TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN
UTN-FRC

UTN Facultad Regional Córdoba

TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN

SISTEMAS DE PROCESAMIENTO DE DATOS

Nivelación

Material teórico

V.0.1

Índice

1. MODULO 1: Promedios y Porcentajes..3
Promedio o Media Aritmética..4
Cálculo de promedios 4
Porcentajes...5
División de números enteros..6
Elementos en una división 6
Cómo resolver un ejercicio de división de 1 cifras 7
Cómo resolver un ejercicio de división de 2 cifras 7
Logaritmos 10
Propiedades de los logaritmos..11
Qué significa logaritmos naturales o neperianos en Matemáticas 12
2. MODULO 2: Lógica Matemática 13
Concepto de Lógica Matemática 14
Proposiciones lógicas 14
Conectivos Lógicos...16
Proposiciones Condicionales...19
Tautología, Contradicción y Contingencia 22
3. MODULO 3: Teoría de Conjuntos..24
Conjuntos (concepto)...25
Determinación de un conjunto 25
Conjuntos numéricos 26
Igualdad de conjuntos..26
El conjunto universal..26
Inclusión de conjuntos o subconjuntos 26
Conjunto vacío...27
Operaciones con conjuntos 27
Leyes o Teoremas 30

4. MODULO 4: Algebra de Boole 31
Operaciones del Algebra de Boole 33
Compuertas Lógicas 34
Suma booleana 34
Multiplicación booleana 35
Forma canónica " Suma de miniterminos" 36
Representación con compuertas lógicas 38
Bibliografía 39

MÓDULO 1: PROMEDIOS Y PORCENTAJES

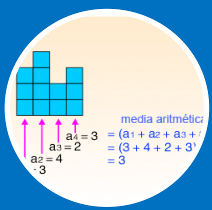
Objetivo Principal

- Orientar al estudiante a reconocer que un conjunto de datos, puede tener un representante llamada PROMEDIO y un PORCENTAJE.
- Repaso de operaciones matemáticas. Divición. Logaritmos

Objetivos Específicos

- Ordenar datos recopilados en cierto entorno.
- Aplicar cada una de las definiciones de los promedios y porcentajes para conocer y resolver problemas aplicados a determinada realidad o situación específica.
- Analizar y aplicar los procedimientos de proporcionalidad como la regla de tres simple y el cálculo de porcentajes, en la resolución de problemas relacionados a la vida cotidiana.
- Operaciones de divición de número enteros para utilizarla posteriormente en traspaso de bases numéricas.

Cuadro 1: Elaboración propia



IMPORTANCIA DE LOS PROMEDIOS

El número promedio representa a la mayoría y resulta de utilidad cuando se quiere conocer:

Establecimiento educativo: promedio de calificaciones de un estudiante por materia, promedio de padres asistentes a una reunión, promedio de asistencia, entre otros. **Instituciones de salud**: número de pacientes en promedio diarios, el numero de pacientes heridos en promedios diarios, el promedio de pacientes atendidos por cada médico, promedio de gastos por día, entre otros. **Gobierno**: La cantidad de personas que diariamente utilizan el transporte masivo en promedio, personas que en promedio visitan los hospitales, la cantidad de personas que en promedio pagan impuestos, la cantidad de vehículos que en promedio circulan en la ciudad.

IMPORTANCIA DE LOS PORCENTAJES

Cantidad que representa una parte respecto de un total que se considera dividido en cien unidades:

Tasa de Interés: para medir el rendimiento de cuentas corrientes bancarias o cajas ahorro ó al solicitar un crédito.

Encuestas realizadas: Para medir los niveles alcanzados de los datos consultados.

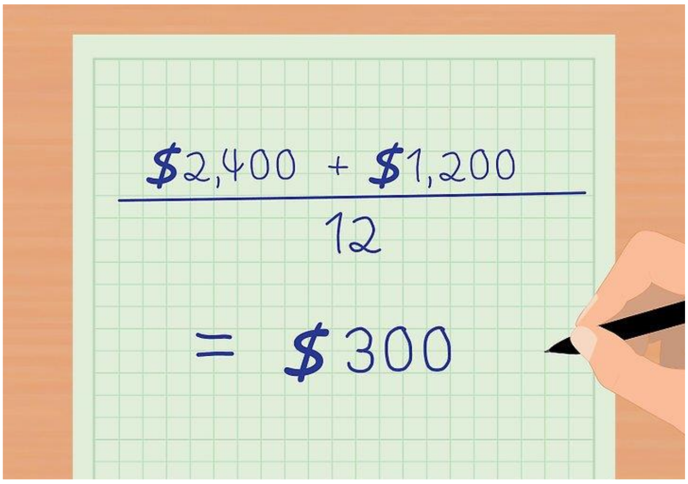
En el Comercio: para conocer los descuentos o incrementos realizados a determinados productos o servicios.

En la Tecnología: para ver el avance en la descarga de archivos en la red o en un computador; espacio libre o utilizado en la unidad de almacenamiento de datos, entre otros.

Cuadro 2: Elaboración propia

1. PROMEDIO O MEDIA ARITMÉTICA

En la vida cotidiana, es común escuchar las siguientes expresiones: "El sueldo promedio de una persona es de $15000"; "Tengo 8 de promedio en Matemáticas"; "La velocidad promedio de Fangio en el Gran Prix de Alemania fue 190 km/h". Lo que sugiere, la necesidad de determinar un valor, que se encuentra entre el mayor y menor de ciertas cantidades que indique un valor representativo, a éste se le llama "promedio".



PROMEDIO

En general: el promedio se usa en todas las actividades de la vida, el número promedio representa a la mayoría y permite calcular que va a acontecer en forma general, por ejemplo, con la edad promedio de los trabajadores, con las preferencias de los empleados de la empresa.

Cuadro 3: Elaboración propia

El promedio es un número representativo de un conjunto de datos numéricos finitos numerables. Está comprendido entre el menor y el mayor valor de los datos.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\ldots < a_n$$

