Introduzione all'Analisi di Missioni Spaziali

Laboratorio 2

Gianmario Merisio gianmario.merisio@polimi.it
Niccolò Faraco niccolo.faraco@polimi.it

Contenuti

Laboratorio 2:

- **Cambio dell'anomalia del pericentro** (*changePericenterArg*):

$$[a, e, \omega_i, \omega_f] \rightarrow [\Delta v, \theta_i^{1,2}, \theta_f^{1,2}]$$

- **Trasferimento bitangente** (*bitangentTransfer*):

$$[a_i, e_i, a_f, e_f, type] \rightarrow [\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta t]$$

- **Cambio di piano** (*changeOrbitalPlane*):

$$[a, e, i_i, \Omega_i, \omega_i, i_f, \Omega_f] \rightarrow [\Delta v, \omega_f, \theta]$$

Codice colori:

- Orbita iniziale
- Orbita finale
- Parametri fissi
- Variabili trasferimento

Cambio dell'anomalia del pericentro

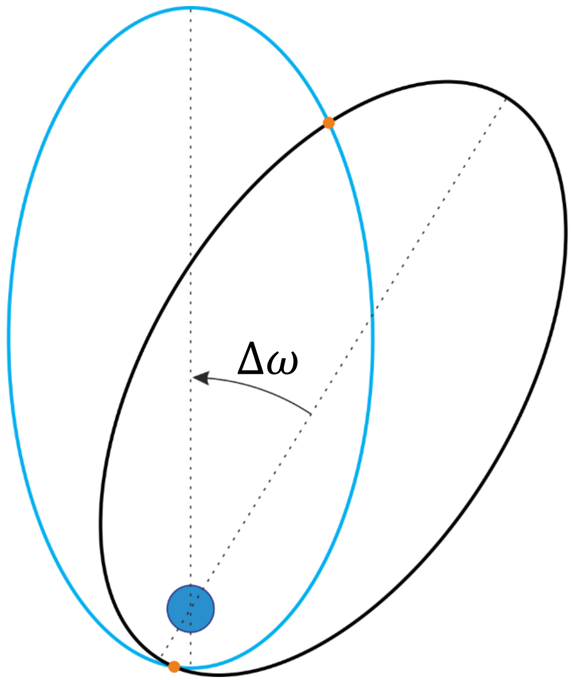
Obiettivo:

Dati:

- i parametri orbitali iniziali $[a, e, \omega_i]$
- anomalia del pericentro finale $[\omega_f]$

Trovare:

- Δv necessario alla manovra
- anomalie vere alle quali può verificarsi la manovra $[\theta_i^{1,2}, \theta_f^{1,2}]$



Parametri orbitali fissi: a, e, i, Ω
Parametri orbitali modificati: ω, θ

NOTE:

- La forma dell'orbita non viene modificata
- La manovra può avvenire in 2 punti

Algoritmo *changePericenterArg* (1)

INPUT: $[a, e, \omega_i, \omega_f], (\mu)$

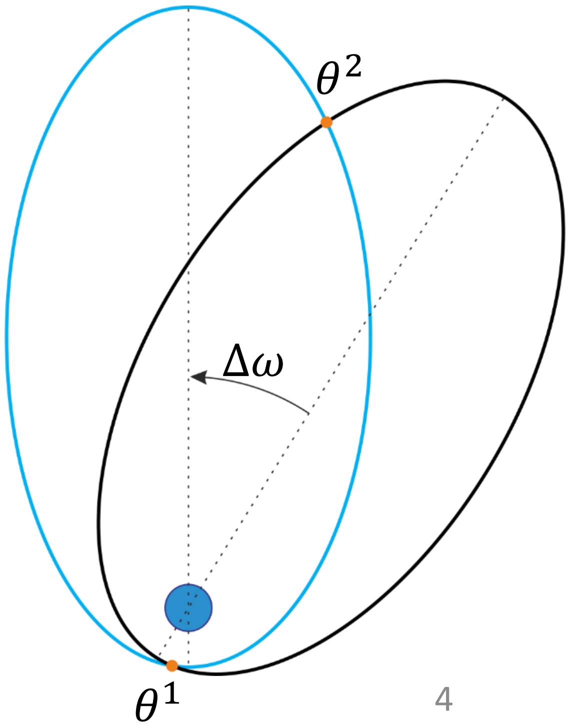
1. Calcolare le **anomalie vere** dove la manovra può essere effettuata

$$\theta_i^1 = \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{and} \quad \theta_f^1 = 2\pi - \frac{\Delta\omega}{2}$$
$$\theta_i^2 = \pi + \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{and} \quad \theta_f^2 = \pi - \frac{\Delta\omega}{2}$$

2. Calcolare il **costo della manovra**

$$\Delta v = 2v_r = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin\frac{\Delta\omega}{2}$$

OUTPUT: $[\Delta v, \theta_i^{1,2}, \theta_f^{1,2}]$



NOTA:
- Δv non dipende dal punto di manovra, come scegliere θ?

