



POLITECNICO
MILANO 1863

**SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
E DELL'INFORMAZIONE**



Prova Finale di Propulsione Aerospaziale

LAUREA TRIENNALE IN AEROSPACE ENGINEERING - INGEGNERIA AEROSPAZIALE

Autori:

10694997 **SILVIA PALA**
10726668 **GIORGIA PALLARA**
10836125 **DANIELE PATERNOSTER**
10711624 **ALEX CRISTIAN TURCU**
10702040 **RESHAL ANTONINO FERNANDO WARNAKULASURIYA**

Professore: CHRISTIAN PARAVAN

Anno accademico: 2022-2023

Sommario

La presente relazione di prova finale intende dare una descrizione dell'endoreattore F-1 prodotto da Rocketdyne. Cinque di questi motori vennero installati sul primo stadio S-IC del vettore Saturn V che portò il primo uomo sulla luna. L'obiettivo di questo stadio era quello di portare il razzo ad una quota di 61 km, fornendo un $\Delta v \simeq 2300$ m/s. Di seguito verranno analizzati i principali sistemi per un singolo motore, partendo dal sistema di alimentazione, passando per il sistema di generazione della potenza ed arrivando infine al sistema di espansione gasdinamico e al suo raffreddamento. Si provvederà inoltre a dare una descrizione quali/quantitativa delle scelte progettuali applicate ai tempi. Infine, verrà studiata una alternativa ai propellenti utilizzati, rimarcando le conseguenze sull'intero sistema propulsivo che tale variazione implica.

Indice

Sommario	I
Indice	II
1 Nomenclatura	1
2 Analisi della missione	1
2.1 Parametri lanciatore	2
3 Propellenti	2
3.1 Coppia di propellenti: RP-1 / LOX	2
3.2 Propellente ipergolico	3
4 Serbatoi e pressurizzazione	3
4.1 Serbatoi: descrizione e dimensionamento	3
4.2 Pressurizzazione e scambiatore di calore	5
5 Schema termodinamico	6
5.1 Analisi dello schema semplificato del sistema motore	6
5.2 Analisi sulla scelta del ciclo di alimentazione	6
5.3 Analisi delle variazioni di performance introdotte dal ciclo a gas	8
6 Gas generator	10
7 Turbopompa	11
7.1 Descrizione generica Mark 10	11
7.1.1 Pompe LOX e RP1	11
7.1.2 Analisi pompa LOX	12
7.1.3 Analisi pompa RP-1	15
7.2 Turbina	15
7.2.1 Descrizione turbina	15
7.2.2 Turbina - scelte progettuali	15
7.2.3 Analisi quantitativa - dimensionamento	16
8 Camera di spinta	16
8.1 Descrizione del sistema	16
8.2 Piatto d'iniezione	17
8.3 Camera di combustione	18
8.4 Modellazione dell'ugello	19
8.5 Confronto tra ugello 10:1 e 16:1	20
9 Sistemi di raffreddamento	20
9.1 Cooling della camera di spinta	20
9.1.1 Scambio termico convettivo e film cooling	21
9.1.2 Regenerative cooling	23
Appendice	27
A Immagini e schemi	27
B Grafici di varie grandezze in funzione del tempo di volo	27
C Confronto peso molecolare gas generator tra caso Fuel Rich e Oxidizer Rich	29
D Prodotti gas generator analizzati con software NASA CEA	29
E Schemi del gas generator	30
F Diagrammi di velocità	30

G Codici MATLAB usati	31
G.1 Simulazione di volo	31
G.1.1 Parametri adimensionali lanciatore	35
G.2 Codici serbatoi	35
G.2.1 Serbatoio RP-1	35
G.2.2 Serbatoio LOX	37
G.3 Turbopompa	39
G.3.1 Pompa LOX	40
G.3.2 Pompa RP-1	47
G.4 Camera di spinta	53
G.4.1 Camera di combustione	53
G.4.2 Modellazione ugello	54
Bibliografia	69

1. Nomenclatura

2. Analisi della missione

La missione prevede una durata totale di funzionamento dello stadio di 161 s, durante il quale l'obiettivo principale è quello di portare il vettore di lancio ad una altitudine approssimativa di 61 km e ad una velocità di circa 2388 m/s. La sequenza di accensione prevede l'avvio del motore centrale per primo, seguito in sequenza dalle due coppie di motori simmetrici, questi accesi con un ritardo di 300 ms allo scopo di ridurre al minimo le vibrazioni sulla struttura principale; il computer di bordo attende quindi il raggiungimento del valore di spinta massimo per inviare il comando di sgancio del razzo dalla rampa di lancio. Il vettore, una volta sganciato, non può più essere fermato. Ad un'altitudine fissata di 1300 metri, il Saturn V comincia una manovra di rollio attorno al suo asse al fine di raggiungere la traiettoria corretta per il prosieguo della missione. La totalità delle informazioni riguardanti le istruzioni per l'assetto e i venti dominanti nel periodo di lancio sono pre-registrate nel programma di lancio. È inoltre necessario lo spegnimento del motore centrale a $t = 135$ s, prefissato da programma, per non superare i limiti strutturali di carico massimo sopportabile. La spinta, infatti, non è un fattore controllabile nei motori F-1 e, per ovviare a questo problema, si provvede quindi ad interrompere direttamente il flusso di propellente al motore. [3] [4]

Di seguito sono riportate le formule e i risultati di una simulazione della missione del primo stadio del Saturn V, il cui scopo è di analizzare le variazioni dei vari parametri di interesse del razzo durante tutto il tempo di volo. Tale simulazione è stata realizzata con l'ausilio del software MATLAB, con il quale è stato risolto il sistema di equazioni differenziali descritto più avanti. L'algoritmo numerico risolutivo scelto è il metodo di Eulero in avanti ([Appendice G](#)).

Per la simulazione del lancio è stato sviluppato un modello con determinate ipotesi semplificative al fine di descrivere l'intera dinamica del razzo:

- è stato utilizzato un modello di Terra piatta ed irrotazionale, al fine di adottare un sistema di riferimento inerziale, trascurando dunque effetti di variazione di traiettoria dovuti allo spostamento terrestre e variazioni di quota dovute al cambiamento di latitudine durante il volo;
- i valori di pressione e temperatura ambientale al variare della quota sono stati ottenuti mediante l'uso del Modello di Atmosfera Standard, ponendo una temperatura di riferimento al suolo di 25°C;
- il valore di portata massica del propellente ai motori è assunto costante durante tutto il funzionamento dello stadio, con una variazione del suo valore soltanto a seguito dello spegnimento del motore centrale al tempo prefissato;
- per ricavare le forze di resistenza aerodinamica e l'angolo di volo sono state utilizzate le curve sperimentali presenti nel report della missione dell'Apollo 11. [4]

Il modello matematico realizzato per la descrizione del vettore di lancio consta dunque delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} h &= \int v_v dt & s &= \int v_h dt & v_v &= \int a_v dt & v_h &= \int a_h dt & v_{tot} &= \sqrt{v_v^2 + v_h^2} \\ \phi &= \arctan \frac{v_h}{v_v} & a_v &= -g + \frac{T \cos \theta - D \cos \phi}{m} & a_h &= \frac{T \sin \theta - D \sin \phi}{m} \\ g &= \frac{\mu}{(R_T + h)^2} & m &= m_i - \dot{m}t & T &= T_{vac} - A_e p_e & D &= \frac{1}{2} \rho v_{tot}^2 S C_D \end{aligned}$$

Seppur il modello risulti semplificato rispetto alla complessa realtà fisica di funzionamento, si ottengono andamenti delle principali grandezze fisiche di interesse perfettamente in linea con gli andamenti tabellati forniti nel report del vettore di lancio. [4]

I requisiti fondamentali, ovvero il raggiungimento della quota prefissata e della velocità finale prima dello sgancio dello stadio S-IC, risultano soddisfatti e sufficientemente precisi, con valori ottenuti di 59557 m e 2353 m/s.

Di seguito sono riportati i grafici di alcune grandezze in funzione del tempo di volo (ulteriori grafici possono essere consultati in [Appendice B](#)):



Figura 1: Quota in funzione del tempo



Figura 2: Velocità in funzione del tempo

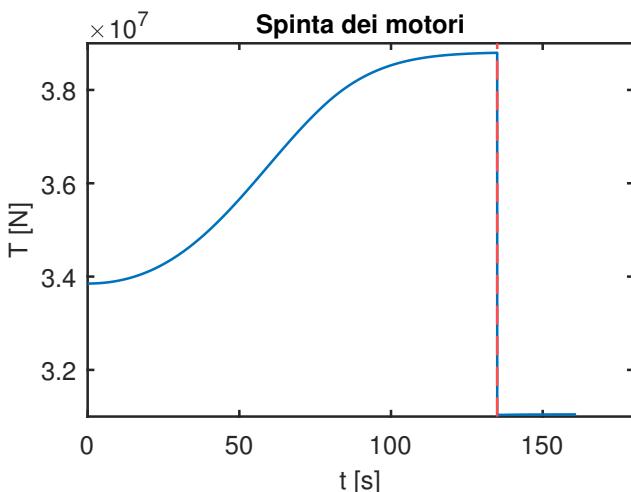


Figura 3: Spinta in funzione del tempo

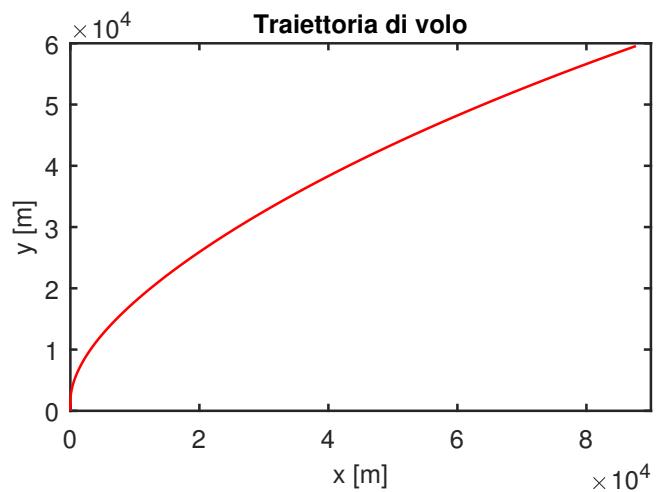


Figura 4: Traiettoria del vettore

Le evidenze sperimentali permettono quindi di assumere il modello implementato come effettivamente rappresentativo del lancio del Saturn V avvenuto nella realtà.

2.1. Parametri lanciatore

A partire dai dati sulle masse ottenuti applicando il modello matematico è possibile andare a calcolare una serie di parametri adimensionali per una descrizione della struttura del lanciatore relativamente al suo primo stadio S-IC (in appendice codice MATLAB dei conti effettuati e dei relativi risultati estrapolati)

$\epsilon_u [-]$	$\zeta_u [-]$	$\epsilon_s [-]$	$MR [-]$	$\zeta_p [-]$	$\zeta_{motore} [-]$	$M_{tank}/M_p [-]$
0.3975	0.2844	0.1167	0.2844	0.7156	0.0146	0.0602

Tabella 1: Parametri struttura lanciatore

3. Propellenti

3.1. Coppia di propellenti: RP-1 / LOX

Lo stadio S-IC utilizza la coppia di propellenti ossigeno liquido (LOX) e cherosene (RP-1), ovvero una coppia semi-criogenica. Questa combinazione offre un buon equilibrio tra efficienza e semplicità.

L'ossigeno liquido è un ossidante che reagisce facilmente con i combustibili, come il cherosene e l'idrogeno liquido, per produrre una combustione ad alta temperatura e alta pressione: difatti può produrre una maggiore spinta per unità di massa di propellente rispetto ad altri ossidanti. La temperatura di ebollizione molto bassa (-182.96°C) lo rende un propellente criogenico, il che significa che deve essere mantenuto ad una temperatura uguale o minore

rispetto a quella di ebollizione durante lo stoccaggio e l'utilizzo. Tuttavia, a causa delle sue proprietà criogeniche, richiede una conservazione e una manipolazione estremamente accurate e può essere pericoloso se non gestito correttamente.

Il cherosene (RP-1), d'altra parte, è un combustibile ad alta densità energetica che brucia in modo pulito e consente un impulso specifico elevato rispetto ad altri combustibili idrocarburici, oltre ad essere facilmente reperibile e relativamente economico. L'RP-1 è un tipo di cherosene raffinato, ovvero una miscela liquida di idrocarburi, che viene prodotto mediante il raffinamento del petrolio greggio che permette di rimuovere le impurità e migliorarne la stabilità e la consistenza. Il prodotto finito ha un alto contenuto di idrocarburi a catena lunga, che lo rende un combustibile altamente efficiente.

La scelta di questi propellenti ha preso in considerazione anche fattori come la sicurezza, l'affidabilità e la facilità di gestione.

	$\rho [kg/m^3]$	$T_{ebollizione} [K]$	$T_{congelamento} [K]$	$M [g/mol]$
RP-1	810	460/540	225	175
LOX	1141	90.2	50.5	32
	$I_{sp} [s]$	O/F_{opt}	$T_{comb} [K]$	γ
RP-1/LOX	265	2.56	3670	1.24
	$\rho_{prod} [kg/m^3]$	$M_{prod} [g/mol]$		
RP-1/LOX	1020	21.9		

Tabella 2: Dati per la coppia di propellenti RP-1 / LOX

3.2. Propellente ipergolico

Oltre ai due propellenti utilizzati per il funzionamento del motore è stato necessario l'utilizzo di un propellente ipergolico, ovvero un fluido ausiliario. L'accensione del fluido ausiliario è un metodo per cui un liquido o un gas ipergolico, oltre al combustibile normale e all'ossidante, viene iniettato nella camera di combustione per un breve periodo durante l'operazione di avviamento del motore. Questo fluido produce una combustione spontanea a contatto con il combustibile o con l'ossidante. Nel caso dell'F-1 sono stati utilizzati durante il processo di accensione Trietilborano (TEB - 85%) e trietilalluminio (TEA - 15%), che messi a contatto con l'ossigeno liquido sono in grado di avviare la combustione istantaneamente.

4. Serbatoi e pressurizzazione

4.1. Serbatoi: descrizione e dimensionamento

Il primo stadio ha un diametro di circa 10 m e un'altezza di 42 m. La maggior parte del volume interno alla struttura è occupato dai serbatoi, ovvero il serbatoio di LOX, posto più in alto, e quello dell'RP1.

I serbatoi dell'ossidante hanno una forma cilindrica, chiusa alle due estremità da paratie ellisoidali, per un'altezza totale di 19.53 m, mentre il diametro è approssimabile al diametro della struttura interna, ossia 10.06 m e il volume di ossigeno liquido contenuto è 1266220 litri. La struttura si compone di una skin in lega 2219-T87, una lega di alluminio con rame come legante principale che si presta all'utilizzo grazie alle alte proprietà meccaniche in un ampio range di temperatura, dai -270°C ai 300°C circa, nel quale ricade la temperatura di stoccaggio del LOX; è inoltre un materiale con buona saldabilità, elevata tenacità a frattura e alta resistenza a cricche da corrosione e da sforzo. Dal serbatoio di ossidante partono 5 linee di aspirazione isolate di diametro 43,18 cm passanti attraverso il serbatoio di combustibile fino ai motori. All'estremità delle linee di aspirazione sono collocate valvole di emergenza e soffietti flessibili in grado di attenuare le vibrazioni e adattarsi a espansioni e contrazioni legate alla variazione di temperatura. Il serbatoio termina con un dispositivo centrale e paratie cruciformi che hanno lo scopo di evitare la formazione di vortici man mano che l'ossidante defluisce. All'interno della struttura del serbatoio di LOX, ancorate ai deflettori ad anello, vi sono quattro bombole di elio ad alta pressione dal volume di 0.88 m³ ciascuna, necessarie alla pressurizzazione.

Il collegamento tra i due serbatoi è rappresentato dall'intertank, una struttura composta da cinque telai e pannelli ondulati in lega di alluminio 7075-T6 ad altissima resistenza meccanica.

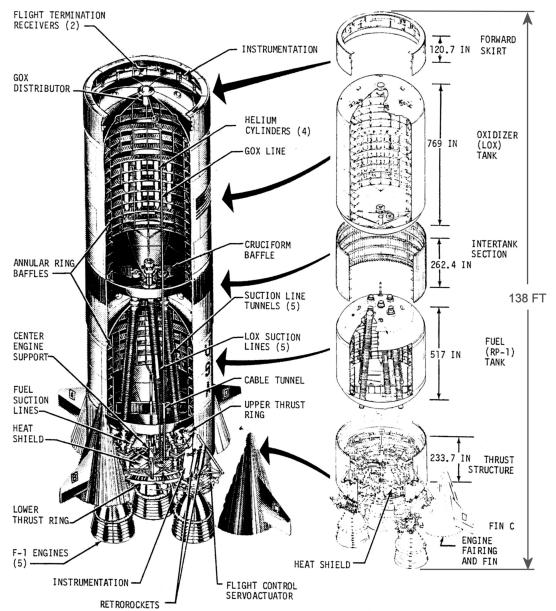


Figura 5: Raffigurazione serbatoi

Il serbatoio di combustibile ha geometria analoga al serbatoio di ossidante, con un'altezza di 13.13 m e un volume di 791151 litri. La struttura è anch'essa costituita da una skin di lega di alluminio 2219-T87.

Di fondamentale importanza per lo studio dei serbatoi è il dimensionamento dello spessore delle pareti, poiché è necessario ottimizzare il peso senza però mettere a rischio il funzionamento della struttura. I carichi strutturali ai quali è sottoposta la parete sono diversi, tra cui quelli dovuti alle pressioni interne, carichi assiali di spinta, carichi aerodinamici e termodinamici e quelli prodotti dalla disposizione di montaggio. È possibile procedere con il dimensionamento delle pareti sviluppando una serie di calcoli partendo da valori di progetto, come il volume dei propellenti necessari al funzionamento, l'ingombro esterno dei singoli serbatoi e considerando noto il materiale utilizzato. Il volume totale all'interno del serbatoio non è composto unicamente dal propellente, ma ci sono anche degli altri volumi da considerare come il volume vuoto necessario alla pressurizzazione.

Come primo passo si calcolano i volumi fondamentali dei serbatoi, ovvero quelli della parte cilindrica e delle due cupole ellissoidali, conoscendone il raggio e le altezze, per poi calcolare il volume totale interno del serbatoio considerando anche il volume occupato dalle bombole di elio nel serbatoio del LOX e dalle cinque linee di aspirazione passanti attraverso il serbatoio dell'RP-1:

$$\begin{aligned} Vol_e &= \frac{2\pi a^2 b}{3} & Vol_c &= \pi a^2 lc \\ Vol_{He} &= 4Vol_{1b} & Vol_{tubi} &= 5\pi r_t^2 l_t \end{aligned}$$

$$V_{totRP-1} = 2Vol_e + Vol_c - Vol_t \quad V_{totLOX} = 2Vol_e + Vol_c - Vol_{He}$$

Noto il volume totale occupato dal propellente liquido si ricavano le dimensioni della parte del serbatoio necessaria alla pressurizzazione, ovvero il volume vuoto, e di conseguenza l'altezza del propellente:

$$\begin{aligned} Vol_u &= V_{tot} - V_{prop} \\ H_{prop} &= lc + 2b - H_u \end{aligned}$$

La pressione nel serbatoio non è nota, ma va calcolata, mentre quella del volume vuoto è un dato di progetto del motore. Con quanto ricavato in precedenza si calcolano le pressioni interne dei serbatoi e le pressioni totali

$$\begin{aligned} P_i &= \rho gH \\ P_{tot} &= P_i + P_u \end{aligned}$$

È ora possibile procedere al calcolo degli spessori introducendo alcuni parametri come il fattore di stress K e il rateo dell'ellisse k, cioè il rapporto tra l'asse maggiore e l'asse minore

$$\begin{aligned} K &= 0.8 & k &= \frac{a}{b} & R &= ak \\ t_k &= \frac{KP_{tot}a}{\Sigma_y} & t_{cr} &= \frac{P_{tot}R}{2\Sigma_y} & t_e &= t_k + t_{cr} & t_c &= \frac{P_{tot}a}{\Sigma_y} \end{aligned}$$

	$\rho [kg/m^3]$	$\sigma_r [psi]$	$\sigma_y [psi]$	$E [psi]$	$\nu [-]$	$\Sigma_r [-]$	$\Sigma_y [-]$
Al2219-T87	0.103	69000	57000	10.6e6	0.33	$\frac{\sigma_r}{1.3}$	$\frac{\sigma_y}{1.25}$

Tabella 3: Lega Alluminio 2219-T9

	$a [inch]$	$b [inch]$	$lc [inch]$
RP-1	198	120	276
LOX	198	120	528

Tabella 4: Dati geometrici

	$p_u [psi]$	$p_i [psi]$	$p_{tot} [psi]$	$p_{cre} [psi]$	$p_{crc} [psi]$
RP-1	25.2	13.38	38.58	0.368	0.1393
LOX	23	27.92	50.92	0.641	0.1457

Tabella 5: Tabella riassuntiva pressioni

	$Vol_{prop} [m^3]$	$Vol_c [m^3]$	$Vol_e [m^3]$	$Vol_{tubi/He} [m^3]$	$Vol_{tot} [m^3]$	$Vol_u [m^3]$
RP-1						
LOX						

Tabella 6: Tabella riassuntiva volumi

	$t_k [m]$	$t_{cr} [m]$	$t_e [m]$	$t_c [m]$
RP-1	0.0034	0.0035	0.0035	0.0043
LOX	0.0045	0.0046	0.0046	0.0056

Tabella 7: Tabella riassuntiva spessori

I valori ottenuti risultano essere gli spessori minimi; in realtà lo spessore dovrebbe essere leggermente maggiore per consentire la saldatura, l'instabilità e la concentrazione delle sollecitazioni.

4.2. Pressurizzazione e scambiatore di calore

La pressurizzazione del serbatoio di LOX è affidata al GOX, ossia ossigeno in forma gassosa. Una linea di rilevamento fornisce un feedback di pressione a valvole che controllano il flusso del GOX e permettono di mantenere la pressione di riempimento del serbatoio, man mano che l'ossidante defluisce, tra 18 e 20 psia durante le fasi di volo. La pressurizzazione dei serbatoi è un requisito necessario dall'avviamento del motore fino a fine missione per stabilire e mantenere un gradiente di pressione positivo.

Durante il volo la sorgente di pressurizzazione del serbatoio di combustibile è invece l'olio ad alta pressione. Tramite l'utilizzo di valvole viene mantenuta l'alta pressione all'interno del serbatoio mentre la pressione nelle cisterne di olio decresce. I condotti trasportano l'olio verso gli scambiatori di calore dei motori F-1 e dopo essere passato attraverso ad esso, i condotti di ritorno riportano l'olio gassoso riscaldato ed espanso nella parte superiore del serbatoio del carburante.

L'olio è stato scelto rispetto ad altre soluzioni, come l'azoto, grazie alla sua bassa densità (0.1785 kg/m^3) che permette di risparmiare peso. I serbatoi di olio sono posizionati all'interno del serbatoio di LOX perché grazie alla bassa temperatura dell'ambiente interno criogenico aumenta la densità dell'olio ed è possibile utilizzare serbatoi di alluminio più piccoli e leggeri con circa metà dello spessore delle pareti per immagazzinare una quantità maggiore di olio. Similmente i serbatoi di olio non possono essere posizionati all'interno dell'RP-1 poiché la bassa temperatura dell'olio potrebbe congelare il carburante; infatti, viene immagazzinato ad una temperatura criogenica di 90 K. Le quattro "bottiglie" di olio sono lunghe circa 6 m, hanno un diametro di 56 cm e hanno un volume di 0.88 m³.

Per permettere la pressurizzazione nei serbatoi è necessario l'utilizzo di uno scambiatore di calore. I serbatoi trasferiscono principalmente i propellenti alle turbopompe, per cui è necessaria la pressurizzazione per evitare il fenomeno di cavitazione all'ingresso della turbopompa. Per il motore F-1 si utilizza uno scambiatore di calore a fascio tubiero con 4 bobine e come fonte di calore per permettere lo scambio di calore è utilizzato il gas di scarico della turbina. Tuttavia, è difficile trovare in letteratura metodi di prova appropriati o metodologie di progettazione per tali scambiatori di calore, poiché per la previsione accurata delle prestazioni, l'ottimizzazione del peso del veicolo di lancio e le prestazioni dello scambiatore di calore vengono valutate mediante test di prova. Per collegare lo scambiatore con i serbatoi sono presenti quattro condotti: due linee di andata verso lo scambiatore e due di ritorno verso i serbatoi. L'olio fornito dalle bombole conservate nel serbatoio LOX viene indirizzato allo scambiatore di calore, espanso e quindi indirizzato al serbatoio dell'RP-1 tramite una linea di distribuzione situata all'estremità superiore del serbatoio per garantirne la pressurizzazione.

Per il serbatoio del LOX si ha un sistema di pressurizzazione differente; infatti, il LOX ad alta pressione viene prelevato dal LOX dome, indirizzato allo scambiatore di calore, dove viene espanso in ossigeno gassoso (GOX) e in seguito diretto al serbatoio tramite la linea di distribuzione del GOX.

Le dimensioni esatte dello scambiatore di calore del motore F-1 dipendono dalla versione specifica del motore, poiché il motore F-1 è stato sottoposto a una serie di miglioramenti, tuttavia, in generale, ha una lunghezza di circa 1 metro e mezzo e un diametro che varia da 1 metro all'uscita della turbina a 60 cm al collettore di scarico della turbina.

5. Schema termodinamico

5.1. Analisi dello schema semplificato del sistema motore

Lo schema termodinamico semplificato del sistema propulsivo F-1 viene presentato di seguito. Per poter trattare le principali grandezze termodinamiche quali la pressione P , la temperatura T e la portata massica \dot{m} , sono stati consultati i manuali del motore per poter estrapolare uno schema semplificativo a blocchi [9]. Nello schema presentato viene introdotto il sistema a ciclo generatore di gas che permette l'alimentazione della turbopompa. Supponendo il funzionamento a regime (Main Stage), l'alimentazione è completamente auto sostenuta finché non viene soppressa dai computer di bordo (al termine del t_{burn}) o viene esaurito il propellente.

Qualitativamente, dai due serbatoi di LOX e RP-1 viene spillata una portata, che viene trattata dalla turbopompa per portare in pressione i due liquidi. I due tank sono messi leggermente in pressione da un gas inerte: elio (e GOX nel tank LOX). Risulta vantaggioso avere un gas in pressione poiché permette un'uscita facilitata dai due tank ed evita la cavitazione man mano che essi vengono svuotati. La turbopompa sarà trattata in dettaglio nei paragrafi successivi, data la sua complessità costruttiva. Ai fini dello schema proposto è sufficiente sapere che essa ha il compito di portare ad una certa pressione i due liquidi. Per poter alimentare le pompe, viene calettata sullo stesso asse in comune una turbina, la quale viene mossa da gas caldi combusti in una piccola camera di combustione. Questo sottosistema viene chiamato Gas Generator (GG), e viene alimentato da una portata spillata dopo le turbopompe della stessa coppia RP-1/LOX, con un eccesso di combustibile per evitare temperature elevate all'ingresso della turbina. I gas caldi in uscita dal GG vengono inoltre sfruttati per scaldare e quindi pressurizzare l'elio; successivamente tali gas di scarico vengono convogliati in un tubo circonferenziale all'ugello, nella posizione in cui il rapporto tra aree del divergente è pari a 10:1, dove vengono scaricati sulla parete interna dell'estensione dell'ugello. Questo viene fatto per creare un film di gas relativamente freddi che hanno il compito di alleviare il carico termico sopportato dalla porzione finale dell'ugello (vedi —APPENDICE— per rappresentazioni grafiche dettagliate). Il raffreddamento della parte superiore dell'ugello viene effettuato facendo passare il combustibile in diversi tubi esterni posti nella sezione tra gola e divergente 10:1; il combustibile riscaldato viene poi introdotto in camera di combustione.

In Tabella 8 e Figura 6 si vedono alcuni dati rappresentativi dell'intero sistema. Si è ipotizzato di trattare i gas come perfetti e di assumere come dati alcuni rendimenti e alcune grandezze caratteristiche.

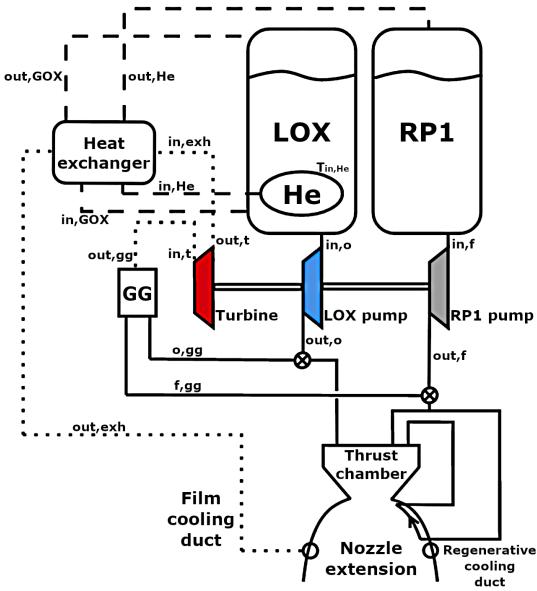


Figura 6: Schema termodinamico

	$p_{in} [\text{bar}]$	$p_{out} [\text{bar}]$	$\dot{m}_p [\text{kg/s}]$	$T_{in} [\text{K}]$	$T_{out} [\text{K}]$
RP1 pump	3.1026	128.93	849.13	90.15	90.15
LOX pump	4.4816	110.45	1828.43	298.15	298.15
GG	68.94	66.63	77.25	1062	1062
Turbine	64.05	3.93	77.25	1062	888.38
HH (He)	207.86	—	0.2268	90.15	433.15
HH (OX)	96.52	93.08	3.1752	95.37	380.37
HH (EXH)	—	—	77.25	888.38	879.17

Tabella 8: Dati schema termodinamico

5.2. Analisi sulla scelta del ciclo di alimentazione

Per via della presenza di un sistema a turbopompe per l'alimentazione del propellente, è necessario scegliere il design ottimale per il ciclo di potenza che alimerterà la turbina e di conseguenza le due pompe stesse. La scelta del tipo di ciclo di potenza ha ripercussioni sulla filosofia del design dell'intero impianto e la sua introduzione può implicare

una variazione in termini di prestazioni del sistema motore. Nel motore F-1 è stato scelto un ciclo di alimentazione a Gas Generator: risulta il sistema più leggero e semplice tra tutti, e data la ridotta complessità è il più economico in termini di sviluppi. Inoltre, è l'unico ciclo di alimentazione tra i principali ad avere un flusso di gas in parallelo alla camera di spinta: questa peculiarità ha ripercussioni sulle prestazioni del motore.