Entonces,

$$\mathbf{a_1 < \ PROMEDIO \ < a_n}$$

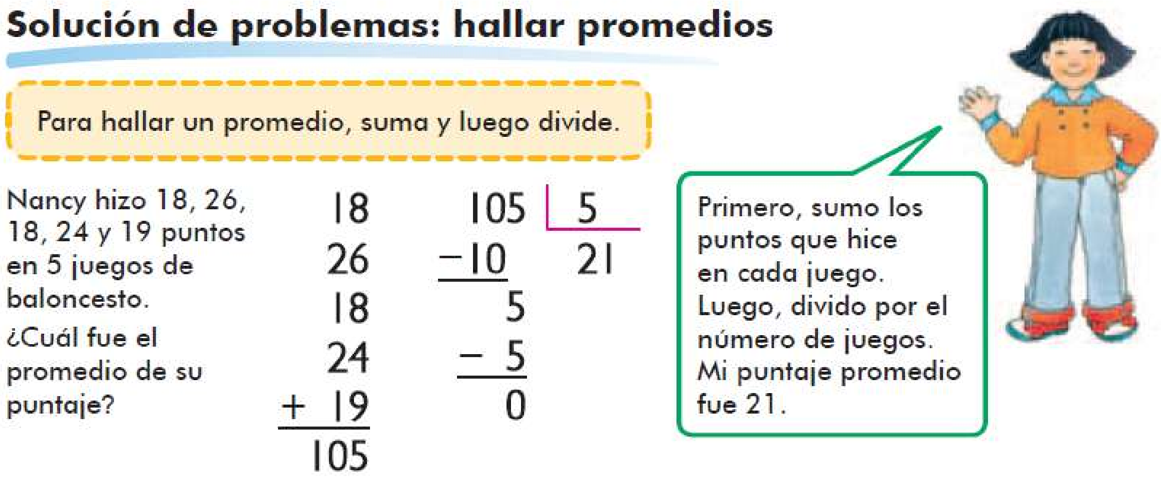
2. CÁLCULO DE PROMEDIOS

Dados los números:

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\ldots < a_n$, se procede a calcular los promedios

Promedio = Suma de cantidades / Número de cantidades

Promedio = $(a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_n) / n$



3. PORCENTAJES

El porcentaje es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes. También se le llama comúnmente tanto por ciento, donde *por ciento* significa «de cada cien unidades».

Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el *tanto* por ciento de una cantidad, donde *tanto* es un número, se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada cien de esa cantidad. El porcentaje se denota utilizando el símbolo %, que matemáticamente equivale al factor 0,01.

Por ejemplo, «treinta y dos por ciento» se representa mediante 32 *%* y significa ‘treinta y dos de cada cien’. También puede ser representado:

y, operando: El 32 % de 2000, significa la parte proporcional a 32 unidades de cada 100 de esas 2000, es decir: 640 unidades en total.

PORCENTAJE

Un porcentaje es una parte de algo referida a un todo, cuando ***ese todo es cien***.

Cuando se dice "por ciento" en realidad es "por cada 100". Un porcentaje es un tipo de regla de tres simple en el que una de las cantidades es 100.

Es el lenguaje matemático más presente en la vida real. En los comercios, informaciones periodísticas o en análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

Cuadro 4: Elaboración propia

Fórmula

% = (A x 100) / *total*

El valor de un porcentaje es siempre relativo a la cantidad de referencia dependiendo su valor absoluto correspondiente del valor de ella.

4. DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Objetivo

Repasar operaciones básicas, como ser, la división de números enteros.

Introducción

Se realizará un repaso general de cómo se realiza la división con números enteros únicamente.El motivo es ejercitar esta operación, particularmente con divisiones por 2; 8 y 16.

Estas operaciones ceden con posterioridad, aprender una metodología que permite realizar el traspaso de una base numérica a otras bases numéricas utilizadas en ingeniería.

Elementos en una división

Primero debemos reconocer las diferentes partes que componen la operación de la división.

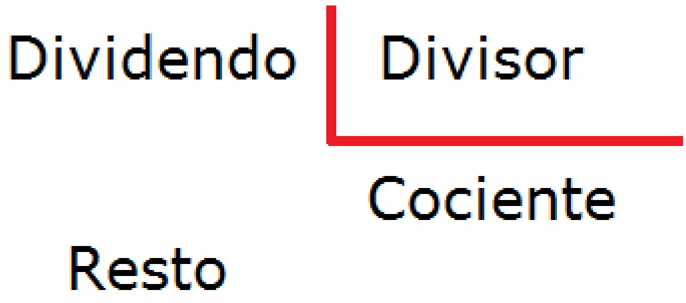


Imagen 1: Extraída de Smartik

- Dividendo: Es el número que hay que dividir.
- Divisor: Es el número que divide al dividendo.
- Cociente: Es el resultado de la división.
- Resto: Es lo que sobra de la división.

Cómo resolver un ejercicio de división de 1 cifras

En esta operación de dividir un número entero cualquiera sea, por 2, lo importante de tener en cuenta, para futuros estudios de la materia, son los restos parciales de cada división realzada. Se recomienda realizar las operaciones utilizando lápiz y papel.

Solo se necesita recordar las tablas de multiplicación y recordar cómo se restan 2 números.

9 | 2 1 4	4 | 2 0 2	2 | 2 0 1

Tabla 1: Elaboración propia

La operación finaliza, cuando el resto es <= divisor.

No es necesario continuar con los números fraccionarios de la operación de la división para el desarrollo de los temas posteriores de la materia.

Cómo resolver un ejercicio de división de 2 cifras

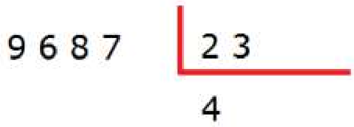
Ahora tenemos que seguir estos pasos:

1. Tomar las primeras cifras del dividendo, el mismo número de cifras que tenga el divisor. Si el número que se ha tomado del dividendo es más pequeño que el divisor se tiene que tomar la siguiente cifra del dividendo.

En este ejemplo se quiere dividir 9687 entre 23. El divisor (23) tiene 2 cifras por lo tanto tendremos que tomar las 2 primeras cifras del dividendo (96).

Como 96 es mayor que 23 se puede dividir.

2. Divide el primer número del dividendo (o los dos primeros números si en el paso anterior se ha tenido que tomar otra cifra más) **entre la primera cifra del divisor**. Se escribe el resultado de esa división en la parte del cociente.

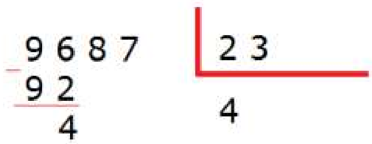


La primera cifra del dividendo es 9 y la primera del divisor es 2, por lo tanto tenemos que dividir 9 entre 2

9 / 2 = 4

Escribimos el 4 en el cociente.

3. Multiplica la cifra del cociente por el divisor, el resultado escríbelo debajo del dividendo y réstalo. Si no se puede porque el dividendo es más pequeño tendrás que escoger un número más pequeño en el cociente hasta que se pueda restar.



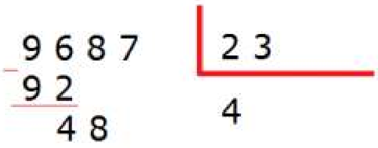
Multiplicamos el cociente (4) por el divisor (23):

4 x 23 = 92

Escribimos el resultado de la multiplicación debajo del dividendo (96) y restamos los dos números:

96 – 92 = 4

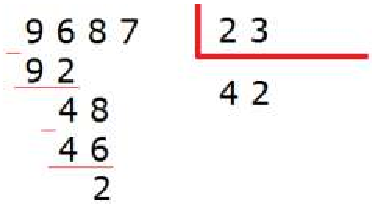
4. Una vez hecha la resta baja la cifra siguiente del dividendo y se vuelve a repetir los pasos desde el punto 2, hasta que no queden más números en el dividendo.



