{X = (a + 4b - 2c + 3d, 2a + 7b - 3c + 7d, 2a + b + 4c + 15d, -a - 2b - 5d) \mid a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$

Hãy tìm một tập hợp hữu hạn S của $\mathbf{R}^4$ thỏa $W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$ và tìm một cơ sở cho W.

Dùng cách tách riêng các tham số và đặt mỗi tham số làm thừa số chung, ta có

$$W = \{ X = (a,2a,2a,-a) + (4b,7b,b,-2b) + (-2c,-3c,4c,0) + (3d,7d,15d,-5d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$$
$$= \{ X = a(1,2,2,-1) + b(4,7,1,-2) + c(-2,-3,4,0) + d(3,7,15,-5) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$$

Vậy $W = \langle S \rangle$ với $S = \{\alpha_1 = (1,2,2,-1), \alpha_2 = (4,7,1,-2), \alpha_3 = (-2,-3,4,0), \alpha_4 = (3,7,15,-5)\}$

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 15 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix} \to S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}$$

W có cơ sở là $C = \{ \gamma_1 = (1,2,2,-1), \gamma_2 = (0,1,9,-2), \gamma_3 = (0,0,-1,0) \}$ và $\dim W = |C| = 3$

5.8/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT:

a) Vấn đề: Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^n$.

Tìm một cơ sở cho W.

b) Giải quyết: Giải hệ $AX = \mathbf{O}$ để mô tả không gian nghiệm W.

- Nếu $W = \{\mathbf{O}\}$ thì W có cơ sở (duy nhất) là $\varnothing$ và $\dim W = |\varnothing| = 0$.
- Nếu hệ có vô số nghiệm với k ẩn tự do thì ta mô tả W theo k ẩn tự do đó. Dùng cách tách riêng các ẩn tự do và đặt mỗi ẩn tự do làm thừa số chung, ta có được môt tập sinh D (gồm k vector) cho W. Tập sinh D độc lập tuyến tính (kết quả này đã được chứng minh trong lý thuyết) nên D là *một cơ sở* của W. Ta có $\dim W = |D| = k =$ (Số ẩn tự do của hệ $AX = \mathbf{O}$).

Ví dụ:

a) Cho $V = \{ X \in \mathbf{R}^4 \mid HX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^4$ với $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Ta tìm một cơ sở cho V. Trước hết ta giải hệ $HX = \mathbf{O}$ với $X = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Ta có

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6^* & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -28^* \end{vmatrix} = 840 \neq 0$$

Vậy H khả nghịch và hệ $HX = \mathbf{O}$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = \mathbf{O} = (0,0,0,0)$.
Do đó $V = \{\mathbf{O}\}$ và V có cơ sở là $\varnothing$ với $\dim V = |\varnothing| = 0$.

b) Cho $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \mid AX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^5$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 \end{pmatrix} \in M_{4x5}(\mathbf{R})$.

Ta tìm một cơ sở cho W. Trước ta giải hệ $AX = \mathbf{O}$ với $X = (x,y,z,t,u) \in \mathbf{R}^5$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 & 0 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 & 0 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -5 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Hệ có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do : $y, t, u \in \mathbf{R}$, $x = 5y + 3t - 2u$, $z = u - 4t$.

$W = \{ X = (5y + 3t - 2u, y, u - 4t, t, u) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$

$\quad = \{ X = y(5,1,0,0,0) + t(3,0,-4,1,0) + u(-2,0,1,0,1) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$

$W = \langle D \rangle$ với $D = \{ \delta_1 = (5,1,0,0,0), \delta_2 = (3,0,-4,1,0), \delta_3 = (-2,0,1,0,1) \} \subset \mathbf{R}^5$.

D độc lập tuyến tính nên D là một cơ sở của W và $\dim W = |D| = 3 =$ số ẩn tự do của hệ.

5.9/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN TỔNG:

a) Vấn đề: Cho $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với S, T là các tập hợp con hữu hạn của $\mathbf{R}^n$. Ta có $(V + W) \leq \mathbf{R}^n$. Ta tìm một cơ sở cho $V + W$.

b) Giải quyết: Đặt $Z = S \cup T$ thì $V + W = \langle Z \rangle$. Sử dụng (**5.6**) , ta tìm được một cơ sở cho $V + W$ từ tập sinh Z của nó.

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha = (5,-2,-5,4), \beta = (2,0,-5,3), \gamma = (-4,4,-5,1) \} \subset \mathbf{R^4}$, $V = < S > \leq \mathbf{R^4}$,
$T = \{ \delta = (4,-6,4,1), \varepsilon = (1,6,-8,1) \} \subset \mathbf{R^4}$, $W = < T > \leq \mathbf{R^4}$.

Tìm một cơ sở cho $V + W$.

Đặt $Z = S \cup T = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$ thì $V + W = < Z >$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & -6 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & -12 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & -15 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -32 & 35 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & -17 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 51 & -33 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 2^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 17^* & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V + W$ có cơ sở $E = \{ \lambda = (1,6,-8,1), \mu = (0,2,1,-2), \nu = (0,0,17,-11) \}$

5.10/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN GIAO:

a) Vấn đề: Cho $V = < S > \leq \mathbf{R^n}$ và $W = < T > \leq \mathbf{R^n}$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \} \subset \mathbf{R^n}$ và $T = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \} \subset \mathbf{R^n}$ $(p \geq q)$. Tìm một cơ sở cho $V \cap W$.

b) Giải quyết: Xét $\alpha \in \mathbf{R^n}$. Ta có

$\alpha \in V \cap W \Leftrightarrow (\alpha \in V$ và $\alpha \in W) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, ..., c_p \in \mathbf{R}$, $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_p\alpha_p$ và phương trình

$d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + \ldots + d_q\beta_q = \alpha$ (ẩn số $d_1, d_2, ..., d_q$) có nghiệm thực.

Ta sẽ thấy $c_1, c_2, ..., c_p$ bị ràng buộc bởi một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Giải hệ này để chỉ ra các ẩn tự do và mô tả $\alpha \in V \cap W$ theo các ẩn tự do này. Từ đó ta tìm được một tập sinh độc lập tuyến tính (một cơ sở) cho $V \cap W$.