Algoritmo *changePericenterArg* (2)

```
function [DeltaV, thi, thf] = changePericenterArg(a, e, omi, omf, mu)
```

```
% Change of Pericenter Argument maneuver
%
% [DeltaV, thetai, thetaf] = changePericenterArg(a, e, omi, omf, mu)
%
% ---------------------------------------------------------------------------
% Input arguments:
% a              [1x1]   semi-major axis                   [km]
% e              [1x1]   eccentricity                      [-]
% omi            [1x1]   initial pericenter anomaly        [rad]
% omf            [1x1]   final pericenter anomaly          [rad]
% mu             [1x1]   gravitational parameter           [km^3/s^2]
%
% ---------------------------------------------------------------------------
% Output arguments:
% DeltaV         [1x1]   maneuver impulse                  [km/s]
% thi            [2x1]   initial true anomalies            [rad]
% thf            [2x1]   final true anomalies              [rad]
%
```

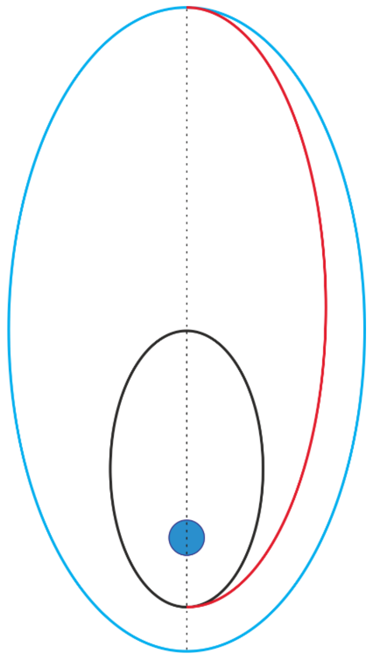
Obiettivo:

Dati:

- i parametri orbitali iniziali $[a_i, e_i]$
- i parametri orbitali finali $[a_f, e_f]$
- tipo di manovra scelta $type$

Trovare:

- $[\Delta v_1, \Delta v_2]$ necessari alla manovra
- tempo di manovra Δt



Parametri orbitali fissi: i, Ω, θ o ω
Parametri orbitali modificati: a, e, ω o θ

NOTE:

- In questo caso abbiamo **2 manovre**
- Esistono 4 tipi possibili di manovre bitangenti
- $type$ è necessario per discriminare il tipo di manovra; esistono modi meno *eleganti*, es: usare θ_i e θ_f o scrivere 4 *function* diverse

Caso 1

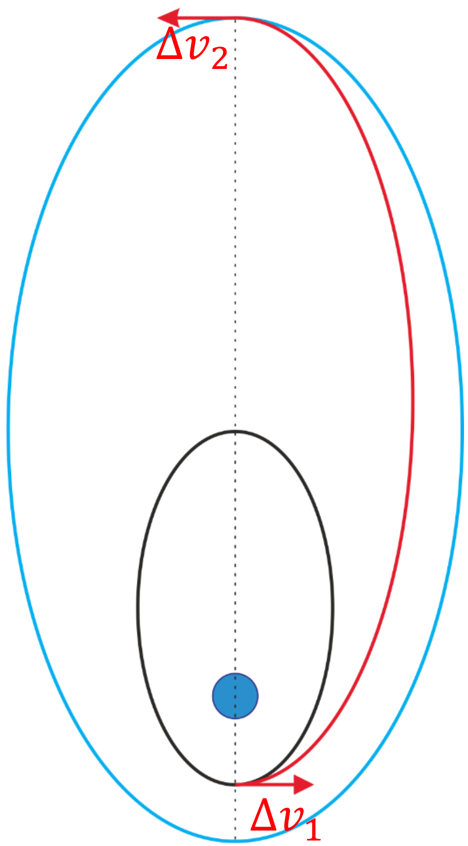
Pericentro - *Apocentro*

(*type* ‘pa’)

Reminder:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$



L’orbita di trasferimento ha:

$$r_p^T = r_{p,i} = a_i(1 - e_i)$$

$$r_a^T = r_{a,f} = a_f(1 + e_f)$$

Quindi

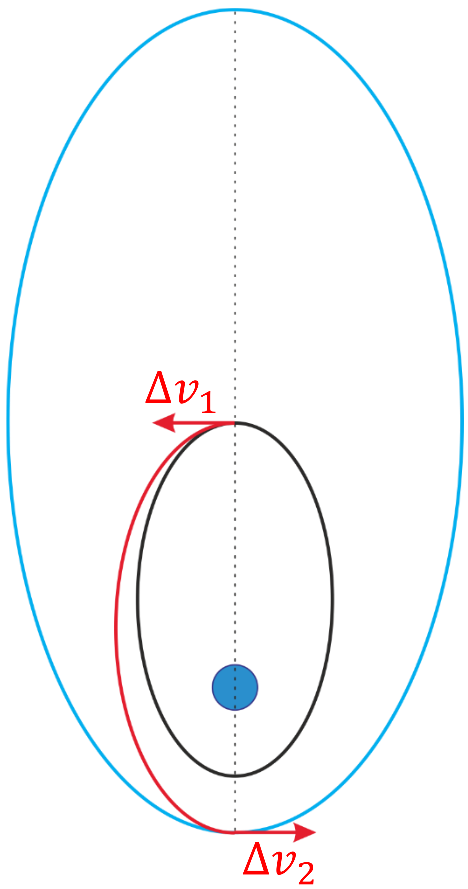
$$\Delta v_1 = v_p^T - v_{p,i} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_p^T} - \frac{1}{a^T}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{p,i}} - \frac{1}{a_i}}$$

$$\Delta v_2 = v_{a,f} - v_a^T = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{a,f}} - \frac{1}{a_f}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_a^T} - \frac{1}{a^T}}$$

Caso 2

Apocentro - *Pericentro*

($type$ ‘ap’)



