



**POLITECNICO**  
**MILANO 1863**

**SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE  
E DELL'INFORMAZIONE**



## Prova Finale di Propulsione Aerospaziale

LAUREA TRIENNALE IN AEROSPACE ENGINEERING - INGEGNERIA AEROSPAZIALE

**Autori:**

10694997    **SILVIA PALA**  
10726668    **GIORGIA PALLARA**  
10836125    **DANIELE PATERNOSTER**  
10711624    **ALEX CRISTIAN TURCU**  
10702040    **RESHAL ANTONINO FERNANDO WARNAKULASURIYA**

**Professore:** CHRISTIAN PARAVAN

**Anno accademico:** 2022-2023

---

## Sommario

La presente relazione di prova finale intende dare una descrizione dell'endoreattore F-1 prodotto da Rocketdyne. Cinque di questi motori vennero installati sul primo stadio S-IC del vettore Saturn V che portò il primo uomo sulla luna. L'obiettivo di questo stadio era quello di portare il razzo ad una quota di 61 km, fornendo un  $\Delta v \simeq 2300$  m/s. Di seguito verranno analizzati i principali sistemi per un singolo motore, partendo dal sistema di alimentazione, passando per il sistema di generazione della potenza ed arrivando infine al sistema di espansione gasdinamico e al suo raffreddamento. Si provvederà inoltre a dare una descrizione quali/quantitativa delle scelte progettuali applicate ai tempi.

# Indice

| Sommario   | I         |
|--|-----------|
| Indice   | II        |
| <b>1 Nomenclatura</b>  | <b>1</b>  |
| 1.2 Analisi della missione . . . . .   | 1         |
| 1.3 Propellenti . . . . .  | 1         |
| 1.4 Serbatoi e pressurizzazione . . . . .  | 1         |
| 1.5 Schema termodinamico . . . . .   | 2         |
| 1.6 Gas generator . . . . .  | 2         |
| 1.7 Turbopompa . . . . .   | 3         |
| 1.8 Camera di spinta . . . . .   | 4         |
| 1.9 Sistemi di raffreddamento . . . . .  | 4         |
| <b>2 Analisi della missione</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1 Parametri lanciatore . . . . .   | 6         |
| <b>3 Propellenti</b>   | <b>6</b>  |
| 3.1 Coppia di propellenti: RP-1 / LOX . . . . .                                  | 6         |
| 3.2 Propellente ipergolico . . . . .   | 7         |
| <b>4 Serbatoi e pressurizzazione</b>   | <b>7</b>  |
| 4.1 Serbatoi: descrizione e dimensionamento . . . . .                            | 7         |
| 4.2 Pressurizzazione e scambiatore di calore . . . . .                           | 8         |
| <b>5 Schema termodinamico</b>  | <b>9</b>  |
| 5.1 Analisi dello schema semplificato del sistema motore . . . . .               | 9         |
| 5.2 Analisi sulla scelta del ciclo di alimentazione . . . . .                    | 10        |
| 5.3 Analisi delle variazioni di performance introdotte dal ciclo a gas . . . . . | 11        |
| <b>6 Gas generator</b>   | <b>13</b> |
| <b>7 Turbopompa</b>  | <b>15</b> |
| 7.1 Descrizione generica Mark 10 . . . . .                                       | 15        |
| 7.1.1 Pompe LOX e RP1 . . . . .  | 15        |
| 7.1.2 Analisi pompa LOX . . . . .  | 15        |
| 7.1.3 Analisi pompa RP-1 . . . . .   | 18        |
| 7.2 Turbina . . . . .  | 18        |
| 7.2.1 Descrizione turbina . . . . .  | 18        |
| 7.2.2 Turbina - scelte progettuali . . . . .                                     | 19        |
| 7.2.3 Analisi quantitativa - dimensionamento . . . . .                           | 19        |
| <b>8 Camera di spinta</b>  | <b>20</b> |
| 8.1 Descrizione del sistema . . . . .  | 20        |
| 8.2 Piatto d'iniezione . . . . .   | 20        |
| 8.3 Camera di combustione . . . . .  | 21        |
| 8.4 Modellazione dell'ugello . . . . .   | 22        |
| 8.5 Confronto tra ugello 10:1 e 16:1 . . . . .                                   | 23        |
| <b>9 Sistemi di raffreddamento</b>   | <b>24</b> |
| 9.1 Cooling della camera di spinta . . . . .                                     | 24        |
| 9.1.1 Scambio termico convettivo e film cooling . . . . .                        | 24        |
| 9.1.2 Regenerative cooling . . . . .   | 26        |
| <b>Appendice</b>   | <b>29</b> |
| <b>A Immagini e schemi</b>   | <b>29</b> |
| <b>B Grafici di varie grandezze in funzione del tempo di volo</b>                | <b>30</b> |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>C Tabelle e immagini serbatoi</b>  | <b>31</b> |
| <b>D Confronto peso molecolare gas generator tra caso Fuel Rich e Oxidizer Rich</b>                           | <b>33</b> |
| <b>E Prodotti gas generator analizzati con software NASA CEA</b>  | <b>34</b> |
| <b>F Schemi del gas generator</b>   | <b>36</b> |
| <b>G Diagrammi di velocità</b>  | <b>36</b> |
| G.1 Triangoli velocità Pompa LOX . . . . .  | 36        |
| G.2 Triangoli velocità Pompa RP-1 . . . . .   | 37        |
| G.3 Triangoli velocità Turbina . . . . .  | 38        |
| <b>H Appendice ausiliaria capitolo 9</b>  | <b>39</b> |
| H.1 Definizione temperature usate nel cooling . . . . .   | 39        |
| H.2 Grafico della resistenza termica prodotta dal deposito carbonioso . . . . .                               | 39        |
| H.3 Dettagli sul sistema di introduzione dei gas combusti sulla parete interna dell'ugello aggiunto . . . . . | 40        |
| H.4 Comportamento del fluido RP1 in relazione alla pressione critica . . . . .                                | 40        |
| <b>I RPA: definizione problema e funzionamento</b>  | <b>41</b> |
| <b>J Codici MATLAB usati</b>  | <b>41</b> |
| J.1 Simulazione di volo . . . . .   | 41        |
| J.1.1 Parametri adimensionali lanciatore . . . . .  | 44        |
| J.2 Codici serbatoi . . . . .   | 45        |
| J.2.1 Serbatoio RP-1 . . . . .  | 45        |
| J.2.2 Serbatoio LOX . . . . .   | 46        |
| J.3 Camera di Combustione . . . . .   | 48        |
| J.3.1 Modellazione ugello . . . . .   | 49        |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>63</b> |