Ahora se baja la siguiente cifra del dividendo (8).

Ahora se tiene que dividir 48 entre 23 repitiendo los mismos pasos que antes.

¿Sabría continuar tú solo?



Dividimos 48 entre el divisor:

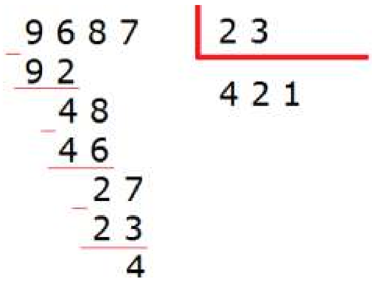
48 / 23 = 2

Se escribe el 2 en el cociente y lo multiplicamos por el divisor:

2 x 23 = 46.

Se escribe el 46 debajo del dividendo y se resta:

48 – 46 = 2



Se baja la siguiente cifra: el 7.

Ahora se tiene que dividir 27 entre 23:

27 / 23 = 1

Se escribe el 1 en el cociente y se lo multiplica por el divisor:

1 x 23 = 23

Ahora se resta 27 – 23 = 4

Como ya no quedan más cifras en el divisor y ya se ha terminado de hacer la división de 2 cifras.

El resultado es 421 y el resto es 4.

¿Has logrado recordar cómo hacer ejercicios de división de 2 cifras?

5. LOGARITMOS

Logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para que de dicho número.

$$log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

Logaritmo de un número (P) es el exponente (x) al que hay que elevar la base (a) para que nos de dicho número (P).

La base tiene que ser positiva y distinta de 1

$$a > 0 \,; a \neq 1$$

$log_a P$ se lee logaritmo en base a de P

Ejemplos

$$log_2 8 = 3$$

(Logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3) pues 3 es el exponente al que hay que elevar 2 para que de 8 ➔ 2^3=8.

$$log_2 \frac{1}{8} = -3$$

(Logaritmo en base 2 de 1/8 es igual a -3) pues -3 es el exponente al que hay que elevar 2 para que de 1/8➔ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

$$log_{10} 10000 = 4$$

(Logaritmo en base 10 de 10000 es igual a 4) pues 4 es el exponente al que hay que elevar 10 para que de 10000 ➔ $10^4 = 10000$

6. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Es importante recordar las siguientes **propiedades** en todo momento.

Logaritmo de un producto	$log_a(m.n) = log_a m + log_a n$
Logaritmo de un cociente	$log_a\left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n$
Logaritmo de una potencia	$log_a m^r = r.log_a m$
Logaritmo de una raíz	$log_a \sqrt[n]{m} = log_a m^{1/n} = \frac{1}{n} log_a m$
Logaritmo de uno	$log_a a = 1$
Cambio de base	$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$
Regla de la cadena	$log_d a = log_b a . log_c b . log_d c$

Tabla 2: Elaboración propia

Se recomienda particular atención en la propiedad de **Logaritmo de una potencia.**

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia

$$log_a(P^n) = n.log_a P \qquad ; \qquad Ln(P^n) = n.LnP$$

Ejemplo

$$\ln \frac{x^2 \cdot y \cdot (m+n)}{m \cdot n} =$$

$$= \ln \left[x^2 \cdot y \cdot (m+n)\right] - \ln (m \cdot n) =$$

$$= \ln x^2 + \ln y + \ln (m+n) - (\ln m + \ln n) =$$

$$= 2\ln x + \ln y + \ln (m+n) - \ln m - \ln n$$

Qué significa logaritmos naturales o neperianos en Matemáticas

Los logaritmos naturales o logaritmos neperianos son los que tienen base e. Se representan por ln (x) o L(x).

Los logaritmos neperianos deben su nombre a su descubridor John Neper y fueron los primeros en ser utilizados.

El logaritmo neperiano de x (ln x) es la potencia a la que se debe **elevar e** para obtener **x**.

Propiedades

$\ln 1 = 0$	$\boldsymbol{e^0 = 1}$

Ejemplo 1

Aplicando las propiedades de los logaritmos generales, más estas propiedades particulares de los logaritmos neperianos, se puede realizar lo siguiente:

$$\boldsymbol{ln \frac{1}{e^5} = -5}$$

Debe lograr este resultado utilizando la propiedad del **logaritmo de un cociente.**

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{ln\ 2^4 = 2.77}$$

Se puede demostrar que utilizando la propiedad de **logaritmo de una potencia**, se llega al mismo resultado.

$$\boldsymbol{4.\, ln\ 2 = 4\ x\ 0.69 = 2.77}$$

MÓDULO 2: LÓGICA MATEMÁTICA

Objetivo Principal	• Proporcionar al estudiante de los elementos básicos y conceptos de la lógica matemática, necesarios para el estudio más profundo de los fundamentos de la Programación.
Objetivos Específicos	• Enunciar los constituyentes de un lenguaje formal a través de estructuras lógicas • enlazar Proposiciones simples y compuestas a través de conectivos lógicos • Enunciar las principales reglas de inferencia de la Lógica Matemática • Distinguir entre razonamientos válidos y razonamientos inválidos • Construir formalizaciones lógicas en las matemáticas

Cuadro 5: Elaboración propia

La *lógica matemática* cuestiona los conceptos y las reglas de deducción que son utilizadas en las matemáticas y esto constituye a la lógica una verdadera matemática. Expone las leyes del raciocinio correcto, y también verdadero. Para eso estudia cómo se deben enlazar las proposiciones (enunciados) que se emplean para pensar a través de conectivos lógicos.

Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad, como por ejemplo expresar una idea, tarea que se hace en todo momento.

1. CONCEPTO DE LÓGICA MATEMÁTICA

 	Es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea: ■ En matemáticas para demostrar teoremas; ■ En ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; ■ En las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; ■ En las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas.

Tabla 3: Elaboración propia

2. PROPOSICIONES LÓGICAS

Al comunicarnos, lo hacemos expresando proposiciones. Una proposición o enunciado (declaración verbal) es una oración declarativa de la cual puede decirse que es falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. En tal condición, se dice que la Lógica es bivalente V o F. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Toda proposición consta de tres partes: un sujeto, un verbo y un complemento referido al verbo. La proposición es un elemento fundamental de la Lógica Matemática.