Reminder:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

L’orbita di trasferimento ha:

$$r_a^T = r_{a,i} = a_i(1 + e_i)$$

$$r_p^T = r_{p,f} = a_f(1 - e_f)$$

Quindi

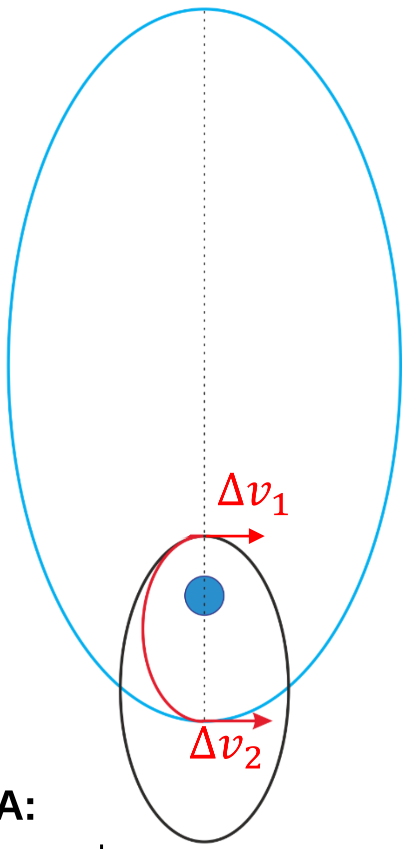
$$\Delta v_1 = v_a^T - v_{a,i} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_a^T} - \frac{1}{a^T}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{a,i}} - \frac{1}{a_i}}$$

$$\Delta v_2 = v_{p,f} - v_p^T = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{p,f}} - \frac{1}{a_f}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_p^T} - \frac{1}{a^T}}$$

Caso 3

Pericentro - *Pericentro*

($type$ ‘pp’)



NOTA:
$\omega_f = \omega_i + \pi$

Reminder:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

L’orbita di trasferimento ha:

$$r_p^T = r_{p,i} = a_i(1 - e_i)$$

$$r_a^T = r_{p,f} = a_f(1 - e_f)$$

Quindi

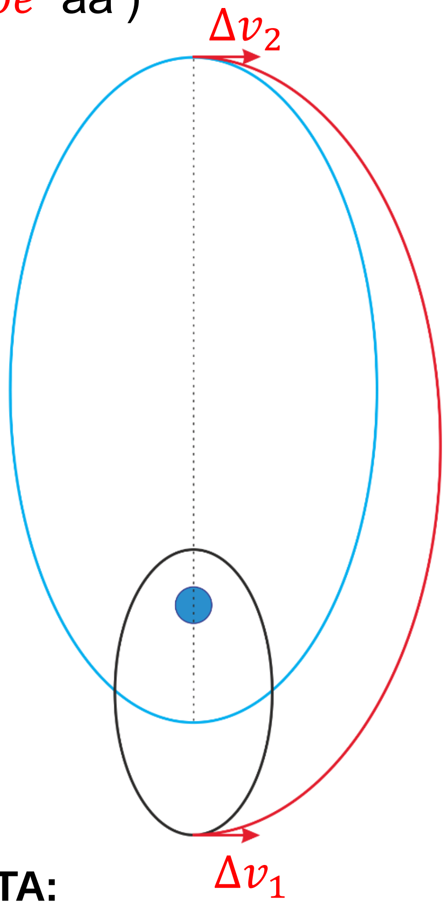
$$\Delta v_1 = v_p^T - v_{p,i} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_p^T} - \frac{1}{a^T}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{p,i}} - \frac{1}{a_i}}$$

$$\Delta v_2 = v_{p,f} - v_a^T = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{p,f}} - \frac{1}{a_f}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_a^T} - \frac{1}{a^T}}$$

Caso 4

Apocentro - *Apocentro*

($type$ 'aa')



NOTA:

$\omega_f = \omega_i + \pi$

Reminder:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

L'orbita di trasferimento ha:

$$r_p^T = r_{a,i} = a_i(1 + e_i)$$

$$r_a^T = r_{a,f} = a_f(1 + e_f)$$

Quindi

$$\Delta v_1 = v_p^T - v_{a,i} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_p^T} - \frac{1}{a^T}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{a,i}} - \frac{1}{a_i}}$$

$$\Delta v_2 = v_{a,f} - v_a^T = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{a,f}} - \frac{1}{a_f}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_a^T} - \frac{1}{a^T}}$$

Algoritmo *bitangentTransfer* (1)

INPUT: $[a_i, e_i, a_f, e_f, type], (\mu)$

1. Calcolare i parametri orbitali dell'orbita di trasferimento (cfr. slides precedenti)
2. Calcolare il **costo della manovra** $(\Delta v_1, \Delta v_2)$
3. Calcolare il **tempo di manovra**

$$\Delta t = \frac{T_T}{2} = \pi \sqrt{\frac{{a^T}^3}{\mu}}$$

OUTPUT: $[\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta\mathrm{t}]$

Algoritmo *bitangentTransfer* (2)

```
function [DeltaV1, DeltaV2, Deltat] = bitangentTransfer(a_i, e_i, a_f, e_f, type, mu)

% Bitangent transfer for elliptic orbits
%
% [DeltaV1, DeltaV2, Deltat] = bitangentTransfer(ai, ei, af, ef, type, mu)
%
% --------------------------------------------------------------------------
% Input arguments:
% ai              [1x1]    initial semi-major axis              [km]
% ei              [1x1]    initial eccentricity                 [-]
% af              [1x1]    final semi-major axis                [km]
% ef              [1x1]    final eccentricity                   [-]
% type            [char]   maneuver type
% mu              [1x1]    gravitational parameter              [km^3/s^2]
%
% --------------------------------------------------------------------------
% Output arguments:
% DeltaV1         [1x1]    1st maneuver impulse                 [km/s]
% DeltaV2         [1x1]    2nd maneuver impulse                 [km/s]
% Deltat          [1x1]    maneuver time                        [s]
%
```

Trasferimento biellittico bitangente (1)

Dove conviene manovrare?