Altri principali tipi di cicli di alimentazione sono l'*Expander Cycle* e lo *Staged Combustion Cycle*. Oltre a questi, diversi ne sono stati sviluppati con combinazioni di diversa complessità che però in alcuni casi hanno portato a migliorare notevolmente le prestazioni globali del sistema motore. Nell'*Expander Cycle* la turbina viene alimentata grazie al riscaldamento rigenerativo del combustibile attraverso le pareti dell'ugello (permettendo quindi anche il raffreddamento delle pareti). Il fuel, che viene vaporizzato, espande in turbina e successivamente entra in camera di combustione. La temperatura in entrata alla turbina è limitata, non ci sono combustioni prima di essa: questo limita l'energia ricavabile dalla turbina e limita anche la pressione ottenibile in camera. Il necessario cambio di fase è un fattore limitante nell'utilizzo di tale ciclo: al crescere della dimensione del motore bisogna aumentare la portata in turbina in modo da aumentare la potenza, ma tale portata è limitata da fattori geometrici, poiché deve passare nelle pareti dell'ugello ed essere adeguatamente portata a vaporizzazione. Inoltre, la necessità di avere vaporizzazione immediata concentra l'utilizzo di questo ciclo per combustibili criogenici come l'idrogeno. Tale ciclo viene dunque usato per motori a spinte non troppo elevate e per stadi alti, e non poteva essere applicato al boost stage del primo stadio SI-C.

Nelle diverse tipologie di *Staged Combustion Cycle* si introducono uno o più preburner in modo da suddividere la combustione in diverse zone, oltre alla camera di spinta principale. Questo ciclo ha migliori prestazioni rispetto al ciclo a gas, poiché il flusso in uscita non viene scaricato in atmosfera ma introdotto nella camera principale. Questo aumenta l'efficienza del sistema, per contro lo sviluppo di questo ciclo aumenta notevolmente i costi e i tempi di sviluppo data la sua elevata complessità. Per poter comprendere le difficoltà ingegneristiche da affrontare si deve riconoscere che in un ciclo chiuso non si potrebbe semplicemente scaricare i gas combusi del GG, dopo aver attraversato la turbina, direttamente in camera: la pressione troppo bassa in uscita dalla turbina non sarebbe compatibile con l'alta pressione richiesta dalla camera di spinta, e i prodotti di combustione di una miscela FR (Fuel Rich) di combustibili a idrocarburi come RP-1 provocherebbero difficoltà agli iniettori del piatto principale, intasandoli. Da notare inoltre che nel ciclo chiuso FR tutto il fuel passa nel preburner, mentre nel gas generator vengono spillate delle piccole portate di fuel e oxidizer a monte. Questo implica che il sistema di preburner deve essere abbastanza grande da contenere una combustione controllata e generalmente a portate elevate di propellenti (a pressioni molto alte), soprattutto per quanto riguarda i booster stage. Un altro accorgimento è la suddivisione in stadi della turbopompa del fluido che viene spillato (l'ossidante nel caso mostrato in Figura 7). L'ossidante in questo caso deve essere pressurizzato ad alta pressione per la camera, e una sua piccola percentuale deve essere portata a quasi il doppio del valore di pressione di camera per entrare nel preburner. Oltre a queste complicazioni, il ciclo chiuso FR non viene utilizzato con combustibili a lunga catena carboniosa come RP-1, per il problema legato ai suoi prodotti di combustione. Si preferisce usare questo ciclo con combustibili come idrogeno o metano (come nei nuovi motori sviluppati da SpaceX). I motori con cicli chiusi e OR (Oxidizer Rich), storicamente sviluppati dai russi dall'inizio degli anni '50, venivano alimentati anche con carburanti come il kerosene.

Concludendo, si può dire che la scelta del ciclo di alimentazione per il motore F-1 è ricaduta su un ciclo a gas per una combinazione di fattori, quali: esigenze prestazionali del singolo motore, elevate in termini di potenza e per quel tipo di combinazione di propellenti (con un trade-off sulla perdita di prestazione, come visto in seguito); limitazioni date dallo sviluppo degli altri cicli di alimentazione in quel periodo storico; minore complessità del sistema stesso.

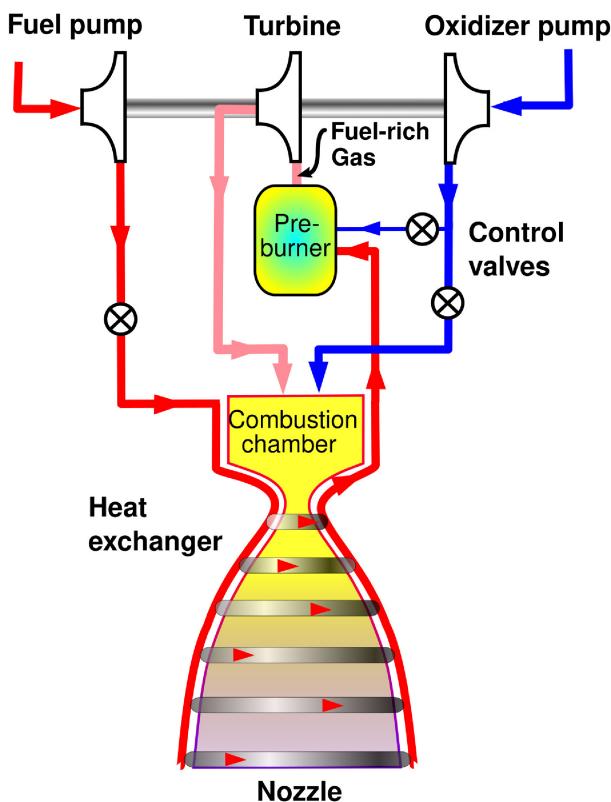


Figura 7: Staged Combustion Cycle FR

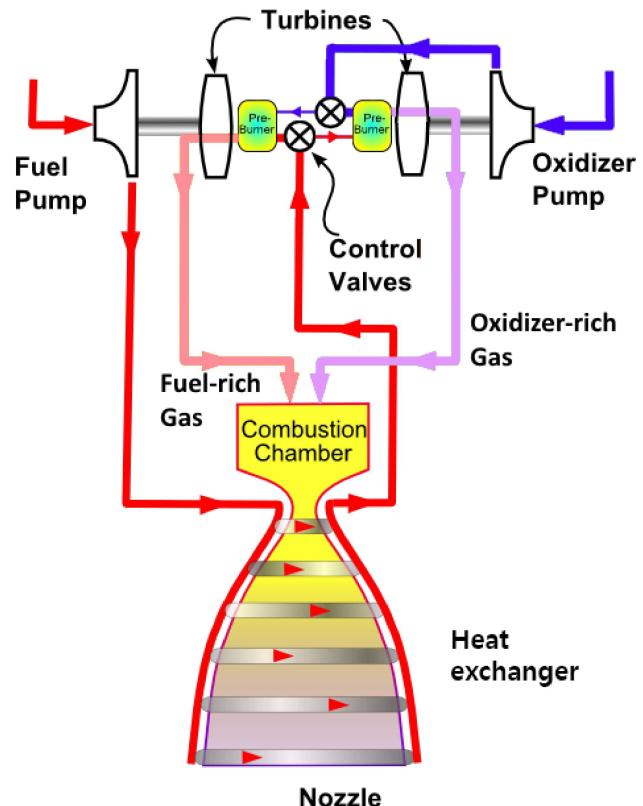


Figura 8: Staged Combustion Cycle completo

5.3. Analisi delle variazioni di performance introdotte dal ciclo a gas

In questa sezione verrà analizzato come l'introduzione del ciclo a gas ha delle ripercussioni sulle performance del sistema stesso, in particolare sull'impulso specifico del sistema motore, che verrà denotato come $I_{s,oa}$ (l'abbreviativo *oa* si riferisce al termine "overall"). Importante è la distinzione tra l'impulso specifico del motore intero (appena introdotto) e quello della camera di spinta (più ugello), che sarebbe quello teorico e denotato come $I_{s,tc}$. Per poter trattare teoricamente le limitazioni, si parte dal presupposto che a parità di altri fattori (come quota, mixture ratio, rapporto di espansione, ecc.) un aumento di pressione in camera di combustione aumenta le prestazioni del sistema. Infatti, analizzando la spinta si vede che:

$$T = \dot{m}_p u_e + A_e (p_a - p_e) \quad \text{dove} \quad u_e = u_e(p_c) = \sqrt{\frac{2\gamma RT}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Si nota come aumentando la pressione in camera, a questo livello di approssimazione, la spinta aumenta indefinitamente, per cui anche l'impulso specifico $I_{s,tc}$ aumenterà poiché esso è definito da:

$$I_{s,tc} = \frac{T(p_c)}{\dot{m}_p} = u_e(p_c) + \frac{A_e(p_a - p_e)}{\dot{m}_p}$$

Questo ci permetterebbe di concludere che un aumento di pressione illimitato in camera di combustione aumenta indefinitamente le prestazioni, sia perché l'ugello può espandersi a pressione più alta, sia per il contributo statico. Introducendo però un sistema di alimentazione di potenza in parallelo come il GG, si ha in realtà un calo di prestazioni rispetto all'andamento teorico.

Questo fatto può essere compreso a livello qualitativo considerando che, in un tale sistema, aumentare la pressione in camera significa aumentare le prestazioni richieste dalle pompe, richiedendo quindi più potenza dalla turbina. A parità di salto di pressione in turbina e prodotti di combustione del GG, l'unico modo che si ha per aumentare la potenza prodotta dalla turbina è aumentare lo spillamento di portata dal flusso che andrà poi in camera. Questo flusso, oltre a non conseguire una combustione ottimale (ovvero con rapporto O/F molto diverso da quello della camera), viene espanso a velocità molto più basse e questo implica una perdita di prestazioni che può essere quantificata nel modo seguente [6]:

$$\begin{aligned}
 I_{s,oa} &= \left(1 - \frac{\dot{m}_{gg}}{\dot{m}_p}\right) I_{s,tc} + \frac{\dot{m}_{gg}}{\dot{m}_p} I_{s,gg} \\
 I_{s,gg} &= I_{s,gg}(u_{e,gg}, p_{c,gg}, \dot{m}_{gg}) \\
 u_{e,gg} &= u_{e,gg}(p_{c,gg}) = \sqrt{\frac{2\gamma_{gg} R_{gg} T_{gg}}{\gamma_{gg} - 1} \left[1 - \left(\frac{p_{e,gg}}{p_{c,gg}}\right)^{\frac{\gamma_{gg}-1}{\gamma_{gg}}} \right]} \\
 p_{c,gg} &= 0.85 \cdot p_{c,tc} \\
 \dot{m}_{gg} &= \dot{m}_{gg}(\text{pwr}, \eta_t, \epsilon, T_{in}, c_{p,gg}) = \frac{\text{pwr}}{\eta_t c_{p,gg} T_{in} \epsilon} \\
 \text{pwr} &= \text{pwr}_{LOX} + \text{pwr}_{RP1} = \frac{\Delta p_{LOX} \dot{m}_{LOX}}{\eta_{p,LOX} \rho_{LOX}} + \frac{\Delta p_{RP1} \dot{m}_{RP1}}{\eta_{p,RP1} \rho_{RP1}} \\
 I_{s,tc} &= I_{s,tc}(u_{e,tc}, p_{c,tc}, \dot{m}_{tc}) \\
 u_{e,tc} &= u_{e,tc}(p_{c,tc}) = \sqrt{\frac{2\gamma_{tc} R_{tc} T_{tc}}{\gamma_{tc} - 1} \left[1 - \left(\frac{p_{e,tc}}{p_{c,tc}}\right)^{\frac{\gamma_{tc}-1}{\gamma_{tc}}} \right]} \\
 \dot{m}_{tc} &= \dot{m}_p - \dot{m}_{gg}
 \end{aligned}$$

Si è ipotizzato, come best practice, che la pressione in camera del GG sia l'85% della pressione nella camera principale. Si ipotizza inoltre, in prima approssimazione, che il salto di pressione attraverso le pompe sia proporzionale alla pressione in camera, con costante di proporzionalità ottenuta dalla divisione delle due quantità note: prevalenza della pompa (sia LOX che RP-1) e pressione in camera nominale dell'F-1 [6]. Sono state implementate tali equazioni in MATLAB, imponendo un range esteso di pressioni, per poter notare l'effetto dell'introduzione del gas generator nel sistema.

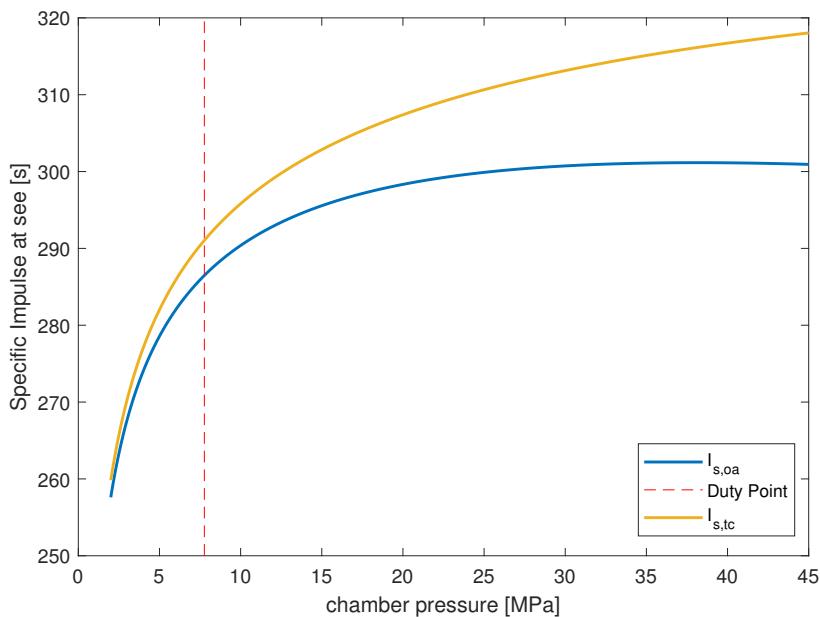


Figura 9: Confronto tra impulsi specifici a livello mare

Si nota come, al valore di pressione associato al motore F-1, ci sia un calo di prestazione rispetto al teorico. Il valore di impulso cala da 291 secondi a circa 285 secondi (a livello mare). Questo modello non considera perdite prestazionali dovute al flusso 3D (con eventuali separazioni asimmetriche e considerazioni sulle onde d'urto): in questa situazione l'ugello è in condizione sovra-espansa. Queste perdite sono successivamente considerate nella modellazione tramite il software RPA.

Dai grafici precedenti si nota anche come l'ottimo prestazionale per l'impulso specifico del sistema complessivo sia a pressioni in camera molto elevate (attorno ai 30 MPa, ovvero 300 bar). Un valore di pressione così elevato richiede una revisione di tutti i sistemi di alimentazione, a partire dalla turbopompa. Tale valore di pressione si trova tuttora nei motori LRE di nuova generazione come il Raptor, che tra l'altro non possiedono il ciclo a gas.

6. Gas generator

Il gas generator del motore F-1 è il sistema adibito alla produzione di gas caldi per alimentare la turbopompa. Tale sistema è composto da una camera di combustione progettata ad hoc per questo tipo di sottosistema. Vengono utilizzati gli stessi propellenti utilizzati nella camera principale ma con diverso rapporto O/F (valore in [Tabella 9](#)). La necessità di avere un O/F lontano dal valore stechiometrico è dettata dal contenere le temperature del flusso che impatterà sulla turbina: questo lo si ottiene con miscele ricche in ossidante o ricche in combustibile. In questo caso è stata scelta una miscela ricca in combustibile per molteplici motivi: evitare ossidazioni di componenti che sarebbero convenute con una miscela ad alta percentuale in LOX, diminuire la possibilità di eventuali guasti causati da flussi surriscaldati (più probabili nel caso Oxider Rich) e contenere il consumo specifico della turbina, poiché il peso molecolare dei gas risulta minore nel caso Fuel Rich ([Appendice C](#)).

La scelta di optare per una miscela FR ha anche alcuni aspetti negativi, tra cui la complessità della cinetica del processo chimico dovuta alla produzione di idrocarburi, che solitamente creano depositi solidi ([Appendice D](#)). Anche con questi valori bassi di O/F, la combustione nel GG viene completata in camera (quindi è molto rapida); al contrario, i processi di evaporazione e di mixing sono molto lenti. Tale problema si riscontra in maniera tangibile nei GG, mentre è meno evidente nelle camere di spinta dei LRE, dove tali processi sono più veloci. Per avere una buona evaporazione dei propellenti è necessaria una zona di combustione molto larga (più iniettori con portate minori), mentre per avere un buon mixaggio è necessaria una camera allungata in direzione del flusso: questi due problemi vengono ovviati tramite scelte di design specifiche trattate di seguito.

Nella creazione di un elemento GG, in particolare la sua camera di combustione, si devono considerare dei prerequisiti fondamentali per il suo corretto funzionamento:

- dato che l'atomizzazione degli iniettori spesso non è sufficiente, essa viene relegata anche ad effetti aerodinamici ottenuti tramite la geometria della camera, in modo il flusso del gas venga differenziato in zone di alta e bassa velocità che favoriscono la vaporizzazione;
- deve essere forzato il mixing tra prodotti di combustione e eccesso di combustibile per fornire una temperatura uniforme in uscita, in modo da evitare un guasto in turbina causato da zone calde, che solitamente sono localizzate al centro del flusso;
- forma e dimensione devono essere adattate all'ingombro del resto del motore, per avere un sistema il più compatto possibile;
- le perdite di pressione prodotte nella camera non devono essere troppo elevate.

Di seguito troviamo raffigurato il GG di nostro interesse (più particolari in [Appendice E](#)):

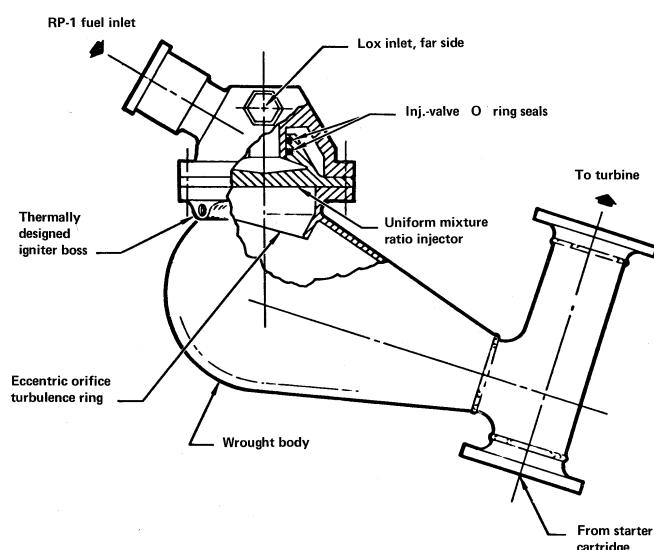


Figura 10: Schema del gas generator

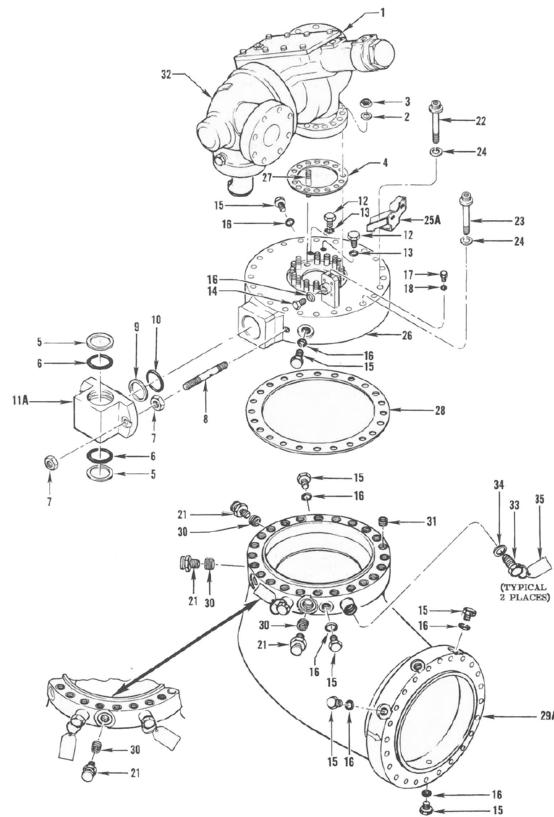


Figura 11: Esploso del gas generator

In base alle considerazioni sopra citate si spiegano alcune scelte progettuali per questo componente.

- La forma del GG, per cui lo scarico dei gas avviene in maniera inclinata rispetto alla direzione del piatto di iniezione, è dettata da requisiti di spazio e disposizione rispetto alle altre componenti.
- La scelta di camera sferica e non assiale permette di aumentare il livello di mixing di gas combusti e combustibile vaporizzato in eccesso.
- Il fondo della camera è incurvato e reso planare per non accumulare i prodotti di scarico.
- La zona di ingresso dei gas in turbina è composta da una sezione ad area costante, in modo da rendere il flusso il più uniforme possibile prima dell'ingresso in turbina.
- Il corpo della camera di combustione è convergente in maniera da differenziare la velocità e ottenere migliore atomizzazione.
- Il piatto di iniezione scelto per il GG è un semi-UMR (Uniform Mixture Ratio), ovvero ha le zone esterne più ricche in combustibile per ottenere film cooling, mentre la maggior parte dell'iniezione avviene a O/F predefinito. Altri iniettori, come HCl, hanno una stratificazione dei gas e delle temperature: ciò non è consigliabile per gas che devono impattare sulle palettature. Inoltre, un iniettore HCl non è compatibile con la forma arrotondata del corpo poiché provocherebbe un surriscaldamento del fondo della camera.
- L'iniettore deve avere diametri più ristretti possibile per migliorare atomizzazione, compatibilmente con quelli fabbricabili.
- Il TR (Turbulence Ring) viene posizionato poco dopo il piatto d'iniezione per rimediare ai problemi di basso ratio di mixing attraverso la creazione di un reverse flow. Questo permette un alto livello di mescolamento tra specie presenti per uniformare così la temperatura ed evitare stratificazioni del flusso, le quali causerebbero il fenomeno di "momentum separation", un flusso chiaramente non sostenibile dalla turbina. Questo reverse flow è reso più efficace grazie alla porzione circolare della camera che accoglie questo moto vorticoso. La posizione del TR è scelta per evitare il surriscaldamento dello stesso, dato che a monte della camera i gas vaporizzati devono ancora essere igniti e hanno dunque temperature relativamente basse. Il TR deve inoltre essere in grado di non provocare alte cadute di pressione: questo è ottenuto rendendo il TR conico (visibile in [Appendice E](#)).
- L'ignitore deve essere posizionato poco dopo il piatto di iniezione (una best practice è tra 2.5 e 3.8 cm dal piatto). Viene inoltre posizionato in zone molto vicine ai punti di ristagno del flusso, in cui la combustione viene resa efficace.

$T_c [K]$	$p_c [bar]$	$p_{out} [bar]$	$t_p [ms]$	O/F	$\dot{m}_{fuel} [kg/s]$	$\dot{m}_{ox} [kg/s]$
1062	67.57	65.15	5	0.416	53.52	22.23

Tabella 9: Dati reali del gas generator

Una stima quantitativa del volume totale necessario alla camera di combustione per adempiere alle richieste della stessa è basato su un tempo di permanenza, ricavato nel caso dei GG per ogni coppia di propellente. Nel caso del GG dell'F-1 si ha:

$$V_{cc} = t_p \frac{\dot{m}_{gg}}{\rho_{gc}} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{53.52 + 22.23}{18.3406} \right) m^3 = 0.02065 m^3$$

7. Turbopompa

7.1. Descrizione generica Mark 10

Il gruppo turbopompa Mark 10 è montato parallelamente alla mezzeria longitudinale della camera di spinta ed è sostegnato principalmente da due gruppi stabilizzatori a tre gambe saldati al corpo della camera e dai quattro condotti del propellente ad alta pressione installati tra la turbopompa e la camera di spinta. Il gruppo è composto da due pompe centrifughe montate schiena contro schiena (back-to-back) su un albero comune e azionate direttamente da una turbina a gas ad impulso. L'albero principale e i componenti rotanti sono collegati direttamente all'albero e sono bilanciati dinamicamente. L'albero è supportato da due gruppi di cuscinetti a sfere riscaldati elettricamente e raffreddati a carburante nell'area della pompa del LOX (per mantere l'ossigeno in fase liquido) da un gruppo di cuscinetti a rulli raffreddati a carburante nell'area della turbina, mentre per isolare i propellenti, il fluido di raffreddamento e i gas caldi sono presenti un insieme di guarnizioni in carbonio, plastica (Kel-F, Teflon) e gomma sintetica (Buna-N, Viton-A).

7.1.1 Pompe LOX e RP1

L'esigenza di un sistema a turbopompa in uno stadio di lanciatore nasce quando il lanciatore stesso ha degli elevati requisiti di missione quali furono quelli dello stadio SI-C (e come la grande maggioranza dei primi e secondi stadi dei

principali lanciatori odierni). Un sistema a serbatoio pressurizzato, per l'alimentazione dei 5 motori, dovrebbe essere progettato a sostenere elevate pressioni e quindi con un elevato spessore delle pareti dei tank. Introducendo il sistema di alimentazione a turbopompa, a patto di dimensionarlo correttamente, permette di diminuire il materiale per costruire i grandi tank di un sistema di queste dimensioni. Tuttavia, un sistema così complesso introduce ulteriore complessità al progetto. Lo sviluppo moderno di tali sistemi prevede studi preliminari con delle tecniche assodate da anni, come tabelle di valori specifici per le varie esigenze, con dati raccolti durante tutti gli anni di sviluppo. Al giorno d'oggi si conclude e si implementa la progettazione teorica tramite uno studio a CFD che tuttavia non verrà trattato in queste pagine.

L'F-1 è dotato di due pompe del sistema Mark 10 di tipo centrifugo, una per l'ossidante e il combustibile; questa tipologia permette di ottenere un salto di pressione ΔP maggiore per singolo stadio (rotore + statore) rispetto alle pompe assiali a discapito di un leggero decremento dell'efficienza. Infatti, si è soliti usare pompe assiali solo laddove sono richiesti più stadi per ottenere un dato incremento di pressione come nel caso di LH₂ dove a causa della bassa densità, il ΔP risulta limitato dalla massima velocità raggiungibile dai rotori. Per pompe con fluido di lavoro a densità simile, come RP-1 e LOX, e simili pressioni di scarico, si può mantenere la velocità angolare costante. Il progetto di una turbopompa ricerca principalmente la massimizzazione della velocità operativa poiché questo permette di ridurre le dimensioni della pompa stessa e di conseguenza il suo peso. Tuttavia, possibili effetti di cavitazione all'ingresso della pompa e sforzi dovuti alla forza centrifuga, vistosi nell'impeller (girante) e nella turbina, impongono un limite massimo alla velocità raggiungibile nelle zone periferiche dei componenti.

7.1.2 Analisi pompa LOX

Nei seguenti paragrafi verrà considerato il funzionamento a regime, in particolare si vuole proporre un'analisi della pompa LOX del sistema di interesse. Partendo da diverse ipotesi e alcuni dati trovati sui principali manuali di interesse (NASA design Criteria - TURBOPUMPS for LRE e Centrifugal pumps for LRE), verranno costruiti i triangoli di velocità di impeller e inducer. Si verificherà la loro sensatezza tramite un controllo in termini di salto entalpico prodotto. Nel processo di analisi si cercherà di dare una spiegazione dei vari componenti. Infine, tramite un programma MATLAB e la libreria CoolProp si cercherà di dare un'analisi più accurata producendo anche un diagramma dell'impeller del LOX e quindi avere un primo ingombro radiale.

Per permettere al motore di generare la spinta per cui è stato progettato, la pompa deve essere in grado di fornire un adeguato valore di 'prevalenza della pompa' ed elaborare allo stesso tempo la portata volumetrica richiesta. Per la performance nel caso della pompa, al posto dell'incremento di pressione, è comune infatti usare il valore di prevalenza - headrise H - definito come l'altezza a cui può essere sollevato 1 kg di fluido con il lavoro compiuto idealmente per unità di massa dalla pompa. Si può usare la seguente formula per ricavarne il valore:

$$H = \frac{\Delta h_s}{g} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dp}{\rho g}$$

Δh_s è direttamente legata al lavoro della pompa, rappresenta l'entalpia specifica del fluido di lavoro, e anche nel caso di fluido con elevata comprimibilità si può sempre scrivere

$$\frac{\text{Lavoro}}{\text{Massa}} = \Delta h_s = \frac{gH}{\eta_p}$$

dove con η_p si intende il rendimento della pompa. La prevalenza della pompa è inoltre direttamente proporzionale alla velocità periferica del disco della girante e da una prima osservazione si nota che il fluido viene introdotto assialmente vicino al mozzo della girante, senza alcun momento angolare, e viene rilasciato con una velocità tangenziale dipendente da β_2 angolo di back-leaning della palettatura e v_{r2} velocità radiale di uscita del flusso. Quest'ultimo termine è legato alla portata volumetrica Q della pompa, ulteriore requisito di progetto, che essa deve essere in grado di soddisfare e che viene principalmente dettata dalle condizioni presenti in camera di combustione

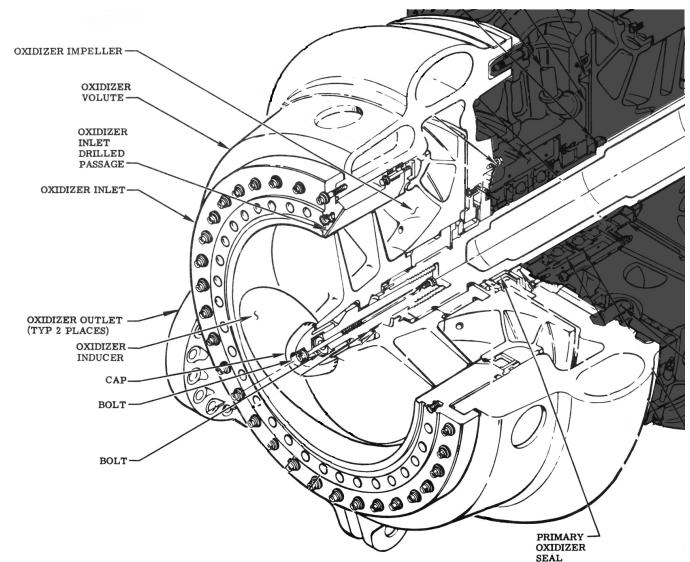


Figura 12: Prospettiva e dettagli pompa LOX

e al gas generator, più eventuali perdite di carico stimate lungo i tubi. Dal bilancio del momento della quantità di moto è possibile ricavare la coppia necessaria a mantenere il moto della girante e risalire perciò alla potenza:

$$P = \dot{m}(\omega R_2)^2(1 - \frac{v_{m2}}{\omega R_2} \tan \beta_2) = \dot{m} \frac{gH}{\eta_P}$$

Al valore di potenza è legato il termine ψ coefficiente di prevalenza -head coefficient- della pompa

$$\psi = \eta_P(1 - \frac{v_{m2}}{\omega R_2} \tan \beta_2) = \frac{gH}{(\omega R_2)^2}$$

e per un design ottimale di pompa centrifuga deve essere contenuto tra 0.2 e 0.8. Valori maggiori dell'unità sono indicativi di palette realizzate per imparire in avanti il flusso e il ΔP tenderebbe ad aumentare all'aumentare della portata portando ad una generale instabilità del sistema di pressurizzazione.