Se clasifican en proposiciones simples, las cuales se denotan con letras minúsculas y en proposiciones compuestas, las cuales son proposiciones simples unidas por conectivos lógicos y se denotan con letras mayúsculas.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica la razón por la cual algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

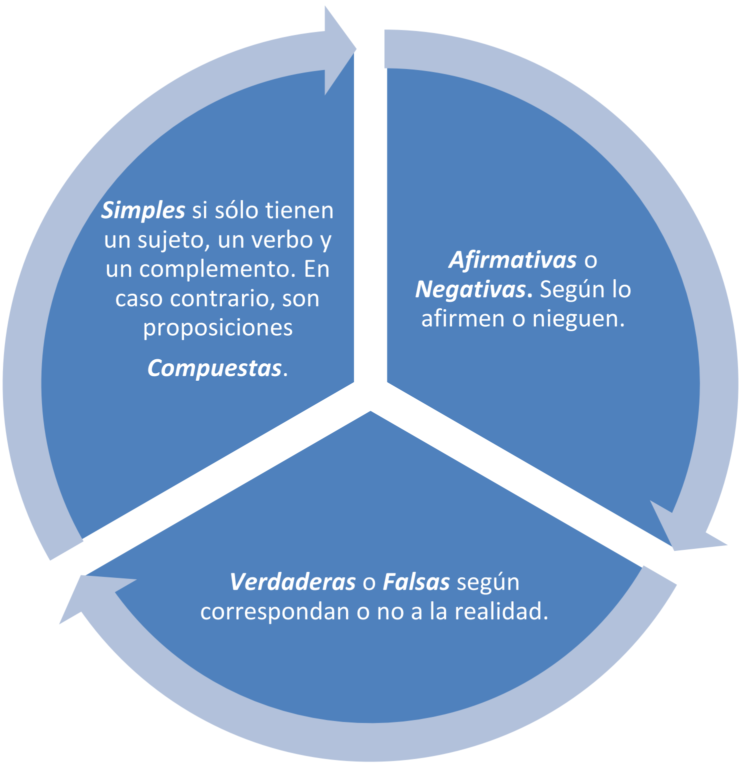
Ejemplos:

p: Francia se encuentra en Europa.	q: 15-6 = 9	r: 2x -3 > 7
s: Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año?	t: Hola ¿cómo estás?	w: ¡Cómete esa fruta!

Cuadro 6: Elaboración propia

Los enunciados **p** y **q** pueden tomar un valor de falso o verdadero, por lo tanto, son proposiciones válidas. La proposición **r** también será una proposición valida al instanciar a la variable **x** en determinado momento. Sin embargo, los enunciados **s, t y w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es una interrogación, otro un saludo y el último es una orden.

En general, las proposiciones pueden ser:



Cuadro 7: Elaboración propia

Ejemplos:

PROPOSICIONES	**CLASIFICACIÓN**
h: "Ana come pizza y bebe refresco"	Proposición compuesta y afirmativa.
j: "Ella no nada muy rápido"	Proposición simple y negativa.
k: “Córdoba no está al sur de la C.A.B.A. y no hace frío"	Proposición compuesta, negativa y verdadera.
l: 7 + 3 =10	Proposición simple, afirmativa y verdadera.

3. CONECTIVOS LÓGICOS

Existen conectivos u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas, es decir, formadas por varias proposiciones. Los operadores o conectores básicos son:

Los conectivos lógicos

• y	$\wedge$	conjunción
• o	$\vee$	disyunción
• no	$\sim$	negación
• si...entonces	$\rightarrow$	implicación simple
• si y solo si	$\leftrightarrow$	implicación doble

Conjunción (operador and)

Se utiliza para conectar dos proposiciones, donde ambas se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Se le conoce como multiplicación lógica y su símbolo es ^ (and).

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: **"Hay una buena película y voy al cine"**

Sean:

p: Hay una buena película.

q: Voy al cine.

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

p ^ q

Su tabla de verdad es como sigue:

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 4: Elaboración propia

Donde.

V = verdadero

F = falso

En la tabla anterior el valor de **p**=V significa que hay una buena película, **q**=V significa que voy al cine y **p** ^ **q**=V significa que hay una buena película y voy ir al cine. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que sea falsa implica que no asisto al cine.

Disyunción (operador or)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se conoce como suma lógica y su símbolo es V (or).

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: **“Para ir a Alta Gracia puedo tomar la ruta 5 o la ruta 36”**

Sean:

p: Para ir a Alta Gracia hay que tomar la ruta 5

q: Para ir a Alta Gracia hay que tomar la ruta 36

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 5: Elaboración propia

En la tabla anterior el valor de **p**=V significa tomar la ruta 5 para ir a Alta Gracia, **q**=V significa tomar la ruta 36 para ir a Alta Gracia y **pvq**=V significa ir a Alta Gracia. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que sea verdadera implica que llego a Alta Gracia.

Negación (operador not)

Su función es *negar* la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su negación (falso) y viceversa. Este operador se indica por medio del símbolo **~**.

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: “**El león es el rey de la selva**”

Sean:

p: El león es el rey de la selva.

~p: El león no es el rey de la selva.

Su tabla de verdad es como sigue:

p	**~p**
V	F
F	V

Tabla 6: Elaboración propia

En la tabla anterior el valor de **p**=V significa que el león es el rey de la selva, y **p**=F significa que el león no lo es.

Ejemplo

Sean las proposiciones:

p: Ya es tarde.

q: Tengo que dormir.

r: Me levantaré temprano.

El enunciado: "**Ya es tarde y tengo que dormir o no me levantaré temprano**".

Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera: **(p^q)** v **~r**

4. PROPOSICIONES CONDICIONALES

Implicación simple

Una *implicación simple* o proposición *condicional*, es aquella que está formada por dos proposiciones simples p y q. Se indica de la siguiente manera:

p→q (se lee "si **p** entonces **q**")

Ejemplo

Un trabajador dice "**Si ahorro me podré comprar una casa en tres años**". Una declaración como esta se conoce como condicional.

Sean:

p: Ahorro.

q: Podrá comprar una casa en tres años.

De tal manera que el enunciado se puede expresar como: **p→q**

Su tabla de verdad es de la siguiente manera:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 7: Elaboración propia

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Analizando si el trabajador mintió con la afirmación del enunciado anterior:

Cuando **p**=V significa que ahorró y **q**=V que se compró la casa en tres años, por lo tanto **p**→q =V (el trabajador dijo la verdad).

Cuando **p**=V y **q**=F significa que **p→q** =F, el trabajador mintió, ya que ahorró y no se compró la casa.

Cuando **p**=F y **q**=V significa que aunque no ahorró se compró la casa (ya tenía los recursos), así que no mintió, de tal forma que **p→q** =V.

Cuando **p**=F y **q**=F se interpreta que aunque no ahorró tampoco se compró la casa, por lo tanto **p→q** =V ya que tampoco mintió.

Bicondicional o doble implicación

Sean **p** y **q** dos proposiciones. Una *doble implicación* o proposición es *bicondicional* cuando **p** es verdadera si y solo si **q** es también verdadera. O bien **p** es falsa si y sólo si **q** también lo es. Se indica de la siguiente manera:

p↔**q** (se lee "**p** si y sólo si **q**")

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: "**Una persona puede votar, si y sólo si, tiene credencial de elector**"

Donde:

p: Una persona puede votar.

q: Tiene credencial de elector.