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha = (-2,4,3,0), \beta = (4,-1,-2,2), \gamma = (-1,4,1,1) \} \subset \mathbf{R^4}$, $V = < S > \leq \mathbf{R^4}$,
$T = \{ \delta = (0,5,1,-1), \varepsilon = (1,5,-1,0), \theta = (3,4,1,0) \} \subset \mathbf{R^4}$, $W = < T > \leq \mathbf{R^4}$.

Tìm một cơ sở cho $V \cap W$.

Ta có $\alpha \in V \cap W \Leftrightarrow (\alpha \in V$ và $\alpha \in W) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists a,b,c \in \mathbf{R}$, $\alpha = a\alpha + b\beta + c\gamma$ và phương trình $r\delta + s\varepsilon + t\theta = \alpha$ (ẩn số r,s,t) có nghiệm thực

Phương trình $r(0,5,1,-1) + s(1,5,-1,0) + t(3,4,1,0) = a(-2,4,3,0) + b(4,-1,-2,2) + c(-1,4,1,1)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ -1 & 0 & 0 & 2b+c \\ 5 & 5 & 4 & 4a-b+4c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & -1 & 1 & 3a+2c \\ 0 & 5 & 4 & 4a+9b+9c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4 & a+4b+c \\ 0 & 0 & 9 & 19a+9b+19c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4^* & a+4b+2c \\ 0 & 0 & 0 & 67a+67c \end{array}\right)$$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow a + c = 0 \Leftrightarrow c = -a$

Vậy $V \cap W = \{ \alpha = a\alpha + b\beta - a\gamma = a(\alpha - \gamma) + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} = < Z >$ với
$Z = \{\lambda = (\alpha - \gamma) = (-1,0,2,-1), \beta = (4,-1,-2,2)\}$ độc lập tuyến tính vì λ không tỉ lệ với β.
Do đó $V \cap W$ có một cơ sở là $Z = \{ \lambda, \beta \}$ và $\dim(V \cap W) = | Z | = 2$.

5.11/ SO SÁNH SỐ VECTOR TRONG MỘT TẬP HỢP ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ TRONG MỘT TẬP SINH VỚI SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ có $\dim W = m$.

a) Nếu S độc lập tuyến tính $\subset W$ thì $|S| \leq m$.

Nếu (S độc lập tuyến tính $\subset W$ và $|S| = m$) thì S là một cơ sở của W.

b) Nếu $\langle S \rangle = W$ thì $|S| \geq m$.

Nếu ($\langle S \rangle = W$ và $|S| = m$) thì S là một cơ sở của W.

c) Nếu ($S \subset W$ và $|S| > m$) thì S phụ thuộc tuyến tính.

d) Nếu ($S \subset W$ và $|S| < m$) thì $\langle S \rangle \neq W$.

Ví dụ:

a) Nếu S độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ thì $|S| \leq \dim\mathbf{R}^4 = 4$.

Nếu (S độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ và $|S| = \dim\mathbf{R}^4 = 4$) thì S là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

b) Nếu $\langle S \rangle = \mathbf{R}^4$ thì $|S| \geq \dim\mathbf{R}^4 = 4$.

Nếu ($\langle S \rangle = \mathbf{R}^4$ và $|S| = \dim\mathbf{R}^4 = 4$) thì S là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

c) Nếu ($S \subset \mathbf{R}^5$ và $|S| > \dim\mathbf{R}^5 = 5$) thì S phụ thuộc tuyến tính.

d) Nếu ($S \subset \mathbf{R}^5$ và $|S| < \dim\mathbf{R}^5 = 5$) thì $\langle S \rangle \neq \mathbf{R}^5$.

5.12/ NHẬN DIỆN CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN VECTOR:

Trong (**5.5**), ta đã nêu ra cách nhận diện một cơ sở cho không gian $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^n$ được gọi là *không gian đầy*). Bây giờ ta giới thiệu cách nhận diện cơ sở cho không gian W mà $W < \mathbf{R}^n$ (W được gọi là *không gian vơi*).

a) Khi chưa biết $\dim W$: Ta dùng định nghĩa (**5.3**) nói về cơ sở.

B là một cơ sở của $W \Leftrightarrow$ ($\langle B \rangle = W$ và B độc lập tuyến tính)

b) Khi đã biết $\dim W = m$: Ta dùng phần a) của (**5.11**).

B là một cơ sở của $W \Leftrightarrow$ ($B \subset W$, B độc lập tuyến tính và $|B| = \dim W = m$)

Ví dụ: Cho $S = \{\alpha = (-2,1,3,0), \beta = (3,4,-1,5)\}$, $T = \{\gamma = (4,9,1,10), \delta = (9,1,-10,5)\} \subset \mathbf{R}^4$

Đặt $W = \langle S \rangle = \{ X = a\alpha + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} \leq \mathbf{R}^4$. Theo (**5.11**), $\dim W \leq |S| = 2$ nên $W \neq \mathbf{R}^4$, nghĩa là $W < \mathbf{R}^4$. Ta giải thích S và T là các cơ sở của W.

Giải thích S là một cơ sở của W (chưa biết $\dim W$) : Do $\langle S \rangle = W$ và S độc lập tuyến tính (α không tỉ lệ với β) nên S là một cơ sở của W và $\dim W = |S| = 2$.

Giải thích T là một cơ sở của W (đã biết $\dim W = 2$):

* $T = \{\gamma, \delta\} \subset W = \langle S = \{\alpha, \beta\} \rangle$ vì các phương trình $c_1\alpha + c_2\beta = \gamma$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha + d_2\beta = \delta$ (ẩn là d_1 và d_2) đều có nghiệm thực là $c_1 = 1, c_2 = 2, d_1 = -3, d_2 = 1$

Các phương trình trên có vế trái như nhau nên có thể giải chung trong một bảng :

$$(\alpha^t\ \beta^t \mid \gamma^t \mid \delta^t) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1^* & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \end{array}$$

* $T = \{ \gamma, \delta \}$ độc lập tuyến tính (γ không tỉ lệ với δ) và $|T| = 2 = \dim W$.