Parametri adimensionali

La pompa è progettata, come detto precedentemente, per fornire una specifica prevalenza e portata volumetrica. Queste due quantità vengono usate per ricavare due parametri adimensionali

$$\text{Diametro specifico } d_s = \frac{D(gH)^{\frac{1}{4}}}{Q^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Velocità specifica } n_s = \frac{\omega Q^{\frac{1}{2}}}{(gH)^{\frac{3}{4}}}$$

Si verifica facilmente che il prodotto dei due parametri $n_s d_s = 2/\sqrt{\psi}$ e poiché le pompe centrifughe, per costruzione, hanno un coefficiente di prevalenza ψ minore dell'unità allora $n_s d_s > 2$. Diagrammi empirici nel piano n_s, d_s permettono di fare considerazioni sulle prestazioni delle pompe e l'individuazione di zone ottimali di funzionamento a regime tenendo anche conto, solo ad un livello semplificato e non perfettamente realistico, di eventuali tolleranze di costruzione e rugosità interne che potranno poi essere modificate dopo prove al banco.

Sono forniti i seguenti requisiti costruttivi della pompa [1]

$\eta_P [-]$	$P_{TOT1} [\text{bar}]$	$P_{TOT2} [\text{bar}]$	$\rho [\text{kg/m}^3]$	$Q [\text{m}^3/\text{s}]$	$D_2 [\text{m}]$	$\omega [\text{rad/s}]$
0.746	4.4816	110.4500	1141	1.5898	0.4953	575.12

Tabella 10: Requisiti del sistema pompa LOX

da cui si ricavano i principali parametri prestazionali caratterizzanti la pompa in esame (il codice MATLAB con il dettaglio di tutti i conti eseguiti è riportato in appendice)

$H [\text{m}]$	$\Delta h_s [\text{J/kg}]$	$\psi [-]$	$P [\text{W}]$	$d_s [-]$	$n_s [-]$	$n_s d_s [-]$
944.7827	$1.2424e + 04$	0.4569	$2.2440e + 07$	3.8543	0.7677	2.9588

Tabella 11: Parametri prestazionali del sistema pompa LOX

Il punto di partenza nella progettazione della pompa è la scelta di un valore ottimale di velocità specifica N_s , definita in condizioni di design in relazione al numero di giri al minuto N prestabiliti in condizioni stazionarie

$$N_s = \frac{N \sqrt{Q}}{H^{0.75}}$$

questo primo valore permette di effettuare una prima selezione tra le varie tipologia di pompe (in particolare forma e tipologia di impeller) esistenti per concentrare lo studio su quella che meglio si potrebbe adattare ai requisiti del motore. Dal momento che sono noti i valori di portata e salto di pressione richiesto, viene ipotizzato un numero di giri al minuto N per cominciare l'analisi.

Analisi inducer

è la prima interfaccia tra il fluido di lavoro e il sistema pompa e deve essere progettata con l'intento di evitare il più possibile eventuali fenomeni di cavitazione che portano ad un grande degrado delle prestazioni generali. Il rischio di cavitazione è alto soprattutto nella zona di ingresso -inlet- della pompa dove il fluido di lavoro alla pressione più bassa che si riscontra in questa parte del ciclo, dovendo ancora cominciare la pressurizzazione, viene compresso grazie ai contributi di aumento di velocità radiale e velocità di rotazione della palettatura. Per caratterizzare la condizione di cavitazione bisogna introdurre una nuova grandezza, detta NPSH (Net Positive Suction Head), è un indice di merito della pressione in ingresso alla pompa. In particolare:

$$(NPSH) = \frac{P_{TOT1} - P_{vap}}{\rho g}$$

In fase di progettazione si utilizza il parametro $(NPSH)_c$ come pressione critica all'ingresso per non avere cavitazione, valore determinato dal design globale del motore, ed è necessario che sia verificata la relazione $(NPSH)_a > (NPSH)_c$. In aggiunta per comparare le caratteristiche di aspirazione tra differenti geometrie e organizzazioni del sistema pompa si utilizza un parametro derivante direttamente dalla velocità specifica N_s definita sopra, la suction specific velocity N_{ss} e definita come segue.

$$N_{ss} = \frac{N\sqrt{Q}}{(NPSH)_c^{0.75}}$$

Alti valori di N_{ss} sono indicativi della presenza di un inducer, a monte dell'impeller. Questo contribuisce attivamente a migliorare la prestazione globale della pompa dal momento che in questo modo si amplia il range di velocità rotazionali ammissibili senza incorrere nella cavitazione, fatto che permette una diretta riduzione del peso della pompa a parità di livello di potenza e prevalenza fornito al fluido.

È ora possibile andare a calcolare le velocità in ingresso, sezione 0, e in uscita, sezione 1, dall'inducer della pompa. Si effettua una ragionevole ipotesi sul valore del coefficiente di prevalenza ψ_{ind} , pari a 0.06, relativo al solo tratto iniziale [6]; da questo dato si trovano in cascata la velocità di rotazione riferita al valore medio del raggio della palettatura inducer e i relativi diametri effettivi della palettatura e dell'albero motore sezioni 0 e 1. Dalla conoscenza del valore di portata volumetrica all'ingresso dell'inducer, leggermente maggiore di quello presente nel corpo impeller per tenere conto di eventuali perdite, si sfrutta l'equazione di continuità per ricavare i vettori velocità nel sistema di riferimento assoluto e solidale con il case della pompa. Tali velocità sono indicate con \vec{c}_0 e \vec{c}_1 , rispettivamente per inlet e outlet inducer, e sono costituite da c_u per indicare la componente tangenziale della velocità assoluta e da c_m per riferirsi alla velocità meridionale, ovvero la componente della velocità assoluta che appartiene al piano radiale e assiale. Sono anche noti i valori di \vec{u} , vettore velocità periferica media di rotazione della palettatura nelle sezioni di ingresso e uscita, dal momento che si sono ricavati i diametri effettivi e si conosce il numero di giri al minuti effettuati. Usando le relazioni trigonometriche, e la conservazione della componente meridionale della velocità tra la velocità assoluta \vec{c} e la velocità espressa nel sistema di riferimento relativo e solidale con la palettatura in rotazione \vec{v} , si trova l'ultimo vettore necessario per andare a comporre il triangolo di velocità complessivo e determinare infine gli angoli di orientazione β riferito all'inclinazione di \vec{v} e α riferito invece all'orientazione di \vec{c} .

Con le stesse relazioni sopra descritte, è anche possibile andare a trovare la velocità all'estremo superiore -tip- della paletta per valutare un ulteriore parametro di progetto, la -vane solidity tip-; essa è definita come la sezione anulare normale alla direzione della velocità assiale di effettivo passaggio del fluido di lavoro.

Analisi impeller

Bisogna anche in questo fare riferimento ad una ragionevole ipotesi sulla perdita di prevalenza H nella sezione anulare di passaggio del fluido a causa di attriti e conseguente dissipazione di energia, dal manuale risulta $H_e = 0.3H$ come termine di perdita [6]. A questo punto è possibile calcolare la prevalenza effettiva fornita della sezione della girante -impeller- e sono noti inoltre il diametro nella sezione 1 -outlet inducer/inlet impeller- e nella sezione 2 -outlet impeller-. Con un ragionamento del tutto analogo a quello relativo all'inducer è possibile costruire il triangolo di velocità dato dalla composizione della velocità assoluta \vec{c} , della velocità relativa \vec{v} , con i rispettivi angoli di orientazione α e β e della velocità periferica media di rotazione \vec{u} . Per i procedimenti di analisi della conservazione della portata e di calcolo effettivo mediante relazioni trigonometriche passo per passo si rimanda al codice matlab *POMPA_{LOX}* allegato in appendice.

Analisi casing pompa: vani diffusori

Il principale compito del casing è quello di convertire l'elevata energia cinetica del fluido di lavoro in uscita dalla sezione 2 dell'impeller in pressione statica; questo elemento non contribuisce quindi in alcun modo alla generazione di un valore di prevalenza. Il casing può essere formalmente diviso in due sezioni: una frontale nominata -suction nozzle- con il compito di convogliare debitamente il flusso nella sezione di uscita -volute / (voluta in italiano)- che invece si occupa della effettiva conversione energetica. La sezione frontale ha una lughezza ridotta per cercare di limitare al minimo le perdite di pressione per attrito contro le pareti rigide. Con i dati in possesso si procede al dimensionamento di un casing con geometria double-volute (180°) e singola sezione di efflusso per il flusso.

Per calcolare la velocità media del flusso all'interno della voluta si assume come riferimento un parametro K_v determinato sperimentalmente tramite prove al banco di differenti tipologie di vani diffusori. Per i calcoli $K_v = 0.337$ da manuale [6].

$$c_3 = K_v \sqrt{2gH}$$

Si procede al calcolo dell'area del tratto divergente della voluta, imponendo per ciascuna sezione un valore di α_{volute} compreso tra 0° e 180°. Nota la geometria e servendosi dell'equazione di continuità è infine possibile ricavare i valori di velocità assoluta relativi alla sezione di ingresso alla voluta e di efflusso finale per valutare il corretto funzionamento del sistema pompa e l'incremento di pressione statica che riesce ad imporre al fluido.

$v_{voluteIN}$ [m/s]	$v_{voluteOUT}$ [m/s]
103.7019	29.1447

Tabella 12: Velocità efflusso del sistema pompa LOX: casing

7.1.3 Analisi pompa RP-1

Si riportano i principali parametri di interesse calcolati con gli stessi procedimenti della pompa LOX.

η_P [-]	P_{ROT1} [bar]	P_{ROT2} [bar]	ρ [kg/m ³]	Q [m ³ /s]	D_2 [m]	ω [rad/s]
0.760	3.1026	128.2400	808.9324	0.9617	0.59436	574.020

Tabella 13: Requisiti del sistema pompa RP-1 [1]

H [m]	Δh_s [J/kg]	ψ [-]	P [W]	d_s [-]	n_s [-]	$n_s d_s$ [-]
1.5774e + 03	2.0361e + 04	0.5318	1.6218e + 07	6.7598	0.4057	2.7427

Tabella 14: Parametri prestazionali del sistema pompa RP-1

$v_{voluteIN}$ [m/s]	$v_{voluteOUT}$ [m/s]
153.7897	31.7356

Tabella 15: Velocità efflusso del sistema pompa RP-1: casing

7.2. Turbina

7.2.1 Descrizione turbina

La turbina che fornisce la potenza necessaria alle pompe del sistema motore F-1 è definita come turbina a impulso (variazione di pressione statica solamente negli statori), e cosiddetta 2 row - velocity compounded (VC). Ovvero costituita da 2 file di rotori intramezzati da uno statore. Il gas caldo prima di passare in questa zona viene espanso in una schiera di ugelli che aumentano notevolmente la velocità: per le turbina VC, idealmente, tutta l'espansione avviene in questa zona. Successivamente i rotori, venendo impattati da un gas, sottraggono quantità di moto al fluido. Lo statore intermedio ha la funzione di reinidirizzare il flusso all'ingresso dell'ultimo rotore. Oltre a queste zone citate, nella turbina c'è una zona di ingresso, manifold, che convoglia il flusso ai nozzles. I nozzles, che sono generalmente convergenti-divergenti per una turbina VC, espandono il gas e lo incurvano per affrontare il primo rotore. Entrambe le i rotori della turbina sono costituiti da dischi i quali presentano dei 'fir tree' slot lungo la circonferenza, dove vengono inserite e rivettate le palette. Il rotore iniziale è calettato direttamente sull'albero, l'ultimo viene imbullonato sul primo e vengono separati da un distanziale. Le guarnizioni sono di diverso tipo, in questa sede non verranno approfondite, ma hanno il compito di contenere le perdite e quindi migliorare l'efficienza.

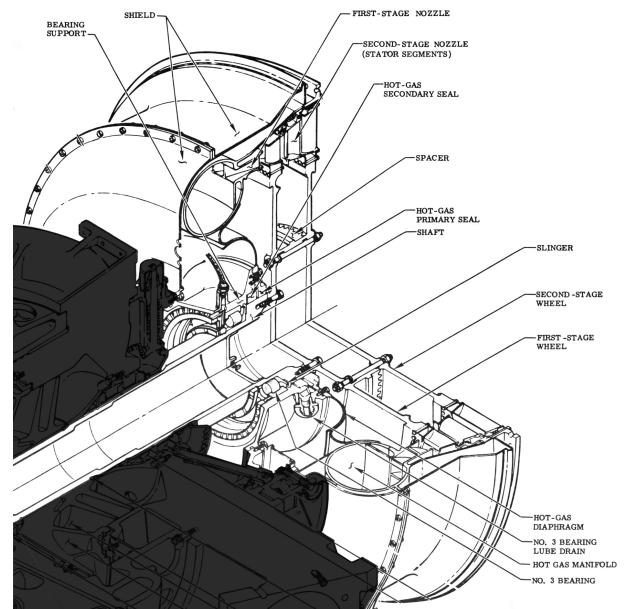


Figura 13: Turbina ad impulso VC dell'F-1

7.2.2 Turbina - scelte progettuali

Il sistema turbina di un endoreattore ha una vita breve ma è sottoposto a parecchi carichi critici. Il design deve essere compatto e leggero, il fluido che espande deve avere un alto contenuto energetico, il lavoro specifico in uscita deve essere alto. La progettazione dell'elemento turbina è direttamente collegato al tipo di ciclo di alimentazione del motore, nel caso di un GG si vuole massimizzare il salto di pressione per minimizzare la portata spillata prima della camera di spinta (questo infatti massimizza l'impulso specifico del sistema).

Per l'analisi del percorso aerotermodinamico del gas si tratta un flusso di gas combusti a chimica congelata (FE). Tali parametri fisici sono stati interpolati tramite MATLAB da una tabella fornita dal libro [] (Modern engineering for LRE systems, AIAA, Huzel, ...), dati ricavati da test sperimentali di NASA. Di seguito vediamo quali parametri principali vengono utilizzati per la scelta e il dimensionamento della turbina.

- **Spouting velocity:** è la velocità teorica che il flusso di gas avrebbe se espandesse dalla pressione di ristagno alla pressione di uscita (data dal rapporto ϵ di espansione)

$$C_0 = \sqrt{2C_{p,gg} T_{in} \left(1 - \epsilon^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}$$

- **Rapporto isoentropico delle velocità:** è il rapporto tra velocità tangenziale del disco rotorico e la spouting velocity.

$$\frac{U}{C_0} =$$

Questo valore è utile per capire la scelta progettuale effettuata per il tipo di turbina. Infatti, come già detto, nei cicli GG il salto di pressione in turbina è molto alto: questo implica un valore di C_0 elevato. Per avere una buona efficienza si possono percorrere più scelte progettuali (basandosi sul grafico x dei rendimenti). Si può scegliere di avere un alto rapporto di velocità con una singola ruota che 'assorba' tutta l'energia del flusso. Questo provocherebbe nel nostro caso una velocità di rotazione troppo elevata (quindi ingombro maggiore, inoltre la velocità di rotazione è fissata dalla pompa). Per usare altre turbine, cercando di avere un'alta efficienza si cerca di diminuire il rapporto di velocità aumentando gli stadi, ovvero la velocità del flusso è assorbita da più dischi che ruotano a velocità minori e sono più piccoli.

Le turbine PC (generano il salto di pressione in tutti gli statori) sono più efficienti ma più pesanti. Per cui si è optato per un sistema VC, che ha buona efficienza a bassi rapporti di velocità e permette un risparmio in peso.

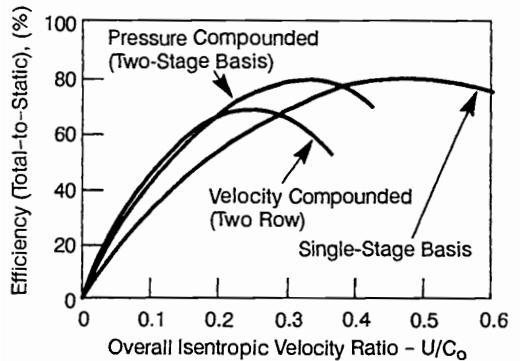


Figura 14: Rendimenti in funzione del rapporto di velocità

7.2.3 Analisi quantitativa - dimensionamento

L'obiettivo ora è quello di cercare di dare un'idea a livello quantitativo dei vari componenti, generando un diagramma di velocità della turbina. Per questa sezione si sono presi in considerazione i requisiti del sistema turbina, si sono ipotizzati diversi valori di rendimenti e sono state fatte alcune assunzioni ragionevoli per questo tipo di sistema (AIAA, modern engineering of LRE, Huzel ..). Abbiamo assunto i seguenti requisiti di sistema

T_{in} [K]	p_{in} [bar]	ϵ	O/F	\dot{m} [kg/s]	ω [rad/s]
1062	67.57	16.4	0.416	75.75	574.4

Tabella 16: Requisiti del sistema turbina

Assumendo tali dati, aggiungendo alcune ragionevoli ipotesi tratte dal libro AIAA e risolvendo il sistema di equazioni associato al problema, troviamo il seguente diagramma velocità e i corrispondenti valori di velocità e angoli. Si rimanda all'appendice per tutti i dettagli su ipotesi fatte, impostazione del sistema di equazioni e risoluzione del sistema tramite MATLAB.

8. Camera di spinta

8.1. Descrizione del sistema

L'intero gruppo della camera di spinta è costituito dal LOX dome, dal piatto di iniezione e dal corpo della camera di spinta.

In questa sezione verrà analizzato dettagliatamente il corpo della camera di spinta: esso è composto da una camera di combustione per bruciare propellenti seguita da un ugello di espansione a forma di campana, necessario ad espellere a velocità elevata i gas prodotti dai propellenti bruciati e poter così generare la spinta.

La camera di spinta è di circa 3.35 metri di lunghezza e 2.74 metri di diametro all'estremità inferiore dell'ugello. Il suo corpo è formato da tubi fino al piano in cui il rapporto di espansione diventa pari a 10:1; in questi scorre il 70%

del carburante, fornendo un raffreddamento rigenerativo ed evitando che il materiale del tubo si sciolga durante il funzionamento del motore.

I tubi che compongono la camera di spinta sono costruiti in Inconel X-750, una lega a base di nichel resistente alle alte temperature e trattabile termicamente, e sono rinforzati strutturalmente da una serie di fasce attorno all'ugello. Il corpo sopra il piano corrispondente a rapporto di espansione 3:1 (circa 76.2 cm sotto il piano di gola) è costituito da 178 tubi primari con diametro esterno di 2.78 cm, mentre dal piano con rapporto di espansione 3:1 al piano a 10:1 si biforcano diventando 356 tubi secondari con diametro esterno di 2.54 cm.

Questa biforcazione è dovuta principalmente alla geometria dell'ugello e alle proprietà fisiche del materiale usato. La circonferenza di un ugello è minima in corrispondenza della gola mentre aumenta nella sezione di espansione: l'entità dell'aumento di circonferenza ottenibile con un numero fisso di tubi è quindi limitata da quanto questi ultimi possano essere lavorati per rastremazione. Quando si raggiunge il punto in cui la circonferenza non può essere ulteriormente aumentata con il numero prefissato di tubi si rende quindi necessario un giunto di biforcazione. L'Inconel X-750 è stato scelto come materiale poiché forniva gli elevati rapporti forza-peso necessari per resistere ai requisiti di spinta del motore; inoltre, l'elevata resistenza di questa lega ha consentito la progettazione di tubi con sezioni di parete più sottili, con conseguente diminuzione del peso. Il design più sottile per i tubi fornisce anche un adeguato raffreddamento della camera di spinta, con circa due terzi del flusso totale di carburante che transita attraverso i tubi. Esso finisce poi in un collettore posizionato all'estremità inferiore della camera, da cui viene poi drenato da 4 porte di drenaggio posizionate a 90 gradi l'una dall'altra.

I gas di scarico della turbina, dopo essere passati attraverso lo scambiatore di calore, vengono convogliati al collettore di scarico della turbina, la cui funzione è quella di raccogliere e distribuire uniformemente il gas di scarico tra le pareti dell'estensione dell'ugello, che altrimenti non sarebbe raffreddato.

Le piastre divisorie all'ingresso e le alette di flusso nell'area di uscita contribuiscono alla distribuzione uniforme dei gas di scarico nell'estensione dell'ugello. Il collettore di scarico è saldato ad uno scudo ignifugo nella parete esterna della camera di spinta.

8.2. Piatto d'iniezione

Gli iniettori sono collocati all'estremo superiore della camera di spinta e hanno lo scopo di distribuire il propellente in camera, regolando il rapporto di diluizione, la pressione e lo schema di spruzzo al fine di avviare e sostenere una combustione stabile. Per determinare questi valori sono stati necessari circa 3200 test su larga scala: al fine di generare un'esplosione controllata, risulta fondamentale che essa sia dinamicamente stabile, ossia che sia prevedibile e non crei punti caldi che porterebbero alla fusione di componenti del motore.

Il piatto di iniezione ha un diametro di 111.76 cm, è realizzato in CRES, acciaio molto resistente alla corrosione, ed è strutturato in 31 anelli, questi divisi in 13 scompartimenti da 2 deflettori circolari e 12 radiali. I vari compartmenti sono numerati da 1 a 13, mentre i deflettori sono identificati da lettere dalla A alla N.

La faccia del piatto di iniezione conta 1428 orifizi per l'ossidante e 1404 orifizi per il carburante. I getti vengono atomizzati attraverso una disposizione a doppietti omogenei, i vapori di combustibile e di ossidante si miscelano e reagiscono a formare i gas propellenti, destinati successivamente all'espansione in ugello. La disposizione a doppietti omogenei è vantaggiosa rispetto ad altre: è di facile realizzazione, risulta stabile e affidabile (in quanto già utilizzata in passato in numerosi altri razzi) e genera una buona miscelazione dei propellenti, a costo di necessitare di una camera leggermente più lunga rispetto ad altre tecniche di atomizzazione.

Le 31 scanalature che costituiscono gli anelli consistono in 16 scanalature per il combustibile alternate alle 15 scanalature per l'ossigeno liquido. Gli anelli per il carburante sono alimentati attraverso un collettore radiale, mentre gli anelli per l'ossidante sono alimentati dal LOX dome tramite fori assiali.

Il LOX dome è considerabile il primo componente della camera di spinta: esso ha dimensioni 162.6 x 48.3 x 111.8 cm, con un peso di 818.3 kg; è realizzato in lega di ferro, rame e alluminio, con rivestimento in nichel e coating in silice. Il corpo del LOX dome contiene la flangia di attacco e i montanti di supporto per interfacciarsi con l'iniettore. La funzione del componente è quella di distribuire il LOX in maniera uniforme ai vari iniettori sul piatto.

Il collettore invece incorpora due ingressi per il montaggio delle valvole di ossidante e una flangia per la linea di alimentazione dell'ossidante allo scambiatore di calore. Per evitare vorticità nell'ossidante, il collettore è isolato in

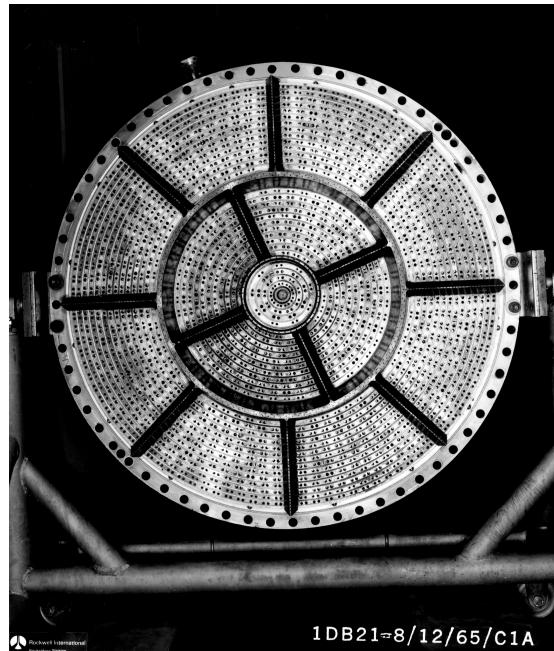


Figura 15: Piatto di iniezione

due compartimenti da due argini toroidali. Solamente il 30% del combustibile viene indirizzato direttamente al collettore, mentre il restante 70% viene utilizzato per il raffreddamento rigenerativo della camera di spinta.

Sono poi presenti due alloggiamenti per gli ignitori del combustibile in ciascuno dei 12 scomparti esterni, e un alloggiamento del combustibile nel compartimento centrale, tutti collegati al collettore da singoli tubi di alimentazione.

Come detto precedentemente, è fondamentale ottenere una combustione stabile per non incorrere in danni alla camera di combustione: la stabilità è raggiunta principalmente mediante l'uso dei deflettori (baffles), oltre che variando l'angolo di impingement e il diametro degli orifizi in funzione della posizione sul piatto d'iniezione.

I deflettori in particolare alterano le caratteristiche acustiche di risonanza della camera di combustione, smorzando così le onde d'urto generate dalla combustione. I 12 deflettori radiali in rame sono alimentati dal deflettore circolare esterno. La configurazione dei deflettori utilizzata per il propulsore è stata ottenuta a seguito di vari test, nel quale si è ricercata la maggior stabilità di combustione possibile. Nella configurazione finale, i deflettori misurano circa 8 cm ciascuno e sono tutti dump-cooled, ovvero il raffreddamento è realizzato attraverso la circolazione di carburante all'interno del deflettore che viene successivamente scaricato nella camera di combustione. [5] [8]

	\dot{m} [kg/s]	A [m^2]	Δp [bar]	ρ [kg/m ³]	v [m/s]
<i>fuel</i>	742.09	0.05484	641	810	17.07
<i>oxidizer</i>	1788.97	0.03968	2100	1141	40.54

Tabella 17: Dati reali del piatto d'iniezione [5][8]

A partire dai dati in Tabella 17, è possibile inoltre stimare la velocità media teorica dei due propellenti all'uscita dai rispettivi iniettori:

$$C_{D,f} = \frac{\dot{m}_f}{A_f \sqrt{2 \Delta p_f \rho_f}} = 13.28 \quad C_{D,ox} = \frac{\dot{m}_{ox}}{A_{ox} \sqrt{2 \Delta p_{ox} \rho_{ox}}} = 20.59$$

$$v_f = C_{D,f} \sqrt{\frac{2 \Delta p_f}{\rho_f}} = 16.71 \text{ m/s} \quad v_{ox} = C_{D,ox} \sqrt{\frac{2 \Delta p_{ox}}{\rho_{ox}}} = 39.51 \text{ m/s}$$

Tali risultati sono paragonabili alle velocità reali: la v_f si discosta del 2.11% dal valore reale, mentre la v_{ox} si discosta del 2.54%.

8.3. Camera di combustione

Nel motore F-1 è presente una camera di combustione cilindrica con una parte finale convergente che termina con la sezione di gola. La camera di combustione funge da involucro che deve mantenere i propellenti per un periodo sufficiente a garantire la completa miscelazione e combustione. Il tempo di permanenza richiesto, o tempo di residenza, è una funzione di molti parametri, ovvero combinazione di propellenti, le condizioni di iniezione e la geometria del combustore (rapporto di contrazione, numero di Mach, livello di turbolenza).

Un parametro utile relativo al volume della camera e il tempo di residenza è la "lunghezza caratteristica", L^* , ossia il volume della camera diviso per l'area di gola:

FORMULEEEEE

Il concetto di L^* è molto più facile da visualizzare rispetto al più elusivo "tempo di residenza", espresso in piccole frazioni di secondo, infatti si tratta di un sostituto per determinare il tempo di permanenza nella camera dei propellenti.

Un altro parametro fondamentale per il calcolo del tempo di residenza è la velocità caratteristica c^* . Il valore c^* aumenta con L^* fino a un massimo asintotico, ma l'aumento di L^* oltre un certo punto tende a diminuire le prestazioni complessive del motore a causa di quanto segue: un maggiore L^* si traduce in maggiore volume e peso della camera di spinta, con conseguente aumento della superficie che ha bisogno di raffreddamento e aumento delle perdite termiche e dovute all'attrito. Il metodo abituale per stabilire la L^* di un nuovo progetto della camera di spinta si basa in gran parte sull'esperienza passata con propellenti e dimensioni del motore simili. Nel caso della coppia di LOX/RP-1 la L^* è compresa tra i valori 1÷1.30 metri, e per motivi progettuali descritti in precedenza è stata fissata la misura di L^* a 1 m. Partendo da questo dato e dalla dimensione dell'area di gola del motore è possibile modellare la camera di combustione.

Invertendo la formula della L^* è possibile ottenere il volume della camera di combustione V_c che comprende, oltre alla parte cilindrica, anche la parte convergente.