Su tabla de verdad es:

p	q	p↔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 8: Elaboración propia

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Cuando **p**=V significa que una persona puede votar y **q**=V que tiene credencial, al ser esto cierto, **p**↔q =V.

Cuando **p**=V y **q**=F significa que **p**↔**q** =F, una persona puede no votar, ya que no posee la credencial.

Cuando **p**=F y **q**=V significa que una persona no puede votar aunque tenga credencial (por ejemplo los residentes en el extranjero), esto es que **p**↔**q** =F.

Cuando **p**=F y **q**=F se interpreta como que ni puede votar ni tiene credencial, por lo tanto es cierto **p**↔**q** =V.

Ejemplo

Representar simbólicamente el enunciado: "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y sólo si soy desorganizado"

Solución

p: Pago la luz.

q: Me cortarán la corriente eléctrica.

r: Me quedaré sin dinero.

s: Pediré prestado.

t: Pagar la deuda.

w: Soy desorganizado.

$$P: (\sim p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \sim t] \leftrightarrow w$$

Tabla de verdad

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

N° de líneas = n ^{2} donde n es el número de variables distintas.

Ejemplo

Dada la siguiente proposición: $[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$. Elaborar su tabla de verdad.

Solución

p	q	r	~q	p →q	~q ∧ r	[(p →q) ∨ (~q ∧ r)]	r →q	[(p →q) ∨ (~q ∧ r)]↔(r →q)
V	V	V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Tabla 9: Elaboración propia

5. TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

Tautología

Es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables.

p	q	~p	p $\wedge$~p	(p $\wedge$~p) $\rightarrow$q)
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	v	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabla 10: Elaboración propia

Nótese que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre V. Las tautologías son muy importantes en Lógica Matemática ya que se consideran leyes en las cuales se puede apoyar para realizar demostraciones.

Contradicción

Es aquella proposición compuesta que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las más usadas y más sencilla es **p $\wedge$ ~p**. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	~p	p^~p
V	F	F
F	V	F

Tabla 11: Elaboración propia

Ejemplo

Si se tiene **p**: "El coche es verde", la proposición **p $\wedge$ ~p** equivale a decir que "El coche es verde y el coche no es verde". Por lo tanto se está contradiciendo, es decir, es una *falacia***.**

Contingencia

Es aquella proposición compuesta cuyos valores de verdad son falsos y verdaderos para todos los valores de verdad, como es el caso de **p$\rightarrow$ ~q**. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	q	~q	p → ~q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Tabla 12: Elaboración propia

MODULO 3: TEORÍA DE CONJUNTOS

Objetivo Principal

- Proporcionar al alumno los elementos básicos y conceptos de la Teoría de Conjuntos, para aplicarlos a problemas reales y relacionarlos con la resolución de algoritmos.

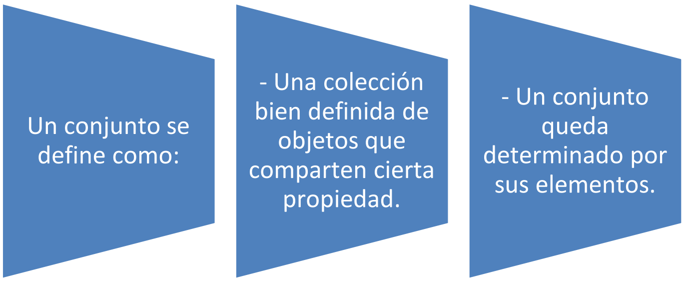
Objetivos Específicos

- Descubrir los conceptos básicos de la teoría de conjuntos.
- Conocer y aplicar las operaciones entre conjuntos.
- Aplicar los conocimientos en la resolución de ejercicios
- Demostrar enunciados y Leyes a través de Diagramas de Venn

Cuadro 8: Elaboración propia

Georg Cantor (1845-1918) fue quien prácticamente formuló de manera individual la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX y principios del XX. Su objetivo era el de formalizar las matemáticas como ya se había hecho con el cálculo cien años antes. Cantor comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de las matemáticas y explicó todo basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar a las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

1. CONJUNTOS (CONCEPTO)



Cuadro 9: Elaboración propia

Los conjuntos se representaran con letras mayúsculas A, B, C… y si *a* es un elemento del conjunto A se expresará**:** **a ∈ A**

Y si a no es un elemento de A entonces lo expresaremos: **a ∉ A**

2. DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

<u>Conjuntos definidos *por extensión*</u>*:* Los conjuntos pueden definirse nombrando cada uno de los elementos que los componen.	**Ejemplos** • El conjunto de las vocales V = {a, e, i, o, u} • El conjunto de los días de la semana D = {domingo, lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado} • El conjunto de los símbolos del sistema de numeración binaria B = {0,1}
<u>Conjuntos definidos *por comprensión*</u>*:* ¿Cómo podemos definir conjuntos que tienen muchos elementos o conjuntos infinitos? Por medio de una propiedad en común que poseen todos los elementos del conjunto.	**Ejemplos** H = {x/ x es un hombre} define el conjunto de los hombres V = {x / x es una vocal} define el conjunto de las vocales A = {x / x es un argentino} define el conjunto de los argentinos

Tabla 12: Elaboración propia

3. CONJUNTOS NUMÉRICOS

- Números naturales   N = {x/x es un número natural}, N = {1,2,3,....}
- Números Enteros Z= {…-3,-2,-1,0,1,2,3,…}
- Números Racionales Q
- Números Reales R
- Números complejos C

4. IGUALDAD DE CONJUNTOS

- Dados dos conjuntos A y B, se dice que son iguales, si y solo si están formados por los mismos elementos

  En símbolos:

$$A = B \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \in B \wedge \forall y : y \in \mathrm{B} \rightarrow y \in \mathrm{A}$$

{1, 2, 3, 4, 5} = {5, 4, 3, 2, 1} ***El orden no interesa!***

{1, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 1} = {4, 3, 2, 1} ***Elementos duplicados tampoco!***

5. EL CONJUNTO UNIVERSAL

Consiste en la existencia de un **universo de discurso** formado por todos los elementos u objetos bajo estudio en un determinado entorno o sistema.

Este conjunto es el denominado ***conjunto universal*** simbolizado con la letra ***U***.

Gráfico 1: Elaboración propia

6. INCLUSIÓN DE CONJUNTOS O SUBCONJUNTOS

Definición: Dados dos conjuntos A y B, diremos que A ***esta incluido*** en B, o que A ***es un subconjunto*** de B si todo elemento de A es elemento de B.