5.13/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho $V, W \le \mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \le V$ thì $\dim W \le \dim V$. Nếu $W < V$ thì $\dim W < \dim V$.

b) Nếu ($W \le V$ và $\dim W = \dim V$) thì $V = W$.

c) $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ nên $\dim(V + W) \le \dim V + \dim W$

d) Suy ra $\dim(V + W) = \dim V + \dim W \Leftrightarrow \dim(V \cap W) = 0 \Leftrightarrow V \cap W = \{\mathbf{O}\}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét lại **Ví dụ** của (**2.5**) mục a), b), c) về các không gian giao và không gian tổng.
Thử lại $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$, ta thấy $2 = 1 + 1 - 0$
$\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K)$, ta thấy $3 = 1 + 2 - 0$
$\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$,ta thấy $3 = 2 + 2 - 1$

b) Xét lại **Ví dụ** của (**2.6**). Do $\{\mathbf{O}\} < W < V < \mathbf{R}^3$ nên
$\dim\{\mathbf{O}\} = 0 < \dim W = 1 < \dim V = 2 < \dim \mathbf{R}^3 = 3$.

c) Nếu ($W \le \mathbf{R}^4$ và $\dim W = \dim \mathbf{R}^4 = 4$) thì $W = \mathbf{R}^4$.

5.14/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho $S = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots, \alpha_m \}$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^n$ với $m < n$.
Đặt $W = < S >$ thì S là một cơ sở của W và $\dim W = | S | = m$ và $W < \mathbf{R}^n$.
Ta có thể thêm $(n - m)$ vector vào S để được một cơ sở B của $\mathbf{R}^n$ và $S \subset B$.
Cách bổ sung: Ta sẽ lấy $(n - m)$ vector từ cơ sở chính tắc $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \}$ thêm vào S.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm ma trận dạng bậc thang S_A của A. S_A có $(n - m)$ cột không bán chuẩn hóa được là các cột thứ $i_1, i_2, ..., i_{n-m}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m} \le n)$
Ta thêm $\{ \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-m}} \}$vào S để có $B = S \cup \{ \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-m}} \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^n$

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{\alpha_1 = (3,1,-2,5), \alpha_2 = (-2,0,4,-3)\}$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ $(m = 2 < n = 4)$

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2^* & 8 & 1 \end{pmatrix}$ có cột 3 và 4 không bán chuẩn hóa được

Đặt $B = S \cup \{ \varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1) \} = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \varepsilon_3 , \varepsilon_4 \}$ thì B là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$

VI. <u>TỌA ĐỘ CỦA VECTOR THEO CƠ SỞ CÓ THỨ TỰ:</u>

Trong mục **VI** này, ta qui định tất cả các cơ sở (được sử dụng) đều *có thứ tự.*

6.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và W có cơ sở $A = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots, \alpha_m \}$.

a) $\forall \alpha \in W$, có duy nhất $c_1 , c_2 , \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m$ (*).
Muốn tìm $c_1 , c_2 , \ldots, c_m$, ta phải giải phương trình vector (*) [theo (**5.6**)].

Ta ký hiệu $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ và $[\,\alpha\,]_A$ gọi là *tọa độ của vector* α *theo cơ sở* A

b) $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}$, $[\,c\alpha\,]_A = c[\,\alpha\,]_A$ và $[\,\alpha \pm \beta\,]_A = [\,\alpha\,]_A \pm [\,\beta\,]_A$.

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^3$ có cơ sở $A = \{\,\alpha_1 = (1,-2,2),\ \alpha_2 = (2,-3,6),\ \alpha_3 = (1,1,7)\,\}$(có thứ tự).

a) Xét $\alpha \in \mathbf{R}^3$ có $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ta có $[\,-5\alpha\,]_A = -5[\,\alpha\,]_A = -5\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$ và

$\alpha = 4\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4(1,-2,2) - (2,-3,6) + 3(1,1,7) = (5,-2,23)$.

b) Tìm $[\,\beta\,]_A$ nếu $\beta = (3,11,35) \in \mathbf{R}^3$. Đặt $[\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$,

nghĩa là $c_1(1,-2,2) + c_2(2,-3,6) + c_3(1,1,7) = (3,11,35)$. Ma trận hóa phương trình trên

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 7 & 35 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 8 & 46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -5 & -31 \\ 0 & 1^* & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 5 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) $[\,\alpha \pm \beta\,]_A = [\,\alpha\,]_A \pm [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$[\,-\sqrt{3}\,\alpha\,]_A = -\sqrt{3}\ [\,\alpha\,]_A = -\sqrt{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

6.2/ <u>MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ:</u>

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và W có các cơ sở $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\,\}$ và $B = \{\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\,\}$.
Lập ma trận $(A \to B) = (\,[\,\beta_1\,]_A\ \ [\,\beta_2\,]_A\ \ \ldots\ \ [\,\beta_m\,]_A\,) \in M_m(\mathbf{R})$.
Ta nói $(A \to B)$ là *ma trận đổi cơ sở từ A qua B.*
[mỗi vector của cơ sở B (đi sau) được lấy tọa độ theo cơ sở A (đi trước)].

<u>Ví dụ:</u>

a) Không gian W có các cơ sở $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\,\}$ và $B = \{\,\beta_1, \beta_2, \beta_3\,\}$ thỏa các hệ thức
$\beta_1 = \pi\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{3}\,\alpha_3$, $\beta_2 = -2\alpha_1 - (\ln 5)\alpha_3$ và $\beta_3 = 4\alpha_1 + e\alpha_2 - (9/7)\alpha_3$.

Ta có $(A \to B) = (\,[\,\beta_1\,]_A\ \ [\,\beta_2\,]_A\ \ [\,\beta_3\,]_A\,) = \begin{pmatrix} \pi & -2 & 4 \\ -1 & 0 & e \\ \sqrt{3} & -\ln 5 & -9/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

b) $\mathbf{R}^2$ có các cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (-2,5), \alpha_2 = (1,-3) \}$ và $B = \{ \beta_1 = (-1, 1), \beta_2 = (6, -17) \}$

Ta có $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ và $\beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2$ bằng cách giải 2 phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \beta_1$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 = \beta_2$ (ẩn là d_1 và d_2) có vế trái như nhau trong một bảng :

$$\begin{array}{c} \\ (\alpha_1^t \ \alpha_2^t \,|\, \beta_1^t \ |\, \beta_2^t) = \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad c_1 \quad c_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -17 \end{array}\right) \\ \quad d_1 \quad d_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \quad c_1 \quad c_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 3 & 4 \end{array}\right) \\ \quad d_1 \quad d_2 \end{array}$$

nên $(A \to B) = ([\beta_1]_A \ \ [\beta_2]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