FORMULAAAAAA

È possibile anche calcolare la velocità caratteristica c^* e il tempo di residenza attraverso le seguenti due formule:

FORMULEEEEEEE

Per calcolare le dimensioni reali di entrambe le parti della camera di combustione, ovvero la parte cilindrica e quella del convergente, è necessario fissare due parametri al fine dello sviluppo del modello. Si tratta del rateo di

contrazione, ossia il rapporto tra la sezione della camera cilindrica e la sezione di gola, e l'angolo di inclinazione del convergente

FORMULEEEEEEE

Sfruttando la trigonometria si ottiene la lunghezza assiale del tratto convergente e considerando quest'ultimo come una figura tronco conica si ottiene il volume da rapportare a quello calcolato in precedenza, così da ottenere il valore percentuale dell'ingombro del convergente, utilizzato nei calcoli seguenti. Si ottiene così una camera di combustione con le seguenti misure:

TABELLAAAAAAA

8.4. Modellazione dell'ugello

L'obiettivo principale che si persegue nella progettazione dell'ugello di un endoreattore è quello di ottenere una forma che minimizzi le perdite di spinta per un qualsiasi rapporto di espansione richiesto.

Si procede quindi ad illustrare il metodo ideato da Rao per una progettazione ottimale rispetto ad un ugello di forma tronco-conica, con lo stesso rapporto di espansione, preso da riferimento:

$$L_{cone} = \frac{(\sqrt{\epsilon} - 1) - R_t}{\tan 15^\circ}$$

dove R_t indica il raggio di gola dell'ugello e 15° è l'angolo standard di semi-apertura dell'ugello.

La forma a campana ottimale può essere approssimata da una parabola inclinata grazie a considerazioni geometriche, permettendo anche di abbozzare velocemente una forma dell'ugello che contempla una perdita di prestazioni trascurabile a livello di spinta. Proprio per questo motivo, questa tipologia è anche chiamata ugello TOP (Thrust Optimized Parabolic) ed ha effettivamente trovato applicazione pratica nei vettori di lancio perché ha performance migliori quando sovra-espande a livello del mare (le pareti dell'ugello TOP aiutano a ritardare la separazione del flusso grazie ad un'elevata contropressione) rispetto ad un ugello ottimizzato perfettamente a campana. Inoltre, la forma dell'ugello varia in modo minima in base ai propellenti usati e perciò una stessa famiglia di ugelli TOP può essere adattata per qualsiasi combinazione di ossidante e combustibile.

I parametri di partenza sono: il rapporto di espansione ϵ , il raggio di gola R_t e la percentuale di campana $\%_{bell}$ che si vuole ottenere; quest'ultimo valore deve essere compreso tra il valore massimo di 85%, a cui si raggiunge un livello di efficienza dell'ugello del 99% e che può essere aumentato solo di un ulteriore 0.2% con una percentuale di campana 100%, e il valore minimo del 70%, a cui si comincia ad ottenere un notevole degrado di prestazioni. Si ricavano quindi a cascata:

$$R_e = \sqrt{\epsilon} R_t$$

$$L_{ugello} = \%_{bell} \frac{(\sqrt{\epsilon} - 1) - R_t}{\tan 15^\circ}$$

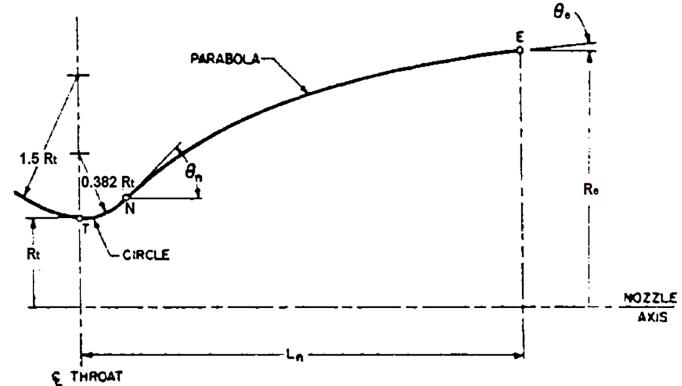


Figura 16: Definizioni geometriche

raggio della sezione d'efflusso

lunghezza dell'ugello

Si ricavano poi gli angoli θ_n , riferito al punto di inflessione N, e θ_e , riferito alla sezione d'uscita, per interpolazione grafica da curve analitiche ottenute sperimentalmente per determinati valori di $\%_{bell}$ (grafico in Figura 23).

La prima parte di modellazione vera e propria consiste nella costruzione della gola dell'ugello secondo una geometria ottimale usata da Rao (ai tempi ingegnere alla Rocketdyne) e basata sull'intersezione di due archi di circonferenza definiti come segue:

$$x = 1.5 R_t \cos \theta \quad y = R_t (1.5 \sin \theta + 1.5 + 1)$$

per la sezione di entrata, con $-103^\circ < \theta < -90^\circ$ (l'angolo iniziale di -103° è scelto dal progettatore della camera di combustione [2] ma può anche essere fissato ad un valore differente);

$$x = 0.382 R_t \cos \theta \quad y = R_t (0.382 \sin \theta + 0.382 + 1)$$

per la sezione di uscita, con $-90^\circ < \theta < \theta_n - 90^\circ$.

Per la costruzione della campana è invece necessario definire prima tre punti geometrici:

- punto di inflessione N: $N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.382 R_t \cos(\theta_n - 90^\circ) \\ R_t [0.382 \sin(\theta_n - 90^\circ) + 0.382 + 1] \end{bmatrix}$
- punto tangente alla sezione d'efflusso E: $E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e \\ L_{ugello} \end{bmatrix}$
- punto Q di intersezione delle rette passanti da N con inclinazione θ_n e da E con inclinazione θ_n :

$$\overrightarrow{NQ} = m_1 x + C_1 \text{ con } m_1 = \tan \theta_n \text{ e } C_1 = N_y - m_1 N_x \quad Q_x = \frac{C_2 - C_1}{m_1 - m_2}$$

$$\overrightarrow{QE} = m_2 x + C_2 \text{ con } m_2 = \tan \theta_e \text{ e } C_2 = E_y - m_2 E_x \quad Q_y = \frac{m_1 C_2 - m_2 C_1}{m_1 - m_2}$$

La campana infine risulta essere una curva di Bézier quadratica di equazione:

$$x(t) = (1-t)^2 N_x + 2(1-t)t Q_x + t^2 E_x \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y(t) = (1-t)^2 N_y + 2(1-t)t Q_y + t^2 E_y \quad 0 \leq t \leq 1$$

8.5. Confronto tra ugello 10:1 e 16:1

I motori F-1 prodotti dalla Rocketdyne avevano in origine un ugello il cui rapporto di espansione era 10:1; essi infatti non furono inizialmente progettati nello specifico per lo stadio di lancio del Saturn V. Gli ingegneri decisero quindi a posteriori di aggiungere un'espansione dell'ugello iniziale allo scopo di migliorare vari parametri del lanciatore: i più rilevanti sono l'impulso specifico nel vuoto e la quota a cui è raggiungibile l'espansione ottima (adattata alla traiettoria che il lanciatore avrebbe percorso).

Tale espansione non poteva essere raffreddata dal già presente regenerative cooling: si optò dunque per una soluzione che prevedesse l'utilizzo dei gas di scarico della turbina, ricchi di carbonio e quindi con bassa conducibilità termica, per il raffreddamento attraverso film cooling. Tale tipo di raffreddamento è realizzato immettendo i gas di scarico sulle pareti dell'ugello attraverso un collettore che ne abbraccia l'intera circonferenza.

L'estensione dell'ugello è realizzata da due pareti in lega di nickel intervallate da bande circolari in CRES: tale costruzione saldata conferisce ottima resistenza termica alle pareti e una buona resistenza agli sforzi radiali a cui l'ugello è sottoposto.

Di seguito sono confrontati i principali parametri del motore con e senza l'espansione dell'ugello, ricavati tramite il software RPA:

	p_e [bar]	T_e [K]	H [kJ/kg]	γ	ρ [kg/m ³]	v_e [m/s]
10:1	0.803	1673.7	-5058.1	1.2439	0.1304	2910.6
16:1	0.423	1473.0	-5429.9	1.2521	0.0781	3035.6

	I_{vac} [s]	I_{opt} [s]	I_{sl} [s]	T_{vac} [kN]	T_{opt} [kN]	T_{sl} [kN]
10:1	297.36	276.44	270.95	7816.3	7266.3	7122.2
16:1	306.25	288.59	263.99	8050.0	7585.9	6939.3

Tabella 18: Confronto tra ugello 10:1 e 16:1

Si può notare un miglioramento nella spinta e nell'impulso specifico in corrispondenza dell'espansione ottima e dell'espansione nel vuoto, mentre si ha un calo di prestazione a livello del mare: ciò è dovuto al fatto che l'ugello sovraesconde in maniera più marcata a pressione standard, poiché il punto di espansione ottima viene spostato a pressioni inferiori. Ciò non risulta essere un problema in quanto la spinta rimane sufficiente al lancio, mentre i benefici ottenuti alle quote di missione sono rilevanti.

9. Sistemi di raffreddamento

9.1. Cooling della camera di spinta

I motori a propellente liquido sfruttano varie tecnologie per il raffreddamento delle pareti della camera di spinta. Nel caso analizzato, il motore F-1 sfrutta due tipi di raffreddamento: il film cooling, che protegge le pareti dell'estensione dell'ugello attraverso un sistema di iniezione, e il raffreddamento rigenerativo, che utilizza il combustibile come fluido refrigerante passante attraverso una serie di tubi che costituiscono la parete stessa dell'ugello.

9.1.1 Scambio termico convettivo e film cooling

Per poter analizzare la protezione termica delle pareti della camera di spinta, è in primo luogo necessario stimare il valore di scambio termico convettivo dai gas combusti alle pareti stesse. La trattazione dello scambio termico convettivo nel caso preso in analisi viene affrontata tenendo conto dalle alte velocità dei gas combusti: ciò porta alla formazione di uno strato limite, che si assottiglia lungo il convergente in concomitanza con l'accelerazione del fluido subsonico, raggiungendo il minimo in gola, per poi ispessirsi nel divergente. Lo scambio termico è quindi un problema riguardante lo strato limite e il suo spessore, la sua temperatura e la velocità del fluido. Poichè si raggiunge il minimo spessore dello strato limite in gola, ci si aspetta di avere il massimo scambio convettivo nel punto dell'ugello in cui il rapporto A_t/A è minimo. Questa osservazione è di particolare rilevanza, poiché, come si vedrà più avanti, per determinare la portata massica necessaria per il film cooling, si utilizzerà l'area della sezione minima dell'estensione dell'ugello, che corrisponde all'area della sezione con rapporto di espansione 10:1.

Risulta complicato determinare il valore preciso del calore scambiato in modo convettivo tra i gas combusti e le pareti, in quanto lo strato limite è fortemente influenzato da vari fattori, quali la curvatura delle pareti, il gradiente di pressione in direzione assiale, il gradiente di temperatura associato all'alta intensità del flusso di calore; è tuttavia possibile utilizzare un metodo semi-empirico per fare una stima accurata. Lo scambio convettivo per unità di area lato gas, all'interfaccia tra fluido e superficie solida, dipende da un coefficiente detto "coefficiente di film" h_g

$$q = h_g (T_{aw} - T_{wg})$$

dove T_{wg} è la temperatura della parete dal lato caldo, mentre T_{aw} è la temperatura adiabatica della parete. Per determinare la temperatura T_{wg} è sufficiente moltiplicare la temperatura in camera di combustione per un fattore pari a 0.8, fattore che tiene conto della presenza di depositi solidi di carbonio sulle pareti.

Per comprendere il significato della temperatura adiabatica T_{aw} è necessaria una piccola digressione. La velocità del fluido all'esterno dello strato limite è la velocità del flusso libero e, attraversando lo strato limite perpendicolarmente alla parete, la velocità diminuisce fino ad annullarsi per soddisfare la condizione di aderenza. La temperatura a parete dovrebbe perciò essere pari alla temperatura di ristagno, ossia la temperatura raggiunta quando tutta l'energia cinetica viene trasformata in energia termica senza alcuna perdita. Nel caso di flussi molto veloci, l'aumento di temperatura è abbastanza elevato da provocare un processo di rallentamento viscoso non adiabatico. Per questo motivo, nell'ipotesi di parete adiabatica verso l'esterno, avviene un significativo scambio termico dal fluido in prossimità della parete, caratterizzato da bassa velocità e alta temperatura statica, verso il fluido più lontano dalla parete. A parete si avrà quindi una temperatura T_{aw} più bassa della temperatura che caratterizza il flusso libero, mentre all'interno dello strato limite, affinché venga soddisfatta l'equazione dell'energia per flussi stazionari, deve essere necessariamente presente una regione in cui la temperatura è più alta di quella del flusso libero. Si delinea un andamento della temperatura come schematizzato in figura.

Nel caso preso in esame, il valore della temperatura T_{aw} è determinabile scalando la temperatura in camera di combustione di un fattore detto "recovery factor" f_{aw} , definito come legame tra T_{aw} e le temperature statica e totale del flusso libero e con valore compreso tra 0.9 e 0.98. In particolare il recovery factor rappresenta il rapporto tra l'aumento della temperatura causato dall'attrito e l'aumento causato dalla compressione adiabatica. Esso è determinabile sperimentalmente o può essere stimato in base ad una correlazione semplificata e applicata nel caso di flusso turbolento, basata sul numero di Prandtl: FORMULA (Pr elevato 0.33), dove il numero di Prandtl può essere approssimato come segue: FORMULA + VALORE DI MU. ????????????

È necessario precisare che la temperatura in camera di combustione T_c utilizzata è quella teorica moltiplicata per il fattore correttivo della velocità caratteristica. Quest'ultima infatti dipende unicamente dalla variabile T_c , quindi

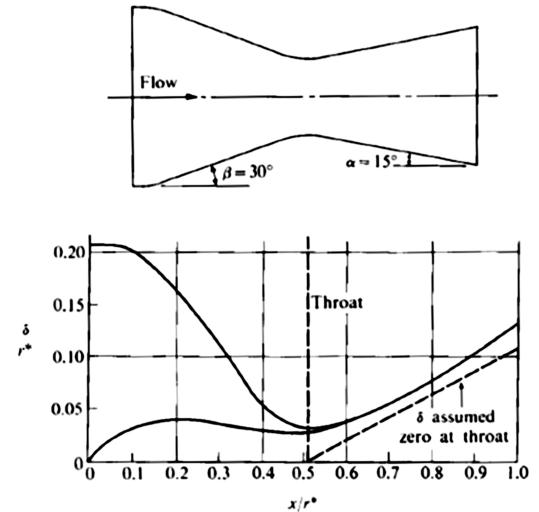


Figura 17: Strato limite sulla parete dell'ugello

intensità del flusso di calore; è tuttavia possibile utilizzare un metodo semi-empirico per fare una stima accurata.

Lo scambio convettivo per unità di area lato gas, all'interfaccia tra fluido e superficie solida, dipende da un coefficiente

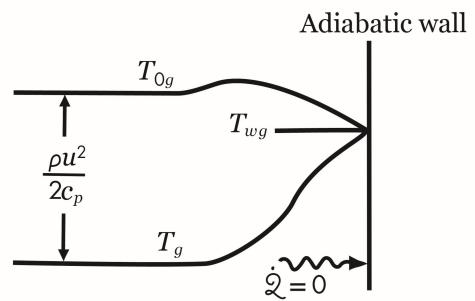


Figura 18: Definizione della temperatura muro - lato gas

il fattore correttivo per le due grandezze coincide. Il suddetto fattore varia in un intervallo compreso tra 0.87 e 1.03, mentre il valore utilizzato nella trattazione, ossia 0.975, è il valore sperimentale adottato dal libro Modern Engineering for Design of Liquid Rocket Propellant.

Per stabilire il valore di calore scambiato per unità di area rimane da calcolare solo il coefficiente di film h_g , che può essere ricavato mediante la seguente formula:

$$h_g = \left[\frac{0.026}{D_t^{0.2}} \left(\frac{\mu^{0.2} C_p}{Pr^{0.6}} \right)_{ns} \left(\frac{p_c g}{c^*} \right)^{0.8} \left(\frac{D_t}{R} \right)^{0.1} \right] \left(\frac{A_t}{A} \right)^{0.9} \sigma \quad (*)$$

[6] [7]

Esso dipendente, tra gli altri parametri, dal numero di Prandtl, dalla viscosità, dal raggio di curvatura in gola dell'ugello e dal fattore correttivo σ , che tiene conto delle variazioni di proprietà attraverso lo strato limite. Il raggio di curvatura in gola dell'ugello è stato ricavato tramite approssimazione di Rao. Il valore nelle parentesi quadre è costante, una volta fissata la geometria della camera e i parametri di combustione (c^* , p_c). Il valore nelle parentesi con pedice 'ns' si riferisce ai valori di μ , C_p e Pr alla fine della camera di combustione. I fattori moltiplicativi al di fuori delle parentesi quadre dipendono dalla posizione in cui si vuole calcolare tale coefficiente. Supponendo conosciuto il punto in cui si vuole calcolare h_g , l'unica incognita è quindi σ . Questo fattore può essere determinato in termini di temperatura di combustione, temperatura locale a parete e numero di mach locale mediante la relazione di Bartz; in alternativa è possibile determinarlo per interpolazione, in funzione del rapporto T_{wg}/T_c e del valore di γ .

Assumendo il rapporto T_{wg}/T_c pari a 0.8, ricavato sperimentalmente e adottato nella trattazione nel riferimento [7] che tiene conto della presenza del deposito di carbonio sulle pareti, noto il valore di GAMMA, pari a 1.2439, e ricordando che il fine ultimo del calcolo è progettare il film cooling dell'ugello aggiuntivo (intervallo di rapporto di espansione $\epsilon = 10/16$), è possibile determinare dal grafico che il valore del fattore correttivo si attesta intorno a 0.7 in tutto l'intervallo in esame. Il coefficiente di film dipende infine anche dal rapporto A_f/A , dove A è l'area della sezione locale. Il valore di questo rapporto è stato fatto variare per via numerica tra 10 e 16, calcolando poi per ciascun valore il corrispondente coefficiente di film e, in seguito, la corrispondente portata minima in massa per effettuare un adeguato film cooling. Il valore di h_g così ottenuto tiene unicamente in conto del calore scambiato tra fluido e parete, senza considerare la presenza di eventuali prodotti di combustione allo stato solido. I prodotti di combustione della coppia LOX – RP-1 contengono circa il 37 in percentuale di particolato solido. Queste particelle tendono a depositarsi sulle pareti della camera di combustione, formando un efficace strato isolante: la valutazione quantitativa dell'efficacia dell'isolamento di questo strato, necessaria per il corretto calcolo dello scambio di calore, può essere effettuata solo sperimentalmente. Lo strato isolante è formato a sua volta da uno strato superficiale di fuliggine, che ne sovrasta uno più tenace: quest'ultimo aumenta la resistenza termica lato gas, tale che la temperatura del deposito di carbonio all'interfaccia lato gas si avvicini alla temperatura del gas all'aumentare dello spessore del layer di carbonio (questo giustifica qualitativamente il valore di 0.8 considerato per il rapporto di T_{wg}/T_c). Per il calcolo dello scambio termico nel caso di presenza di deposito solido sulle pareti della camera, l'equazione (*) viene corretta dalla seguente equazione, che vede una sostituzione del coefficiente di film con il coefficiente di conduttanza termica complessiva lato gas h_{gc}

$$h_{gc} = \frac{1}{\frac{1}{h_g} + R_d}$$

Questo coefficiente considera sia h_g sia il coefficiente di resistenza causata dal deposito solido R_d , il cui valore è dipendente dal rapporto di espansione e dalle condizioni di pressione e rapporto di miscela. (Grafico sperimentale da mettere in appendice) Dopo aver calcolato tutti i parametri necessari, è quindi possibile progettare il sistema di film cooling dell'estensione dell'ugello. Il film cooling delle pareti interne è ottenuto iniettando i gas di scarico della turbina, forniti alla cavità tra le pareti dal collettore di scarico della turbina, nel flusso di scarico della camera di spinta attraverso fessure formate da 23 file di scandole sovrapposte che formano la parete interna.(mettere una immagine per far capire). Per lo sviluppo dei calcoli si consideri che il fluido di lavoro è gas con presenza di particolato, ed è quindi possibile utilizzare la relazione di Hatch e Papell, sostituendo al coefficiente h_g il coefficiente h_{gc} appena calcolato.

$$\frac{T_{aw} - T_{wg}}{T_{aw} - T_{co}} = \exp \left[- \left(\frac{h_{gc}}{G_c C_{pvc} \eta_c} \right) \right]$$

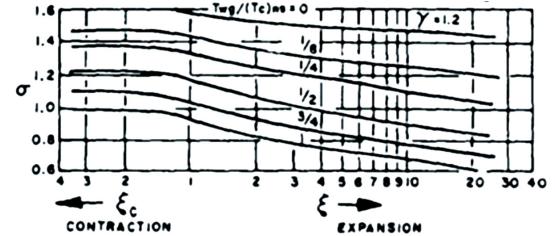


Figura 19: Valore di σ

Dove T_{co} è la temperatura iniziale del fluido refrigerante, ossia la temperatura all'uscita dello scambiatore; C_{pvc} è il calore specifico medio a pressione costante del fluido refrigerante, che è stato numericamente ottenuto interpolando i valori dopo la combustione nel Gas Generator in frozen equilibrium; infine η_c è l'efficienza del film cooling ed è un fattore che ha scopo correttivo, ossia tiene conto della quantità di refrigerante gassoso perso nel flusso di gas di combustione che quindi non produce effetti di raffreddamento. I valori dell'efficienza variano dal 25 al 65 in percentuale in funzione della geometria dell'iniezione del refrigerante e dalle condizioni di flusso. Il valore G_c rappresenta la portata di gas che costituisce il film cooling necessaria a ottenere il raffreddamento voluto. Dalla precedente equazione si evince che l'apporto termico dipende dal coefficiente di scambio $h_g c$ e dalla differenza tra temperatura adiabatica a parete e la temperatura del refrigerante; il calore assorbito è proporzionale alla capacità termica del film refrigerante dal valore di temperatura iniziale a quello finale. Esiste quindi un equilibrio tra apporto di calore e aumento di temperatura del refrigerante: raggiunto questo equilibrio si raggiunge la condizione adiabatica e la superficie della parete avrà localmente la medesima temperatura del film; infatti la temperatura della parete varierà assialmente dalla temperatura iniziale del refrigerante fino alla temperatura massima ammissibile. L'obiettivo del calcolo è perciò quello di determinare la portata massica di fluido refrigerante per unità di area G_c , che poi verrà moltiplicato per l'area dell'estensione dell'ugello ad ottenere il valore di portata massica necessaria per il film cooling. Si noti che la portata dipende dal valore $h_g c$, a sua volta dipendente dal rapporto A_t/A , che è stato fatto variare tra 1:10 e 1:16: la portata massica che sarà sufficiente a raggiungere un efficiente film cooling in ogni sezione dell'ugello sarà la portata massima tra le portate calcolate, ossia quella ottenuta per rapporto A_t su A maggiore e perciò A minore, quindi l'area della sezione 1:10. Il valore di G_c ottenuto è minore della portata elaborata dal Gas Generator, e questo è un risultato prevedibile in quanto il valore di portata passante per il Gas Generator è dettato dai requisiti di potenza della turbina e non dalle esigenze del film cooling. È stato perciò dimostrato che la portata massica elaborata è sufficiente a raggiungere l'obiettivo desiderato di raffreddamento delle pareti.

9.1.2 Regenerative cooling

Il motore preso in esame sfrutta lo scambio termico rigenerativo come tecnica di raffreddamento delle pareti della camera di spinta, in particolare dalla gola e per la lunghezza dell'ugello fino al piano caratterizzato da rapporto di espansione 10:1. Il regenerative cooling utilizza una quota parte di combustibile stivato, circa il 70%, come refrigerante: esso viene indirizzato in una serie di tubi opportunamente sagomati saldobraasati insieme che costituiscono la parete stessa dell'ugello di efflusso. Lo scambio di calore avviene quindi tra due flussi in movimento separati da una parete. Questa tecnica vanta di alcuni importanti vantaggi, tra i quali il fatto che non comporti nessuna perdita di prestazioni, infatti l'energia termica assorbita dal refrigerante viene restituita all'iniettore, e abbia una struttura relativamente leggera. Tuttavia si possono riscontrare alcuni svantaggi, come alte perdite di pressione per elevati livelli di flusso di calore.

La figura descrive la variazione di temperatura durante lo scambio di calore per regenerative cooling: a sinistra scorrono i gas combusti a contatto con il boundary layer e la cui temperatura è T_{aw} (il cui significato è illustrato nel sottoparagrafo precedente), ossia la temperatura che verrebbe raggiunta dalla parete nel caso di parete adiabatica o isolante, che diminuisce sensibilmente all'interno del boundary layer fino a raggiungere la temperatura della parete lato gas T_{wg} . All'interno dello spessore della parete la temperatura continua a diminuire raggiungendo la temperatura T_{wc} , ossia la temperatura della parete a contatto con il refrigerante; quest'ultimo quindi sarà caratterizzato dalla temperatura T_{co} (bulk temperature del refrigerante).

Proprio a causa dello scambio di calore tra gas e refrigerante, la temperatura T_{co} aumenterà dal punto di ingresso fino al momento in cui l'RP-1 lascerà il condotto di raffreddamento: essa è quindi una funzione del calore assorbito e della portata. A livello strutturale è necessario svolgere il dimensionamento nel punto più critico, ossia nel tubo di ritorno all'altezza della gola, ossia l'ultima sezione attraversata dal refrigerante prima di essere immesso nella camera di spinta.

L'obiettivo ultimo del regenerative cooling è quello di mantenere la temperatura della parete al di sotto della temperatura critica alla quale possono realizzarsi fusioni localizzate o un decremento delle prestazioni del materiale. La temperatura limite nel caso della parete della camera di spinta dell'F-1, realizzata in Inconel X750, è tra 550 K e 670 K. Identificate le temperature caratteristiche del processo di raffreddamento è quindi possibile calcolare il flusso di calore come:

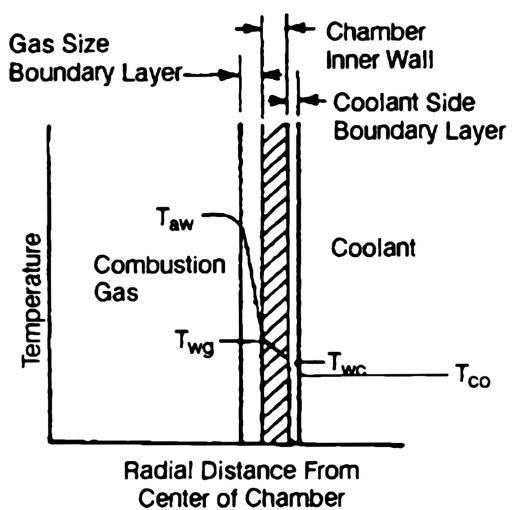


Figura 20: Variazione di temperatura attraverso la parete

$$q = h_{gc} (T_{aw} - T_{wg}) = \frac{k}{t} (T_{wg} - T_{wc})$$

Avendo che il flusso di calore attraverso i tre strati (strato limite gassoso, parete solida, strato limite liquido) è lo stesso, posso calcolare il parametro H (serie delle conduttività dei tre strati)

$$q = H (T_{aw} - T_{co})$$

$$H = \frac{1}{\frac{1}{h_{gc}} + \frac{1}{h_c} + \frac{t}{k}}$$

Dove h_{gc} è la conduttività termica complessiva lato gas, h_c è il coefficiente di scambio termico lato refrigerante, mentre t è lo spessore della parete e k la conduttività termica della parete della camera. Osservando la precedente equazione è possibile introdurre un ulteriore requisito che il regenerative cooling deve soddisfare: per mantenere la temperatura della parete entro valori contenuti, è necessario che la conduttività termica complessiva lato gas h_{gc} sia minimizzata, mentre il coefficiente di scambio termico del refrigerante sia molto alto, così come il rapporto t/k . Dal momento che la differenza di temperatura è inversamente proporzionale al coefficiente di scambio termico del flusso di calore, la diminuzione della temperatura sarà più rapida tra gas caldo e parete interna della camera.

Se per determinare il valore di h_{gc} è sufficiente ripercorrere la trattazione riguardante lo scambio termico convettivo, per comprendere il significato del coefficiente h_c e determinarne il valore numerico è necessario approfondire il suo legame con pressione e temperatura critica del refrigerante.

Verranno analizzati due possibili scenari, rappresentati in figura: la curva A_i descrive l'andamento del legame temperatura della parete – flusso di calore nel caso di pressione minore della pressione critica mentre la curva B_i rappresenta l'andamento del legame nella condizione di pressione maggiore della pressione critica.

