TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ B1

(Học kỳ I, Năm học 2014-2015)

Thời gian làm bài: 90 phút (*Sinh viên không được sử dụng tài liệu*).

Bài 1 (*2,0 điểm*). Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1; \\ x_1 + (m-1)x_2 + 2x_3 = 3-m. \end{cases}$$

Bài 2 (*3,0 điểm*). Cho $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 3, 4)$, $u_3 = (2, -1, 2)$ và $u = (-2, 5, 1)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định tọa độ của vectơ u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Xác định ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của $\mathbb{R}^3$.

c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bài 3 (*2,0 điểm*). Tìm cơ sở và chiều cho không gian nghiệm W của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + 3x_6 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 + 5x_6 = 0. \end{cases}$$

Bài 4 (*2,0 điểm*). Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+5z,\ x+3y-3z).$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\mathrm{Im}f$ và một cơ sở của không gian $\mathrm{Ker}f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Bài 5 (*1,0 điểm*).

a) Tìm một ma trận $A \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho $A^2 = -I_2$.

b) Chứng minh rằng không tồn tại ma trận $B \in M_3(\mathbb{R})$ sao cho $B^2 = -I_3$.

(trong đó, I_n là ma trận đơn vị cấp n).

—HẾT—