# TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM
## Đề thi cuối học kỳ 1 - MÔN ĐẠI SỐ B1

***Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2010)***

***Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)***

------------------------------

**Bài 1**: *(1 điểm).* **Kiểm tra tập hợp nào sau đây là không gian con của $R^2$?**

a) $W = \{(x,y) \in R^2 \mid 2x = 3y\}$.

b) $W' = \{(x,y) \in R^2 \mid x + y = xy\}$.

**Bài 2**: *(3 điểm).* **Cho W là không gian con của không gian $R^4$ sinh bởi các vectơ $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,3)$, $u_3 = (1,3,4,2)$, $u_4 = (1,2,1,-3)$.**

a) **Chứng minh tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W và xác định $[u]_B$.**

b) **Cho $u = (m, m - 1, 2m, m - 2) \in R^4$. Hãy tìm giá trị của m để $u \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy biểu diễn vectơ u dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, u_3$.**

**Bài 3**: *(3 điểm).* **Cho $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là hai cơ sở của $R^3$ sao cho $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,-2,0)$, $u_3 = (2,1,3)$ và ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' là:**

$$(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) **Hãy xác định cơ sở B'.**

b) **Cho $u \in R^3$ sao cho $[u]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hãy xác định $[u]_{B'}$.**

**Bài 4**: *(3 điểm).* **Cho toán tử tuyến tính $f \in L(R^3)$ xác định bởi:**

$$f(x,y,z) = (x - y + z,\ x + 2y - 2z,\ x - 3y + 3z).$$

a) **Tìm một cơ sở của Im f và một cơ sở của Ker f.**

b) **Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $B = \{(1,0,1), (1,-2,0), (2,1,3)\}$ của $R^3$.**

**--- HẾT ---**

**Bài 1:**

a) $W = \{(x,y) \in R^2 \mid 2x = 3y\}$.

Ta có $0 = (0,0) \in W$ nên $W \neq \varnothing$. Với mọi $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2) \in W$, ta có:

$\begin{cases} 2x_1 = 3y_1 \\ 2x_2 = 3y_2 \end{cases}$ Do đó: $\begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 3(y_1 + y_2) \\ 2\alpha x_1 = 3\alpha y_1 \end{cases}$

Suy ra: $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$, $\forall \alpha \in R$. Vậy W là không gian con của $R^2$.

b) $W' = \{(x,y) \in R^2 \mid x + y = xy\}$.

Ta có $u = (2,2) \in W'$ nhưng $2u = (4,4) \notin W'$ nên W' không là không gian con của $R^2$.

**Bài 2:**

a) Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ r(A) = 3 (bằng số vectơ) nên B độc lập tuyến tính.

Gọi u = (a,b,c,d) là một vectơ bất kỳ trong $R^4$. Xét hệ với dạng ma trận hóa:

$$(u_1^T \; u_2^T \; u_3^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 3 & 4 & c \\ 1 & 3 & 2 & d \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a + b - c \\ 0 & 1 & 0 & a - 3b + 2c \\ 0 & 0 & 1 & 2b - a - c \\ 0 & 0 & 0 & d - 2a + 4b - 3c \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ $d - 2a + 4b - 3c = 0$ (1).

Với điều kiện (1) $\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ u là tổ hợp tuyến tính của B.

Vậy: B là cơ sở của W.

Suy ra:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a + b - c \\ a - 3b + 2c \\ 2b - a - c \end{pmatrix}$$

b) Với u = (m, m – 1, 2m, m – 2). Xét hệ với dạng ma trận hóa:

$$(u_1^T \; u_2^T \; u_3^T \; u_4^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 3 & 2 & m - 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 2m \\ 1 & 3 & 2 & -3 & m - 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2m + 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -m - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 - 3m \end{array}\right)$$

$u \in W \Leftrightarrow -6 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Với m = – 2 ta có: $[u]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = -u_1 - u_2$.

**Bài 3:**

a) Xét ma trận mở rộng:

$$(u_1^T \; u_2^T \; u_3^T \mid u_{1o}^T \; u_{2o}^T \; u_{3o}^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (B \to B_o) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B \to B_o)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có: $(B \to B') = (B \to B_o)(B_o \to B')$

$$\Rightarrow (B_o \to B') = (B \to B_o)^{-1}(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -8 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (B_o \to B') = ([u_1']_{Bo}\ \ [u_2']_{Bo}\ \ [u_3']_{Bo}) = (u_1'^T\ \ u_2'^T\ \ u_3'^T) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -8 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vậy: Tập hợp $\{u_1' = (4,-1,4),\ u_2' = (1,-5,-2),\ u_3' = (0,-8,-5)\}$ là cơ sở của B'.

b) $$(B' \to B) = (B \to B')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có: $$[u]_{B'} = (B' \to B)[u]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -11 \end{pmatrix}$$

**Bài 4:**

a) Ta có ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở chính tắc của $R^3$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm dạng $(x_1,x_2,x_3) = (0,t,t)\ \ \forall t \in R$.
$\Rightarrow$ Nghiệm căn bản là $u = (0,1,1)$.
$\Rightarrow$ $B = \{u = (0,1,1)\}$ là cơ sở của Ker f.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp $C = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (0,3,-2)\}$ là cơ sở của Im f.

b) $B = \{u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (1,-2,0),\ u_3 = (2,1,3)\}$.
$f(u_1) = (2,-1,4)$; $f(u_2) = (3,-3,7)$; $f(u_3) = (4,-2,8)$.
Ta có ma trận mở rộng sau:

$$(u_1^T\ \ u_2^T\ \ u_3^T \mid f(u_1)^T\ \ f(u_2)^T\ \ f(u_3)^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -26 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} -11 & -26 & -22 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

**--- HẾT ---**

Ivanpham