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} v_i^2 - \frac{\mu}{r}$$ (Energia dell'orbita iniziale)

$$\varepsilon_f = \frac{1}{2} v_f^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_i + \Delta v)^2 - \frac{\mu}{r}$$ (Energia dell'orbita finale)

Quindi

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_f - \varepsilon_i = \frac{1}{2}(v_i + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} v_i^2$$

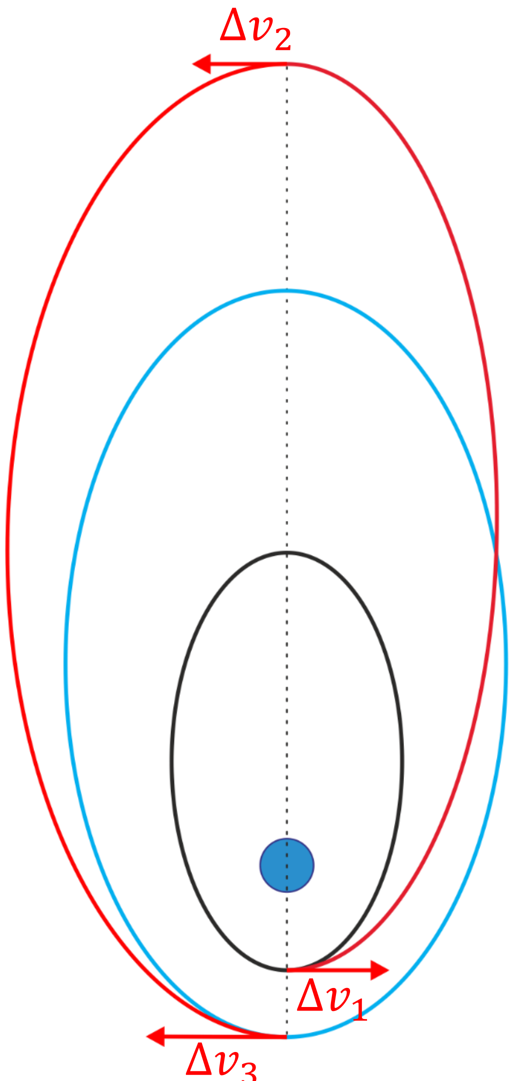
$$\downarrow$$

$$\Delta\varepsilon = v_i \Delta v + \frac{1}{2}\Delta v^2$$

In conclusione, dato il $\Delta\varepsilon$, per aver il minimo Δv, **conviene manovrare** dove v_i è massima, cioè **al pericentro**.

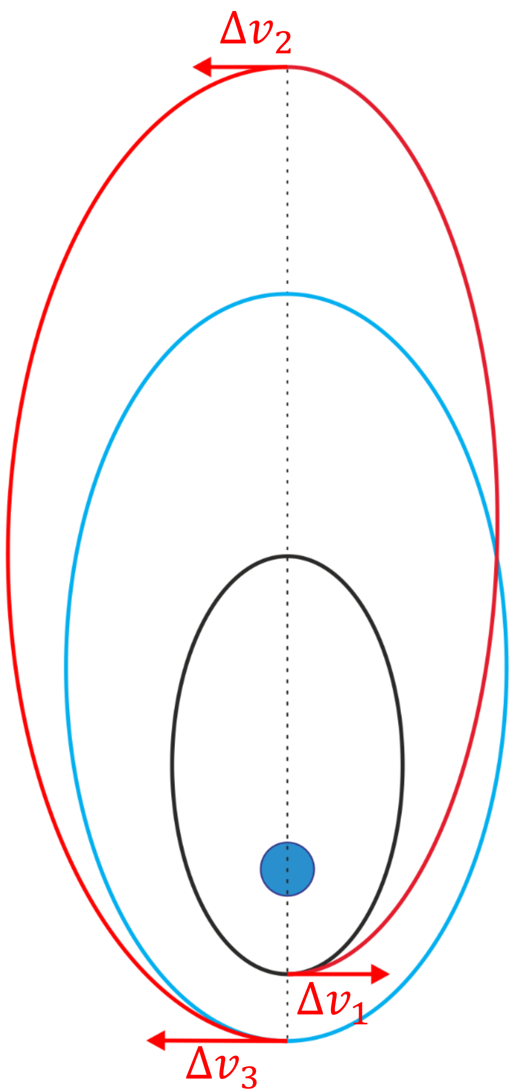
Questo risultato è chiamato **effetto Oberth**.