# 1. Nomenclatura

## 1.2. Analisi della missione

## 1.4. Serbatoi e pressurizzazione

|                  |                                   |  |            |                      |   |
|------------------|-----------------------------------|--|------------|----------------------|---|
| $t$              | [s]                               | tempo di volo                                  | $a$        | [m]                  | raggio dei serbatoi                       |
| $h$              | [m]                               | quota del razzo                                | $b$        | [m]                  | altezza cupola ellisoidale                |
| $s$              | [m]                               | spostamento orizzontale del razzo              | $lc$       | [m]                  | altezza porzione cilindrica serbatoi      |
| $v_v$            | [m/s]                             | velocità verticale del razzo                   | $V_e$      | [m <sup>3</sup> ]    | volume cupola ellisoidale                 |
| $v_h$            | [m/s]                             | velocità orizzontale del razzo                 | $V_c$      | [m <sup>3</sup> ]    | volume porzione cilindrica                |
| $v_{tot}$        | [m/s]                             | modulo della velocità del razzo                | $V_{He}$   | [m <sup>3</sup> ]    | volume contenitori di elio                |
| $a_v$            | [m/s <sup>2</sup> ]               | accelerazione verticale del razzo              | $V_{tubi}$ | [m <sup>3</sup> ]    | volume 5 linee di aspirazione             |
| $a_h$            | [m/s <sup>2</sup> ]               | accelerazione orizzontale del razzo            | $V_u$      | [m <sup>3</sup> ]    | volume ullage/vuoto                       |
| $\phi$           | [rad]                             | angolo di traiettoria del razzo                | $V_{tot}$  | [m <sup>3</sup> ]    | volume totale                             |
| $\theta$         | [rad]                             | angolo di beccheggio del razzo                 | $H_{prop}$ | [m]                  | altezza serbatoio occupata da propellente |
| $T$              | [N]                               | spinta totale del razzo                        | $H_u$      | [m]                  | altezza serbatoio ullage/vuoto            |
| $D$              | [N]                               | drag aerodinamico sul razzo                    | $P_i$      | [bar]                | pressione idrostatica                     |
| $m$              | [kg]                              | massa totale del razzo durante il volo         | $P_u$      | [bar]                | pressione ullage/vuoto                    |
| $m_i$            | [kg]                              | massa totale iniziale del razzo                | $P_{tot}$  | [bar]                | pressione totale                          |
| $\dot{m}$        | [kg/s]                            | portata massica di propellente                 | $K$        | [–]                  | fattore di stress                         |
| $g$              | [m/s <sup>2</sup> ]               | accelerazione gravitazionale                   | $k$        | [–]                  | rateo dell'ellisse                        |
| $\mu$            | [m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ] | costante gravitazionale terrestre              | $\rho$     | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità materiale                         |
| $R_T$            | [m]                               | raggio terrestre                               | $\sigma_r$ | [bar]                | tensione di rottura                       |
| $T_{vac}$        | [N]                               | spinta nel vuoto del razzo                     | $\sigma_y$ | [bar]                | tensione di snervamento                   |
| $A_e$            | [m <sup>2</sup> ]                 | area di efflusso totale                        | $\Sigma_r$ | [bar]                | $\sigma_r$ con fattore sicurezza          |
| $p_e$            | [Pa]                              | pressione all'efflusso                         | $\Sigma_y$ | [bar]                | $\sigma_y$ con fattore sicurezza          |
| $\rho$           | [kg/m <sup>3</sup> ]              | densità dell'aria                              | $E$        | [bar]                | modulo di Young                           |
| $S$              | [m <sup>2</sup> ]                 | superficie esterna del razzo                   | $\nu$      | [–]                  | coefficiente di Poisson                   |
| $C_D$            | [–]                               | coefficiente di drag aerodinamico              | $t_e$      | [m]                  | spessore cupola ellisoidale               |
| $M_0$            | [kg]                              | massa iniziale del sistema lanciatore          | $t_c$      | [m]                  | spessore porzione cilindrica              |
| $M_m$            | [kg]                              | massa motore                                   |            |                      |   |
| $M_p$            | [kg]                              | massa del propellente per il primo stadio S-IC |            |                      |   |
| $M_s$            | [kg]                              | massa della struttura del lanciatore           |            |                      |   |
| $M_u$            | [kg]                              | massa carico utile del lanciatore              |            |                      |   |
| $MR$             | [–]                               | mass ratio                                     |            |                      |   |
| $\epsilon_s$     | [–]                               | indice strutturale delle masse inerti          |            |                      |   |
| $\epsilon_u$     | [–]                               | indice di massa del carico utile               |            |                      |   |
| $\zeta_{motore}$ | [–]                               | rappporto di massa motore                      |            |                      |   |
| $\zeta_p$        | [–]                               | frazione di propellente                        |            |                      |   |
| $\zeta_u$        | [–]                               | rappporto di massa del carico utile            |            |                      |   |