6.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$ với $\dim W = m$ và W có các cơ sở A, B, C. Khi đó

a) $(A \to B)$ là ma trận vuông cấp m *khả nghịch* và $(A \to B)^{-1} = (B \to A)$.

b) $(A \to A) = I_m$.

c) $(A \to C) = (A \to B).(B \to C)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho không gian W có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ và $\dim W = |A| = 3$. Hiển nhiên

$\alpha_1 = 1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 0.\alpha_3$, $\alpha_2 = 0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3$ và $\alpha_3 = 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3$

nên $(A \to A) = ([\alpha_1]_A \ \ [\alpha_2]_A \ \ [\alpha_3]_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in M_3(\mathbf{R})$.

b) Cho không gian V có các cơ sở A, B, C và $(A \to B) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $(B \to C) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ta có $(B \to A) = (A \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ và

$$(A \to C) = (A \to B).(B \to C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 23 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}.$$

6.4/ <u>CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ THEO CƠ SỞ:</u>

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có các cơ sở A và B.

Khi đó ta có *công thức đổi tọa độ theo cơ sở*

$$\forall \alpha \in W, [\alpha]_A = (A \to B).[\alpha]_B$$

<u>Ví dụ:</u> Không gian W có các cơ sở $A = \{ \alpha, \beta \}$ và $B = \{ \gamma, \delta \}$ thỏa

$(A \to B) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ và $(B \to A) = (A \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

Cho $\varepsilon, \theta \in W$ thỏa $[\varepsilon]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ và $[\theta]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tính $[\varepsilon]_A$ và $[\theta]_B$.

Ta có $[\,\varepsilon\,]_A = (A \to B).[\,\varepsilon]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 57 \end{pmatrix}$

(nghĩa là $\varepsilon = -6\gamma + 5\delta \Rightarrow \varepsilon = 40\alpha + 57\beta$)

Ta có $[\,\theta\,]_B = (B \to A).[\,\theta\,]_A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -61 \end{pmatrix}$

(nghĩa là $\theta = 3\alpha - 8\beta \Rightarrow \theta = -25\gamma - 61\delta$)

6.5/ <u>MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$:</u>

a) $\mathbf{R}^n$ có cơ sở chính tắc $B_o = \{\, \varepsilon_1 = (1,0, ..., 0), \varepsilon_2 = (0,1, ..., 0), ..., \varepsilon_n = (0,0, ..., 1) \,\}$.

$$\forall\alpha \in \mathbf{R}^n, \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n \Leftrightarrow [\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha^t .$$

Chẳng hạn $\alpha = (7, -\sqrt{2}, e, -\pi) \in \mathbf{R}^4$ có $[\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\sqrt{2} \\ e \\ -\pi \end{pmatrix} = \alpha^t$.

b) Giả sử $\mathbf{R}^n$ có các cơ sở $A = \{\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \,\}$ và $B = \{\, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \,\}$.
Ta muốn viết $L = (A \to B)$.

<u>Cách 1:</u> (tìm gián tiếp thông qua cơ sở chính tắc B_o)
Viết $H = (B_o \to A) = (\, [\alpha_1]_{B_o}\ [\alpha_2]_{B_o} \dots [\alpha_n]_{B_o}\,) = (\,\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \dots\ \alpha_n^t\,) \in M_n(\mathbf{R})$.
$K = (B_o \to B) = (\, [\beta_1]_{B_o}\ [\beta_2]_{B_o} \dots [\beta_n]_{B_o}\,) = (\,\beta_1^t\ \beta_2^t\ \dots\ \beta_n^t\,) \in M_n(\mathbf{R})$.
Ta có $L = (A \to B) = (A \to B_o)(B_o \to B) = H^{-1}K$. Ở đây ta tìm L dựa vào H^{-1}.

<u>Cách 2:</u> (tìm trực tiếp theo định nghĩa)
Ta có $L = (A \to B) = (\, [\,\beta_1\,]_A\ \ [\,\beta_2\,]_A\ \dots\ [\,\beta_n\,]_A\,)$. Muốn tìm tọa độ của các vector $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ theo cơ sở A, ta phải giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và n ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\,\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \dots\ \alpha_n^t\,) = H$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $\beta_1^t, \beta_2^t, \dots, \beta_n^t$. Do đó ta có thể giải đồng thời n hệ trên trong cùng một bảng là $\left(\alpha_1^t\ \ \alpha_2^t\ \ \dots\ \ \alpha_n^t \middle|\ \beta_1^t \middle|\ \beta_2^t \middle|\ \dots \middle|\ \beta_n^t\right)$, nghĩa là n hệ trên được viết thành dạng ma trận là $(H \mid K)$ và khi giải xong bằng phương pháp Gauss – Jordan, ta thu được $(\, I_n \mid H^{-1}K)$. Ta có $L = (A \to B) = H^{-1}K$. Ở đây ta tìm $L = H^{-1}K$ mà không cần phải tìm riêng H^{-1}.

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^3$ có các cơ sở $A = \{\, \alpha_1 = (-3,4,6), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (2,-3,-4) \,\}$,
$B = \{\, \beta_1 = (3,4,9), \beta_2 = (2,1,2), \beta_3 = (-7,1,4) \,\}$ và cơ sở chính tắc $B_o = \{\, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \,\}$

a) Viết $L = (A \to B)$.

Cách 1:

$$H = (B_o \to A) = (\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \alpha_3^t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ có } H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ theo sơ đồ sau}$$

$$(H \mid \mathbf{I_3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -6 & -6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) = (\mathbf{I_3} \mid H^{-1})$$

$$K = (B_o \to B) = (\beta_1^t\ \beta_2^t\ \beta_3^t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } L = H^{-1}K = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Cách 2:

$$(H \mid K) = \left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \middle| \ \beta_1^t \middle| \ \beta_2^t \middle| \ \beta_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right) \to (I_3 \mid H^{-1}K) \text{ như sau:}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 1 & -1 & 7 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -24 & -11 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & -1 & -8 & -3 & 4 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 7 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 13 & 4 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1^* & 21 & 7 & -5 \end{array}\right). \text{ Vậy } L = H^{-1}K = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Tìm $\alpha \in \mathbf{R}^3$ nếu $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ta có

$\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 2(-3,4,6) + (0,1,1) - 5(2,-3,-4) = (-16,24,33)$.

c) Tìm $[\,\beta\,]_A$ nếu $\beta = (4,-3,-2) \in \mathbf{R}^3$.