Trasferimento biellittico bitangente



- Sfrutta l'**effetto Oberth**
- Orbita di trasferimento formata da **due semi-elissi,** con parametri orbitali arbitrari, ma con **apocentro >>**
- Manovra a **3 impulsi:**
  - Δv_1 al pericentro dell'orbita iniziale
  - Δv_2 all'apocentro delle orbite di trasferimento
  - Δv_3 al pericentro dell'orbita finale
- Tempo di trasferimento molto più alto di Hohmann
- Per **orbite circolari**:

$\frac{r_f}{r_i}$	Cosa conviene?
<11.94	Hohmann
Compreso	Dipende da r_a^T
>15.58	Biellittico



Reminder:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

Scelti $a_1^T, a_2^T, e_1^T, e_2^T$, in modo che

$$r_a^{T,1} = a_1^T(1 + e_1^T) = a_2^T(1 + e_2^T) = r_a^{T,2}$$

Le orbite di trasferimento hanno:

$$r_p^{T,1} = r_{p,i} = a_i(1 - e_i)$$

$$r_a^{T,1} = r_a^{T,2}$$

$$r_p^{T,2} = a_f(1 - e_f)$$

Quindi

$$\Delta v_1 = v_p^{T,1} - v_{p,i} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_p^{T,1}} - \frac{1}{a_1^T}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{p,i}} - \frac{1}{a_i}}$$

$$\Delta v_2 = v_a^{T,2} - v_a^{T,1} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_a^{T,2}} - \frac{1}{a_2^T}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_a^{T,1}} - \frac{1}{a_1^T}}$$

$$\Delta v_2 = v_{p,f} - v_p^{T,2} = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_{p,f}} - \frac{1}{a_f}} - \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r_p^{T,2}} - \frac{1}{a_2^T}}$$

Algoritmo *bielliptic Transfer*

```
function [DeltaV1, DeltaV2, DeltaV3, Deltat1, Deltat2] = biellipticTransfer(ai, ei, af, ef, ra_t, mu)

% Bitangent transfer for elliptic orbits
%
% [DeltaV1, DeltaV2, DeltaV3, Deltat1, Deltat2] = bitangentTransfer(ai, ei, af, ef, type, mu)
%
% --------------------------------------------------------------------------
% Input arguments:
% ai            [1x1]   initial semi-major axis                [km]
% ei            [1x1]   initial eccentricity                   [-]
% af            [1x1]   final semi-major axis                  [km]
% ef            [1x1]   final eccentricity                     [-]
% ra_t          [1x1]   transfer orbits apocenter distance     [km]
% mu            [1x1]   gravitational parameter                [km^3/s^2]
%
% --------------------------------------------------------------------------
% Output arguments:
% DeltaV1       [1x1]   1st maneuver impulse                   [km/s]
% DeltaV2       [1x1]   2nd maneuver impulse                   [km/s]
% DeltaV3       [1x1]   3nd maneuver impulse                   [km/s]
% Deltat1       [1x1]   maneuver time 1                        [s]
% Deltat2       [1x1]   maneuver time 2                        [s]
%
```

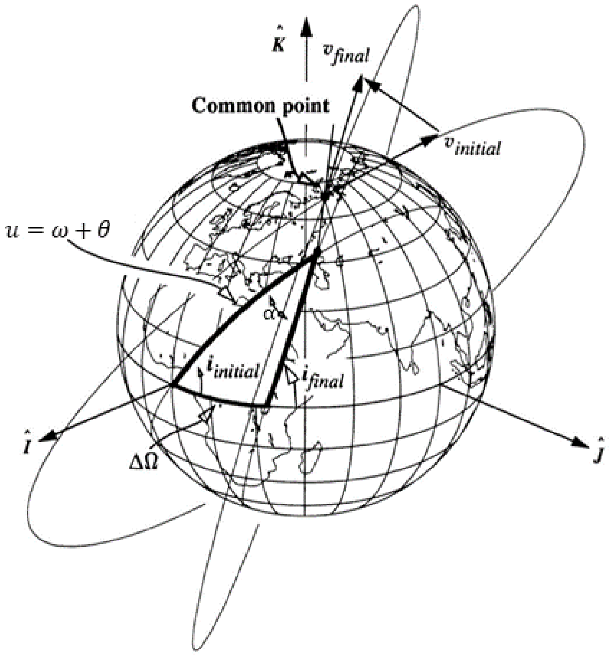
Obiettivo:

Dati:

- i parametri orbitali iniziali $[a, e, i_i, \Omega_i, \omega_i]$;
- inclinazione e ascensione retta del nodo ascendente finale $[i_f, \Omega_f]$

Trovare:

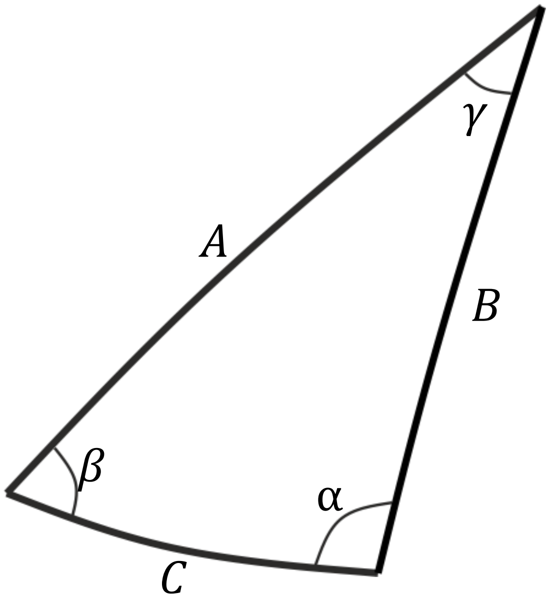
- Δv necessario alla manovra
- anomalia del pericentro finale e anomalia vera $[\omega_f, \theta]$



Parametri orbitali fissi: a, e, θ
Parametri orbitali modificati: i, Ω, ω

NOTE:

- La forma dell'orbita non viene modificata
- RAAN e ω non cambiano se manovra sull'asse dei nodi
- Esistono 4 casi possibili a seconda del segno di $\Delta\Omega$ e Δi



Definizione:
Un'area di una sfera delimitata da tre **geodetiche** (archi di cerchio massimo) è detta **triangolo sferico.**

I **lati** di un triangolo sferico si identificano utilizzando l'**angolo ad essi sotteso**, e non la lunghezza lineare.