## 1.3. Propellenti

|               |                      |  |            |                      |                                  |
|---------------|----------------------|--|------------|----------------------|----------------------------------|
| $RP - 1$      | [–]                  | cherosene aeronautico                  | $H_u$      | [m]                  | altezza serbatoio ullage/vuoto   |
| $LOX$         | [–]                  | ossigeno liquido                       | $P_i$      | [bar]                | pressione idrostatica            |
| $\rho$        | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità propellenti                    | $P_u$      | [bar]                | pressione ullage/vuoto           |
| $T_e$         | [K]                  | temperatura di ebollizione             | $P_{tot}$  | [bar]                | pressione totale                 |
| $T_c$         | [K]                  | temperatura congelamento               | $K$        | [–]                  | fattore di stress                |
| $MM$          | [g/mol]              | massa molecolare                       | $k$        | [–]                  | rateo dell'ellisse               |
| $I_{sp}$      | [s]                  | impulso specifico coppia RP-1/LOX      | $\rho$     | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità materiale                |
| $O/F_{opt}$   | [–]                  | mixture ratio ottimale coppia RP-1/LOX | $\sigma_r$ | [bar]                | tensione di rottura              |
| $T_{comb}$    | [K]                  | temperatura combustione                | $\sigma_y$ | [bar]                | tensione di snervamento          |
| $\gamma$      | [–]                  | coefficiente di dilatazione adiabatica | $\Sigma_r$ | [bar]                | $\sigma_r$ con fattore sicurezza |
| $\rho_{prod}$ | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità prodotti                       | $\Sigma_y$ | [bar]                | $\sigma_y$ con fattore sicurezza |
| $MM_{prod}$   | [g/mol]              | massa molecolare prodotti              | $E$        | [bar]                | modulo di Young                  |
| $TEB$         | [–]                  | Trietilborano                          | $\nu$      | [–]                  | coefficiente di Poisson          |
| $TEA$         | [–]                  | Trietillalluminio                      | $t_e$      | [m]                  | spessore cupola ellisoidale      |
|               |                      |  | $t_c$      | [m]                  | spessore porzione cilindrica     |