Cách 1: dùng định nghĩa của tọa độ. Đặt $[\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$.

Ma trận hóa phương trình vector trên, ta có $\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \middle| \ \beta^t\right) = (H \mid \beta^t) \to (I_3 \mid H^{-1}\beta^t)$:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} {}^*1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} {}^*1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1^* & 11 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Cách 2: dùng công thức đổi tọa độ theo cơ sở.

Ta có $[\beta]_{B_o} = \beta^t = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ và $[\,\beta\,]_A = (A \to B_o)\,[\beta]_{B_o} = H^{-1}\beta^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$.

d) Xét $\gamma \in \mathbf{R}^3$ có $[\,\gamma\,]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tính $[\,\gamma\,]_A$.

Ta có $[\,\gamma\,]_A = (A \to B)\,[\,\gamma\,]_B = L\,[\,\gamma\,]_B = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 \\ 100 \\ 131 \end{pmatrix}$.

(nghĩa là $\gamma = 6\beta_1 - \beta_3 \Rightarrow \gamma = 79\alpha_1 + 100\alpha_2 + 131\alpha_3$)

6.6/ MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $W < \mathbf{R}^n$:

Cho $W < \mathbf{R}^n$ (nghĩa là $W \le \mathbf{R}^n$ và $\dim W = m < n$). Ta có $B_o = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\} \not\subset W$.
Giả sử W có các cơ sở $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ và $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$.
Ta có $L = (A \to B) = ([\,\beta_1\,]_A \;\; [\,\beta_2\,]_A \;\; \ldots \;\; [\,\beta_m\,]_A)$. Muốn tìm $[\,\beta_j\,]_A$ $(1 \le j \le m)$, ta phải giải m hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và m ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\; \ldots \;\; \alpha_m^t)$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $\beta_1^t, \beta_2^t, ..., \beta_m^t$. Do đó ta có thể giải đồng thời m hệ trên trong cùng một bảng là
$\left(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\; \ldots \;\; \alpha_m^t \,\middle|\, \beta_1^t \,\middle|\, \beta_2^t \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \beta_m^t\right)$.

Khi giải xong hệ trên bằng phương pháp Gauss - Jordan, ta xóa bỏ $(n - m)$ dòng tầm thường ở phía dưới và thu được $L = (A \to B)$ ở các vế bên phải.

<u>Ví dụ:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^4$ nhận $A = \{\alpha_1 = (-1,1,5,0), \alpha_2 = (2,-5,-4,1), \alpha_3 = (-3,0,-2,4)\}$ và $B = \{\beta_1 = (-1,7,16,-5), \beta_2 = (11,-17,3,-4), \beta_3 = (-19,13,15,14)\}$ là các cơ sở.
Ta có $\dim W = |\,A\,| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$ nên $W < \mathbf{R}^4$ và $B_o = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\} \not\subset W$.
Do đó $L = (A \to B) = ([\,\beta_1\,]_A \; [\,\beta_2\,]_A \; [\,\beta_3\,]_A)$. Để tìm $[\,\beta_1\,]_A$, $[\,\beta_2\,]_A$ và $[\,\beta_3\,]_A$, ta giải đồng thời 3 hệ $\left(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\; \alpha_3^t \,\middle|\, \beta_1^t \,\middle|\, \beta_2^t \,\middle|\, \beta_3^t\right)$ (mỗi hệ 3 phương trình, 4 ẩn số):

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & -3 & -1 & 11 & -19 \\ 1 & -5 & 0 & 7 & -17 & 13 \\ 5 & -4 & -2 & 16 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & -2 & 3 & 1 & -11 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & -17 & 11 & 58 & -80 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 5 & -3 & -7 & 23 \\ 0 & 1^* & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & 23 & 46 & -92 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Xóa dòng cuối tầm thường, từ các cột ở vế bên phải ta có

$$L = (A \to B) = ([\beta_1]_A \; [\beta_2]_A \; [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.7/ NHẬN DIỆN MỘT CƠ SỞ DỰA THEO MỘT CƠ SỞ KHÁC:

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \}$ ($\dim W = m$).

Xét tập hợp $B = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \} \subset \mathbf{R}^n$ có $| B | = m$.

a) Nếu có ma trận khả nghịch $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ thì B cũng là một cơ sở của W. Lúc đó $(A \to B) = P^t$.

b) Nếu có ma trận khả nghịch $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ thì B cũng là một cơ sở của W. Lúc đó $(B \to A) = P^t$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^5$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ ($\dim W = 3$).

Giả sử có các tập hợp $B = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$ và $C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \}$ trong $\mathbf{R}^5$ thỏa

$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3$ và $\beta_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3$

$\alpha_1 = 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3$, $\alpha_2 = -\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2\gamma_3$ và $\alpha_3 = -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 4\gamma_3$

Như vậy

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ với } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có $| P | = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$ nên P khả nghịch.

Do đó B và C đều là các cơ sở của W với

$$(A \to B) = (C \to A) = P^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

VII. KHÔNG GIAN VECTOR THỰC TỔNG QUÁT:

Từ cấu trúc không gian vector $\mathbf{R}^n$ trên **R**, ta có thể xây dựng *một cấu trúc không gian vector tổng quát* trên **R**.

7.1. KHÔNG GIAN VECTOR THỰC TỔNG QUÁT:

Cho tập hợp $V \neq \varnothing$ và mỗi phần tử của V gọi là một “ *vector* ”. Giả sử

- Trên V có một phép toán ký hiệu hình thức là + và gọi là *phép cộng vector* ($\forall\alpha, \beta \in V$, xác định duy nhất $\alpha + \beta \in V$).
- Có một phép liên kết từ **R** vào V ký hiệu hình thức là **.** và gọi là *phép nhân số thực với vector* ($\forall c \in \mathbf{R}, \forall\alpha \in V$, xác định duy nhất $c.\alpha \equiv c\alpha \in V$).

Ta nói cấu trúc đại số (V, +, **.**) là *một không gian vector* trên **R** (không gian vector thực) nếu 7 tính chất sau đây được thỏa:

(A_1) Phép (+) *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall\alpha, \beta, \gamma \in V$,
$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ và $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$.

