TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

ĐỀ THI CUỐI HỌC KÌ – MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2009)

Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Bài 1: (2,0 điểm).

a) Cho $A \in M_n(R)$. Chứng minh rằng A khả nghịch khi và chỉ khi adj(A) khả nghịch (trong đó adj(A) là ma trận phó của A).

b) Cho $A, B \in M_n(R)$. Chứng minh rằng AB khả nghịch khi và chỉ khi cà A và B cùng khả nghịch.

Bài 2: (2,0 điểm). Trong R^4 cho các vectơ $u_1 = (1,1,2,1)$, $u_2 = (1,2,3,1)$, $u_3 = (2,3,4,5)$ và W là không gian con của R^4 sinh bởi các vectơ u_1, u_2, u_3.

a) Chứng minh rằng tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Tìm giá trị của tham số m để vectơ $u = (1, -3, m, m-1)$ thuộc W. Với giá trị của m vừa tìm được, hãy xác định $[u]_B$.

Bài 3: (2,5 điểm). Cho $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của R^3 sao cho ma trận chuyển cơ sở từ B sang cơ sở chính tắc B_o của R_3 là $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Hãy xác định $[u]_B$, với $u = (2,1,-3)$.

b) Hãy xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở B.

Bài 4: (3,5 điểm). Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^4 \to R^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + 2z + t, x + 2y + z + 3t, x - 2y + 5z - 5t).$$

a) Hãy xác định một cơ sở của Im f và một cơ sở của Ker f.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $B = \{u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (0,1,0,1),\ u_3 = (1,1,0,0), u_4 = (1,0,1,1)\}$ (của R^4) và $B' = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,3)\}$ (của R^3).

- - - HẾT - - -

Bài 1: a) A khả nghịch $\leftrightarrow$ $|A| \neq 0$. Mà $|A|.|A^{-1}| = |I_n| = 1 \rightarrow |A^{-1}| \neq 0$ (1).

Ta có: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}|\text{adj}(A)|$. (2)

(1) và (2) $\rightarrow$ $|\text{adj}(A)| \neq 0$ $\rightarrow$ adj(A) khả nghịch.

Vậy: A khả nghịch $\leftrightarrow$ adj(A) khả nghịch.

b) AB khả nghịch $\leftrightarrow$ $|AB| \neq 0 \leftrightarrow |A|.|B| \neq 0 \leftrightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \text{A khả nghịch.} \\ \text{B khả nghịch.} \end{cases}$

Vậy: AB khả nghịch $\leftrightarrow$ A và B cùng khả nghịch.

Bài 2: a) Ta có: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ r(A) = 3 (bằng số vectơ) nên B độc lập tuyến tính.

Mà $B \subset W$, $\dim W = 3$ $\rightarrow$ B là cơ sở của W.

b) Xét $u = (1, -3, m, m-1)$ ta có:

$$\left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \;\middle|\; u^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & m \\ 1 & 1 & 5 & m-1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m+7 \\ 0 & 1 & 0 & m-2 \\ 0 & 0 & 1 & -m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 4m+4 \end{array}\right).$$

$\rightarrow$ u thuộc W $\leftrightarrow$ Hệ có nghiệm $\leftrightarrow$ $4m + 4 = 0 \leftrightarrow m = -1$.

Suy ra: $[u]_B = \begin{pmatrix} m+7 \\ m-2 \\ -m-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bài 3: Ta có: $P = (B \rightarrow B_o) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $u = (2,1,-3)$.

a) $[u]_B = (B \rightarrow B_o)[u]_{B_o} = (B \rightarrow B_o).u^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $(P|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow (B_o \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ $(B_o \rightarrow B) = \left([u_1]_{B_o} \quad [u_2]_{B_o} \quad [u_3]_{B_o}\right) = \left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T\right) = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Suy ra: $B = \{u_1 = (7,-1,-4);\ u_2 = (4,-1,-2);\ u_3 = (-5,1,3)\}$

Bài 4: a) Ta có ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở chính tắc của R^4 và R^3 là:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3t + h; t - 2h; t; h)$; $t, h \in R$

Nghiệm căn bản là: $u = (1,-2,0,1)$ và $v = (-3,1,1,0)$.

Tập hợp $C = \{u, v\}$ là cơ sở của Kerf.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Tập hợp $D = \{s = (1,1,1); w = (0,1,-3)\}$ là cơ sở của Imf.

b) Ta có ma trận mở rộng sau: $\left(v_1^T \quad v_2^T \;\middle|\; f(u_1)^T \quad f(u_2)^T \quad f(u_3)^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 16 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 19 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -14 & -6 \end{array}\right)$. Vậy: $[f]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 1 & 19 & 9 \\ 1 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

- - - HẾT - - -

Ivanpham