## 1.5. Schema termodinamico

|                  |                      |   |                  |                   |   |
|------------------|----------------------|---|------------------|-------------------|---|
| $LOX$            | [–]                  | ossigeno liquido  | $O/F$            | [–]               | mixture ratio   |
| $RP - 1$         | [–]                  | kerosene liquido  | $LOX$            | [–]               | liquid oxygen (oxidizer)                                  |
| $GG$             | [–]                  | gas generator   | $RP - 1$         | [–]               | kerosene liquido (fuel)                                   |
| $FR$             | [–]                  | fuel rich   | $FR$             | [–]               | miscela fuel rich   |
| $OR$             | [–]                  | oxidizer rich   | $OR$             | [–]               | miscela oxidizer rich                                     |
| $p_{in}$         | [bar]                | pressione ingresso schema Figura 6                                    | $GG$             | [–]               | gas generator   |
| $p_{out}$        | [bar]                | pressione uscita schema Figura 6                                      | $LRE$            | [–]               | liquid rocket engine                                      |
| $T_{in}$         | [K]                  | temperatura ingresso schema Figura 6                                  | $UMR$            | [–]               | uniform mixture ratio                                     |
| $T_{out}$        | [K]                  | temperatura uscita schema Figura 6                                    | $HCI$            | [–]               | hot core injector   |
| $\dot{m}$        | [kg/s]               | portata fluido di interesse schema Figura 6                           | $TR$             | [–]               | turbulence ting   |
| $I_{s,oa}$       | [s]                  | impulso specifico del sistema motore                                  | $T_c$            | [K]               | temperatura di combustione GG                             |
| $I_{s,tc}$       | [s]                  | impulso specifico del sistema camera di spinta e ugello               | $p_c$            | [bar]             | pressione in camera di combustione GG                     |
| $I_{s,gg}$       | [s]                  | impulso specifico del GG  | $p_{out}$        | [bar]             | pressione uscita camera di combustione GG                 |
| $\dot{m}_p$      | [kg/s]               | portata di propellente totale   | $t_p$            | [ms]              | tempo di permanenza in camera di combustione GG           |
| $\dot{m}_{p,tc}$ | [kg/s]               | portata di propellente in camera di spinta                            | $\dot{m}_{fuel}$ | [kg/s]            | portata fuel  |
| $\dot{m}_{p,gg}$ | [kg/s]               | portata di propellente nel GG   | $\dot{m}_{ox}$   | [kg/s]            | portata oxidizer  |
| $\dot{m}_{LOX}$  | [kg/s]               | portata di LOX pompa  | $V_{cc}$         | [m <sup>3</sup> ] | volume necessario per la combustione                      |
| $\dot{m}_{RP1}$  | [kg/s]               | portata di RP1 pompa  | $CEAM$           | [–]               | NASA CEA software on Matlab                               |
| $\rho_{LOX}$     | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità LOX   | $HP$             | [–]               | problema hp: entalpia-pressione costante                  |
| $\rho_{RP1}$     | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità RP1   | $MM$             | [kg/kmol]         | massa molare prodotti di combustione GG                   |
| $u_{e,tc}$       | [m/s]                | velocità dei gas all'efflusso camera di spinta                        | $c_p$            | [kJ/kgK]          | calore specifico a pressione costante dei gas combusti GG |
| $u_{e,gg}$       | [m/s]                | velocità dei gas all'efflusso del GG                                  | $\gamma$         | [–]               | coeff. espansione adiabatico dei gas combusti GG          |
| $p_a$            | [Pa]                 | pressione ambiente  | $\Delta h_{id}$  | [J]               | salto entalpico ideale turbina                            |
| $p_{e,tc}$       | [Pa]                 | pressione dei gas all'efflusso camera di spinta                       |                  |                   |   |
| $p_{e,gg}$       | [Pa]                 | pressione dei gas all'efflusso GG                                     |                  |                   |   |
| $p_{c,tc}$       | [Pa]                 | pressione in camera di spinta   |                  |                   |   |
| $p_{c,gg}$       | [Pa]                 | pressione in camera di combustione GG                                 |                  |                   |   |
| $T_{c,tc}$       | [K]                  | temperatura in camera di spinta                                       |                  |                   |   |
| $T_{c,gg}$       | [K]                  | temperatura in camera di combustione GG                               |                  |                   |   |
| $\gamma$         | [–]                  | coeff. di espansione adiabatico gas combusti camera di spinta         |                  |                   |   |
| $\gamma_{gg}$    | [–]                  | coeff. di espansione adiabatico gas combusti camera di combustione GG |                  |                   |   |
| $R$              | [J/kgK]              | costante dei gas combusti camera di spinta                            |                  |                   |   |
| $R_{gg}$         | [J/kgK]              | costante dei gas combusti camera di combustione GG                    |                  |                   |   |
| $c_{p,gg}$       | [J/kgK]              | calore specifico a press. costante gas combusti gg                    |                  |                   |   |
| $\mathcal{T}$    | [N]                  | spinta singolo motore   |                  |                   |   |
| $\eta_t$         | [–]                  | rendimento turbina  |                  |                   |   |
| $\eta_p$         | [–]                  | rendimento pompa  |                  |                   |   |
| $\epsilon$       | [–]                  | rapporto espansione turbina   |                  |                   |   |
| $T_{in}$         | [K]                  | temperatura ingresso turbina  |                  |                   |   |
| $\mathcal{P}$    | [W]                  | potenza   |                  |                   |   |
| $\Delta p$       | [Pa]                 | prevalenza pompa  |                  |                   |   |