(A_2) $\exists\boldsymbol{\theta} \in V, \forall\alpha \in V, \boldsymbol{\theta} + \alpha = \alpha + \boldsymbol{\theta} = \alpha$. Ta nói θ là “ *vector không* ’’ và ký hiệu $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{O}$. Ta nói **O** là *phần tử trung hòa* của phép (+).

(A_3) $\forall\alpha \in V, \exists\alpha' \in V$ thỏa $\alpha' + \alpha = \alpha + \alpha' = \mathbf{O}$.
Ký hiệu $\alpha' = -\alpha = (-1)\alpha$. Ta nói $(-\alpha)$ là *vector đối* của α.

(A_1), (A_2) và (A_3) là các tính chất riêng của phép (+).

(B_1) $\forall\alpha \in V, 1.\alpha = \alpha$.

(B_2) $\forall\alpha \in V, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.\alpha) = (c.d).\alpha$

(B_1) và (B_2) là các tính chất riêng của phép (.)

(C_1) $\forall\alpha \in V, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).\alpha = c.\alpha + d.\alpha$

(C_2) $\forall\alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbf{R}, c.(\alpha + \beta) = c.\alpha + c.\beta$

(C_1) và (C_2) là các tính chất liên quan giữa phép (+) và phép (.).

Ví dụ:

a) $\mathbf{R}[x] = \{f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n \,/\, n \in \mathbf{N}, a_o, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}\}$ là tập hợp các đa thức thực
Ta có phép cộng (+) tự nhiên hai đa thức thực và phép nhân (**.**) tự nhiên số thực với đa thức thực. (**R**[x], +, **.**) là một không gian vector trên **R**. Phần tử **O** của **R**[x] là đa thức không.$\forall f(x) \in \mathbf{R}[x]$, f(x) có vector đối là đa thức thực $-f(x)$.

b) Với phép cộng (+) tự nhiên hai ma trận thực cùng kích thước và phép nhân (**.**) tự nhiên số thực với ma trận thực, ($M_{m\times n}(\mathbf{R})$, +, **.**) là một không gian vector trên **R**. Phần tử **O** của $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ là ma trận $\mathbf{O}_{m\times n}$. $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, A có vector đối là ma trận thực $-A$.

c) $F(\mathbf{R}) = \{ f \,/\, f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \}$ là tập hợp các hàm số thực từ **R** vào **R**. Ta có phép cộng (+) tự nhiên hai hàm số thực và phép nhân (**.**) tự nhiên số thực với hàm số thực. (F(**R**), +, **.**) là một không gian vector trên **R**. Phần tử **O** của F(**R**) là hàm hằng không.
$\forall f(x) \in F(\mathbf{R})$, f(x) có vector đối là hàm số thực $-f(x)$.

d) $S(\mathbf{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \,/\, a_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}\}$ là 5tập hợp các dãy số thực. Ta có phép cộng (+) tự nhiên hai dãy số thực và phép nhân (**.**) tự nhiên số thực với dãy số thực. (S(**R**), +, **.**) là một không gian vector trên **R**. Phần tử **O** của S(**R**) là dãy số hằng không.
$\forall (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}), (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ có vector đối là dãy số thực $(-a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

e) $\sum(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,/\, a_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \}$ là tập hợp các chuỗi số thực. Ta có phép cộng (+) tự nhiên hai chuỗi số thực và phép nhân (**.**) tự nhiên số thực với chuỗi số thực. ($\sum(\mathbf{R})$, +, **.**) là một không gian vector trên **R**. Phần tử **O** của $\sum(\mathbf{R})$ là chuỗi số hằng không.

$\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \sum(\mathbf{R})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ có vector đối là chuỗi số thực $\sum_{n=0}^{+\infty} (-a_n)$.

7.**2/** **<u>HỆ QUẢ:</u>** Cho không gian vector thực (V, +, .). $\forall \alpha \in V$, $\forall c \in \mathbf{R}$, ta có

a) $c.\alpha = \mathbf{O} \Leftrightarrow (\, c = 0$ hay $\alpha = \mathbf{O}\,)$ b) $c.\alpha \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (\, c \neq 0$ và $\alpha \neq \mathbf{O}\,)$

c) Vector **O** là duy nhất. Đối với mỗi $\alpha \in V$, vector đối $-\alpha$ là duy nhất.

7.**3/** **<u>KHÔNG GIAN VECTOR CON:</u>**

Cho không gian vector (V, +, .) trên **R** và $W \subset V$.

Các phép toán (+) và (.) trên V vẫn được sử dụng trên W.

a) Ta nói W là *một không gian vector con* của V (ký hiệu $W \leq V$) nếu W thỏa các điều kiện sau đây:

* $\mathbf{O} \in W$ (1)

* $\forall \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2)

* $\forall \alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3)

b) Suy ra $W \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4)

c) V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và chính V.

Nếu $W \leq V$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V.

Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu $W < V$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Trong ($\mathbf{R}[x]$, +, **.**), ta có các không gian con thực sự

$\mathbf{R}_n[x] = \{f \in \mathbf{R}[x] \,/\, f$ có bậc $\leq n$ [ký hiệu $\deg(f) \leq n$]$\}$ trong đó $n \in \mathbf{N}$.

$P = \{f \in \mathbf{R}[x] \,/\, f(1) = 0\}$, $Q = \{f \in \mathbf{R}[x] \,/\, f(-1) = f(2)\}$

Khi $m, n \in \mathbf{N}$ và $m < n$ thì $\mathbf{R}_m[x] < \mathbf{R}_n[x]$.

b) Trong ($M_{m \times n}(\mathbf{R})$, +, **.**), ta có các không gian con

$H = \{A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \,/\, a_{11} = 0\}$ và $K = \{A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \,/\, a_{11} = a_{mn}\}$.

c) Trong ($M_n(\mathbf{R})$, +, **.**), ta có các không gian con

$W = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \,/\, A^t = A\}$ và $Z = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \,/\, A$ là ma trận tam giác trên$\}$

d) Trong ($F(\mathbf{R})$, +, **.**), ta có các không gian con thực sự

$C(\mathbf{R}) = \{ f \in F(\mathbf{R}) \,/\, f$ liên tục trên $\mathbf{R} \}$ và

$C^{(n)}(\mathbf{R}) = \{ f \in F(\mathbf{R}) \,/\, f$ có đạo hàm đến cấp n trên $\mathbf{R} \}$ trong đó $n \in \mathbf{N}^*$.