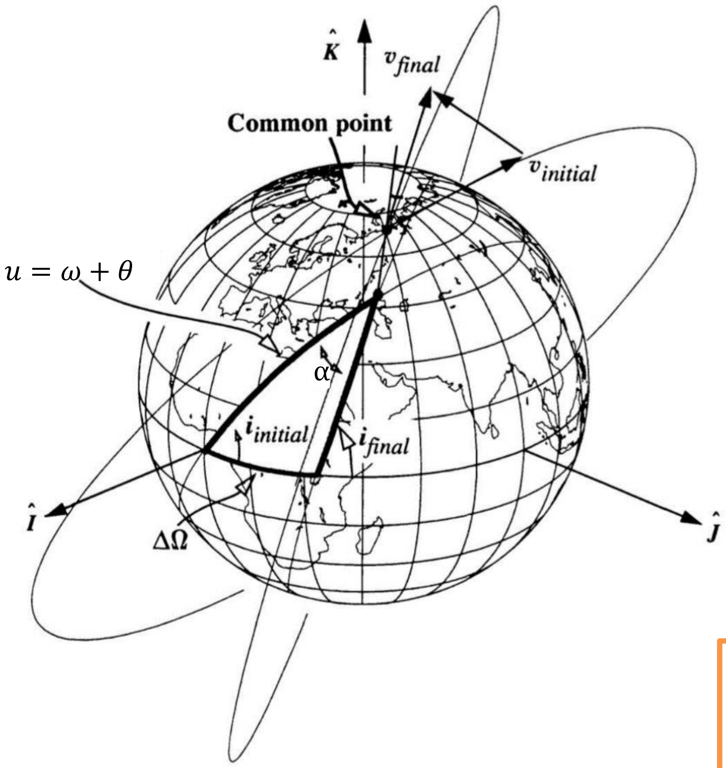
La **trigonometria sferica** è simile a quella **euclidea**, con le dovute modifiche.

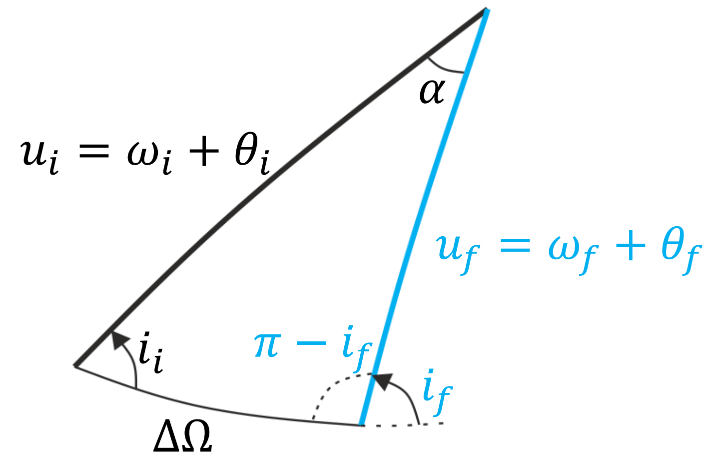
Legge dei seni

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}$$

Legge del coseno

$$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma \quad \text{(lati)}$$
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C \quad \text{(angoli)}$$





Avendo come input $[i_i, \Omega_i, \omega_i, i_f, \Omega_f]$, possiamo risolvere il triangolo sferico:

$$\boxed{\cos\alpha} = -\cos i_i \cos(\pi - i_f) + \sin i_i \sin(\pi - i_f)\cos\Delta\Omega = \boxed{\cos i_i \cos i_f + \sin i_i \sin i_f \cos\Delta\Omega}$$

$$\cos i_i = -\cos\alpha\cos(\pi - i_f) + \sin\alpha\sin(\pi - i_f)\cos u_f$$

$$\boxed{\cos u_f = \frac{\cos i_i - \cos\alpha\cos i_f}{\sin\alpha\sin i_f}}$$

$$\sin u_f = \frac{\sin\Delta\Omega}{\sin\alpha}\sin i_i$$

NOTE:
- Abbiamo bisogno sia del seno che del coseno di u per calcolare il quadrante
- Questo triangolo si riferisce al caso $\Delta\Omega > 0$, $\Delta i > 0$

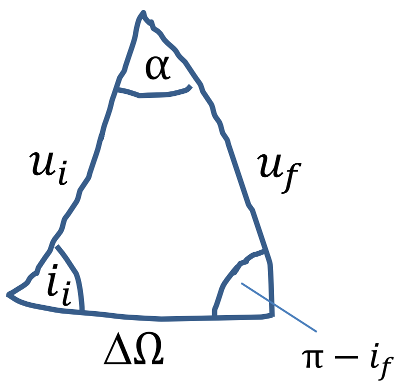
INPUT: $[a, e, i_i, \Omega_i, \omega_i, i_f, \Omega_f], (\mu)$