Studiando la curva A, il tratto A1-A2 rappresenta lo scambio di calore nelle condizioni in cui la temperatura della parete lato coolant non ha ancora raggiunto la temperatura di saturazione, in corrispondenza della pressione del refrigerante. Alla temperatura del punto A2, superata la temperatura di saturazione, il combustibile inizia a bollire, creando quindi delle "bolle" nella fascia a ridosso della parete. Queste crescono di dimensione nel flusso liquido più freddo fino a che la velocità di condensazione del vapore supera la velocità di vaporizzazione: le bolle iniziano a collassare. Questo processo, che avviene ad alta frequenza, è detto "Nucleate boiling" (ebollizione nucleata). In corrispondenza di questo fenomeno il coefficiente di scambio termico aumenta, causando un aumento contenuto della temperatura a parete per un'ampia gamma di flussi di calore. Lo scambio di calore caratterizzato da ebollizione nucleata è rappresentato dal tratto A2-A3. Alla temperatura corrispondente al punto A3, un ulteriore aumento del flusso di calore porta ad un incremento di concentrazione di bolle tale per cui esse si combinano in un film di vapore a cui consegue una forte diminuzione del coefficiente del trasferimento del calore (tratto A3-A4). Lo scambio di calore raggiunto al punto A3 definisce il limite superiore del nucleate boiling, valore che viene quindi utilizzato come limite di progetto per il sistema di raffreddamento rigenerativo. La curva B descrive le varie fasi del legame flusso di calore- temperatura della parete nel caso in cui la pressione sia al di sopra di quella critica: in queste condizioni il fenomeno di nucleate boiling non si manifesta. Queste condizioni portano ad un aumento di temperatura proporzionale all'incremento del flusso di calore: in questo modo si raggiunge la temperatura limite per un valore di scambio di calore minore. Per questo motivo si predilige una pressione che sia tra il 30 e il 70 % della pressione critica. Il dimensionamento del sistema di regenerative cooling è finalizzato a stabilire il numero di tubi che compongono la parete dell'ugello d'efflusso e le dimensioni dei singoli tubi, in particolare il diametro interno e lo spessore. Prima di procedere alla trattazione matematica è necessario chiarire alcune assunzioni considerate durante lo svolgimento dei calcoli. Il dimensionamento viene effettuato nella condizione più critica, ossia vengono dimensionati i tubi di ritorno nella sezione di gola, perché la gola rappresenta il punto caratterizzato dal maggior valore di flusso termico attraverso e attraverso la sezione finale dei tubi di ritorno scorre il refrigerante alla sua temperatura massima raggiunta dopo aver percorso tutto il sistema di raffreddamento; la forma dell'ugello d'efflusso fa fede alla modellazione illustrata precedentemente e viene perciò considerata nota: dalla modellazione e dalla simulazione RPA verranno ricavati il diametro di gola e i raggi di curvatura utili a determinare il raggio di curvatura medio R ; il numero di tubi rimane costante fino al piano caratterizzato dal rapporto di espansione 3:1, per poi raddoppiare fino al piano con rapporto di espansione 10:1. (spiegare perché lo sdoppiamento). Infine, avendo come variabili sia il numero di tubi sia il loro spessore, è necessario ipotizzare o fissare uno dei due dati: è stato quindi

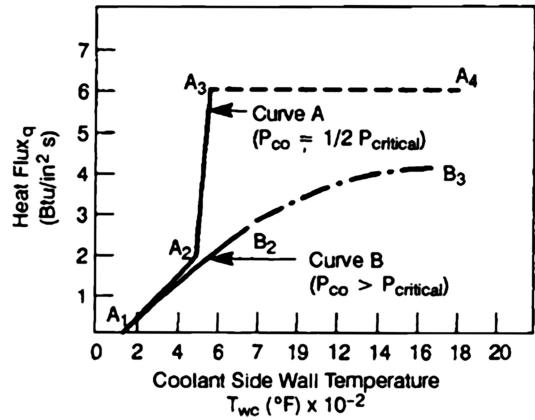


Figura 21: Andamenti di T e flusso di calore, parametrizzati sul valore di pressione

fissato il numero reale di tubi che compongono l'ugello nel primo tratto, ossia 178, mantenendo come incognita lo spessore. I calcoli preliminari al dimensionamento permettono di determinare, tramite una trattazione analoga a quella illustrata per lo scambio convettivo, il valore di flusso di calore specifico q , funzione della conduttività termica, della temperatura adiabatica a parete e della temperatura della parete lato gas. La temperatura a parete lato gas T_{wg} è determinata sperimentalmente, mentre la temperatura adiabatica a parete T_{aw} è ottenuta moltiplicando la temperatura in camera di combustione T_c per il fattore di recupero dello strato limite turbolento in gola (valore intermedio tra 0.9 e 0.98). Noto quindi il rapporto T_{wg}/T_c e γ dei gas combusti è possibile determinare il valore del fattore di correzione in gola (σ) dai grafici riportati nella sezione precedente. Infine è possibile calcolare il coefficiente di scambio termico lato gas tramite la formula (*) e quindi il valore di h_{gc}

Dalle precedenti formule è possibile definire R_d la resistenza termica causata dal deposito solido in gola, R il raggio di curvatura dell'ugello calcolato come media dei due raggi di curvatura R_1 ed R_n , D_t il diametro di gola calcolato come due volte R_t . Terminati i calcoli preliminari è possibile passare al dimensionamento vero e proprio del sistema di refrigerazione. Sono noti i valori relativi alla lega X750 (conducibilità termica k_{lega} , modulo di elasticità E , coefficiente di espansione termica α , coefficiente di Poisson ν) e vengono assunti i valori di bulk temperature del combustibile in gola, la sua conducibilità termica k_{fuel} , la sua densità (di stivaggio) e una costante C_1 propria dell'RP1 utile per il calcolo del numero di Nusselt. [6][7] A questo punto per determinare lo spessore t dei tubi è possibile implementare un ciclo in Matlab che permetta di calcolare il numero dei tubi al variare dello spessore, per poi interrompere il ciclo quando il numero egualga il numero di tubi imposto: in questo modo si ottiene il valore dello spessore necessario. I calcoli svolti si basano su considerazioni fisiche e su formule empiriche. Il ciclo inizia con il calcolo della temperatura della parete lato combustibile.

$$T_{wc} = T_{wg} - \frac{qt}{k}$$

Necessario per determinare il valore del coefficiente di scambio termico del combustibile h_c

$$h_c = \frac{q}{T_{wc} - T_{co}}$$

Per regioni di temperatura subcritica caratterizzate dall'assenza di nucleate boiling, la relazione tra temperatura a parete e flusso di calore, che dipende per l'appunto dal coefficiente di scambio termico h_c , può essere descritta tramite l'equazione di Sieder-Tate per il trasferimento di calore turbolento ai liquidi che fluiscono nei canali:

$$Nu = C_1 Re^{0.8} Pr^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

Dove μ è la viscosità del combustibile alla temperatura T_{co} , mentre μ_w è la viscosità del combustibile alla temperatura della parete in gola. Questa relazione può essere riscritta esplicitando i singoli termini:

$$Nu = \frac{h_c d}{k} = C_1 \left(\frac{\rho V_{cod}}{\mu} \right)^{0.8} \left(\frac{\mu C_p}{k} \right)^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (E1)$$

Dove le incognite sono il diametro dei tubi d e la velocità media del combustibile V_{co} . Quest'ultima può essere calcolata in funzione del diametro dei tubi e del loro numero

$$V_{co} = \frac{\frac{W_f}{\rho}}{\frac{N}{2} \frac{(\pi d^2)}{4}}$$

Con W_f la portata massica di combustibile, corrispondente al 70 % della portata totale del combustibile. Il numero di tubi è ottenuto, qualitativamente, dividendo il perimetro dell'ugello della sezione di gola e il diametro del tubo considerato. Raffinando la formula con fattori correttivi si trova la seguente formula empirica

$$N = \frac{\pi [D_t + 0.8(d + 0.04)]}{d + 0.04} \quad (E2)$$

Il fattore 0.8 ha il ruolo di fattore di correzione: il centro dei tubi è collocato su una circonferenza, piuttosto che su una retta. Sostituendo quindi V_{co} all'interno dell'equazione (E1) esplicitandone N ed eguagliando l'espressione trovata all'equazione (E2) è possibile determinare il valore del diametro dei tubi. Sostituendo infine il valore trovato all'interno dell'equazione (E2) si ottiene il numero dei tubi. Analizzando in un 'ciclo for' i passaggi appena visti, è possibile determinare il valore di t tale per cui si ha il numero di tubi N desiderato.

Appendice

A. Immagini e schemi

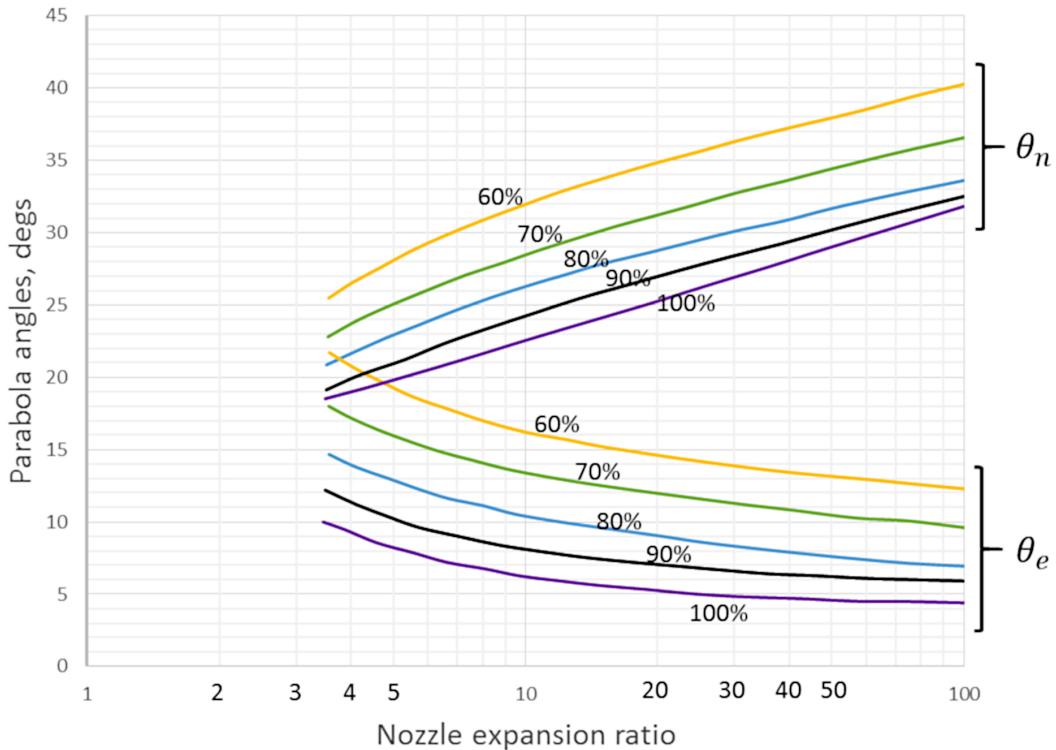


Figura 23: Grafico di interpolazione degli angoli per la costruzione dell'ugello

B. Grafici di varie grandezze in funzione del tempo di volo

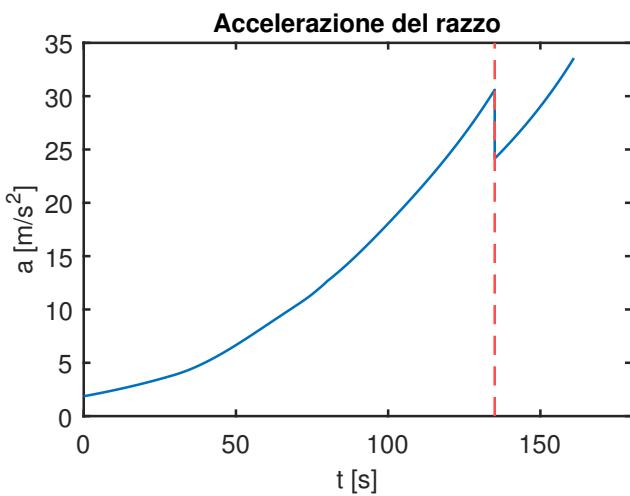


Figura 24: Accelerazione in funzione del tempo

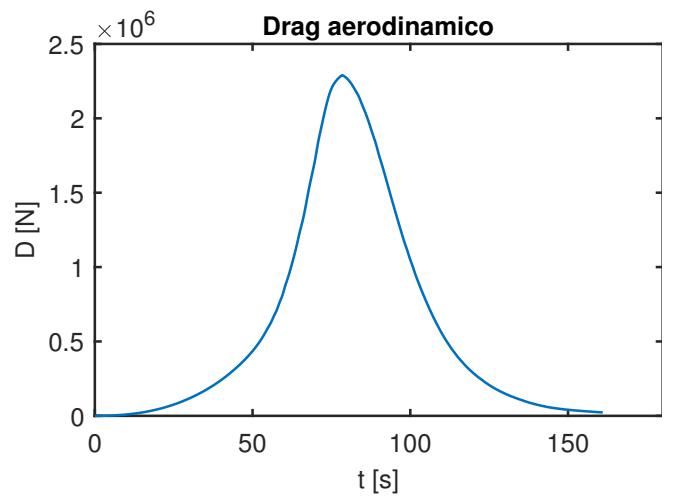


Figura 25: Drag in funzione del tempo

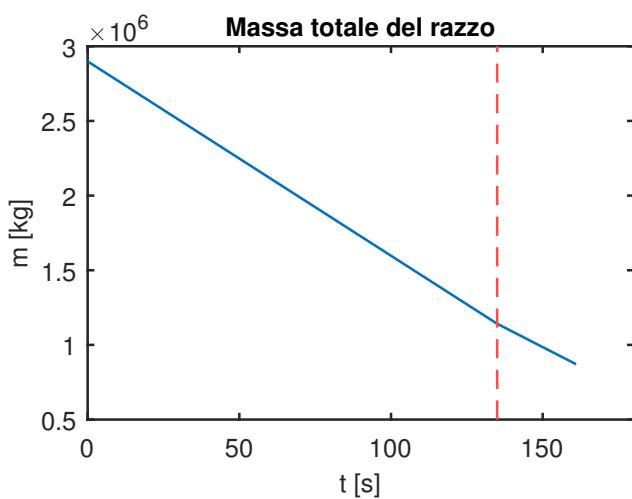


Figura 26: Massa totale in funzione del tempo

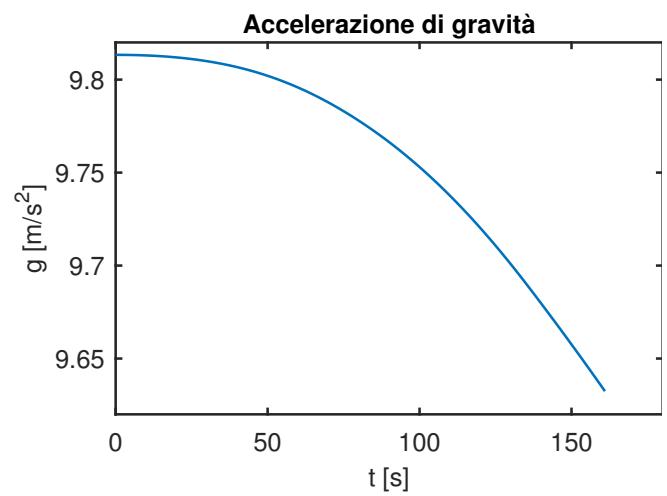


Figura 27: Accelerazione di gravità in funzione del tempo

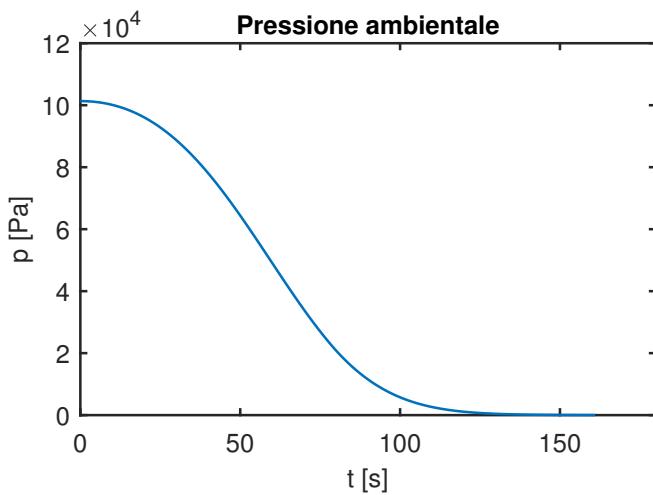


Figura 28: Pressione ambientale in funzione del tempo

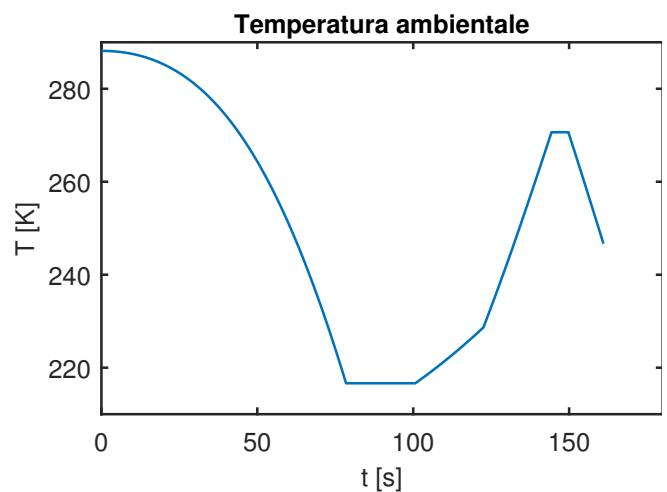


Figura 29: Temperatura ambientale in funzione del tempo



Figura 30: Numero di Mach in funzione del tempo

C. Confronto peso molecolare gas generator tra caso Fuel Rich e Oxidizer Rich

Per poter apprendere come l'O/F influisca sulla massa molare dei prodotti si è utilizzato il software NASA CEA (CEAM). Si è utilizzato un problema HP, in modo da far raggiungere l'equilibrio chimico senza bloccarlo imponendo una temperatura (il problema HP di NASA CEA, con il GG, tende a sovrastimare la temperatura raggiunta). La temperatura di equilibrio in questo caso è un parametro importante poiché in uscita dal GG abbiamo il vincolo della palettatura di turbina. Si è imposto che la temperatura in uscita dal GG debba essere minore di 1500K sia in FR che OR. Si è fatto variare l'O/F da nel range 0.2/18, si sono plottati i grafici di MM, T, γ in funzione dell'O/F.

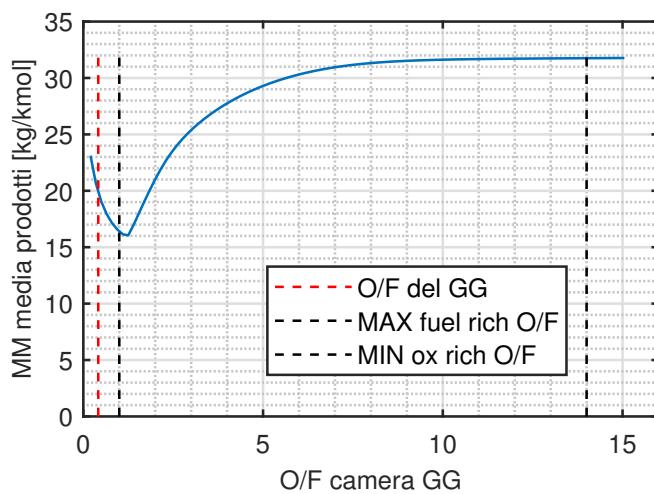


Figura 31: Massa Molare prodotti in funzione di O/F

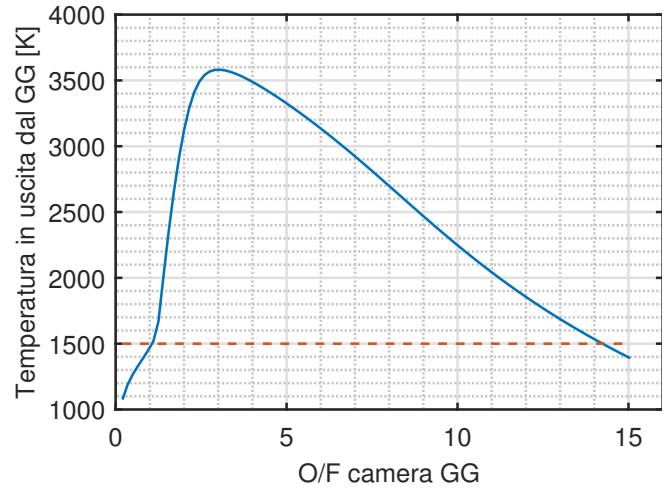


Figura 32: Temperatura in uscita dal GG in funzione di O/F

Dal primo grafico si nota come ad O/F bassi (fuel rich mixture) si ottenga una massa molare media più bassa rispetto ai fuel rich. La zona compresa tra le due linee tratteggiate nere, nel primo grafico, non deve essere considerata poichè ad essa sono associate temperature troppo elevate per la turbina, come si nota nel grafico immediatamente a destra. Un altro vantaggio dato dalle miscele FR è che il valore di c_p è più alto che nel caso OR. Questo permette di ottenere un lavoro specifico della turbina maggiore con le miscele FR. Infatti:

$$\Delta h_{id} = c_p \left(1 - \epsilon^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right)$$

Tale valore è influenzato principalmente dal valore di $c - p$. Esso diminuisce, aumentando il rapporto O/F, per cui si ha una variazione di lavoro specifico rispetto all'O/F, come mostra il seguente grafico.

D. Prodotti gas generator analizzati con software NASA CEA

E. Schemi del gas generator

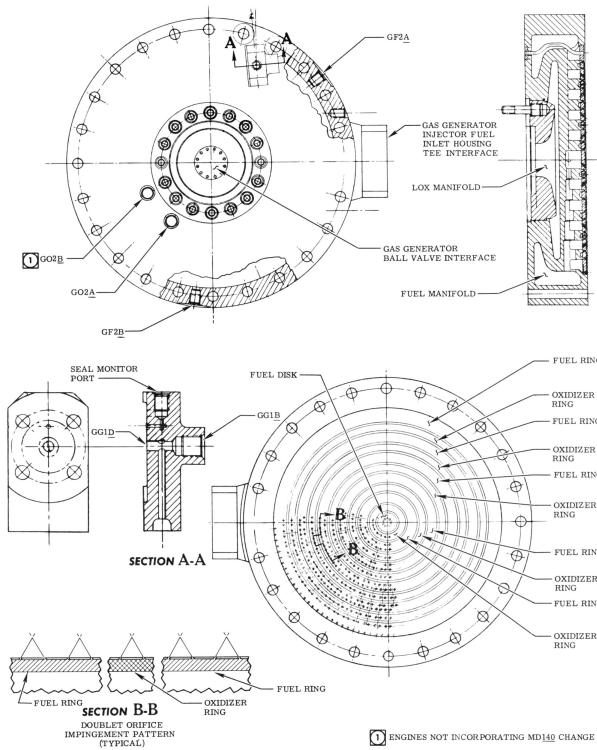


Figura 33: Piatto di Iniezione UMR - Gas Generator

F. Diagrammi di velocità

Per poter risolvere il problema si sono assunti i seguenti requisiti forniti dal manuale:

$T_i n [K]$	$p_i n [bar]$	ϵ	O/F	$\dot{m} [kg/s]$	$\omega [rad/s]$
1062	67.57	16.4	0.416	75.75	574.4

Tabella 19: Requisiti del sistema turbina

Inoltre abbiamo ipotizzato alcuni rendimenti:

η_{tot}	k_n	$\eta_n = k_n^2$	k_{blade}
0.6	0.96	0.9216	0.89

Tabella 20: Ipotesi rendimenti: ugelli e palette

In particolare abbiamo ipotizzato un rendimento di turbina VC generico. Il parametro k_n indica quanto la velocità C_1 si discosti in modulo dalla velocità isoentropica C_0 . Il parametro k_{blade} indica la perdita in modulo di velocità, provocata dall'attrito che il fluido incontra nell'attraversare la palettatura. In particolare, nei rotori la velocità scalata con questo parametro è la velocità relativa. Nello statore è la velocità assoluta ad essere scalata con questo parametro. Definiamo infine le velocità e gli angoli da trovare in questo problema. Supponiamo la turbina VC costituita dai seguenti elementi: sezione nozzle, un rotore, uno statore e un rotore. La nomenclatura è definita dalla seguente immagine, con \vec{v}_i si indica la velocità relativa mentre con \vec{c}_i si indica la velocità assoluta. Con \vec{U} si indica la velocità tangenziale, supponendo di essere ad un raggio medio della palettatura dall'albero. Supponiamo di voler definire tutte le velocità assolute in modulo C_i e tutti gli angoli assoluti

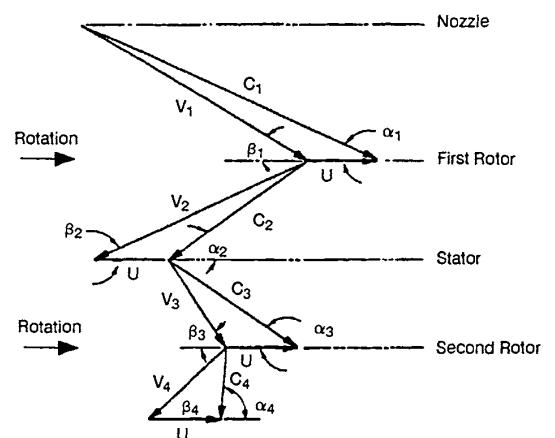


Figura 34: Definizione grandezze

α_i . Da cui si possono definire i valori vettoriali delle velocità \vec{C}_i . In questo modo possiamo chiudere il problema perché le velocità relative sono $\vec{V}_i = \vec{C}_i - \vec{U}$. Per cui possiamo definire il sistema di equazioni per trovare i valori di velocità e angoli assoluti. Si hanno in totale 8 valori incogniti, ovvero una coppia di valori (C_i, α_i) per ogni elemento del diagramma (nozzle, 1st rotor, stator, 2nd rotor). Le equazioni da risolvere sono le seguenti:

$$\begin{cases} C_1 = k_{blade} C_0 & C_1 \\ \frac{U}{C_1} = \frac{1}{4} \cos \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_3 & \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_4 = \frac{\pi}{2} & \alpha_4 \\ C_4 = 0.5 \sqrt{\gamma_{gc} R_{gc} T_{out,t}} & C_4 \\ C_3 = k_n C_2 & C_3 C_2 \\ V_2(C_2, \alpha_2) = k_n V_1(C_1, \alpha_1) & C_1 C_2 \alpha_1 \alpha_2 \\ V_4(C_4, \alpha_4) = k_n V_3(C_3, \alpha_3) & C_3 C_4 \alpha_3 \alpha_4 \end{cases}$$

La quantità C_0 è calcolata in questo modo, supponendo una espansione isoentropica:

$$C_0 = \sqrt{2c_{p,gg} T_{in} \left(1 - e^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)} = 1172.085 \text{ m/s}$$

La seconda equazione è stata ricavata dalla massimizzazione del rendimento della paletta, ricavata dal manuale AIAA. La terza equazione ipotizza che la paletta dello statore sia simmetrica per cui gli angoli della velocità assoluta sono uguali. La quarta equazione assume che il flusso in uscita sia allineato con l'efflusso della turbina, ovvero un flusso totalmente assiale. La quinta equazione assume che il mach all'efflusso sia di 0.5. Le ultime tre equazioni rappresentano la perdita del valore assoluto della velocità per via del passaggio nella palettatura rotorica e statorica. Elaborando il sistema, si possono scrivere le ultime due equazioni in due incognite ovvero si ricava un sottosistema autonomo non lineare, risolto tramite Matlab. Da qui si ricavano tutti i valori di interesse, e si può tracciare il diagramma di velocità.

G. Codici MATLAB usati

G.1. Simulazione di volo

```

1 clear, clc, close all;
2
3 % Initial data and parameters
4 dt = 0.01; % time increment
5 tb = 161; % combustion time
6 t = 0:dt:tb; % time vector
7 k = length(t); % number of iterations
8
9 mu = 3.986005e14; % gravitational parameter for Earth
10 R_E = 6373249; % Earth radius
11 T_sl = 33850967; % thrust sea level
12 diam_e = 3.53; % diameter exit nozzle
13 A_e = diam_e^2 * pi / 4 * 5; % area of nozzle exit
14 I_sp = 304; % specific impulse vacuum
15 S = 113; % drag surface
16 g0 = 9.80665; % acceleration of gravity
17 m_d = 242186; % mass dry
18 m_i = 2898941; % total mass at t=0
19 mp_i = m_i - m_d; % propellant mass at t=0
20
21 % propellant mass
22 mp = nan(1,k);
23 mp(1) = mp_i;

```

```

24
25 % total mass
26 m = nan(1,k);
27 m(1) = m_i;
28
29 % height
30 h = nan(1,k);
31 h(1) = 0;
32
33 % horizontal shift
34 s = nan(1,k);
35 s(1) = 0;
36
37 % velocity
38 v = nan(1,k);
39 v(1) = 0;
40 v_v = nan(1,k);
41 v_v(1) = 0;
42 v_h = nan(1,k);
43 v_h(1) = 0;
44
45 % standard atmosphere
46 rho = nan(1,k);
47 c = nan(1,k);
48 Temp = nan(1,k);
49 p = nan(1,k);
50 nu = nan(1,k);
51 [rho(1),c(1),Temp(1),p(1),nu(1)] = atmos(0);
52
53 T_vac = T_s1 + p(1) * A_e;      % thrust vacuum
54 m_dot_5 = T_vac / (g0 * I_sp); % propellant mass rate 5 motors
55
56 % Mach number
57 Ma = nan(1,k);
58 Ma(1) = 0;
59
60 % acceleration of gravity
61 g = nan(1,k);
62 g(1) = mu / (R_E + h(1))^2;
63
64 % thrust
65 T = nan(1,k);
66 T(1) = T_vac - A_e * p(1);
67
68 % drag
69 D = nan(1,k);
70 D(1) = 1/2 * rho(1) * v(1)^2 * S * drag_coeff(Ma(1));
71
72 % acceleration
73 a = nan(1,k);
74 a(1) = -g(1) + (T(1) - D(1)) / m(1);
75 a_v = nan(1,k);
76 a_v(1) = a(1);
77 a_h = nan(1,k);
78 a_h(1) = 0;
79
80 theta = pitch(t);
81
82 % flight angle
83 phi = nan(1,k);
84 phi(1) = 0;

```

```

85
86
87 %% Solution
88 for i = 2:k
89     h(i) = h(i-1) + v_v(i-1)*dt;
90     s(i) = s(i-1) + v_h(i-1)*dt;
91
92     v_v(i) = v_v(i-1) + a_v(i-1)*dt;
93     v_h(i) = v_h(i-1) + a_h(i-1)*dt;
94     v(i) = v(i-1) + a(i-1)*dt;
95
96     phi(i) = atan(v_h(i) / v_v(i));
97
98 [rho(i),c(i),Temp(i),p(i),nu(i)] = atmos(h(i));
99
100 Ma(i) = v(i) / c(i);
101 g(i) = mu / (R_E + h(i))^2;
102 D(i) = 1/2 * rho(i) * v(i)^2 * S * drag_coeff(Ma(i));
103
104 if t(i) <= 135
105     mp(i) = mp(i-1) - m_dot_5 * dt;
106     m(i) = m(i-1) - m_dot_5 * dt;
107     T(i) = T_vac - A_e .* p(i);
108 else
109     mp(i) = mp(i-1) - 4/5 * m_dot_5 * dt;
110     m(i) = m(i-1) - 4/5 * m_dot_5 * dt;
111     T(i) = 4/5 * T_vac - A_e .* p(i);
112 end
113
114 a_v(i) = -g(i) + (T(i) * cos(theta(i)) - D(i) * cos(phi(i))) / m(i);
115 a_h(i) = (T(i) * sin(theta(i)) - D(i) * sin(phi(i))) / m(i);
116 a(i) = sqrt(a_v(i)^2 + a_h(i)^2);
117
118 end
119
120 %% Plots
121
122 % height
123 figure
124 plot(t, h)
125 xlabel("t [s]")
126 ylabel("h [m]")
127 title("Quota di volo")
128 xline(135, '--r')
129
130 % velocity
131 figure
132 plot(t, v)
133 xlabel("t [s]")
134 ylabel("v [m/s]")
135 title("Velocità di volo")
136 xline(135, '--r')
137
138 % temperature
139 figure
140 plot(t, Temp)
141 xlabel("t [s]")
142 ylabel("T [K]")
143 title("Temperatura ambientale")
144
145 % pressure