Khi $m, n \in \mathbf{N}^*$ và $m < n$ thì $C^{(n)}(\mathbf{R}) < C^{(m)}(\mathbf{R}) < C(\mathbf{R})$.

e) Trong ($S(\mathbf{R})$, +, **.**), ta có không gian con thực sự

$S_c(\mathbf{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \,/\,$ dãy số thực $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ$\}$

f) Trong ($\sum(\mathbf{R})$, +, **.**), ta có không gian con thực sự

$\sum_c(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \sum(\mathbf{R}) \,/$ chuỗi số thực $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ hội tụ$\}$.

7.4/ MỆNH ĐỀ: (phủ nhận không gian con của V)

Cho không gian vector (V, +, .) trên **R** và $W \subset V$.

Các phép toán (+) và (.) trên V vẫn được sử dụng trên W. Khi đó

a) $W \not\leq V$ (W *không phải là không gian con của* V) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \notin W (5) \\ hay \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W (6) \\ hay \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in R, c\alpha \notin W (7) \end{array}\right.$

b) $W \not\leq V \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W$.

Khi giải thích $W \not\leq V$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.

Ví dụ:

a) $\forall n \in \mathbf{N}$, $W_n = \{f \in \mathbf{R}[x] \,/\, \deg(f) = n\} \not\leq \mathbf{R}[x]$ ($\mathbf{O} \notin W_n$ vì $\deg(\mathbf{O}) = -\infty$).

b) $L = \{A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \,/\, a_{11} > 0\} \not\leq M_{m \times n}(\mathbf{R})$ ($A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ thì $-A \notin M_{m \times n}(\mathbf{R})$)

c) $G = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \,/\, |A| \neq 0\} \not\leq M_n(\mathbf{R})$ ($I_n, -I_n \in G$ nhưng $I_n + (-I_n) = \mathbf{O_n} \notin G$).

d) $T = \{ f \in F(\mathbf{R}) \,/\, f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}\} \not\leq F(\mathbf{R})$ ($g(x) = x^2 \in T$ nhưng $-g(x) = -x^2 \notin T$)

e) $S_d(\mathbf{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \,/$ dãy $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ phân kỳ$\} \not\leq S(\mathbf{R})$ [$(a_n = 0)_{n \in \mathbf{N}} \notin S_d(\mathbf{R})$].

f) $\Sigma_d(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \,/$ chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ phân kỳ$\} \not\leq \Sigma(\mathbf{R})$ [$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n = 0) \notin \Sigma(\mathbf{R})$].

7.5. GHI CHÚ:

Các khái niệm *không gian giao*, *không gian tổng*, *tổ hợp tuyến tính hữu hạn*, *không gian con sinh bởi một tập hợp hữu hạn*, *tập hợp hữu hạn độc lập tuyến tính* (hoặc *phụ thuộc tuyến tính*), *cơ sở và số chiều hữu hạn* trong không gian vector thực tổng quát được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong không gian vector $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) Cho $S = \{\mathbf{1}, x, e^x, \sin x, \ln(x^2 + 1), \arctan x, 1/\sqrt{x^2+1} \} \subset F(\mathbf{R})$.

Giải thích S độc lập tuyến tính trên **R** như sau : Giả sử $a, b, c, d, u, v, w \in \mathbf{R}$ sao cho

$a + bx + ce^x + d\sin x + u\ln(x^2 + 1) + v\arctan x + w/\sqrt{x^2+1} = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (*).

Ta chứng minh $a = b = c = d = u = v = w = 0$.

Chia 2 vế của (*) cho e^x rồi cho $x \to +\infty$, ta có $c = 0$ và xóa ce^x trong (*).

Chia 2 vế của (*) cho x rồi cho $x \to +\infty$, ta có $b = 0$ và xóa bx trong (*).

Chia 2 vế của (*) cho $\ln(x^2 + 1)$ rồi cho $x \to +\infty$, ta có $u = 0$ và xóa $u\ln(x^2 + 1)$ trong (*). Thế $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) vào (*) rồi lần lượt cho $k \to +\infty$, $k \to -\infty$, ta có $a + v\pi/2 = 0 = a - v\pi/2$, nghĩa là $a = v = 0$ và ta xóa a cùng vartanx trong (*).

Cho $x = 0$, ta có $w = 0$ và xóa $w/\sqrt{x^2+1}$ trong (*). Cho $x = \pi/2$, ta có $d = 0$.

Xét $W = \langle S \rangle \leq F(\mathbf{R})$ thì

$W = \{f(x) = a + bx + ce^x + d\sin x + u\ln(x^2 + 1) + v\arctan x + w/\sqrt{x^2+1} \,/\, a,b,c,d,u,v,w \in \mathbf{R}\}$

S là một cơ sở của W vì S là một tập sinh độc lập tuyến tính của W và $\dim W = |S| = 7$.

b) Cho $T = \{\sin 2x, \sin^2 x, \cos^2 x\} \subset U = \{\sin 2x, \cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x\} \subset F(\mathbf{R})$.

Giải thích T độc lập tuyến tính và U phụ thuộc tuyến tính trên **R** như sau:

Giả sử $u, v, w \in \mathbf{R}$ sao cho $u\sin 2x + v\sin^2 x + w\cos^2 x = = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Ta chứng minh $u = v = w = 0$.

Cho $x = 0$, ta được $w = 0$. Cho $x = \pi/2$, ta được $v = 0$. Cho $x = \pi/4$, ta được $u = 0$.

Ta có $0, 1, 1, -1 \in \mathbf{R}$ thỏa $0.\sin 2x + 1.\cos 2x + 1.\sin^2 x + (-1)\cos^2 x = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Xét $H = \langle U \rangle = \langle T \rangle = \{ f(x) = u\sin 2x + v\sin^2 x + w\cos^2 x \,/\, u, v, w \in \mathbf{R}\} \leq F(\mathbf{R})$.

($\langle U \rangle = \langle T \rangle$ vì $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$: một tổ hợp tuyến tính của $\cos^2 x$ và $\sin^2 x$)

T là một cơ sở của H vì T là một tập sinh độc lập tuyến tính của H và $\dim H = |T| = 3$.

U không là một cơ sở của H vì U là một tập sinh phụ thuộc tuyến tính của H.