## 1.7. Turbopompa

|                 |                            |   |
|-----------------|----------------------------|---|
| $\alpha$        | [deg]                      | angolo riferito<br>all'orientazione di $\vec{c}$                |
| $\beta$         | [deg]                      | angolo riferito<br>all'orientazione di $\vec{v}$                |
| $\beta_{blp}$   | [deg]                      | angolo di back-leaning della<br>palettatura                     |
| $\eta_p$        | [−]                        | rendimento pompa  |
| $\rho$          | [kg/m <sup>3</sup> ]       | densità fluido in ingresso<br>alla pompa                        |
| $\psi$          | [−]                        | head coefficient - coefficiente<br>di prevalenza                |
| $\psi_{ind}$    | [−]                        | head coefficient relativo al<br>solo inducer                    |
| $\omega$        | [rad/s]                    | velocità angolare albero  |
| $\vec{c}$       | [m/s]                      | velocità nel sistema di<br>riferimento assoluto                 |
| $d_s$           | [−]                        | diametro specifico  |
| $D_2$           | [m]                        | diametro impeller   |
| $g$             | [m/s <sup>2</sup> ]        | accelerazione di gravità  |
| $\Delta h_s$    | [J/kg]                     | altezza di sollevamento   |
| $H$             | [m]                        | head rise – prevalenza della<br>pompa                           |
| $H_e$           | [m]                        | termine di perdita di<br>prevalenza                             |
| $K_v$           | [−]                        | design factor vani diffusori                                    |
| $m$             | [kg/s]                     | portata massica   |
| $n_s$           | [−]                        | velocità specifica  |
| $N$             | [rpm]                      | numero di giri al minuto  |
| $N_{SS}$        | [−]                        | suction specific velocity                                       |
| $NPSH$          | [m], [ft]                  | net positive suction head                                       |
| $NPSH_c$        | [m], [ft]                  | net positive suction head<br>critico                            |
| $\Delta P$      | [Pa]                       | salto di pressione a cavallo<br>della pompa                     |
| $P_{TOT0}$      | [Pa]                       | pressione totale all'ingresso<br>della pompa                    |
| $P_{TOT2}$      | [Pa]                       | pressione totale all'uscita<br>dalla pompa                      |
| $P_{vap}$       | [Pa]                       | pressione di vapore   |
| $P$             | [W]                        | potenza   |
| $pedice_0$      | [−]                        | ingresso inducer  |
| $pedice_1$      | [−]                        | uscita inducer – ingresso<br>impeller                           |
| $pedice_2$      | [−]                        | uscita impeller – ingresso<br>vani diffusori                    |
| $pedice_3$      | [−]                        | uscita vani diffusori   |
| $pedice_m$      | [−]                        | componente meridionale<br>della velocità                        |
| $pedice_u$      | [−]                        | componente tangenziale<br>della velocità                        |
| $Q$             | [m <sup>3</sup> /s], [gpm] | portata volumetrica   |
| $R_2$           | [m]                        | raggio impeller   |
| $S_v$           | [−]                        | vane solidity tip   |
| $\vec{u}$       | [m/s]                      | velocità periferica media di<br>rotazione della palettatura     |
| $\vec{v}$       | [m/s]                      | velocità nel sistema di<br>riferimento relativo                 |
| $v_{voluteIN}$  | [m/s]                      | velocità ingresso vano<br>diffusori                             |
| $v_{voluteOUT}$ | [m/s]                      | velocità uscita vano diffusori                                  |
| $VC$            | [−]                        | velocity compounded   |
| $PC$            | [−]                        | pressure compounded   |
| $C_0$           | [m/s]                      | velocità di efflusso ideale                                     |
| $C_{p,gg}$      | [kJ/kgK]                   | calore specifico a pressione<br>costante gas combusti del<br>GG |
| $T_{in}$        | [K]                        | temperatura ingresso turbina                                    |
| $\epsilon$      | [−]                        | rapporto espansione   |

## 1.8. Camera di spinta

|                    |                      |   |
|--------------------|----------------------|---|
| $m_f$              | [kg/s]               | portata massica di RP-1 al piatto                                   |
| $m_{ox}$           | [kg/s]               | portata massica di LOX al piatto                                    |
| $A_f$              | [m <sup>2</sup> ]    | area totale orifizi di RP-1 sul piatto                              |
| $A_{ox}$           | [m <sup>2</sup> ]    | area totale orifizi di LOX sul piatto                               |
| $\Delta p_f$       | [Pa]                 | perdita di pressione RP-1   |
| $\Delta p_{ox}$    | [Pa]                 | perdita di pressione LOX  |
| $\Delta \rho_f$    | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità di RP-1   |
| $\Delta \rho_{ox}$ | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità di LOX  |
| $\Delta v_f$       | [m/s]                | velocità media RP-1 in uscita da piatto                             |
| $\Delta v_{ox}$    | [m/s]                | velocità media LOX in uscita da piatto                              |
| $\Delta C_{D,f}$   | [–]                  | coefficiente d'efflusso RP-1  |
| $\Delta C_{D,ox}$  | [–]                  | coefficiente d'efflusso LOX   |
| $p_e$              | [bar]                | pressione gas all'efflusso dell'ugello                              |
| $T_e$              | [K]                  | temperatura gas all'efflusso dell'ugello                            |
| $H$                | [kJ/kg]              | entalpia gas all'efflusso dell'ugello                               |
| $\gamma$           | [–]                  | coefficiente di dilatazione adiabatica gas all'efflusso dell'ugello |
| $\rho$             | [kg/m <sup>3</sup> ] | densità gas all'efflusso dell'ugello                                |
| $v_e$              | [m/s]                | velocità gas all'efflusso dell'ugello                               |
| $I_{vac}$          | [s]                  | impulso specifico nel vuoto   |
| $I_{opt}$          | [s]                  | impulso specifico a espansione ottima                               |
| $I_{sl}$           | [s]                  | impulso specifico a livello del mare                                |
| $T_{vac}$          | [kN]                 | spinta nel vuoto  |
| $T_{opt}$          | [kN]                 | spinta a espansione ottima  |
| $T_{sl}$           | [kN]                 | spinta a livello del mare   |
| $V_{cc}$           | [m <sup>3</sup> ]    | volume cc (cilindro + convergente)                                  |
| $L^*$              | [m]                  | lunghezza caratteristica  |
| $c^*$              | [m/s]                | velocità caratteristica   |
| $A_t$              | [m <sup>2</sup> ]    | area di gola  |
| $p_{cc}$           | [Pa]                 | pressione in camera di combustione                                  |
| $\Gamma$           | [–]                  | funzione di Vandenkerckhove   |
| $R$                | [kJ/(molK)]          | costante dei gas  |
| $MM$               | [g/mol]              | massa molecolare  |
| $T_{cc}$           | [K]                  | temperature in camera di combustione                                |
| $\gamma$           | [–]                  | coefficiente di dilatazione adiabatica                              |
| $t_r$              | [s]                  | tempo di residenza  |
| $\epsilon_{cc}$    | [–]                  | rateo di contrazione  |
| $A_{cil}$          | [m <sup>2</sup> ]    | sezione porzione cilindrica della cc                                |
| $\theta$           | [°]                  | angolo del tratto convergente                                       |
| $a$                | [m]                  | differenza tra i raggi della cc                                     |
| $L_{conv}$         | [m]                  | lunghezza assiale del tratto convergente                            |
| $V_{conv}$         | [m <sup>3</sup> ]    | volume tratto convergente   |
| $L_{cil}$          | [m]                  | lunghezza assiale parte cilindrica                                  |
| $V_{cil}$          | [m <sup>3</sup> ]    | volume parte cilindrica   |
| $A_{tot,int}$      | [m <sup>2</sup> ]    | area pareti interne della cc  |
| $\epsilon$         | [–]                  | rapporto di espansione aree   |
| $\theta_e$         | [deg]                | angolo relativo alla sezione di uscita                              |
| $\theta_n$         | [deg]                | angolo relativo al punto di inflessione                             |
| $\%bell$           | [–]                  | percentuale di bell dell'ugello                                     |
| $E$                | [m, m]               | exit point – punto tangente alla sezione di efflusso                |
| $L_{ugello}$       | [m]                  | lunghezza ugello a campana  |
| $L_{conico}$       | [m]                  | lunghezza ugello tronco conico                                      |
| $N$                | [m, m]               | inflection point – punto di inflessione                             |