```

```

146 figure
147 plot(t, p)
148 xlabel("t [s]")
149 ylabel("p [Pa]")
150 title("Pressione ambientale")
151
152 % Mach number
153 figure
154 plot(t, Ma)
155 xlabel("t [s]")
156 ylabel("Ma [-]")
157 title("Numero di Mach")
158 xline(135, '--r')
159
160 % acceleration of gravity
161 figure
162 plot(t, g)
163 xlabel("t [s]")
164 ylabel("g [m/s^2]")
165 title("Accelerazione di gravitÃ ")
166
167 % thrust
168 figure
169 plot(t, T)
170 xlabel("t [s]")
171 ylabel("T [N]")
172 title("Spinta dei motori")
173 xline(135, '--r')
174
175 % drag
176 figure
177 plot(t, D)
178 xlabel("t [s]")
179 ylabel("D [N]")
180 title("Drag aerodinamico")
181
182 % acceleration
183 figure
184 plot(t, a)
185 xlabel("t [s]")
186 ylabel("a [m/s^2]")
187 title("Accelerazione del razzo")
188 xline(135, '--r')
189
190 % total mass
191 figure
192 plot(t, m)
193 xlabel("t [s]")
194 ylabel("m [kg]")
195 title("Massa totale del razzo")
196 xline(135, '--r')
197
198 % trajectory
199 figure
200 plot(s, h, 'r')
201 xlabel("x [m]")
202 ylabel("y [m]")
203 title("Traiettoria di volo")

```

G.1.1 Parametri adimensionali lanciatore

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 % Dati:
6 % M_0: massa iniziale del sistema lanciatore [kg]
7 % M_u: massa carico utile del lanciatore [kg]
8 % coincide con la massa degli stadi superiori escluso il primo S-IC
9 % M_s: massa della struttura del lanciatore [kg]
10 % M_p: massa del propellente per il primo stadio S-IC [kg]
11 % M_m: massa motore [kg]
12 % M_tank: massa tank [kg]
13
14 % Dati iniziali ricavati da simulazione lancio e manuale F1 Rocketdyne
15 M_0 = 2898941;
16 M_u = 824511;
17 M_s = 242186;
18 M_p = 2074430; % 2656755 - 582325 kg
19 M_m = 8445.4363; % 18619 lb - manuale F1 schema pagina 10-
20 M_tank = 124799.5412;
21
22 % eps_u: indice di massa del carico utile
23 eps_u = M_u / (M_0 - M_u);
24
25 % csi_u: rapporto di massa del carico utile
26 zeta_u = M_u / M_0;
27
28 % eps_s: indice strutturale delle masse inerti
29 eps_s = M_s / (M_0 - M_u);
30
31 % MR: mass ratio
32 MR = (M_0 - M_p) / M_0 ;
33
34 % csi_p: frazione di propellente
35 zeta_p = M_p / M_0;
36
37 % csi_m: rapporto di massa motore
38 zeta_motore = 5*M_m / M_0;
39
40 % rapporto M_tank / M_p
41 rapporto_tank = M_tank / M_p;

```

G.2. Codici serbatoi

G.2.1 Serbatoio RP-1

```

1 clear; clc;
2 %% RP-1
3
4 rhoRP1 = 810; %kg/m^3;
5 g = 9.81;
6
7 Vtp = 27939; %ft^3 volume propellente
8 Vt_p = 48278996.2;%in^3
9 a = 198; %inch
10 b = 120; %inch
11 lc = 276; %inch
12 NPSH = 660; %inch
13

```

```

14 %% volumi
15
16 Ve = (2*pi*a^2*b)/3;
17 Vc = pi*a^2*lc;
18 l_t = lc + 2*b;
19 d_t = 17;
20 V_t = 5*pi*(d_t/2)^2*l_t; %volume approssimato occupato dai tubi di lox
21
22 Vtot = 2*Ve + Vc - V_t;
23
24 Vu = Vtot - Vt_p;
25 Vu_1 = Ve - Vu; %prova che l'ullage Ã“ minore del volume dell'ellissoide, quindi bu
    meno di b
26 syms b_2
27 bu = solve( Vu == (2*pi*a^2*b_2)/3, b_2); % altezza ullage inch 90.9363
28
29 %% pressioni
30 H_in = lc + 2*b - bu; %inch
31 H = H_in/39.37;
32
33 pu = 25.2 ; %pressione ullage psia
34
35 pi_n = rhoRP1*g*H;
36 %p_i = pi_n /6895 % psia
37
38 p_i = 13.38; %psia
39 pt = p_i + pu; %psia
40
41 %pt = 40.13; %psi
42
43 %% materiale
44
45 rho = 0.103; %lb/in^3
46 s_r = 69000; %psi
47 s_y = 57000; %psi
48 E = 10.6e6; %psi
49 v = 0.33; %poisson
50 % sicurezza
51 S_r = s_r/1.3;
52 S_y = s_y/1.25;
53
54
55
56 %% spessori
57
58 k = a/b; %ellipse ratio
59 K = 0.8; % stress factor
60 R = a*k;
61
62 tk = (K*pt*a)/(S_y); %spessore nodo
63 tcr = (pt*R)/(2*S_y); %spessore corona
64
65 te = (tk+tcr)/2; %spessore equivalente di un ellissoide (pt*a*(K+0.5*k))/(2*S_y)
66 tc = (pt*a)/(S_y); %spessore cilindro
67
68 %% aree
69
70 e = (sqrt(a^2-b^2))/a; % eccentricitÃ
71 Ae = a^2 + (pi*b^2*log((1+e)/(1-e)))/(2*e); %area ellisoidale
72
73

```

```

74 Ac = 2*pi*a*lc;
75 Atot = 2*Ae + Ac;
76
77 %% peso
78
79
80
81 E1 = 2*k+(1/sqrt(k^2-1))*log((k+sqrt(k^2-1))/(k-sqrt(k^2-1))); %design factor
82 We = (pi*a^2*te*E1*rho)/(2*k);
83
84 Wc = 2*pi*a*lc*tc*rho;
85
86
87 %% pressioni critiche dovute ai carichi esterni
88
89 Cb = 0.10; %buckling coefficient da 0.05 a 0.10
90 Pcre = (Cb*2*E*te^2)/(R^2);
91
92 if lc < 4.9*a*sqrt(a/tc)
93   Pcrc = 0.807*((E*tc^2)/(1c*a))*((1/(1-v^2))^3*(tc^2/a^2))^(1/4);
94 else
95   Pcrc = (E*tc^3)/(4*(1-v^2)*a^3);
96 end
97
98 %%
99
100
101 tk_m = tk/39.37
102 tcr_m = tcr/39.37
103 te_m = te/39.37
104 tc_m = tc/39.37
105

```

G.2.2 Serbatoio LOX

```

1 clear;clc;
2 %% LOX
3
4 rhoLOX = 1141; % kg/m^3
5 g = 9.81;
6
7 Vtp = 44716; %ft^3 volume propellente
8 Vt_p = 77269485;%in^3
9 a = 198; %inch %raggio della sezione cilindrica del serbatoio
10 b = 120; %inch altezza cupola elissoide
11 lc = 528; %inch %altezza parte cilindrica
12 NPSH = 720; %inch %vedi pompe
13
14 %% volumi
15
16 Ve = (2*pi*a^2*b)/3;
17 Vc = pi*a^2*lc;
18 V_he = 4*pi*a^2*b/3; % volume occupato da elio
19 Vtot = 2*Ve + Vc - V_he;
20
21 Vu = Vtot - Vt_p;
22 Vu_1 = Ve - Vu; %prova che l'ullage > minore del volume dell'ellissoide, quindi bu
23   meno di
24 syms b_2
25 bu = solve( Vu == (2*pi*a^2*b_2)/3, b_2); % altezza ullage inch

```

```

25
26 % pressioni
27
28 H_in = lc + 2*b - bu; %inch
29 H = H_in /39.37
30
31 pu = 23 ; %pressione ullage +-2.5 psia
32
33 pi_n = rhoLOX*g*H; %Pascal
34 %p_i = pi_n /6895 % psia
35
36 p_i = 27.92; %psia
37 pt = p_i + pu; %psia
38 %pt = 54.00755736; %psi
39
40
41 %% materiale
42
43 rho = 0.103; %lb/in^3
44 s_r = 69000; %psi
45 s_y = 57000; %psi
46 E = 10.6e6; %psi
47 v = 0.33; %poisson
48 % sicurezza
49 S_r = s_r/1.3;
50 S_y = s_y/1.25;
51
52
53
54 %% spessori
55
56 k = a/b; %ellipse ratio
57 K = 0.8; % stress factor
58 R = a*k;
59
60 tk = (K*pt*a)/(S_y); %spessore nodo
61 tcr = (pt*R)/(2*S_y); %spessore corona
62
63 te = (tk+tcr)/2; %spessore equivalente di un ellissoide (pt*a*(K+0.5*k))/(2*S_y)
64 tc = (pt*a)/(S_y); %spessore cilindro
65
66 %% aree
67
68 e = (sqrt(a^2-b^2))/a; % eccentricitÃ
69
70 Ae = a^2 + (pi*b^2*log((1+e)/(1-e)))/(2*e); %area ellisoidale
71
72 Ac = 2*pi*a*lc;
73
74 Atot = 2*Ae + Ac;
75
76 %% peso
77
78
79 E1 = 2*k+(1/sqrt(k^2-1))*log((k+sqrt(k^2-1))/(k-sqrt(k^2-1))); %design factor
80 We = (pi*a^2*te*E1*rho)/(2*k);
81
82 Wc = 2*pi*a*lc*tc*rho;
83
84
85 %% pressioni critiche dovute ai carichi esterni

```

```

86
87 Cb = 0.10; %buckling coefficient da 0.05 a 0.10
88 Pcre = (Cb*2*E*te^2)/(R^2);
89
90 if lc < 4.9*a*sqrt(a/tc)
91   Pcrc = 0.807*((E*tc^2)/(lc*a))*((1/(1-v^2))^3*(tc^2/a^2))^(1/4);
92 else
93   Pcrc = (E*tc^3)/(4*(1-v^2)*a^3);
94 end
95
96 %%
97
98
99 tk_m = tk/39.37
100 tcr_m = tcr/39.37
101 te_m = te/39.37
102 tc_m = tc/39.37

```

G.3. Turbopompa

```

1 function [H_m, delta_h, psi, P, ds, ns, prod] = turbopump(eta_p, P01, P02, pho1, Q,
2   m_dot, Dt2, omega)
3 g = 9.81;
4
5 % Design della pompa
6 % eta_p: rendimento pompa
7 % P01: pressione totale all'ingresso della pompa in psia
8 % P02: pressione totale all'uscita dalla pompa in psia
9 % pho1: densità fluido ingresso della pompa in lbm/ft^3
10 % Q: portata volumetrica
11 % m_dot: portata massica
12 % Dt2: diametro impeller
13 % R2: raggio impeller
14 R2 = Dt2 / 2;
15 % b2: spessore impeller
16 % beta2: angolo di deflessione
17 % omega: velocità angolare impeller
18
19 % Cavitazione
20 % P1: pressione inlet
21 % Psat: pressione saturazione - pressione di vapore
22 % pho: densità fluido ingresso inlet
23 % R1: raggio inlet
24 % Dt1 = rapportoD * Dt2;
25 % R1 = Dt1/2;
26 % theta: angolo di leading-edge dell'induttore
27
28 % Design
29 % H Head rise: parametro usato per definire le performance della pompa
30 H_feet = (144.* (P02 - P01) ./ pho1); % in feet da convertire
31 H_m = H_feet / 3.281;
32
33 % delta_h altezza di sollevamento
34 delta_h = (g .* H_m) ./ eta_p;
35
36 % Power
37 P = m_dot * (g*H_m)/eta_p;
38
39 %% Potenza impeller e quindi gruppo pompa si ricava angolo di deflessione

```

```

40 % beta2 = atan((omega.*R2)./(vr2).* (1 - (P)./(m_dot.* (omega.*R2).^2)));
41
42 % psi Head coefficient
43 % psi = eta_p .* (1 - (vr2./ (omega.*R2)).*tan(beta2));
44 psi = H_m / ((omega*R2).^2 / g);
45
46 % Parametri adimensionali
47 % ds specific diameter
48 ds = (Dt2*(g*H_m).^(1/4))/(Q.^1/2));
49
50 % ns specific speed
51 ns = (omega*(Q.^1/2))/((g*H_m).^(3/4));
52
53 prod = ns*ds;
54
55 % prod_controllo = 2 / sqrt(psi);

```

```

1 function quiver2(pos, color)
2
3 a = annotation('arrow', 'HeadStyle', 'plain', 'HeadLength', 5, 'HeadWidth', 5, 'LineWidth', 1, 'Color', color);
4 set(a, 'parent', gca);
5 set(a, 'position', pos);

```

G.3.1 Pompa LOX

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% DATI POMPA
6 % Inducer
7 P1 = 448159; % Pa
8 Psat = 1013.25; % Pa
9 pho = 1141; % kg/m^3
10 rapportoD = 0.81;
11
12 % Impeller
13 eta_p = 0.746;
14 P01 = 65; % psia
15 P02 = 1602; % psia
16 pho1 = 71.4; % lbm/ft^3
17 Q = 1.5898; % m^3/s
18 m_dot = 1806.205; % kg/s
19 Dt2 = 0.4953; % m
20 b2 = 0.06858; % m
21 beta2 = deg2rad(25);
22 omega = 575.12; % rad/s
23
24 U2 = omega*(Dt2/2);
25 Dt1 = rapportoD * Dt2;
26 R1 = Dt1/2;
27 U1 = omega*R1;
28
29 [H_m_LOX, delta_h_LOX, psi_LOX, P_LOX, ds_LOX, ns_LOX, prod_LOX] = turbopump(eta_p,
   P01, P02, pho1, Q, m_dot, Dt2, omega);
30
31 % Le ipotesi sottostanti sono basate su considerazioni tratte da:
32 % author = {D.K. Huzel, D.H. Huang},
33 % title = {Design of Liquid Propellant Rocket Engines, vol. 2},

```

```

34 % year      = {1967},
35 % publisher = {Scientifical and Technical Division NASA}
36
37 %% 1° tratto: INDUCER
38 % gravitational constant
39 g = 32.2;           % ft/s
40 N = 5488;           % rpm
41 Q = 25200;          % gpm
42 NPSH_c_LOX = 60;    % ft
43 H = (144.* (P02 - P01) ./ pho1); % ft
44
45 NS = (N*sqrt(Q)) ./ (H^0.75);
46
47 % Parametro di Thoma
48 thoma = NPSH_c_LOX / H;
49 NSS = NS / (thoma)^0.75;
50
51 % Ipotesi pg. 224
52 NSS_impeller = 11000;
53
54 % NPSH impeller
55 NPSH_imp = (N*sqrt(Q) ./ NSS_impeller).^(4/3);
56
57 H_inducer_ft = NPSH_imp - NPSH_c_LOX;
58 perc_ind = (H_inducer_ft / H) * 100;
59
60 % Ipotesi pg. 224
61 psi_ind = 0.06;
62
63 u_tip_mean = sqrt((H_inducer_ft*32.2)/psi_ind);
64
65 % Inducer mean tip diameter
66 d_t = (720/(pi*N)) .* u_tip_mean; %in
67
68 L_ind = d_t * 0.4;
69 % tip diameter at the inducer inlet
70 d_0t = d_t + 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(7)); % in
71 % tip diameter at the inducer outlet
72 d_1t = d_t - 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(7)); % in
73
74 % Ipotesi pg. 224
75 rd = 0.3;
76
77 % Mean hub diameter
78 d_h = d_t * rd; % in
79 % Hub diameter at the inducer inlet
80 d_0h = d_h - 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(14)); % in
81 % Hub diameter at the inducer outlet
82 d_1h = d_h + 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(14)); %in
83
84 Q_inducer = Q * (1 + 0.032 + 0.0175); % gpm (pg. 225)
85
86 cm0_ind = Q_inducer / (3.12 * (pi/4) * (d_0t.^2 - d_0h.^2)); % in ft/s
87 cm0_ind_SI = cm0_ind / 3.281; % in m/s
88 % Assunzione pg. 226
89 cu0_ind = 0; % in m/s
90 cm1_ind = Q_inducer / (3.12 * (pi/4) * (d_1t.^2 - d_1h.^2)); % in ft/s
91 cm1_ind_SI = cm1_ind / 3.281; % in m/s
92
93 % Inducer mean effective diameter inlet
94 d0 = sqrt((d_0t.^2 + d_0h.^2) / 2); % in

```

```

95
96 % Inducer peripheral velocity at d0
97 u0_ind = pi*(N/720)*d0; % in ft/sec
98 u0_ind_SI = u0_ind / 3.281; % in m/s
99
100 % Inducer mean effective diameter outlet
101 d1 = sqrt((d_1t.^2 + d_1h.^2) / 2); % in
102
103 % Inducer peripheral velocity at d1
104 u1_ind = pi*(N/720)*d1; % in ft/sec
105 u1_ind_SI = u1_ind / 3.281; % in m/s
106
107 % Inducer design relative inlet flow velocity
108 v0_ind = sqrt(cm0_ind.^2 + u0_ind.^2); % in ft/s
109 v0_ind_SI = v0_ind / 3.281; % in m/s
110
111 sin_beta0 = cm0_ind / v0_ind;
112 beta0_ind = asin(sin_beta0);
113 beta0_deg_ind = rad2deg(beta0_ind);
114
115 % Tangential component of the inducer absolute outlet velocity
116 cu1_ind = (H_inducer_ft * g) / u1_ind; % in ft/s
117 cu1_ind_SI = cu1_ind / 3.281; % in m/s
118
119 % Inducer design absolute outflow flow velocity
120 c1_ind = sqrt(cu1_ind.^2 + cm1_ind.^2); % in ft/s
121 c1_ind_SI = c1_ind / 3.281; % in m/s
122
123 % Inducer design absolute outflow flow angle
124 alpha1_ind = atan(cm1_ind/cu1_ind);
125 alpha1_deg_ind = rad2deg(alpha1_ind);
126
127 % Inducer design relative outlet flow velocity
128 v1_ind = sqrt((u1_ind - cu1_ind).^2 + cm1_ind.^2); % in ft/s
129 v1_ind_SI = v1_ind / 3.281; % in m/s
130
131 % Inducer design relative outlet flow angle
132 beta1_ind = atan(cm1_ind / (u1_ind - cu1_ind));
133 beta1_deg_ind = rad2deg(beta1_ind);
134
135 % Velocity diagram INDUCER: plot
136 figure
137 grid on;
138 grid minor;
139 hold on;
140 axis equal;
141
142 pos1_ind = [0, 0, u0_ind_SI, 0];
143 quiver2(pos1_ind, 'blue');
144 pos2_ind = [u0_ind_SI, 0, -v0_ind_SI*cos(beta0_ind), v0_ind_SI*sin(beta0_ind)];
145 quiver2(pos2_ind, 'blue');
146 pos3_ind = [0, 0, cu0_ind, cm0_ind_SI];
147 quiver2(pos3_ind, '#00FFFF');
148
149 pos4_ind = [u0_ind_SI, 0, u1_ind_SI, 0];
150 quiver2(pos4_ind, 'blue');
151 pos5_ind = [u0_ind_SI+u1_ind_SI, 0, -v1_ind_SI*cos(beta1_ind), v1_ind_SI*sin(beta1_ind)];
152 quiver2(pos5_ind, 'blue');
153 pos6_ind = [u0_ind_SI, 0, cu1_ind_SI, cm1_ind_SI];
154 quiver2(pos6_ind, '#00FFFF');

```

```

155
156 pos7_ind = [u0_ind_SI+u1_ind_SI-v1_ind_SI*cos(beta1_ind), 0, 0, cm1_ind_SI];
157 quiver2(pos7_ind, 'k');
158
159 xline(u0_ind_SI, '--');
160 str1 = {'INLET'};
161 text(35, -20, str1);
162 str2 = {'OUTLET'};
163 text(125, -20, str2);
164 title('Diagramma di velocitÃ INDUCER POMPA LOX')
165 xlabel('velocitÃ tangenziale [m/s]')
166 ylabel('velocitÃ meridionale [m/s]')
167
168 % Inducer inlet tip speed
169 u0_t_ind = (pi*N)/720 * d_0t; % in ft/sec
170 u0_t_ind_SI = u0_t_ind / 3.281; % in m/s
171
172 beta0_t = atan(cm0_ind / u0_t_ind);
173 beta0_t_deg = rad2deg(beta0_t);
174
175 % Inducer inlet tip % ipotesi pg. 226
176 theta0_t = 9;
177
178 % angle of attack at the inlet tip
179 aoa = theta0_t - beta0_t_deg;
180
181 % vane angle at the inducer inlet mean effective diameter d_0
182 theta0 = atan(d_0t / d0 * tan(deg2rad(theta0_t)));
183 theta0_deg = rad2deg(theta0);
184
185 % vane angle at the inducer inlet hub diameter d_0h
186 theta0_h = atan(d_0t / d_0h * tan(deg2rad(theta0_t)));
187 theta0_h_deg = rad2deg(theta0_h);
188
189 % inducer inlet flow coefficient
190 phi_ind = cm0_ind / u0_t_ind;
191
192 % theoretical inducer suction specific speed
193 NSS_ind = ((8150*(1-2*phi_ind.^2)).^(0.75))/(phi_ind) .* (1-rd.^2).^0.5;
194
195 % vane angle 14.30° ipotesi pg. 226
196 theta1 = 14.30;
197
198 % vane angle at the inducer outlet tip diameter d_1t
199 theta1_t = atan(d1 / d_1t * tan(deg2rad(theta1)));
200 theta1_t_deg = rad2deg(theta1_t);
201
202 % vane angle at the inducer outlet hub diameter d_1h
203 theta1_h = atan(d1 / d_1h * tan(deg2rad(theta1)));
204 theta1_h_deg = rad2deg(theta1_h);
205
206 % z = 3 vanes pg. 226
207 z = 3;
208 % vane pitch at the mean tip diameter dt
209 P_i = (pi*d_t) / z; % in
210
211 % Chord length at vane tip
212 C_i = L_ind / sin((deg2rad(theta0_t) + theta1_t)/2); % in
213
214 % Inducer solidity
215 S_v = C_i / P_i;

```

```

216
217 %% 2° tratto: IMPELLER
218 % Ipotesi pg. 216
219 H_e = 0.30*H;
220 H_imp = H - H_e;
221
222 Dt2_f = Dt2/0.3048; % in ft
223 Dt2_inches = Dt2 * 39.3701;
224 R2 = Dt2_f/2;
225 Dt1_f = rapportoD * Dt2_f; % in ft
226 R1 = Dt1_f/2;
227
228 % Area normal to the radial flow at the impeller inlet
229 A1 = pi*(R1.^2); % ft^2
230
231 % Area normal to the radial flow at the impeller outlet
232 A2 = pi*(R2.^2-R1.^2); % ft^2
233
234 % Radial/Meridional component of the absolute inlet flow velocity
235 cm1 = Q / (448.8*A1); % in ft/s
236 cm1_SI = cm1 / 3.281; % in m/s
237
238 % Radial/Meridional component of the absolute inlet flow velocity
239 % ipotesi da Sistemi Energetici
240 % DESIGN OF A CENTRIFUGAL PUMP FOR AN EXPANDER CYCLE ROCKET ENGINE,
241 % Prof. Ing. Aldo BONFIGLIOLI
242 cm2 = 1.5*cm1; % in ft/s
243 cm2_SI = cm2 / 3.281; % in m/s
244
245 % Impeller peripheral velocity at inlet
246 u1 = U1 * 3.281; % in ft/s
247 u1_SI = u1 / 3.281; % in m/s
248
249 % Impeller peripheral velocity at outlet
250 u2 = U2 * 3.281; % in ft/s
251 u2_SI = u2 / 3.281; % in m/s
252
253 % Tangential component of the absolute outlet flow velocity
254 cu2 = u2 - (cm2 / tan(beta2)); % in ft/s
255 cu2_SI = cu2 / 3.281; % in m/s
256
257 % Tangential component of the absolute inlet flow velocity
258 cu1 = (u2*cu2 - H*g) / u1; % in m/s;
259 cu1_SI = cu1 / 3.281; % in m/s;
260
261 % Absolute inlet velocity of the flow
262 c1 = sqrt(cu1.^2 + cm1.^2); % in ft/s
263 c1_SI = c1 / 3.281; % in m/s
264
265 % Absolute outlet velocity of the flow
266 c2 = sqrt(cu2.^2 + cm2.^2); % in ft/s
267 c2_SI = c2 / 3.281; % in m/s
268
269 vu1 = sqrt((u1 - cu1).^2 + cm1.^2); % in ft/s
270 vu1_SI = vu1 / 3.281; % in m/s
271 vm1 = cm1;
272 vm1_SI = vm1 / 3.281; % in m/s
273
274 % Inlet flow velocity relative to the impeller
275 v1 = sqrt(vu1.^2 + vm1.^2); % in ft/s
276 v1_SI = v1 / 3.281; % in m/s

```

```

277
278 vu2 = sqrt((u2 - cu2).^2 + cm2.^2); % in ft/s
279 vu2_SI = vu2 / 3.281; % in m/s
280 vm2 = cm2;
281 vm2_SI = vm2 / 3.281; % in m/s
282
283 % Outlet flow velocity relative to the impeller
284 v2 = sqrt(vu2.^2 + vm2.^2); % in ft/s
285 v2_SI = v2 / 3.281; % in m/s
286
287 alpha1 = atan(cm1/cu1);
288 alpha1_deg = rad2deg(alpha1);
289
290 % Impeller inlet vane angle
291 beta1 = atan(vm1/vu1);
292 beta1_deg = rad2deg(beta1);
293
294 alpha2 = atan(cm2/cu2);
295 alpha2_deg = rad2deg(alpha2);
296
297 % Impeller discharge vane angle
298 % beta2_controllo = atan(vm2/vu2);
299 % beta2_deg_controllo = rad2deg(beta2_controllo);
300
301 % Velocity diagram impeller: plot
302 figure
303 grid on;
304 grid minor;
305 hold on;
306 axis equal;
307
308 pos1 = [0, 0, u1_SI, 0];
309 quiver2(pos1, 'blue');
310 pos2 = [u1_SI, 0, -vu1_SI, vm1_SI];
311 quiver2(pos2, 'blue');
312 pos3 = [0, 0, u1_SI-vu1_SI, cm1_SI];
313 quiver2(pos3, '#00FFFF');
314
315 pos4 = [u1_SI, 0, u2_SI, 0];
316 quiver2(pos4, 'blue');
317 pos5 = [u1_SI+u2_SI, 0, -vu2_SI, vm2_SI];
318 quiver2(pos5, 'blue');
319 pos6 = [u1_SI, 0, u2_SI-vu2_SI, cm2_SI];
320 quiver2(pos6, '#00FFFF');
321
322 pos7 = [u1_SI-vu1_SI, 0, 0, cm1_SI];
323 quiver2(pos7, 'k');
324 pos8 = [u1_SI+u2_SI-vu2_SI, 0, 0, cm2_SI];
325 quiver2(pos8, 'k');
326
327 xline(u1_SI, '--');
328 str1 = {'INLET'};
329 text(45, -20, str1);
330 str2 = {'OUTLET'};
331 text(180, -20, str2);
332 title('Diagramma di velocitÃ IMPELLER POMPA LOX')
333 xlabel('velocitÃ tangenziale [m/s]')
334 ylabel('velocitÃ meridionale [m/s]')
335
336 %% 3Â° tratto: Pump casing
337 % Design of a double-volute (spaced 180Â°) single-discharge-type casing

```

```

338 % double-volute: si divide il flusso in 2 correnti uguali usando due
339 % lingue distanziate di 180°
340
341 % Ipotesi pg. 231
342 Kv = 0.337; % design factor
343
344 % Average flow velocity in the volute
345 c3 = Kv * sqrt(2*g*H); % in ft/s
346 c3_SI = c3 / 3.281; % in m/s
347
348 % area of a volute section at a given angular location \theta_volute from the tongue
349 a_theta_v_const = Q / (3.12 * 360 * c3);
350
351 a_volute_45 = a_theta_v_const * 45; % in^2
352 a_volute_90 = a_theta_v_const * 90; % in^2
353 a_volute_135 = a_theta_v_const * 135; % in^2
354 a_volute_180 = a_theta_v_const * 180; % in^2
355
356 thetav = [45:0.01:180];
357 a_volute_theta = [];
358 for i = 1:length(thetav)
    a_v = a_theta_v_const * thetav(i);
    a_volute_theta = [a_volute_theta; a_v];
end
362
363 % area of the volute throat section
364 a_v = 2*a_volute_180;
365
366 % volute angle is similar to alpha_2_deg = 14.7757°
367 % for geometrical construction pg. 231
368 alpha_v_deg = 15;
369 alpha_v = deg2rad(alpha_v_deg);
370
371 % radius at which start the volute tongue
372 % ipotesi: si assume un gioco del 5% pg. 231
373 r_t = (Dt2_inches / 2) * 1.05; % in
374
375 % width at the bottom of the trapezoidal volute section
376 b3_SI = 1.75 * b2; % in m
377 b3 = b3_SI * 39.37; % in
378
379 % pitch diameter of the diffuser throats
380 d3 = Dt2_inches * (c2 / c3); % in
381
382 % Ipotesi pg. 231
383 % transizione dalla forma del diffusore ad un cerchio: d_transition
384 % taper angle di 10° e lunghezza nozzle di 10 inches
385
386 % da costruzione grafica
387 a_transition = a_v + b3; % in^2 !!!
388 d_transition = sqrt((4 * a_transition) / pi);
389
390 % diameter of the discharge nozzle
391 d_e = d_transition + 2 * 10 * tan(deg2rad(5));
392 A_e = pi * (d_e^2) / 4;
393
394 % flow velocity at the nozzle inlet
395 % v_nozzle_i = 0 / (3.12 * 30.68); % in ft/s
396 v_nozzle_i = c2; % assunzione
397 v_nozzle_i_SI = v_nozzle_i / 3.281; % in m/s
398

```

```

399 % flow velocity at the nozzle exit
400 v_nozzle_e = Q / (3.12*A_e); % in ft/s
401 v_nozzle_e_SI = v_nozzle_e / 3.281; % in m/s