1. Risolvere il triangolo sferico, tenendo conto di $\Delta\Omega = \Omega_f - \Omega_i$ e $\Delta i = i_f - i_i$

Caso 1: $\Delta\Omega > 0, \Delta i > 0$

$$\cos(\alpha) = \cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)$$
$$\cos(i_i) = \cos(\alpha)\cos(i_f) + \sin(\alpha)\sin(i_f)\cos(u_f)$$
$$\cos(i_f) = \cos(\alpha)\cos(i_i) - \sin(\alpha)\sin(i_i)\cos(u_i)$$
$$\frac{\sin(u_i)}{\sin(i_f)} = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}$$
$$\frac{\sin(u_f)}{\sin(i_i)} = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}$$
$$u_i = \omega_i + \theta_i$$
$$u_f = \omega_f + \theta_f$$

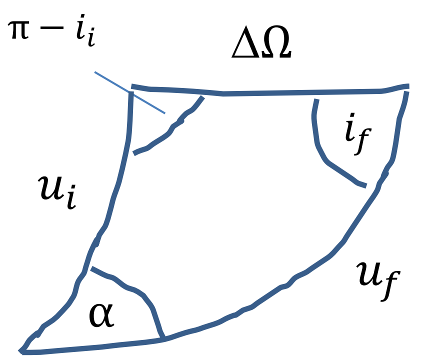
$$\alpha = \arccos\left(\cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)\right)$$
$$\cos(u_i) = \frac{-\cos(i_f) + \cos(\alpha)\cos(i_i)}{\sin(\alpha)\sin(i_i)}$$
$$\cos(u_f) = \frac{\cos(i_i) - \cos(\alpha)\cos(i_f)}{\sin(\alpha)\sin(i_f)}$$
$$\sin(u_i) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_f)$$
$$\sin(u_f) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_i)$$
$$\theta_i = \theta_f = \theta = u_i - \omega_i$$
$$\omega_f = u_f - \theta$$



$$\alpha = \arccos\left(\cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)\right)$$
$$u_i = \text{atan2}(\sin(u_i), \cos(u_i))$$
$$u_f = \text{atan2}(\sin(u_f), \cos(u_f))$$
$$\theta_i = \theta_f = \theta = u_i - \omega_i$$
$$\omega_f = u_f - \theta$$

Caso 2: $\Delta\Omega > 0, \Delta i < 0$

$$\cos(\alpha) = \cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)$$
$$\cos(u_i) = \frac{\cos(i_f) - \cos(\alpha)\cos(i_i)}{\sin(\alpha)\sin(i_i)}$$
$$\cos(u_f) = \frac{-\cos(i_i) + \cos(\alpha)\cos(i_f)}{\sin(\alpha)\sin(i_f)}$$
$$\sin(u_i) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_f)$$
$$\sin(u_f) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_i)$$
$$u_i = 2\pi - (\omega_i + \theta_i)$$
$$u_f = 2\pi - (\omega_f + \theta_f)$$



$$\alpha = \arccos\left(\cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)\right)$$
$$u_i = \mathrm{atan2}(\sin(u_i), \cos(u_i))$$
$$u_f = \mathrm{atan2}(\sin(u_f), \cos(u_f))$$
$$\theta_i = \theta_f = \theta = 2\pi - u_i - \omega_i$$
$$\omega_f = 2\pi - u_f - \theta$$

Algoritmo *changeOrbitalPlane* (3)

Caso 3: $\Delta\Omega < 0, \Delta i > 0$

$$\cos(\alpha) = \cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)$$

$$\cos(u_i) = \frac{-\cos(i_f) + \cos(\alpha)\cos(i_i)}{\sin(\alpha)\sin(i_i)}$$

$$\cos(u_f) = \frac{\cos(i_i) - \cos(\alpha)\cos(i_f)}{\sin(\alpha)\sin(i_f)}$$

$$\sin(u_i) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_f)$$

$$\sin(u_f) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_i)$$

$$u_i = 2\pi - (\omega_i + \theta_i)$$

$$u_f = 2\pi - (\omega_f + \theta_f)$$

$$\alpha = \arccos\left(\cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)\right)$$

$$u_i = \mathrm{atan2}(\sin(u_i), \cos(u_i))$$

$$u_f = \mathrm{atan2}(\sin(u_f), \cos(u_f))$$

$$\theta_i = \theta_f = \theta = 2\pi - u_i - \omega_i$$

$$\omega_f = 2\pi - u_f - \theta$$

Caso 4: $\Delta\Omega < 0, \Delta i < 0$

$$\cos(\alpha) = \cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)$$

$$\cos(u_i) = \frac{\cos(i_f) - \cos(\alpha)\cos(i_i)}{\sin(\alpha)\sin(i_i)}$$

$$\cos(u_f) = \frac{-\cos(i_i) + \cos(\alpha)\cos(i_f)}{\sin(\alpha)\sin(i_f)}$$

$$\sin(u_i) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_f)$$

$$\sin(u_f) = \frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin(\alpha)}\sin(i_i)$$

$$u_i = \omega_i + \theta_i$$

$$u_f = \omega_f + \theta_f$$

$$\alpha = \arccos\left(\cos(i_i)\cos(i_f) + \sin(i_i)\sin(i_f)\cos(\Delta\Omega)\right)$$