## 1.9. Sistemi di raffreddamento

*Nota: le unità di misura delle grandezze riportate in tabella sono coerenti con le formule nelle quali esse vengono applicate.*

## 2. Analisi della missione

La missione prevede una durata totale di funzionamento dello stadio di 161 s, durante il quale l'obiettivo principale è quello di portare il vettore di lancio ad una altitudine approssimativa di 61 km e ad una velocità di circa 2388 m/s. La sequenza di accensione prevede l'avvio del motore centrale per primo, seguito in sequenza dalle due coppie di motori simmetrici, questi accesi con un ritardo di 300 ms allo scopo di ridurre al minimo le vibrazioni sulla struttura principale; il computer di bordo attende quindi il raggiungimento del valore di spinta massimo per inviare il comando di sgancio del razzo dalla rampa di lancio. Il vettore, una volta sganciato, non può più essere fermato. Ad un'altitudine fissata di 1300 metri, il Saturn V comincia una manovra di rollio attorno al suo asse al fine di raggiungere la traiettoria corretta per il prosieguo della missione. La totalità delle informazioni riguardanti le istruzioni per l'assetto e i venti dominanti nel periodo di lancio sono pre-registrate nel programma di lancio. È inoltre necessario lo spegnimento del motore centrale a  $t = 135$  s, prefissato da programma, per non superare i limiti strutturali di carico massimo sopportabile. La spinta, infatti, non è un fattore controllabile nei motori F-1 e, per ovviare a questo problema, si provvede quindi ad interrompere direttamente il flusso di propellente al motore. [3] [4]

Di seguito sono riportate le formule e i risultati di una simulazione della missione del primo stadio del Saturn V, il cui scopo è di analizzare le variazioni dei vari parametri di interesse del razzo durante tutto il tempo di volo. Tale simulazione è stata realizzata con l'ausilio del software MATLAB, con il quale è stato risolto il sistema di equazioni differenziali descritto più avanti. L'algoritmo numerico risolutivo scelto è il metodo di Eulero in avanti ([Appendice J](#)). Per la simulazione del lancio è stato sviluppato un modello con determinate ipotesi semplificative al fine di descrivere l'intera dinamica del razzo:

- è stato utilizzato un modello di Terra piatta ed irrotazionale, al fine di adottare un sistema di riferimento inerziale, trascurando dunque effetti di variazione di traiettoria dovuti allo spostamento terrestre e variazioni di quota dovute al cambiamento di latitudine durante il volo;
- i valori di pressione e temperatura ambientale al variare della quota sono stati ottenuti mediante l'uso del Modello di Atmosfera Standard, ponendo una temperatura di riferimento al suolo di 25°C;
- il valore di portata massica del propellente ai motori è assunto costante durante tutto il funzionamento dello stadio, con una variazione del suo valore soltanto a seguito dello spegnimento del motore centrale al tempo prefissato;
- per ricavare le forze di resistenza aerodinamica e l'angolo di volo sono state utilizzate le curve sperimentali presenti nel report della missione dell'Apollo 11. [4]

Il modello matematico realizzato per la descrizione del vettore di lancio consta dunque delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} h &= \int v_v dt & s &= \int v_h dt & v_v &= \int a_v dt & v_h &= \int a_h dt & v_{tot} &= \sqrt{v_v^2 + v_h^2} \\ \phi &= \arctan \frac{v_h}{v_v} & a_v &= -g + \frac{T \cos \theta - D \cos \phi}{m} & a_h &= \frac{T \sin \theta - D \sin \phi}{m} \\ g &= \frac{\mu}{(R_T + h)^2} & m &= m_i - \dot{m}t & T &= T_{vac} - A_e p_e & D &= \frac{1}{2} \rho v_{tot}^2 S C_D \end{aligned}$$

Seppur il modello risulti semplificato rispetto alla complessa realtà fisica di funzionamento, si ottengono andamenti delle principali grandezze fisiche di interesse perfettamente in linea con gli andamenti tabellati forniti nel report del vettore di lancio. [4]

I requisiti fondamentali, ovvero il raggiungimento della quota prefissata e della velocità finale prima dello sgancio dello stadio S-IC, risultano soddisfatti e sufficientemente precisi, con valori ottenuti di 59557 m e 2353 m/s.