En símbolos:

A⊆B ↔ **∀x ∈ A** → **x ∈ B**

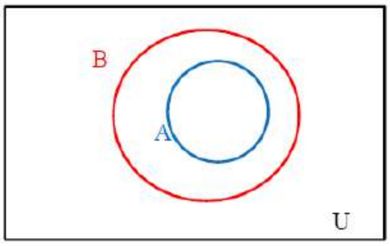


Gráfico 2: Elaboración propia

Esta inclusión se la conoce como ***inclusión amplia.***

Inclusión Estricta

Definición: Dados dos conjuntos A y B, diremos que A esta ***estrictamente incluido*** en B si todo elemento de A es elemento de B, pero existe al menos un elemento de B que no es elemento de A

En símbolos:

A⊂B ↔ **(∀x ∈ A** → **x ∈ B) ∧ (∃y ∈B ∧ y ∉ A)**

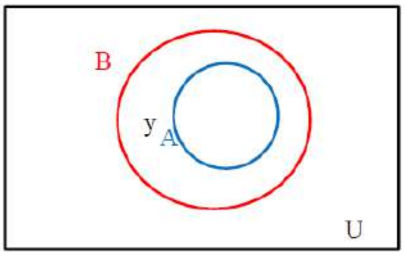


Gráfico 3: Elaboración propia

Se dice que A es un ***subconjunto propio*** de B

7. CONJUNTO VACÍO

El conjunto vacío es el conjunto que no tiene elementos. Se lo simboliza mediante Ø y también {}. Se lo define por comprensión:

$$\varnothing = \{x \,/\, x \neq x\}$$

8. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos, a diferencia de la inclusión que es una relación entre conjuntos, ***nos permiten crear nuevos conjuntos*** a partir de otros ya existentes

Complementación

Definición: Dado un conjunto A y el conjunto Universal U, llamaremos ***complemento de A*** al conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A.

En símbolos:

$$\sim A = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$$

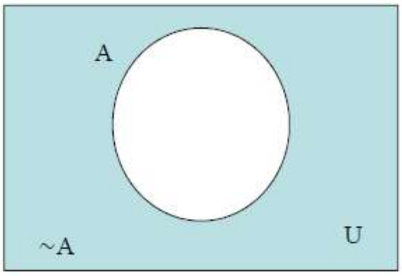


Gráfico 4: Elaboración propia

Diferencia de conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, llamaremos ***diferencia entre A y B o complemento de B respecto de A***, al conjunto formado por todos los elementos del conjunto A que no pertenecen a B.

En símbolos:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

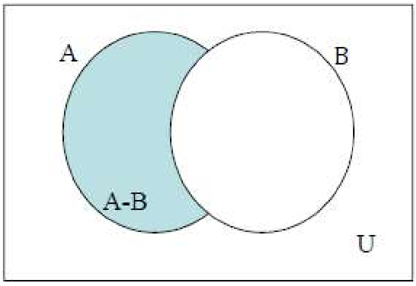


Gráfico 5: Elaboración propia

Definición: Dados dos conjuntos A y B, llamaremos diferencia entre B y A o complemento de A respecto de B, al conjunto formado por todos los elementos del conjunto B que no pertenecen a A.

En símbolos:

$$B - A = \{x \,/\, x \in B \wedge x \notin A\}$$

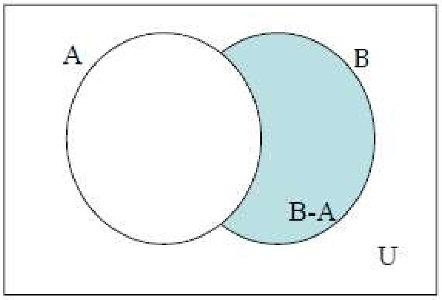


Gráfico 6: Elaboración propia

Intersección de conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, llamaremos ***intersección entre A y B***, al conjunto formado por todos los elementos comunes entre A y B.

•En símbolos:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

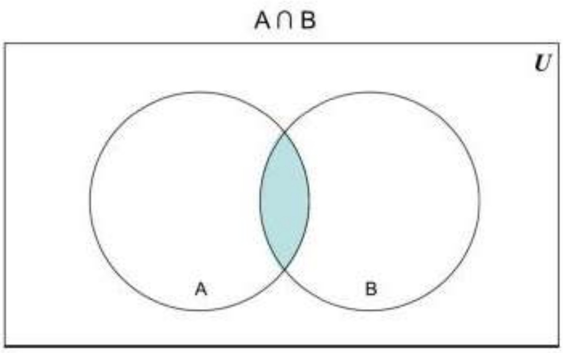


Gráfico 7: Elaboración propia

Unión de conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, llamaremos ***unión entre A y B***, al conjunto formado por todos los elementos comunes y no comunes entre A y B.

En símbolos:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

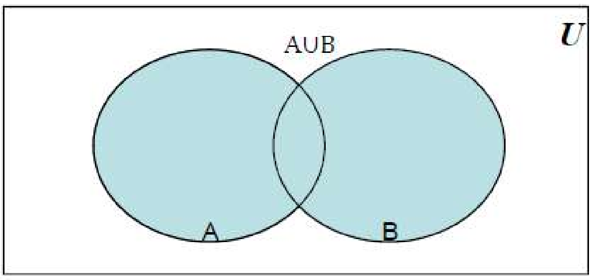


Gráfico 8: Elaboración propia

Leyes o Teoremas

LEY	SIMBOLOS
1. Involución	~(~A) = A
2. Idempotencia	A∩A = A A∪A=A
3. Conmutatividad	A∩B =B∩A A∪B = B∪A
4. Asociatividad	A∩B∩C = A∩(B∩C) = (A∩B∩C) A∪B∪C = A∪(B∪C) = (A∪B)∪C
5. Distributividad	**A**∩(B∪C) = (A∩B)∪(A∩C) **A**∪(B∩C) = (A∪B)∩(A∪C)
6. Acotación o Dominación	A∪U = U A∩Ø = Ø
7. Identidad	A∩U=A A∪Ø = A
8. Leyes de De Morgan	~(A∩B) = ~A∪~B ~(A∪B) = ~A∩~B
9. De Complemento	A∪~A =U A∩~A = Ø ~Ø=U ~Ø=U

Tabla 13: Elaboración propia

MODULO 4: ALGEBRA DE BOOLE

Objetivo Principal	• Orientar al alumno a emplear correctamente la construcción de tablas de verdad a partir de funciones lógicas y la aplicación de compuertas lógicas de un circuito representado por una expresión booleana.
Objetivos Específicos	• Analizar y construir las tablas de verdad de todas las compuertas lógicas • Escribir la expresión booleana para las compuertas lógicas y las combinaciones de compuertas lógicas. • Implementar las funciones booleanas a través de circuitos lógicos • Probar los circuitos lógicos

Cuadro 10: Elaboración propia

El matemático inglés George Boole (1854) desarrolló una herramienta matemática que se utiliza para el estudio de computadores, denominada Algebra de Boole. Un siglo después, con el advenimiento de la electricidad y la electrónica, las estructuras algebraicas desarrolladas por Boole, fueron aplicadas por C.E. Shannon en la construcción de circuitos eléctricos, que constituyen la base del funcionamiento de cualquier dispositivo de Hardware como es el microprocesador, memorias, etc.