7.6. CÁC KHÔNG GIAN VECTOR THỰC HỮU HẠN CHIỀU:

a) $\mathbf{R}_n[x]$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ và $\dim \mathbf{R}_n[x] = |B| = n + 1$.

$\mathbf{R}_n[x]$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R}^{n+1}$ về cấu trúc không gian vector.

$f(x) = (a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n) \in \mathbf{R}_n[x]$ được đồng nhất với $\alpha = (a_o, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

b) $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ có một cơ sở chính tắc là $C = \{E_{ij} \,/\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ (E_{ij} là ma trận chỉ có duy nhất một hệ số $\neq 0$ tại vị trí dòng i và cột j và hệ số này là 1) nên $\dim M_{m\times n}(\mathbf{R}) = m.n$.

$M_{m\times n}(\mathbf{R})$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R}^{mn}$ về cấu trúc không gian vector.

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ đươc đồng nhất với

$\alpha = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbf{R}^{mn}$.

c) Khi giải quyết các vấn đề trong các không gian hữu hạn chiều $\mathbf{R}_n[x]$ và $M_{m\times n}(\mathbf{R})$, ta chuyển đổi các vector có liên quan trong $\mathbf{R}_n[x]$ và $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ thành các vector tương ứng trong $\mathbf{R}^{n+1}$ và $\mathbf{R}^{mn}$. Dùng các kỹ năng tính toán quen thuộc trong $\mathbf{R}^{n+1}$ và $\mathbf{R}^{mn}$ để xử lý các vấn đề được yêu cầu. Sau khi thu được các kết quả trong $\mathbf{R}^{n+1}$ và $\mathbf{R}^{mn}$, ta lại chuyển đổi chúng về các dạng tương ứng trong $\mathbf{R}_n[x]$ và $M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

a) Xét tính độc lập hoặc phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp sau trong $\mathbf{R}_3[x]$ và $M_2(\mathbf{R})$:

$H = \{ f_1(x) = -3 + x + 2x^2 + 7x^3, f_2(x) = 1 - 2x + 5x^2 - 4x^3, f_3(x) = 2 + 4x + x^2 + 6x^3 \}$

và $K = \{A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -13 & 24 \\ 13 & -23 \end{pmatrix}\}$.

Ta có $\mathbf{R}_3[x] \equiv \mathbf{R}^4$, $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$H \equiv S = \{ \alpha_1 = (-3,1,2,7), \alpha_2 = (1,-2,5,-4), \alpha_3 = (2,4,1,6) \} \subset \mathbf{R}^4$ và

$K \equiv T = \{ \beta_1 = (3,-4,1,7), \beta_2 = (-2,6,8,-1), \beta_3 = (-13,24,13,-23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Trong **Ví dụ (4.3)**, ta đã thấy S độc lập tuyến tính và T phụ thuộc tuyến tính trên **R**.

Ta suy ra H độc lập tuyến tính và K phụ thuộc tuyến tính.

b) $G = \{g_1(x) = 1 - 2x + ax^2, g_2(x) = 2 + (a - 2)x + x^2, g_3(x) = 2 + (a - 5)x + (a + 1)x^2\}$ (a là tham số thực) có phải là một cơ sở của $\mathbf{R}_2[x]$ không ?

Ta có $\mathbf{R}_2[x] \equiv \mathbf{R}^3$, $G \equiv S = \{\alpha = (1,-2, a), \beta = (2, a - 2,1), \gamma = (2, a - 5, a + 1) \} \subset \mathbf{R}^3$.

Trong **Ví dụ (5.5)**, ta đã thấy S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$. Ta suy ra G là một cơ sở của $\mathbf{R}_2[x] \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

c) $Z = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}\} \subset M_2(\mathbf{R})$.

$U = \langle Z \rangle \leq M_2(\mathbf{R})$. Tìm một cơ sở và chỉ ra số chiều của U.

Ta có $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$Z \equiv S = \{\alpha_1 = (1,2,2,-1), \alpha_2 = (4,7,1,-2), \alpha_3 = (-2,-3,4,0), \alpha_4 = (3,7,15,-5)\} \subset \mathbf{R}^4$

và $U \equiv W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$. Trong **Ví dụ (5.7)**, ta đã thấy W có một cơ sở là

$C = \{\gamma_1 = (1,2,2,-1), \gamma_2 = (0,1,9,-2), \gamma_3 = (0,0,-1,0)\}$. Ta suy ra U có một cơ sở là

$T = \{B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ và $\dim U = |T| = 3$.

d) $\mathbf{R}_2[x]$ có các cơ sở là

$G = \{g_1(x) = -3 + 4x + 6x^2, g_2(x) = x + x^2, g_3(x) = 2 - 3x - 4x^2\}$ và

$H = \{h_1(x) = 3 + 4x + 9x^2, g_2(x) = 2 + x + 2x^2, g_3(x) = -7 + x + 4x^2\}$.

Viết $P = (G \to H)$.

Ta có $\mathbf{R}_2[x] \equiv \mathbf{R}^3$, $G \equiv A = \{\alpha_1 = (-3,4,6), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (2,-3,-4)\}$ và

$H \equiv B = \{\beta_1 = (3,4,9), \beta_2 = (2,1,2), \beta_3 = (-7,1,4)\}$.

Trong **Ví dụ (6.5)**, ta đã có $L = (A \to B) = ([\beta_1]_A \ [\beta_2]_A \ [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Ta suy ra $P = (G \to H) \equiv L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

e) $V \leq M_2(\mathbf{R})$, $\dim V = 3$ và V có các cơ sở

$Z = \{A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\}$ và

$T = \{B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 11 & -17 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -19 & 13 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}\}$. Viết $Q = (Z \to T)$.

Ta có $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$Z \equiv A = \{\alpha_1 = (-1,1,5,0), \alpha_2 = (2,-5,-4,1), \alpha_3 = (-3,0,-2,4)\} \subset \mathbf{R}^4$

$T \equiv B = \{\beta_1 = (-1,7,16,-5), \beta_2 = (11,-17,3,-4), \beta_3 = (-19,13,15,14)\} \subset \mathbf{R}^4$.

$V \equiv W \leq \mathbf{R}^4$ trong đó W có các cơ sở là A và B.

Trong **Ví dụ (6.6)**, ta đã có $L = (A \to B) = ([\beta_1]_A \ [\beta_2]_A \ [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ta suy ra $Q = (Z \to T) \equiv L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