Di seguito sono riportati i grafici di alcune grandezze in funzione del tempo di volo (ulteriori grafici possono essere consultati in [Appendice B](#)):

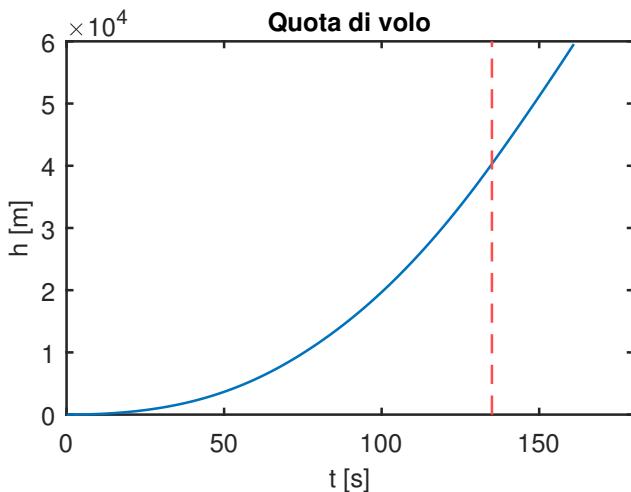


Figura 1: Quota in funzione del tempo

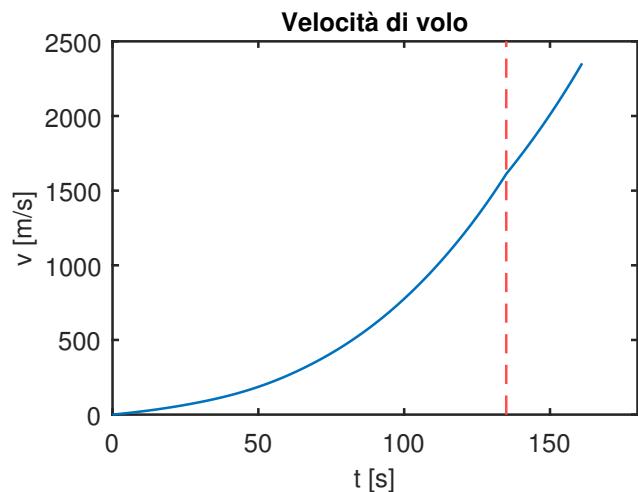


Figura 2: Velocità in funzione del tempo

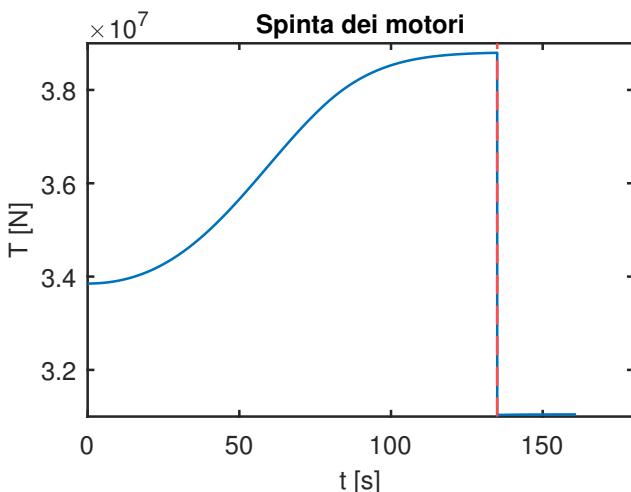


Figura 3: Spinta in funzione del tempo

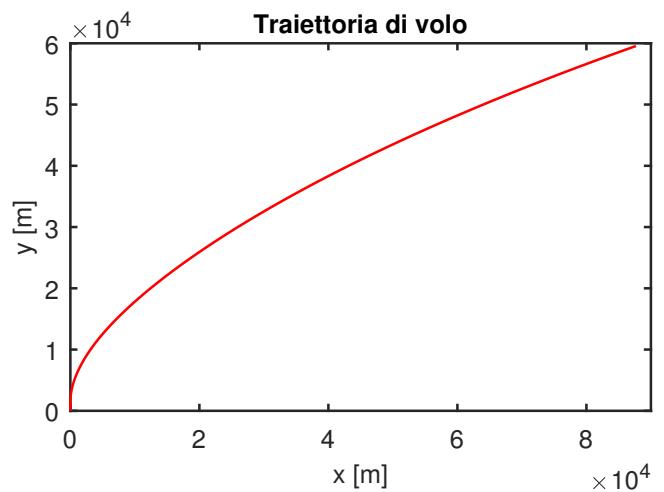


Figura 4: Traiettoria del vettore

Le evidenze sperimentali permettono quindi di assumere il modello implementato come effettivamente rappresentativo del lancio del Saturn V avvenuto nella realtà.