$$u_i = \mathrm{atan2}(\sin(u_i), \cos(u_i))$$

$$u_f = \mathrm{atan2}(\sin(u_f), \cos(u_f))$$

$$\theta_i = \theta_f = \theta = u_i - \omega_i$$

$$\omega_f = u_f - \theta$$

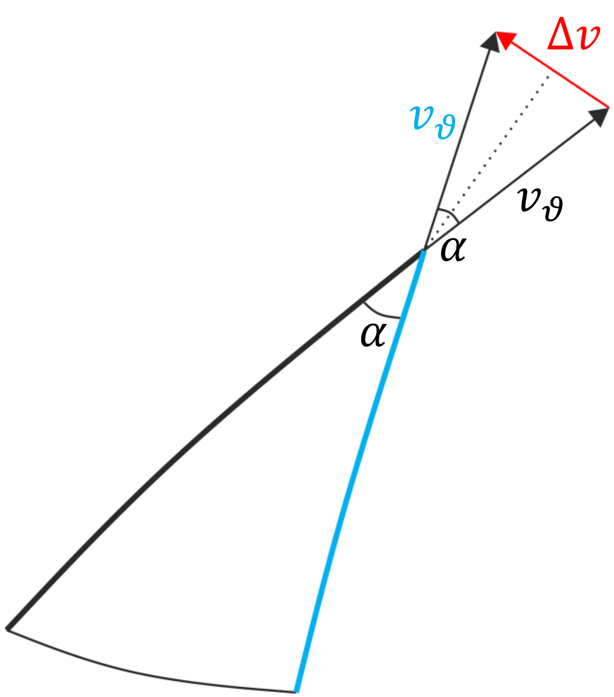
Nota: Usa $|\Delta\Omega|$

Algoritmo *changeOrbitalPlane* (4)

2. Calcolare il **costo della manovra**

$$v_\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\theta)$$

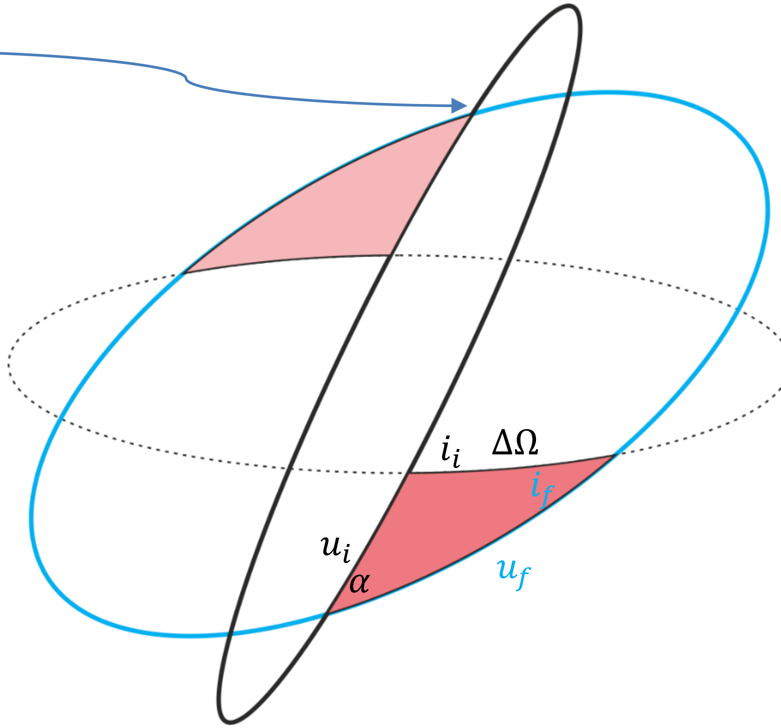
$$\Delta v = 2 v_\vartheta \sin\frac{\alpha}{2}$$



OUTPUT: $[\Delta v, \omega_f, \theta]$

NOTE:
Più lontano è, meglio è…

Esiste **un secondo punto di intersezione**
$\tilde{\theta} = \theta + \pi$



Dal momento che $\Delta v \propto v_\vartheta$, funzione dell'anomalia vera, **potrebbe essere conveniente manovrare in** $\tilde{\theta}$.

Come scegliere il punto di manovra?

$$v_\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\theta)$$

Abbiamo v_ϑ piccola quando $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$, poiché $\cos\theta < 0$.

Quindi se l'algoritmo vi restituisce θ nel I o IV quadrante, risulterà conveniente manovrare a $\tilde{\theta} = \theta + \pi$.

NOTE:
- Per sapere se θ è nel I o IV quadrante, controllate il segno del coseno. Se positivo, scegliete $\theta + \pi$.

Algoritmo *changeOrbitalPlane* (5)

```
function [DeltaV, omf, theta] = changeOrbitalPlane(a, e, i_i, OMi, omi, i_f, OMf, mu)

% Change of Plane maneuver
%
% [DeltaV, omf, theta] = changeOrbitalPlane(a, e, i_i, OMi, omi, i_f, OMf, mu)
%
% -------------------------------------------------------------------------
% Input arguments:
% a             [1x1]   semi-major axis                         [km]
% e             [1x1]   eccentricity                            [-]
% i_i           [1x1]   initial inclination                     [rad]
% OMi           [1x1]   initial RAAN                            [rad]
% omi           [1x1]   initial pericenter anomaly              [rad]
% i_f           [1x1]   final inclination                       [rad]
% OMf           [1x1]   final RAAN                              [rad]
% mu            [1x1]   gravitational parameter                 [km^3/s^2]
%
% -------------------------------------------------------------------------
% Output arguments:
% DeltaV        [1x1]   maneuver impulse                        [km/s]
% omi           [1x1]   final pericenter anomaly                [rad]
% theta         [1x1]   true anomaly at maneuver                [rad]
%
```

Funzioni che potrebbero tornarvi utili:

- *switch/case/otherwise* – struttura che permette di discriminare diversi casi (alternativa a *if*)
- *atan2* – arcotangente conoscendo valori seno e coseno *(*trova angolo fra 0 e 2π*)*

Adesso, **TOCCA A VOI**!