```

G.3.2 Pompa RP-1

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% DATI POMPA
6 %% Inducer
7 P1 = 310264; % Pa
8 Psat = 137895; % Pa
9 pho = 808.9324; % kg/m^3
10 rapportoD = 0.81;
11
12 %% Impeller
13 eta_p = 0.760;
14 P01 = 45; % psia
15 P02 = 1860; % psia
16 pho1 = 50.5; % lbm/ft^3
17 Q = 0.9617; % m^3/s
18 m_dot = 796.5082; % kg/s
19 Dt2 = 0.59436; % m
20 b2 = 0.04318; % m
21 beta2 = deg2rad(25);
22 omega = 574.020; % rad/s
23
24 U2 = omega*(Dt2/2);
25 Dt1 = rapportoD * Dt2;
26 R1 = Dt1/2;
27 U1 = omega*R1;
28
29 [H_m_RP1, delta_h_RP1, psi_RP1, P_RP1, ds_RP1, ns_RP1, prod_RP1] = turbopump(eta_p,
   P01, P02, pho1, Q, m_dot, Dt2, omega);
30
31 %% Le ipotesi sottostanti sono basate su considerazioni tratte da:
32 %% author = {D.K. Huzel, D.H. Huang},
33 %% title = {Design of Liquid Propellant Rocket Engines, vol. 2},
34 %% year = {1967},
35 %% publisher = {Scientifical and Technichal Division NASA}
36
37 %% 1° tratto: INDUCER
38 %% gravitational constant
39 g = 32.2; % ft/s
40 N = 5488; % rpm
41 Q = 15250; % gpm
42 NPSH_c_RP1 = 55; % ft
43 H = (144.* (P02 - P01) ./ pho1); % ft
44
45 NS = (N*sqrt(Q)) ./ (H^0.75);
46
47 %% Parametro di Thoma
48 thoma = NPSH_c_RP1 / H;
49 NSS = NS / (thoma)^0.75;
50
51 %% Ipotesi pg. 224
52 NSS_impeller = 11000;
53

```

```

54 % NPSH impeller
55 NPSH_imp = (N*sqrt(Q) ./ NSS_impeller).^(4/3);
56
57 H_inducer_ft = NPSH_imp - NPSH_c_RP1;
58 perc_ind = (H_inducer_ft / H) * 100;
59
60 % Ipotesi pg. 224
61 psi_ind = 0.06;
62
63 u_tip_mean = sqrt((H_inducer_ft*32.2)/psi_ind);
64
65 % Inducer mean tip diameter
66 d_t = (720/(pi*N)) .* u_tip_mean; % in
67
68 L_ind = d_t * 0.4;
69 % tip diameter at the inducer inlet
70 d_0t = d_t + 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(7)); % in
71 % tip diameter at the inducer outlet
72 d_1t = d_t - 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(7)); % in
73
74 % Ipotesi pg. 224
75 rd = 0.3;
76
77 % Mean hub diameter
78 d_h = d_t * rd; % in
79 % Hub diameter at the inducer inlet
80 d_0h = d_h - 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(14)); % in
81 % Hub diameter at the inducer outlet
82 d_1h = d_h + 2*L_ind/2 * tan(deg2rad(14)); % in
83
84 Q_inducer = Q * (1 + 0.032 + 0.0175); % gpm (pg. 225)
85
86 cm0_ind = Q_inducer/ (3.12 * (pi/4) * (d_0t.^2 - d_0h.^2)); % in ft/s
87 cm0_ind_SI = cm0_ind / 3.281; % in m/s
88 % Assunzione pg. 226
89 cu0_ind = 0; % in m/s
90 cm1_ind = Q_inducer/ (3.12 * (pi/4) * (d_1t.^2 - d_1h.^2)); % in ft/s
91 cm1_ind_SI = cm1_ind / 3.281; % in m/s
92
93 % Inducer mean effective diameter inlet
94 d0 = sqrt((d_0t.^2 + d_0h.^2) / 2); % in
95
96 % Inducer peripheral velocity at d0
97 u0_ind = pi*(N/720)*d0; % in ft/sec
98 u0_ind_SI = u0_ind / 3.281; % in m/s
99
100 % Inducer mean effective diameter outlet
101 d1 = sqrt((d_1t.^2 + d_1h.^2) / 2); % in
102
103 % Inducer peripheral velocity at d1
104 u1_ind = pi*(N/720)*d1; % in ft/sec
105 u1_ind_SI = u1_ind / 3.281; % in m/s
106
107 % Inducer design relative inlet flow velocity
108 v0_ind = sqrt(cm0_ind.^2 + u0_ind.^2); % in ft/s
109 v0_ind_SI = v0_ind / 3.281; % in m/s
110
111 sin_beta0 = cm0_ind / v0_ind;
112 beta0_ind = asin(sin_beta0);
113 beta0_deg_ind = rad2deg(beta0_ind);
114

```

```

115 % Tangential component of the inducer absolute outlet velocity
116 cu1_ind = (H_inducer_ft * g) / u1_ind; % in ft/s
117 cu1_ind_SI = cu1_ind / 3.281; % in m/s
118
119 % Inducer design absolute outflow flow velocity
120 c1_ind = sqrt(cu1_ind.^2 + cm1_ind.^2); % in ft/s
121 c1_ind_SI = c1_ind / 3.281; % in m/s
122
123 % Inducer design absolute outflow flow angle
124 alpha1_ind = atan(cm1_ind/cu1_ind);
125 alpha1_deg_ind = rad2deg(alpha1_ind);
126
127 % Inducer design relative outlet flow velocity
128 v1_ind = sqrt((u1_ind - cu1_ind).^2 + cm1_ind.^2); % in ft/s
129 v1_ind_SI = v1_ind / 3.281; % in m/s
130
131 % Inducer design relative outlet flow angle
132 beta1_ind = atan(cm1_ind / (u1_ind - cu1_ind));
133 beta1_deg_ind = rad2deg(beta1_ind);
134
135 % Velocity diagram INDUCER: plot
136 figure
137 grid on;
138 grid minor;
139 hold on;
140 axis equal;
141
142 pos1_ind = [0, 0, u0_ind_SI, 0];
143 quiver2(pos1_ind, 'blue');
144 pos2_ind = [u0_ind_SI, 0, -v0_ind_SI*cos(beta0_ind), v0_ind_SI*sin(beta0_ind)];
145 quiver2(pos2_ind, 'blue');
146 pos3_ind = [0, 0, cu0_ind, cm0_ind_SI];
147 quiver2(pos3_ind, '#00FFFF');
148
149 pos4_ind = [u0_ind_SI, 0, u1_ind_SI, 0];
150 quiver2(pos4_ind, 'blue');
151 pos5_ind = [u0_ind_SI+u1_ind_SI, 0, -v1_ind_SI*cos(beta1_ind), v1_ind_SI*sin(beta1_ind)];
152 quiver2(pos5_ind, 'blue');
153 pos6_ind = [u0_ind_SI, 0, cu1_ind_SI, cm1_ind_SI];
154 quiver2(pos6_ind, '#00FFFF');
155
156 pos7_ind = [u0_ind_SI+u1_ind_SI-v1_ind_SI*cos(beta1_ind), 0, 0, cm1_ind_SI];
157 quiver2(pos7_ind, 'k');
158
159 xline(u0_ind_SI, '--');
160 str1 = {'INLET'};
161 text(25, -20, str1);
162 str2 = {'OUTLET'};
163 text(105, -20, str2);
164 title('Diagramma di velocitÃ INDUCER POMPA RP-1')
165 xlabel('velocitÃ tangenziale [m/s]')
166 ylabel('velocitÃ meridionale [m/s]')
167
168 % Inducer inlet tip speed
169 u0_t_ind = (pi*N)/720 * d_0t; % in ft/sec
170 u0_t_ind_SI = u0_t_ind / 3.281; % in m/s
171
172 beta0_t = atan(cm0_ind / u0_t_ind);
173 beta0_t_deg = rad2deg(beta0_t);
174

```

```

175 % Inducer inlet tip % ipotesi pg. 226
176 theta0_t = 9;
177
178 % angle of attack at the inlet tip
179 aoa = theta0_t - beta0_t_deg;
180
181 % vane angle at the inducer inlet mean effective diameter d_0
182 theta0 = atan(d_0t / d0 * tan(deg2rad(theta0_t)));
183 theta0_deg = rad2deg(theta0);
184
185 % vane angle at the inducer inlet hub diameter d_0h
186 theta0_h = atan(d_0t / d_0h * tan(deg2rad(theta0_t)));
187 theta0_h_deg = rad2deg(theta0_h);
188
189 % inducer inlet flow coefficient
190 phi_ind = cm0_ind / u0_t_ind;
191
192 % theoretical inducer suction specific speed
193 NSS_ind = ((8150*(1-2*phi_ind.^2)).^(0.75))/(phi_ind) .* (1-rd.^2).^0.5;
194
195 % vane angle 14.30° ipotesi pg. 226
196 theta1 = 14.30;
197
198 % vane angle at the inducer outlet tip diameter d_1t
199 theta1_t = atan(d1 / d_1t * tan(deg2rad(theta1)));
200 theta1_t_deg = rad2deg(theta1_t);
201
202 % vane angle at the inducer outlet hub diameter d_1h
203 theta1_h = atan(d1 / d_1h * tan(deg2rad(theta1)));
204 theta1_h_deg = rad2deg(theta1_h);
205
206 % z = 3 vanes pg. 226
207 z = 3;
208 % vane pitch at the mean tip diameter dt
209 P_i = (pi*d_t) / z; % in
210
211 % Chord length at vane tip
212 C_i = L_ind / sin((deg2rad(theta0_t) + theta1_t)/2); % in
213
214 % Inducer solidity
215 S_v = C_i / P_i;
216
217 %% 2° tratto: IMPELLER
218 % Ipotesi pg. 216
219 H_e = 0.30*H;
220 H_imp = H - H_e;
221
222 Dt2_f = Dt2/0.3048; % in ft
223 Dt2_inches = Dt2 * 39.3701;
224 R2 = Dt2_f/2;
225 Dt1_f = rapportoD * Dt2_f; % in ft
226 R1 = Dt1_f/2;
227
228 % Area normal to the radial flow at the impeller inlet
229 A1 = pi*(R1.^2); % ft^2
230
231 % Area normal to the radial flow at the impeller outlet
232 A2 = pi*(R2.^2-R1.^2); % ft^2
233
234 % Radial/Meridional component of the absolute inlet flow velocity
235 cm1 = Q / (448.8*A1); % in ft/s

```

```

236 cm1_SI = cm1 / 3.281; % in m/s
237
238 % Radial/Meridional component of the absolute inlet flow velocity
239 % ipotesi da Sistemi Energetici
240 % DESIGN OF A CENTRIFUGAL PUMP FOR AN EXPANDER CYCLE ROCKET ENGINE,
241 % Prof. Ing. Aldo BONFIGLIOLI
242 cm2 = 1.5*cm1; % in ft/s
243 cm2_SI = cm2 / 3.281; % in m/s
244
245 % Impeller peripheral velocity at inlet
246 u1 = U1 * 3.281; % in ft/s
247 u1_SI = u1 / 3.281; % in m/s
248
249 % Impeller peripheral velocity at outlet
250 u2 = U2 * 3.281; % in ft/s
251 u2_SI = u2 / 3.281; % in m/s
252
253 % Tangential component of the absolute outlet flow velocity
254 cu2 = u2 - (cm2 / tan(beta2)); % in ft/s
255 cu2_SI = cu2 / 3.281; % in m/s
256
257 % Tangential component of the absolute inlet flow velocity
258 cu1 = (u2*cu2 - H*g) / u1; % in m/s;
259 cu1_SI = cu1 / 3.281; % in m/s;
260
261 % Absolute inlet velocity of the flow
262 c1 = sqrt(cu1.^2 + cm1.^2); % in ft/s
263 c1_SI = c1 / 3.281; % in m/s
264
265 % Absolute outlet velocity of the flow
266 c2 = sqrt(cu2.^2 + cm2.^2); % in ft/s
267 c2_SI = c2 / 3.281; % in m/s
268
269 vu1 = sqrt((u1 - cu1).^2 + cm1.^2); % in ft/s
270 vu1_SI = vu1 / 3.281; % in m/s
271 vm1 = cm1;
272 vm1_SI = vm1 / 3.281; % in m/s
273
274 % Inlet flow velocity relative to the impeller
275 v1 = sqrt(vu1.^2 + vm1.^2); % in ft/s
276 v1_SI = v1 / 3.281; % in m/s
277
278 vu2 = sqrt((u2 - cu2).^2 + cm2.^2); % in ft/s
279 vu2_SI = vu2 / 3.281; % in m/s
280 vm2 = cm2;
281 vm2_SI = vm2 / 3.281; % in m/s
282
283 % Outlet flow velocity relative to the impeller
284 v2 = sqrt(vu2.^2 + vm2.^2); % in ft/s
285 v2_SI = v2 / 3.281; % in m/s
286
287 alpha1 = atan(cm1/cu1);
288 alpha1_deg = rad2deg(alpha1);
289
290 % Impeller inlet vane angle
291 beta1 = atan(vm1/vu1);
292 beta1_deg = rad2deg(beta1);
293
294 alpha2 = atan(cm2/cu2);
295 alpha2_deg = rad2deg(alpha2);
296

```

```

297 % Impeller discharge vane angle
298 % beta2_controllo = atan(vm2/vu2);
299 % beta2_deg_controllo = rad2deg(beta2_controllo);
300
301 % Velocity diagram impeller: plot
302 figure
303 grid on;
304 grid minor;
305 hold on;
306 axis equal;
307
308 pos1 = [0, 0, u1_SI, 0];
309 quiver2(pos1, 'blue');
310 pos2 = [u1_SI, 0, -vu1_SI, vm1_SI];
311 quiver2(pos2, 'blue');
312 pos3 = [0, 0, u1_SI-vu1_SI, cm1_SI];
313 quiver2(pos3, '#00FFFF');
314
315 pos4 = [u1_SI, 0, u2_SI, 0];
316 quiver2(pos4, 'blue');
317 pos5 = [u1_SI+u2_SI, 0, -vu2_SI, vm2_SI];
318 quiver2(pos5, 'blue');
319 pos6 = [u1_SI, 0, u2_SI-vu2_SI, cm2_SI];
320 quiver2(pos6, '#00FFFF');
321
322 pos7 = [u1_SI-vu1_SI, 0, 0, cm1_SI];
323 quiver2(pos7, 'k');
324 pos8 = [u1_SI+u2_SI-vu2_SI, 0, 0, cm2_SI];
325 quiver2(pos8, 'k');
326
327 xline(u1_SI, '--');
328 str1 = {'INLET'};
329 text(60, -20, str1);
330 str2 = {'OUTLET'};
331 text(210, -20, str2);
332 title('Diagramma di velocitÃ IMPELLER POMPA RP-1')
333 xlabel('velocitÃ tangenziale [m/s]')
334 ylabel('velocitÃ meridionale [m/s]')
335
336 %% 3Â° tratto: Pump casing
337 % Design of a double-volute (spaced 180Â°) single-discharge-type casing
338 % double-volute: si divide il flusso in 2 correnti uguali usando due
339 % lingue distanziate di 180Â°
340
341 % Ipotesi pg. 231
342 Kv = 0.337; % design factor
343
344 % Average flow velocity in the volute
345 c3 = Kv * sqrt(2*g*H); % in ft/s
346 c3_SI = c3 / 3.281; % in m/s
347
348 % area of a volute section at a given angular location \theta_volute from the tongue
349 a_theta_volte_const = Q / (3.12 * 360 * c3);
350
351 a_volute_45 = a_theta_volte_const * 45; % in^2
352 a_volute_90 = a_theta_volte_const * 90; % in^2
353 a_volute_135 = a_theta_volte_const * 135; % in^2
354 a_volute_180 = a_theta_volte_const * 180; % in^2
355
356 theta_volte = [45:0.01:180];

```

```

357 a_volute_theta = [];
358 for i = 1:length(thetaV)
359     a_v = a_thetaV_const * thetaV(i);
360     a_volute_theta = [a_volute_theta; a_v];
361 end
362
363 % area of the volute throat section
364 a_v = 2*a_volute_180;
365
366 % volute angle is similar to alpha_2_deg = 14.7757°
367 % for geometrical construction pg. 231
368 alpha_v_deg = 15;
369 alpha_v = deg2rad(alpha_v_deg);
370
371 % radius at which start the volute tongue
372 % ipotesi: si assume un gioco del 5% pg. 231
373 r_t = (Dt2_inches / 2)*1.05; % in
374
375 % width at the bottom of the trapezoidal volute section
376 b3_SI = 1.75*b2; % in m
377 b3 = b3_SI *39.37; % in
378
379 % pitch diameter of the diffuser throats
380 d3 = Dt2_inches*(c2/c3); % in
381
382 % Ipotesi pg. 231
383 % transizione dalla forma del diffusore ad un cerchio: d_transition
384 % taper angle di 10° e lunghezza nozzle di 10 inches
385
386 % da costruzione grafica
387 a_transition = a_v + b3; %in^2 !!!
388 d_transition = sqrt((4*a_transition) / pi);
389
390 % diameter of the discharge nozzle
391 d_e = d_transition + 2*10*tan(deg2rad(5));
392 A_e = pi*(d_e^2)/4;
393
394 % flow velocity at the nozzle inlet
395 % v_nozzle_i = 0 / (3.12*30.68); % in ft/s
396 v_nozzle_i = c2; % assunzione
397 v_nozzle_i_SI = v_nozzle_i / 3.281; % in m/s
398
399 % flow velocity at the nozzle exit
400 v_nozzle_e = 0 / (3.12*A_e); % in ft/s
401 v_nozzle_e_SI = v_nozzle_e / 3.281; % in m/s

```

G.4. Camera di spinta

G.4.1 Camera di combustione

```

1 clear; clc;
2 %% Combustion chamber
3
4 L_star = 1; % lunghezza caratteristica, m
5 R_t = 0.4445; % raggio di gola, m
6 A_t = pi*R_t^2; % area di gola, m^2
7 V_c = L_star * A_t; % volume camera di combustione, m^3
8 % volume compreso il convergente (ciclindro + convergente)
9
10 % calcolo c_star
11 R = 8314; % [kJ / mol * K]

```

```

12 g0 = 9.81; % [m/s^2]
13 gamma = 1.1777;
14 GAMMA = sqrt(gamma.*(2/(gamma+1)).^( (gamma+1)/(gamma-1) ));% Vandencherkove function
15 T_c = 3572 ; % temperatura in camera; K
16 p_c = 77.6e5; % pressione in camera, Pa
17 MM = 22.2095; % massa molare, Kg/kmol
18
19 c_star = (p_c .* A_t) ./ (GAMMA .* (p_c ./ (sqrt((R / MM).*T_c))) .* A_t); %
    velocità caratteristica, m/s
20
21 t_r = L_star/c_star; % tempo residenza, s
22
23 %% misure della parte cilindrica
24
25 eps = 1.307; % A_c/A_t
26
27 % V_c è il volume con il convergente, assumiamo
28 % il convergente come una % del volume della porzione
29 % della camera cilindrica
30
31 A_c = eps*A_t;
32 R_c = sqrt(A_c/pi);
33
34 % studio parte convergente
35 a = (R_c-R_t);
36 theta_deg = 13; % deg
37 theta = deg2rad(theta_deg);
38
39 L_conv = a/tan(theta);
40 V_conv = ((A_c + A_t + sqrt(A_c*A_t))*L_conv)/3; %volume parte convergente
41
42 pc = V_conv/V_c; %percentuale del volume della camera occupata dal convergente
43 fatt_c = 1 + pc; %fattore correttivo per il volume della parte cilindrica
44
45 % ritorniamo al cilindro
46
47 L_c = V_c/(fatt_c*A_c);
48
49 V_cr = L_c*A_c; % volume corretto della parte cilindrica
50
51
52 %% area interna delle pareti
53
54 A_tot = 2*L_c*sqrt(pi*eps*A_t) + csc(theta)*(eps-1)*A_t; % area totale della camera
    di combustione (cilindro + conv)
55
56 % apo = sqrt(L_conv^2 + a^2)
57 % A_conv = pi*(R_c + R_t)*apo;
58 % A_cil = 2*pi*R_c*L_c;
59 % A_tot2 = A_conv + A_cil;

```

G.4.2 Modellazione ugello

```

1 function [x, y, Ln_cone, Ln, Nx, Ny, Qx, Qy, Ex, Ey] = bell_nozzle(eps, Rt,
    bell_percentage, theta_n_deg, theta_e_deg)
2
3 theta_n = deg2rad(theta_n_deg);
4 theta_e = deg2rad(theta_e_deg);
5
6 % Length of a standard 15-degree half angle conical nozzle

```

```

7 Ln_cone = ((sqrt(eps) - 1) * Rt) / (tan(deg2rad(15)));
8
9 % Radius of the nozzle exit
10 Re = sqrt(eps)*Rt;
11
12 % Nozzle length for a __% bell
13 Ln = bell_percentage * ((sqrt(eps) - 1) * Rt) / (tan(deg2rad(15)));
14
15 x = [];
16 y = [];
17
18 % Equation for the throat:
19
20 % Entrant section
21 theta_i = [deg2rad(-103):0.01:deg2rad(-90)];
22 for i = 1:length(theta_i)
23     x_i = 1.5*Rt*cos(theta_i(i));
24     y_i = 1.5*Rt*sin(theta_i(i)) + 1.5*Rt + Rt;
25     x = [x; x_i];
26     y = [y; y_i];
27 end
28
29 % Exit section
30 theta_exit = [deg2rad(-90):0.01:deg2rad(theta_n-90)];
31 for i = 1:length(theta_exit)
32     x_i = 0.382*Rt*cos(theta_exit(i));
33     y_i = 0.382*Rt*sin(theta_exit(i)) + 0.382*Rt + Rt;
34     x = [x; x_i];
35     y = [y; y_i];
36 end
37
38 % Points for the mathematical costruction of the bell:
39
40 % N: inflection point
41 Nx = x(end,1);
42 Ny = y(end,1);
43
44 % E: exit point of the nozzle
45 Ex = Ln;
46 Ey = Re;
47
48 % Q: cross point
49 m1 = tan(theta_n);
50 m2 = tan(theta_e);
51 C1 = Ny - m1*Nx;
52 C2 = Ey - m2*Ex;
53 Qx = (C2-C1) / (m1-m2);
54 Qy = (m1*C2 - m2*C1) / (m1 - m2);
55
56 % Equation for the bell: quadratic Bezier curve:
57
58 t = [0:0.01:1];
59 for i = 1:length(t)
60     x_b = (1-t(i)).^2 * Nx + 2*(1-t(i))*t(i) * Qx + t(i).^2 * Ex;
61     y_b = (1-t(i)).^2 * Ny + 2*(1-t(i))*t(i) * Qy + t(i).^2 * Ey;
62     x = [x; x_b];
63     y = [y; y_b];
64 end
65
66 function [alpha_i, alpha_f] = bell_angles(k, eps)
67 if k < 0.6 || k > 1

```

```

3     error("Lunghezza percentuale non corretta")
4 elseif eps < 4 || eps > 98
5     error("Rapporto delle aree errato")
6 end
7
8 theta_60_i = [3.6265456110319585, 28.571787967282315;
9 3.850965152280278, 29.155851379881398;
10 4.089265845912848, 29.717664757714804;
11 4.3422869685990175, 30.196040505176903;
12 4.610969116643579, 30.69110377871327;
13 4.896268408784252, 31.163917017483953;
14 5.199230618838567, 31.664542799711736;
15 5.520928027280657, 32.13735603848242;
16 5.8625092535404875, 32.56010669903033;
17 6.225216799488704, 32.966169833503976;
18 6.610354221963852, 33.34998293321195;
19 7.019316280498156, 33.72823352422849;
20 7.453576597207831, 34.10092160655362;
21 7.914690525604948, 34.45135965411307;
22 8.404331168954116, 34.80179770167252;
23 8.92425625608514, 35.141110731849125;
24 9.476338452872218, 35.4692987446429;
25 10.062570182181283, 35.79192424874525;
26 10.685080477594088, 36.13123727892186;
27 11.346097221606197, 36.464987800407044;
28 12.04798292874117, 36.770925778435135;
29 12.793273080366916, 37.06017623038897;
30 13.58466161873954, 37.343864173651376;
31 14.424993817514663, 37.61642709953095;
32 15.317308040142638, 37.88899002541052;
33 16.26482628030584, 38.16711545998152;
34 17.270936828729116, 38.42855336847824;
35 18.339297950081715, 38.70111629435782;
36 19.473723570846506, 38.95699169416312;
37 20.678313887678197, 39.207304585277015;
38 21.957382015570218, 39.43536744162523;
39 23.315595292232082, 39.6801178240477;
40 24.757813481740836, 39.91930569777875;
41 26.289273301208876, 40.175181097584066;
42 27.91545454692539, 40.42549398869796;
43 29.642262062956707, 40.69249440588611;
44 31.475799983374074, 40.920557262234325;
45 33.42273912949364, 41.143057609891116;
46 35.49014859134087, 41.38224548362217;
47 37.68539572185319, 41.60474583127896;
48 40.01641425872787, 41.82168367024433;
49 42.49156673228925, 42.02193398313545;
50 45.11988736892896, 42.24443433079224;
51 47.91076409515321, 42.46137216975761;
52 50.87424948830328, 42.67274750003156;
53 54.02101771120954, 42.8785603216141;
54 57.3624938341588, 43.10106066927089;
55 60.91072972375538, 43.34024854300194;
56 64.67849786267627, 43.590561434115834;
57 68.67927523586783, 43.82974930784689;
58 72.92767063539554, 44.09674972503504;
59 77.43871192731193, 44.335937598766094;
60 82.22865958519432, 44.552875437731466;
61 87.31492256703807, 44.775375785388256;
62 92.71579691736312, 44.99787613304505;
63 98.12289743780838, 45.189782682899036];

```

```

64
65 theta_60_f = [3.6495648425632, 23.804718018735525;
66 3.875094175050214, 23.248467149593537;
67 4.11457014844373, 22.72559133260008;
68 4.37978216487587, 22.204801456365892;
69 4.627296840556893, 21.81681647513936;
70 4.9255673335389565, 21.323839142362278;
71 5.229996453963314, 20.895525973122947;
72 5.5532608882877765, 20.517275382106398;
73 5.896517874421634, 20.166837334546948;
74 6.261016990344841, 19.872024373901702;
75 6.648047981577903, 19.57721141325645;
76 7.058989697037094, 19.254585909154102;
77 7.495342226395706, 18.94864793112601;
78 7.958683717499586, 18.670522496555016;
79 8.450664360738356, 18.3868345532926;
80 8.973086126478432, 18.147646679561554;
81 9.527807884798262, 17.91402131452191;
82 10.11683090193872, 17.69152096686512;
83 10.742306481371566, 17.519083197431108;
84 11.406461280471046, 17.357770445379927;
85 12.111697364601618, 17.218707728094437;
86 12.860495868973583, 17.03514494127758;
87 13.655588396657954, 16.85158215446073;
88 14.499837048182362, 16.668019367643872;
89 15.396311366328263, 16.512269124284117;
90 16.348230990746245, 16.37320640699862;
91 17.359005684394248, 16.23414368971312;
92 18.432296229737712, 16.11176849850189;
93 19.57188526824028, 15.944893237759295;
94 20.78199601967774, 15.822518046548055;
95 22.066926749399094, 15.700142855336821;
96 23.43128494072993, 15.56664264674275;
97 24.880018644109203, 15.444267455531502;
98 26.418326152280493, 15.321892264320269;
99 28.051745727028, 15.199517073109028;
100 29.786181653833133, 15.088266899280633;
101 31.627807422087546, 14.954766690686554;
102 33.58336409918674, 14.849079025549578;
103 35.65983342338511, 14.743391360412602;
104 37.86472145798197, 14.648828712658464;
105 40.20594022602302, 14.554266064904326;
106 42.69193612322729, 14.465265925841614;
107 45.331645018216776, 14.376265786778895;
108 48.134533090051896, 14.276140630333337;
109 51.11084721716324, 14.209390526036294;
110 54.27115349265167, 14.13151540435642;
111 57.62689191298502, 14.059202791367959;
112 61.190076621931105, 13.975765160996666;
113 64.97355435125618, 13.886765021933947;
114 68.9909704006253, 13.797764882871228;
115 73.25681855981547, 13.714327252499928;
116 77.78640173479283, 13.625327113437208;
117 82.59602337275913, 13.53076446568307;
118 87.7030988670607, 13.447326835311777;
119 93.12595494061338, 13.363889204940477;
120 98.2270252320168, 13.274889065877758];
121
122 theta_70_i = [3.6257512696302276, 25.495720660927148;
123 3.850101828258263, 26.007471460537776;
124 4.088332903635668, 26.51365975145698;

```

```

125 | 4.341280823633258, 26.941972920696305;
126 | 4.6098751501945445, 27.35916107255279;
127 | 4.895075728819209, 27.74297417226076;
128 | 5.197920900279414, 28.126787271968727;
129 | 5.5194957287852375, 28.493912845602434;
130 | 5.860967443048823, 28.866600927927564;
131 | 6.223559876049011, 29.228163992869852;
132 | 6.608586935565943, 29.595289566503563;
133 | 7.017425758548484, 29.94572761406301;
134 | 7.451548452896858, 30.2794781355482;
135 | 7.912508701170025, 30.579853604884867;
136 | 8.40198441194488, 30.88022907422154;
137 | 8.921728977813856, 31.16391701748395;
138 | 9.47364357096355, 31.47541750420346;
139 | 10.059704602705047, 31.792480499614392;
140 | 10.610988341089916, 32.03834338377515;
141 | 11.34284964911824, 32.44514818607432;
142 | 12.044546861895997, 32.7655486867001;
143 | 12.875125150506722, 32.99954488565249;
144 | 13.67157703660464, 33.283232828914905;
145 | 14.51728572735667, 33.555795754794474;
146 | 15.41530902583087, 33.82835868067404;
147 | 16.368883056015385, 34.10092160655361;
148 | 17.381409698537723, 34.34567198897609;
149 | 18.456567993953474, 34.59042237139856;
150 | 19.598224372148252, 34.829610245129615;
151 | 20.81051596188444, 35.0799231362435;
152 | 22.09778778024474, 35.324673518665975;
153 | 23.46469540254121, 35.57498640977987;
154 | 24.916156124291476, 35.82529930089376;
155 | 26.45743160643389, 36.09229971808191;
156 | 28.094036914395392, 36.35373762657864;
157 | 29.831855811981896, 36.604050517692535;
158 | 31.67712115480628, 36.832113374040745;
159 | 33.63651304461498, 37.05461372169754;
160 | 35.71711748859861, 37.28267657804575;
161 | 37.92638878202368, 37.49961441701113;
162 | 40.27232982338481, 37.72211476466792;
163 | 42.76344707085262, 37.96686514709039;
164 | 45.40863885938164, 38.20605302082144;
165 | 48.21739532034639, 38.428553368478234;
166 | 51.199908009689764, 38.65661622482645;
167 | 54.36690561123119, 38.88467908117466;
168 | 57.72979953755258, 39.11274193752287;
169 | 61.30065849430382, 39.32967977648825;
170 | 65.09241761618499, 39.55218012414504;
171 | 69.11868904486282, 39.76911796311041;
172 | 73.3940042517726, 39.98605580207578;
173 | 77.933736891247, 40.197431132349735;
174 | 82.7541730403247, 40.39211893654943;
175 | 87.87280248008301, 40.592369249440544;
176 | 93.30807366900964, 40.79818207102308;
177 | 98.4209242433995, 40.96664661996322;];
178 |
179 theta_70_f = [3.6242320199200666, 19.610586465404964;
180 | 3.848217220982779, 19.13221071794286;
181 | 4.086058129837358, 18.698335040012118;
182 | 4.338607503232664, 18.292271905538463;
183 | 4.606779116892341, 17.925146331904763;
184 | 4.8915284968357025, 17.563583266962468;
185 | 5.19389085030362, 17.2353952541687;

```