- La aplicación en computadores es de tipo binario ⇒ 0/1
- El estado de un elemento del circuito lógico está representado por una variable que puede valer “1” o “0”.

El álgebra booleana es la teoría matemática que se aplica en la lógica combinatoria. Las variables booleanas son símbolos utilizados para representar magnitudes lógicas y pueden tener sólo dos valores posibles: 1 (valor alto) ó 0 (valor bajo).

Función Booleana Expresión que indica la relación entre las variables y el número de variables **F= f(a,b,c,..)** Son las representaciones analíticas de los circuitos lógicos, tiene asociado además un gráfico con compuertas lógicas y una tabla de valores de verdad.	Ejemplo $F(a,b,c) = \overline{abc} + \overline{b}\,(c + \overline{d})$

Tabla 14: Elaboración propia

Funciones canónicas Son aquellas que tienen todas las variables de la función en cada uno de sus términos, ya sea en su forma directa o negada. Se presentan de dos formas: **Forma Normal Disyuntiva** o **suma de productos** y **Forma Normal Conjuntiva** o **producto de sumas** y pueden obtenerse directamente de la tabla de valores. Para obtener la **suma de productos** de la tabla, se debe tomar un Término suma por cada **1** de la tabla y si para la posición de ese **1** la variable está en **0** deberá aparecer como negada en el sumando en cambio está en **1** deberá aparecer sin negar.	Ejemplo $F(a,b,c) = abc + a\overline{b}c + \overline{a}bc$

Tabla 15: Elaboración propia

Tabla de Verdad

Tabla que recoge todas las combinaciones de las variables de entrada y los valores que toman las salidas.

Es una tabla que despliega el valor de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus componentes. Considérese dos proposiciones A y B. Cada una puede tomar uno de dos valores de verdad: o V (verdadero), o F (falso). Por lo tanto, los valores de verdad de A y de B pueden combinarse de cuatro maneras distintas: o ambas son verdaderas; o A es verdadera y B falsa, o A es falsa y B verdadera, o ambas son falsas.

Ejemplo

$F(a,b,c) = abc + a\overline{b}c\ \overline{+}\ abc$

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Circuito Lógico

Los circuitos lógicos se forman combinando compuertas lógicas. La salida de un circuito lógico se obtiene combinando las tablas correspondientes a sus compuertas componentes. Por ejemplo: Es fácil notar que las tablas correspondientes a las compuertas OR, AND y NOT son respectivamente idénticas a las tablas de verdad de la disyunción, la conjunción y la negación en la lógica de enunciados, donde sólo se ha cambiado V y F por 0 y 1. Por lo tanto, los circuitos lógicos, de los cuales tales compuertas son elementos, forman un álgebra de Boole al igual que los enunciados de la lógica de enunciados.

Ejemplo

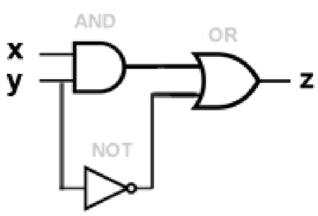


Tabla 16: Elaboración propia

Operaciones del Algebra de Boole

Las operaciones boolenas son posibles a través de los operadores binarios negación, suma y multiplicación, es decir que estos combinan dos o más variables para conformar funciones lógicas. Una compuerta es un circuito útil para realizar las operaciones anteriormente mencionadas.

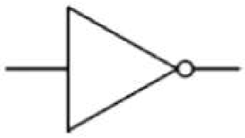
1. COMPUERTAS LÓGICAS Y OPERACIONES DEL ALGEBRA DE BOOLE

Las compuertas lógicas son dispositivos que operan con aquellos estados lógicos que funcionan igual que una calculadora, de un lado se ingresan los datos, ésta realiza una operación, y finalmente, te muestra el resultado. Cada una de las compuertas lógicas se las representa mediante un **Símbolo**, y la operación que realiza (**Operación lógica**) le corresponde una tabla, llamada **Tabla de Verdad**.

Inversión o negación (complemento) COMPUERTA NOT

Esta operación se indica con una barra sobre la variable, es un operador algebraico que invierte el valor de una variable, es decir, si **A** denota la señal de entrada de un inversor, entonces **Ā** representa el complemento de tal señal. Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

A	Ā
0	1
1	0



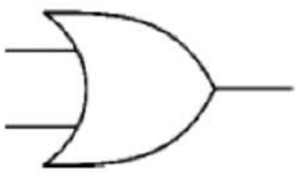
Símbolo tradicional

Suma booleana

Compuerta OR

La suma booleana es 1 si alguna de las variables lógicas de la suma es 1 y es 0 cuando todas las variables son 0. Esta operación se asimila a la conexión paralela de contactos. En circuitos digitales, el equivalente de la suma booleana es la operación OR. Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

Decimal	A	B	A + B
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

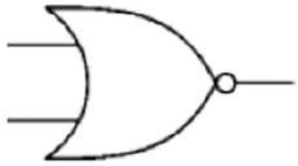


Símbolo tradicional

Compuerta NOR

El inverso de la función OR es la función NOR. Es una puerta OR con la salida invertida. Una compuerta NOR puede tener dos o más entradas; su salida es verdadera (1) si ninguna de sus entradas lo es, es decir si ambas entradas son falsas (0). Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

Decimal	A	B	$\overline{A + B}$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	0



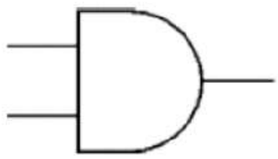
Símbolo tradicional

Multiplicación booleana

Compuerta AND

La multiplicación booleana es 1 si todas las variables lógicas son 1, pero si alguna es 0, el resultado es 0. Esta operación se asimila a la conexión en serie de contactos. En circuitos digitales, el equivalente de la multiplicación booleana es la operación AND. Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

Decimal	A	B	A.B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

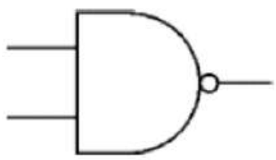


Símbolo tradicional

Compuerta NAND

El inverso de la función AND es la función NAND. Es una puerta AND con la salida invertida. Una puerta NAND puede tener dos o más entradas; su salida es verdadera si NO TODAS sus entradas son verdaderas, es decir si al menos una de ellas o ambas entradas son falsas (0). Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

Decimal	A	B	$\overline{A.B}$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

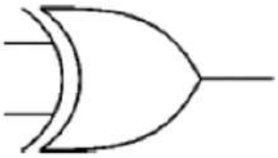


Símbolo tradicional

Compuerta XOR

Es similar a una puerta OR pero excluyendo que ambas entradas sean verdaderas o 1. La salida es verdadera si las entradas A y B son DIFERENTES, es decir tienen distinto valor de verdad. La salida es falsa o 0 **cuando ambas entradas son verdaderas o ambas son falsas**. Las puertas XOR solo pueden tener dos entradas. Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