```

186 | 5.514947639509715, 16.918332258757772;
187 | 5.855850333234441, 16.601269263346843;
188 | 6.2178355446592315, 16.30645630270159;
189 | 6.602220769817567, 16.061705920279117;
190 | 7.010360273989444, 15.800268011782386;
191 | 7.443750998251964, 15.577767664125588;
192 | 7.903925177965388, 15.338579790394533;
193 | 8.39254076870839, 15.088266899280647;
194 | 8.911386972601864, 14.876891569006695;
195 | 9.462316940656782, 14.676641256115573;
196 | 10.047323052081898, 14.498640977990135;
197 | 10.668501291459762, 14.326203208556123;
198 | 11.32808402953609, 14.153765439122104;
199 | 12.02847422288816, 14.014702721836613;
200 | 12.772157862381743, 13.864514987168278;
201 | 13.539267654208519, 13.746792075953493;
202 | 14.429197571206027, 13.62291500739557;
203 | 15.280560522636618, 13.521864451776821;
204 | 16.236116015801958, 13.358326696249073;
205 | 17.23992474418019, 13.19145143550648;
206 | 18.30585263007265, 13.069076244295239;
207 | 19.437693506843786, 12.952263561775425;
208 | 20.639507311359964, 12.829888370564184;
209 | 21.915645464782926, 12.718638196735796;
210 | 23.270677862296935, 12.601825514215975;
211 | 24.709481385230887, 12.479450323004741;
212 | 26.23725513282872, 12.36263764048492;
213 | 27.859479261434537, 12.24026244927368;
214 | 29.582027376739784, 12.129012275445284;
215 | 31.411067983553878, 12.01219959292547;
216 | 33.35322359713454, 11.906511927788486;
217 | 35.41547729518787, 11.806386771342929;
218 | 37.605226719578695, 11.700699106205953;
219 | 39.93038481539908, 11.600573949760395;
220 | 42.39925871450524, 11.483761267240581;
221 | 45.02078173928019, 11.366948584720767;
222 | 47.80439210184797, 11.250135902200952;
223 | 50.76011157383699, 11.133323219681131;
224 | 53.89862426913042, 11.027635554544155;
225 | 57.23126014444533, 10.938635415481443;
226 | 60.770054376885895, 10.8718853111844;
227 | 64.52776596685803, 10.82738524165304;
228 | 68.51778107722211, 10.771760154738836;
229 | 72.75471684671079, 10.755072628664578;
230 | 77.25319308637604, 10.654947472219021;
231 | 82.02987832191631, 10.565947333156302;
232 | 87.10184443720269, 10.465822176710745;
233 | 92.4871940279045, 10.332321968116666;
234 | 98.43815677659674, 10.23358743884397];
235
236 theta_80_i = [3.5771450386694776, 23.2095295887536;
237 | 3.804801647497661, 23.637842757992928;
238 | 4.033471053941866, 24.038343383775157;
239 | 4.283017847705118, 24.4444065182488;
240 | 4.548000247199306, 24.839344635339607;
241 | 4.829376618079656, 25.234282752430417;
242 | 5.128149036599154, 25.5958458173727;
243 | 5.4453987272505575, 25.940721356240733;
244 | 5.782284031097197, 26.307846929874444;
245 | 6.140003800916955, 26.65828497743389;
246 | 6.519858993500449, 27.01984804237618;

```

```

247 6.92320868124827, 27.37028608993563;
248 7.351508599360185, 27.715161628803656;
249 7.806289559011526, 28.032224624214585;
250 8.289210865261156, 28.360412637008356;
251 8.801982775643818, 28.649663088962185;
252 9.346485945677298, 28.95560106699028;
253 9.924641404492256, 29.21703897548701;
254 10.538577135062019, 29.50072691874942;
255 11.190495202788785, 29.789977370703255;
256 11.882708076859323, 30.04029026181714;
257 12.635354845427575, 30.306633291614492;
258 13.398324188611147, 30.631736640497564;
259 14.227133181737988, 30.907677526200647;
260 15.114344923315155, 31.125557379624933;
261 16.054948200858696, 31.32244851518941;
262 17.03381754443192, 31.536605099809076;
263 18.087424748522942, 31.74241792139161;
264 19.206209223249612, 31.953793251665562;
265 20.39423568991716, 32.192981125396614;
266 21.655723431002748, 32.415481473053404;
267 22.995213310895593, 32.62129429463594;
268 24.41762350517023, 32.86604467705841;
269 25.927998893480833, 33.09967004209804;
270 27.531789085699188, 33.32773289844626;
271 29.234736252213246, 33.53354572002879;
272 31.04302955523726, 33.74492105030275;
273 32.96313434956748, 33.93960885450244;
274 35.00197567291187, 34.12317164131929;
275 37.16690902940904, 34.30117191944473;
276 39.465809831064675, 34.50142223233584;
277 41.907005135594005, 34.73504759737547;
278 44.49925578607183, 34.98536048848936;
279 47.25178097260532, 35.21342334483758;
280 50.17456507175801, 35.44148620118579;
281 53.278139539324826, 35.669549057534;
282 56.57353038683587, 35.858674353042275;
283 60.07277348534407, 36.05336215724196;
284 63.78848056805734, 36.25361247013308;
285 67.7340168782807, 36.45386278302419;
286 71.92356965101544, 36.64855058722389;
287 76.37219836368071, 36.832113374040745;
288 81.09588803349354, 36.99898863478334;
289 86.1118445236312, 37.18255142160019;
290 91.43808501849719, 37.371676717108464;
291 97.09376727559774, 37.56080201261673;
292 100.38553897820455, 37.65536466037087];
293
294 theta_80_f = [3.6232559006072207, 15.828080555239481;
295 3.8471929672869076, 15.394204877308738;
296 4.084981898890169, 14.999266760217928;
297 4.337483653238953, 14.654391221349897;
298 4.6056022208175165, 14.337328225938968;
299 4.890298227544499, 14.031390247910878;
300 5.192590704599158, 13.719889761191368;
301 5.513562758028649, 13.391701748397601;
302 5.854382165346815, 13.080201261678084;
303 6.216279082960779, 12.790950809724258;
304 6.60055501463459, 12.518387883844689;
305 7.008619307398747, 12.312575062262155;
306 7.441923038255733, 12.129012275445298;
307 7.902024905872942, 11.962137014702705;

```

```

308 | 8.39052634674166, 11.717386632280231;
309 | 8.90921978079082, 11.461511232474919;
310 | 9.460008271464714, 11.25013590220096;
311 | 10.044879607945955, 11.08326064145836;
312 | 10.66591100585855, 10.916385380715766;
313 | 11.325338085177641, 10.749510119973174;
314 | 12.025568030254263, 10.621572420070514;
315 | 12.769097279793016, 10.49919722885928;
316 | 13.558603595221035, 10.382384546339459;
317 | 14.449388311541178, 10.279629840330692;
318 | 15.287060591954322, 10.13217279174723;
319 | 16.23224572937189, 10.010623548796232;
320 | 17.235882312939857, 9.898446290185937;
321 | 18.423912290084605, 9.723227266406212;
322 | 19.56304110696586, 9.598070820849266;
323 | 20.89122643170759, 9.435038747929838;
324 | 22.41664531241179, 9.262600978495819;
325 | 23.802634456338154, 9.13410702772402;
326 | 25.202459328512404, 9.025132425633018;
327 | 26.760713633275653, 8.908319743113204;
328 | 28.415336463467337, 8.80263207797622;
329 | 30.172289016315112, 8.70806943022209;
330 | 32.037863251483635, 8.607944273776532;
331 | 34.018773801662235, 8.502256608639556;
332 | 36.12215032737382, 8.39100643481116;
333 | 38.35563913542621, 8.302006295748441;
334 | 40.72719576826178, 8.201881139302884;
335 | 43.24542170739802, 8.112881000240165;
336 | 45.91933528802645, 8.018318352486027;
337 | 48.75861861412226, 7.934880722114734;
338 | 51.77343993521651, 7.845880583052015;
339 | 54.97471590772564, 7.768005461372134;
340 | 58.37386508128336, 7.673442813617996;
341 | 61.98323661868607, 7.590005183246703;
342 | 65.81578273733113, 7.50656755287541;
343 | 69.88538581380702, 7.43981744857836;
344 | 74.20659623781175, 7.367504835589905;
345 | 78.79499928458151, 7.295192222601443;
346 | 83.66738137134362, 7.267379679144348;
347 | 88.84091220421683, 7.217317100921569;
348 | 94.33434573799939, 7.167254522698791;
349 | 98.84100705600383, 7.157242007054229];
350 |
351 theta_90_i = [3.576642035342928, 21.234839003299562;
352 | 3.797923773130578, 21.635339629081788;
353 | 4.032894298653696, 22.030277746172597;
354 | 4.282391838094174, 22.391840811114886;
355 | 4.547308487647952, 22.703341297834395;
356 | 4.828607631004849, 22.99815425847964;
357 | 5.127312164852078, 23.304092236507735;
358 | 5.444510082963138, 23.648967775375763;
359 | 5.781340409898853, 24.016093349009473;
360 | 6.139011530145192, 24.3887814313346;
361 | 6.518802752987543, 24.74478198758547;
362 | 6.922081612566183, 25.08409501776208;
363 | 7.35029433528493, 25.395595504481587;
364 | 7.804987810678805, 25.690408465126836;
365 | 8.287815454553217, 25.996346443154927;
366 | 8.800514989147274, 26.30784692987444;
367 | 9.344912552650845, 26.59153487313685;
368 | 9.922998199894584, 26.891910342473523;

```

```

369 | 10.536844804093931, 27.19228581181019;
370 | 11.188664573852352, 27.492661281146862;
371 | 11.880801860883057, 27.78747424179211;
372 | 12.615745167440634, 28.071162185054522;
373 | 13.396157181993182, 28.360412637008352;
374 | 14.224823069160369, 28.627413054196506;
375 | 15.145144348087753, 28.951151060037137;
376 | 16.016209861899814, 29.162638362888643;
377 | 17.048713004832575, 29.407992508117633;
378 | 18.047643220143154, 29.629258101097868;
379 | 19.295059379994658, 29.89540497049881;
380 | 20.391246773141255, 30.134852909571276;
381 | 21.65260109770448, 30.390728309376588;
382 | 22.991970711411092, 30.64104120049048;
383 | 24.414170657714713, 30.880229074221532;
384 | 25.92437354439132, 31.136104474026844;
385 | 27.527928584099985, 31.358604821683638;
386 | 29.23070643840224, 31.59779269541469;
387 | 31.03879966164924, 31.831418060454325;
388 | 32.958721159644206, 32.05948091680253;
389 | 34.99740042529273, 32.287543773150745;
390 | 37.16221272565437, 32.5267316468818;
391 | 39.460901202747856, 32.75479450323001;
392 | 41.90184267495013, 33.0051073943439;
393 | 44.49373873946453, 33.24429526807496;
394 | 47.24603495911545, 33.50573317657169;
395 | 50.16852325510614, 33.75048355899416;
396 | 53.271766207835384, 33.98967143272521;
397 | 56.566986926015815, 34.234421815147684;
398 | 60.06603943642853, 34.47917219757015;
399 | 63.78148158905513, 34.712797562609786;
400 | 67.72671913083097, 34.940860418957996;
401 | 71.91601993172875, 35.17448578399764;
402 | 76.36439342857891, 35.39698613165443;
403 | 81.0878894468517, 35.6139239706198;
404 | 86.10358996355598, 35.8364243182766;
405 | 91.42950098165684, 36.05336215724196;
406 | 97.08484458421461, 36.270299996207335;
407 | 100.37659211473176, 36.40380020480141];
408 |
409 theta_90_f = [3.5745372735098364, 12.968951087849696;
410 | 3.795464765595673, 12.540637918610365;
411 | 4.030051669347803, 12.129012275445298;
412 | 4.279147894298938, 11.750761684428745;
413 | 4.543653277582503, 11.41144865425214;
414 | 4.824508434118635, 11.072135624075528;
415 | 5.122726015642737, 10.738385102590343;
416 | 5.43937733547293, 10.40463458110515;
417 | 5.775631581749067, 10.143196672608418;
418 | 6.1326920018953155, 9.926258833643047;
419 | 6.511836887673205, 9.731571029443352;
420 | 6.914419123136059, 9.531320716552237;
421 | 7.341896075147181, 9.34219542104396;
422 | 7.795795180031681, 9.141945108152846;
423 | 8.277762313165407, 8.95281981264457;
424 | 8.789530057442166, 8.76925702582772;
425 | 9.332959721207722, 8.619069291159377;
426 | 9.909995824280442, 8.48000657387388;
427 | 10.522721288859069, 8.357631382662646;
428 | 11.173322124606948, 8.224131174068567;
429 | 11.864153133694149, 8.096193474165915;

```

```

430 | 12.59770225617347, 7.973818282954674;
431 | 13.376606011977783, 7.851443091743441;
432 | 14.203691140204302, 7.751317935297884;
433 | 15.08192748292387, 7.662317796235165;
434 | 16.01445385881829, 7.562192639789615;
435 | 17.004672688458022, 7.489880026801153;
436 | 18.056090929756635, 7.395317379047015;
437 | 19.1725318457995, 7.309755881720811;
438 | 20.370389434580503, 7.253726248719957;
439 | 21.616803257155823, 7.1558598079248625;
440 | 22.98132965345004, 7.119315811430923;
441 | 24.372697314856225, 7.005941770647631;
442 | 25.879719649028296, 6.928066648967743;
443 | 27.479913903205134, 6.844629018596443;
444 | 29.17908600920434, 6.777878914299407;
445 | 30.983298884723663, 6.700003792619526;
446 | 32.89905753756672, 6.616566162248233;
447 | 34.93329901331715, 6.544253549259771;
448 | 37.09344092447137, 6.516441005802676;
449 | 39.387048552078966, 6.449690901505633;
450 | 41.822576772787826, 6.416315849357119;
451 | 44.40881329019319, 6.416315849357119;
452 | 47.15475409150052, 6.349565745060076;
453 | 50.07060431517444, 6.316190692911562;
454 | 53.166653059456166, 6.255003097305945;
455 | 56.45423128296927, 6.2160655364660045;
456 | 59.94500304942978, 6.154877940860388;
457 | 63.65172286896298, 6.115940380020447;
458 | 67.58783639381375, 6.115940380020447;
459 | 71.76735243759406, 6.11594038002044;
460 | 76.2050810985534, 6.071440310489081;
461 | 80.9171522591436, 6.015815223574883;
462 | 85.92093036669462, 6.015815223574883;
463 | 91.23413354236257, 6.015815223574883;
464 | 96.87555072496781, 5.965752645352104;
465 | 100.1592497342522, 5.965752645352104;];
466
467 theta_100_i = [3.552683770724678, 20.47343269996584;
468 | 3.7829435027889393, 20.74877688019113;
469 | 4.001975355815062, 20.949417291094363;
470 | 4.225298880872613, 21.15616923752091;
471 | 4.516683359262733, 21.429526807499254;
472 | 4.796074715331889, 21.685402207304563;
473 | 5.0927525950333, 21.952402624492716;
474 | 5.407780374492415, 22.213840532989447;
475 | 5.742297434926554, 22.4808409501776;
476 | 6.097504796007255, 22.742278858674332;
477 | 6.474684594217127, 23.003716767171067;
478 | 6.875204172216506, 23.281842201742055;
479 | 7.300490942638789, 23.543280110238783;
480 | 7.752094338755649, 23.821405544809775;
481 | 8.231636874081449, 24.10509348807219;
482 | 8.740833398161342, 24.372093905260336;
483 | 9.281542750687938, 24.66134435721417;
484 | 9.855684853776824, 24.928344774402323;
485 | 10.465350804463473, 25.206470208973315;
486 | 11.112725873441, 25.479033134852887;
487 | 11.800142176463986, 25.74603355204103;
488 | 12.530081005376976, 26.013033969229184;
489 | 13.305172738889492, 26.280034386417338;
490 | 14.128210466933234, 26.547034803605488;

```

```

491 | 15.00214817015786, 26.8029102034108;
492 | 15.930164525073042, 27.075473129290373;
493 | 16.915573547621353, 27.336911037787104;
494 | 17.96194517273359, 27.603911454975258;
495 | 19.073043753438437, 27.870911872163408;
496 | 20.284094306576883, 28.164223344448597;
497 | 21.51768500327696, 28.436663253309035;
498 | 22.849908245645835, 28.71470832046549;
499 | 24.3432108188794, 29.014298175749964;
500 | 25.877758013216777, 29.267910645883084;
501 | 27.341548385697013, 29.578602040429292;
502 | 29.03285494038667, 29.845602457617442;
503 | 30.828795355650254, 30.118165383497015;
504 | 32.73583066605244, 30.390728309376584;
505 | 34.76086061894061, 30.674416252638995;
506 | 36.91112915378103, 30.946979178518568;
507 | 39.194441982889806, 31.23066712178098;
508 | 41.618999948495286, 31.51435506504339;
509 | 44.19359295697009, 31.814730534380057;
510 | 46.927359920298315, 32.08729346025963;
511 | 49.830293913254245, 32.376543912213464;
512 | 52.912740986648515, 32.64910683809303;
513 | 56.18588709629704, 32.92723227266402;
514 | 59.66155506170658, 33.21648272461785;
515 | 63.35217821228348, 33.49460815918884;
516 | 67.27104750062102, 33.761608576377;
517 | 71.43241696579811, 34.04529651963941;
518 | 75.24654598807925, 34.28114688815561;
519 | 80.36450028718795, 34.60359540334505;
520 | 85.58271393214295, 34.88690408465123;
521 | 90.88358181608177, 35.17236191704272;
522 | 96.15967489259694, 35.430841582280834;
523 | 100.4501817903663, 35.6310160427807;];
524
525 theta_100_f = [3.526574302459194, 10.510322246242133;
526 | 3.744565583142297, 10.187696742139778;
527 | 3.9760223030449535, 9.831696185888902;
528 | 4.2217773175061115, 9.447883086180937;
529 | 4.4827311473625, 9.091882529930068;
530 | 4.759833745370682, 8.791507060593403;
531 | 5.054085620125085, 8.54675667817093;
532 | 5.366532332702786, 8.313131313131294;
533 | 5.698287923367422, 8.0628184220174;
534 | 6.050542844916842, 7.790255496137831;
535 | 6.424586072189264, 7.5455051137153575;
536 | 6.821766080943727, 7.328567274749979;
537 | 7.243537807517818, 7.183942048773069;
538 | 7.69138351593309, 7.033754314104733;
539 | 8.166921384978556, 6.889129088127817;
540 | 8.671829584299132, 6.694441283928121;
541 | 9.207956656297446, 6.505315988419845;
542 | 9.777240860097521, 6.332878218985833;
543 | 10.381762326052938, 6.216065536466012;
544 | 11.023661024300182, 6.09925285394619;
545 | 11.705261879079396, 5.999127697500633;
546 | 12.429006602779452, 5.899002541055076;
547 | 13.197485297269434, 5.7821898585352685;
548 | 14.01350081459472, 5.68762721078113;
549 | 14.879959710141742, 5.581939545644154;
550 | 15.80002956823118, 5.509626932655692;
551 | 16.776983293635617, 5.431751810975818;

```

```

552 17.814358524714333, 5.365001706678775;
553 18.915863040971896, 5.2871265849989015;
554 20.085452354189528, 5.192563937244763;
555 21.327367152483138, 5.103563798182051;
556 22.646089418331357, 5.025688676502163;
557 24.046351444901568, 4.9478135548222895;
558 25.53323043172576, 4.889407213562372;
559 26.83898503830261, 4.813403117533255;
560 28.29893597762675, 4.779218973211435;
561 29.963300657133715, 4.7235938862972375;
562 31.816091628098345, 4.684656325457297;
563 33.78349484836913, 4.664125611559875;
564 35.87252304728537, 4.630750559411354;
565 38.09077316647051, 4.614063033337096;
566 40.44617725273931, 4.591812998571413;
567 42.94714646749441, 4.5417504203486345;
568 45.602834125666845, 4.513937876891539;
569 48.422643466816076, 4.458312789977342;
570 51.4168538626776, 4.413812720445982;
571 54.59621102568808, 4.3693126509146225;
572 57.972324243161054, 4.3637501422232035;
573 61.55723348419282, 4.3637501422232035;
574 65.36382737275625, 4.3637501422232035;
575 69.40581450777167, 4.363750142223196;
576 73.69772201063691, 4.358187633531777;
577 78.2548149241369, 4.313687564000418;
578 83.09395865072068, 4.313687564000418;
579 88.2320671266815, 4.269187494469058;
580 93.68814992867652, 4.263624985777639;
581 98.49166159985528, 4.246937459703375];;

582
583 switch(k)
584   case 0.6
585     i = 1;
586     while eps > theta_60_i(i, 1)
587       i = i + 1;
588     end
589     alpha_i = interp1([theta_60_i(i-1, 1) theta_60_i(i, 1)], [theta_60_i(i-1, 2)
590                   theta_60_i(i, 2)], eps);
591     i = 1;
592     while eps > theta_60_f(i, 1)
593       i = i + 1;
594     end
595     alpha_f = interp1([theta_60_f(i-1, 1) theta_60_f(i, 1)], [theta_60_f(i-1, 2)
596                   theta_60_f(i, 2)], eps);
596   case 0.7
597     i = 1;
598     while eps > theta_70_i(i, 1)
599       i = i + 1;
600     end
601     alpha_i = interp1([theta_70_i(i-1, 1) theta_70_i(i, 1)], [theta_70_i(i-1, 2)
602                   theta_70_i(i, 2)], eps);
603     i = 1;
604     while eps > theta_70_f(i, 1)
605       i = i + 1;
606     end
607     alpha_f = interp1([theta_70_f(i-1, 1) theta_70_f(i, 1)], [theta_70_f(i-1, 2)
608                   theta_70_f(i, 2)], eps);
608   case 0.8
609     i = 1;
610     while eps > theta_80_i(i, 1)

```

```

609         i = i + 1;
610     end
611     alpha_i = interp1([theta_80_i(i-1, 1) theta_80_i(i, 1)], [theta_80_i(i-1, 2)
612                     theta_80_i(i, 2)], eps);
613     i = 1;
614     while eps > theta_80_f(i, 1)
615         i = i + 1;
616     end
617     alpha_f = interp1([theta_80_f(i-1, 1) theta_80_f(i, 1)], [theta_80_f(i-1, 2)
618                     theta_80_f(i, 2)], eps);
619 case 0.9
620     i = 1;
621     while eps > theta_90_i(i, 1)
622         i = i + 1;
623     end
624     alpha_i = interp1([theta_90_i(i-1, 1) theta_90_i(i, 1)], [theta_90_i(i-1, 2)
625                     theta_90_i(i, 2)], eps);
626     i = 1;
627     while eps > theta_90_f(i, 1)
628         i = i + 1;
629     end
630     alpha_f = interp1([theta_90_f(i-1, 1) theta_90_f(i, 1)], [theta_90_f(i-1, 2)
631                     theta_90_f(i, 2)], eps);
632 case 1
633     i = 1;
634     while eps > theta_100_i(i, 1)
635         i = i + 1;
636     end
637     alpha_i = interp1([theta_100_i(i-1, 1) theta_100_i(i, 1)], [theta_100_i(i-1,
638                     2) theta_100_i(i, 2)], eps);
639 otherwise
640     if 0.6 < k && k < 0.7
641         [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.6, eps);
642         [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(0.7, eps);
643         alpha_i = interp1([0.6 0.7],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
644         alpha_f = interp1([0.6 0.7],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
645     elseif 0.7 < k && k < 0.8
646         [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.7, eps);
647         [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(0.8, eps);
648         alpha_i = interp1([0.7 0.8],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
649         alpha_f = interp1([0.7 0.8],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
650     elseif 0.8 < k && k < 0.9
651         [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.8, eps);
652         [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(0.9, eps);
653         alpha_i = interp1([0.8 0.9],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
654         alpha_f = interp1([0.8 0.9],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
655     else
656         [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.9, eps);
657         [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(1, eps);
658         alpha_i = interp1([0.9 1],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
659         alpha_f = interp1([0.9 1],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
660     end
661 end

```

1 clear

```

2 | close all
3 | clc
4 |
5 | %% Nozzle 1:10 data:
6 | eps_10 = 10;
7 | % throat diameter 35 inches = 0.889 m
8 | Rt_10 = 0.4445;
9 |
10| bell_percentage_eps_10 = 0.8;
11| [theta_n_deg_eps_10, theta_e_deg_eps_10] = bellvalues(bell_percentage_eps_10, eps_10)
12| ;
13| [x_eps_10, y_eps_10, Ln_cone_eps_10, Ln_eps_10, Nx_eps_10, Ny_eps_10, Qx_eps_10,
14|   Qy_eps_10, Ex_eps_10, Ey_eps_10] = bell_nozzle(eps_10, Rt_10,
15|   bell_percentage_eps_10, theta_n_deg_eps_10, theta_e_deg_eps_10);
16| %
17| % parabolic arc length
18| si = 0;
19| for i=2:125
20|   si = si + sqrt((x_eps_10(i)-x_eps_10(i-1)).^2 + (y_eps_10(i)-y_eps_10(i-1)).^2);
21| end
22| %
23| %% 2D Plot
24| figure
25| grid on;
26| grid minor;
27| hold on;
28| plot(x_eps_10, y_eps_10);
29| plot(Nx_eps_10, Ny_eps_10, 'o');
30| plot(Qx_eps_10, Qy_eps_10, 'ok');
31| plot(Ex_eps_10, Ey_eps_10, 'o');
32| legend('Bell Nozzle 2D', 'Inflection point', 'Cross point', 'Exit point');
33| xlabel('X [m]');
34| ylabel('Y [m]');
35| %
36| %% 3D Plot
37| n = length(x_eps_10);
38| theta_3d = linspace(0, 2*pi, n);
39| X_eps_10 = repmat(x_eps_10, [1,n]);
40| Y_eps_10 = y_eps_10.*cos(theta_3d);
41| Z_eps_10 = y_eps_10.*sin(theta_3d);
42| figure
43| surf(X_eps_10, Y_eps_10, Z_eps_10);
44| axis equal
45| box on
46| xlabel('X [m]');
47| ylabel('Y [m]');
48| zlabel('Z [m]');
49| %
50| %% Nozzle 1:16 data:
51| eps = 16;
52| % throat diameter 35 inches = 0.889 m
53| Rt = 0.4445;
54|
55| bell_percentage = 0.8;
56| [theta_n_deg, theta_e_deg] = bellvalues(bell_percentage, eps);
57| [x, y, Ln_cone, Ln, Nx, Ny, Qx, Qy, Ex, Ey] = bell_nozzle(eps, Rt, bell_percentage,
58|   theta_n_deg, theta_e_deg);

```

```
59 %% 2D Plot
60 figure
61 grid on;
62 grid minor;
63 hold on;
64 plot(x, y);
65 plot(Nx, Ny, 'o');
66 plot(Qx, Qy, '.k');
67 plot(Ex, Ey, 'o');
68 legend('Bell Nozzle 2D', 'Inflection point', 'Cross point', 'Exit point');
69 xlabel('X [m]');
70 ylabel('Y [m]');
71
72 %% 3D Plot
73 n = length(x);
74 theta_3d = linspace(0, 2*pi, n);
75 X = repmat(x, [1,n]);
76 Y = y.*cos(theta_3d);
77 Z = y.*sin(theta_3d);
78
79 figure
80 surf(X, Y, Z);
81 axis equal
82 box on
83 xlabel('X [m]');
84 ylabel('Y [m]');
85 zlabel('Z [m]');
```

Bibliografia

- [1] National Aeronautics and Space Administration. *Turbopump Systems for Liquid Rocket Engines*, 8 1974.
- [2] National Aeronautics and Space Administration. *Liquid Rocket Engine Nozzles*, 7 1976.
- [3] George C. Marshall Space Flight Center. *Saturn V Flight Manual SA-507*. National Aeronautics and Space Administration, 10 1969.
- [4] George C. Marshall Space Flight Center. *Saturn V Launch Vehicle Flight Evaluation Report - AS-506 Apollo 11 Mission*. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, 9 1969.
- [5] Configuration accounting, logistics engineering and training. *R-3896-1 - F-1 Engine Familiarization Training Manual*. Rocketdyne, 7 1971.
- [6] D.H. Huang D.K. Huzel. *Design of Liquid Propellant Rocket Engines*, vol. 2. Scientifical and Technichal Division NASA, 1967.
- [7] D.H. Huang D.K. Huzel. *Modern Engineering for Design of Liquid Propellant Rocket Engines*. AIAA, 1992.
- [8] Joseph C. Oefelein, Vigor Yang. Comprehensive Review of Liquid-Propellant Combustion Instabilities in F-1 Engines. *Journal of Propulsion and Power*, 9(5):657–677, 10 1993.
- [9] Rocketdyne. *R-3896-1 - Technical Manual - Engine Data F-1 Rocket Engine*. National Aeronautics and Space Administration & Rocketdyne, 3 1967.