Decimal	A	B	$A \oplus B$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

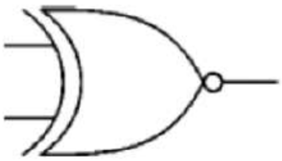


Símbolo tradicional

Compuerta N-XOR

El inverso de la función XOR es la función N-XOR. Es una puerta XOR con la salida invertida. Una puerta N-XOR puede tener sólo dos entradas; su salida es verdadera si sus entradas tienen el mismo valor de verdad, y es falsa en caso contrario. Su tabla de verdad y su símbolo lógico se representa a continuación:

Decimal	A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1



Símbolo tradicional

f(0,1,0)=_____ *f*(1,1,0)=_____

2. FORMA CANÓNICA “ SUMA DE MINITERMINOS”

Introducción

En Álgebra booleana, se conoce como término canónico de una función lógica a todo producto o suma en la cual aparecen todas las variables en su forma directa o inversa. Una Función lógica que está compuesta por operador lógico puede ser expresada en forma canónica usando los conceptos de *minterm*. Todas las funciones lógicas son expresables en forma canónica como una "suma de minterms". Esto permite un mejor análisis para la simplificación de dichas funciones, lo que es de gran importancia para la minimización de circuitos digitales.

Una función booleana expresada como una disyunción lógica (OR) de minterminos es usualmente conocida la **"suma de productos"**.

Definición

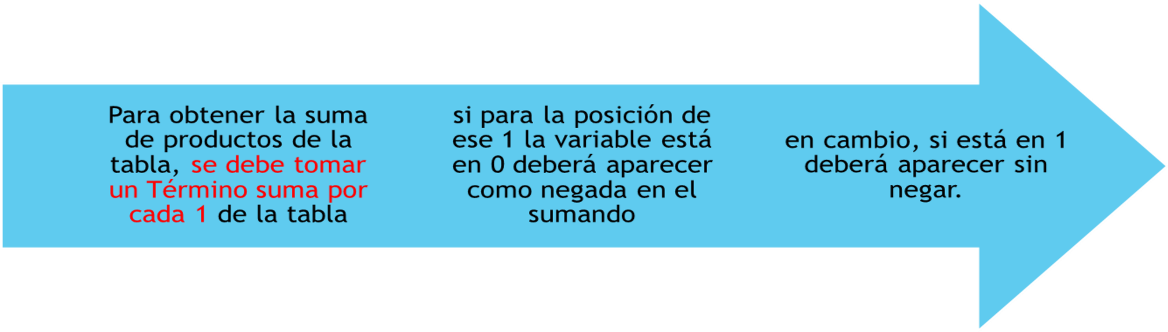
Para una función booleana de n variables $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$, un producto booleano en el que cada una de las n variables aparece una sola vez (negada o sin negar) es llamado minitérmino. Es decir, un minitérmino es una expresión lógica de n variables consistente únicamente en el operador conjunción lógica (AND) y el operador complemento o negación (NOT).

Por ejemplo $a.b.c$; $a.\bar{b}.c$; $a.\bar{b}.\bar{c}$, son ejemplos de minterminos *(minterms)* para una función booleana con las tres variables $a; b; c$.

Nota: en algunas bibliografías, se puede encontrar la representación de la negación de la siguiente forma:

$$a./b.c = a.b'.c = a.\bar{b}.c \quad ; \quad a./b./c = a.b'.c' = a.\bar{b}.\bar{c}$$

Metodología



A	B	C	F_f	F_g
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

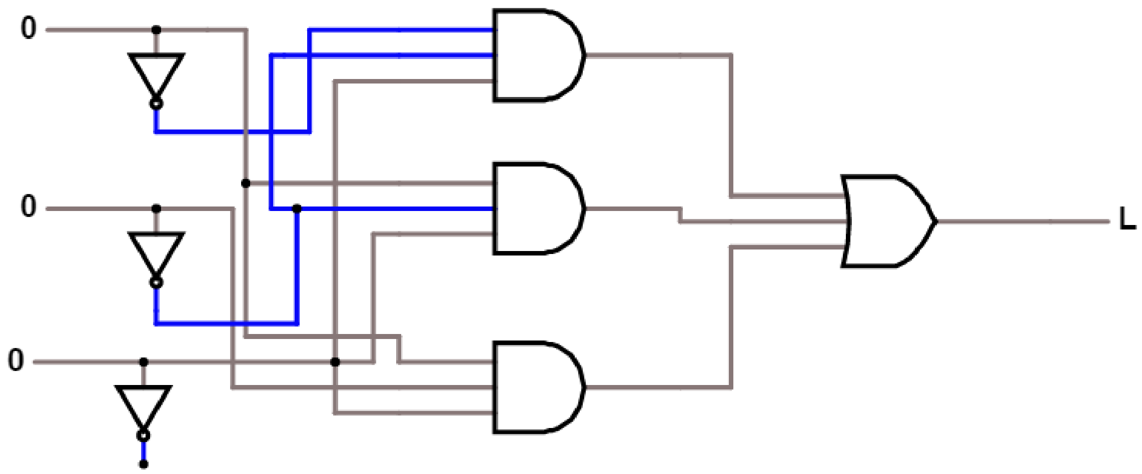
$$F_f = \bar{A}.\bar{B}.C + A.\bar{B}.C + A.B.C$$

$$F_G = ??$$

(Realizar la propuesta)

Representación con compuertas lógicas

En el circuito esquemático, se representa la función lógica F_f de la tabla verdad anterior



Software simulador de circuitos lógicos

En este link, se puede utilizar un software de simulación

http://falstad.com/circuit/circuitjs.html

BIBLIOGRAFÍA

Calculadora conversor (23.12.2020). Calculadora de logaritmos neperianos. Disponible en: https://www.calculadoraconversor.com/calculadora-de-logaritmos-neperianos/

Ginzburg, M. C. (1998). Álgebra de Boole Aplicada a Circuitos de Computación 2da Edición Álgebra de Boole Aplicada a Circuitos de Computación. Argentina. Disponible en: https://www.studocu.com/es-ar/document/universidad-abierta-interamericana/sistemas-de-computacion-ii/apuntes-de-clase/algebra-de-boole-aplicada-a-circuitos-de-computacion-ginzburg/2847756/view

Matemóvil (23.12.2020). Logaritmos. n/a. Disponible en: https://matemovil.com/logaritmos-ejercicios-resueltos/

Morris Mano, M , Ciletti, M. (2012). Digital Design: With an Introduction to the Verilog HDL (5th Edition). United States of America. Capítulos 1;2 y 3

Quiroga, P. (2010). Arquitectura de Computadoras. Alfaomega. Buenos Aires

Smartick (23.12.2020). Cómo resolver un ejercicio de división de 2 cifras.España: n/a. Disponible en: https://www.smartick.es/blog/matematicas/divisiones/division-de-2-cifras/