## 2.1. Parametri lanciatore

A partire dai dati sulle masse ottenuti applicando il modello matematico è possibile andare a calcolare una serie di parametri adimensionali per una descrizione della struttura del lanciatore relativamente al suo primo stadio S-IC (in appendice codice MATLAB dei conti effettuati e dei relativi risultati estrapolati)

| $\epsilon_u$ [-] | $\zeta_u$ [-] | $\epsilon_s$ [-] | $MR$ [-] | $\zeta_p$ [-] | $\zeta_{motore}$ [-] |
|------------------|---------------|------------------|----------|---------------|----------------------|
| 0.3975           | 0.2844        | 0.1167           | 0.2844   | 0.7156        | 0.0146               |

Tabella 1: Parametri struttura lanciatore

## 3. Propellenti

### 3.1. Coppia di propellenti: RP-1 / LOX

Lo stadio S-IC utilizza la coppia di propellenti ossigeno liquido (LOX) e cherosene (RP-1), ovvero una coppia semi-criogenica. Questa combinazione offre un buon equilibrio tra efficienza e semplicità.

L'ossigeno liquido è un ossidante che reagisce facilmente con i combustibili, come il cherosene e l'idrogeno liquido, per produrre una combustione ad alta temperatura e alta pressione: difatti può produrre una maggiore spinta per unità di massa di propellente rispetto ad altri ossidanti. La temperatura di ebollizione molto bassa (-182.96°C) lo rende un propellente criogenico, il che significa che deve essere mantenuto ad una temperatura uguale o minore

rispetto a quella di ebollizione durante lo stoccaggio e l'utilizzo. Tuttavia, a causa delle sue proprietà criogeniche, richiede una conservazione e una manipolazione estremamente accurate e può essere pericoloso se non gestito correttamente.

Il cherosene (RP-1), d'altra parte, è un combustibile ad alta densità energetica che brucia in modo pulito e consente un impulso specifico elevato rispetto ad altri combustibili idrocarburici, oltre ad essere facilmente reperibile e relativamente economico. L'RP-1 è un tipo di cherosene raffinato, ovvero una miscela liquida di idrocarburi, che viene prodotto mediante il raffinamento del petrolio grezzo che permette di rimuovere le impurità e migliorarne la stabilità e la consistenza. Il prodotto finito ha un alto contenuto di idrocarburi a catena lunga, caratteristica che lo rende un combustibile altamente efficiente.

La scelta di questi propellenti ha preso in considerazione anche fattori come la sicurezza, l'affidabilità e la facilità di gestione.

|      | $\rho [kg/m^3]$ | $T_e [K]$ | $T_c [K]$ | $MM [g/mol]$ |
|------|-----------------|-----------|-----------|--------------|
| RP-1 | 810             | 460/540   | 225       | 175          |
| LOX  | 1141            | 90.2      | 50.5      | 32           |

|          | $I_{sp} [s]$ | $O/F_{opt}$ | $T_{comb} [K]$ | $\gamma$ | $\rho_{prod} [kg/m^3]$ | $MM_{prod} [g/mol]$ |
|----------|--------------|-------------|----------------|----------|------------------------|---------------------|
| RP-1/LOX | 265          | 2.56        | 3670           | 1.24     | 1020                   | 21.9                |

Tabella 2: Dati per la coppia di propellenti RP-1 / LOX

### 3.2. Propellente ipergolico

Oltre ai due propellenti utilizzati per il funzionamento del motore è stato necessario l'utilizzo di un propellente ipergolico, ovvero un fluido ausiliario. L'accensione del fluido ausiliario è un metodo per cui un liquido o un gas ipergolico, oltre al combustibile normale e all'ossidante, viene iniettato nella camera di combustione per un breve periodo durante l'operazione di avviamento del motore. Questo fluido produce una combustione spontanea a contatto con il combustibile o con l'ossidante. Nel caso dell'F-1 sono stati utilizzati durante il processo di accensione Trietilborano (TEB - 85%) e Trietilalluminio (TEA - 15%), che messi a contatto con l'ossigeno liquido sono in grado di avviare la combustione istantaneamente.

## 4. Serbatoi e pressurizzazione

### 4.1. Serbatoi: descrizione e dimensionamento

Il primo stadio ha un diametro di circa 10 m e un'altezza di 42 m. La maggior parte del volume interno alla struttura è occupato dai serbatoi, ovvero il serbatoio di LOX, posto più in alto, e quello dell'RP1.

Il serbatoio dell'ossidante ha una forma cilindrica, chiusa alle due estremità da paratie ellisoidali, per un'altezza totale di 19.53 m, mentre il diametro è approssimabile al diametro della struttura interna, ossia 10.06 m e il volume di ossigeno liquido contenuto è 1266220 litri. La struttura si compone di una skin in lega 2219-T87, una lega di alluminio con rame come legante principale che si presta all'utilizzo grazie alle alte proprietà meccaniche in un ampio range di temperatura, dai -270°C ai 300°C circa, nel quale ricade la temperatura di stoccaggio del LOX; è inoltre un materiale con buona saldabilità, elevata tenacità a frattura e alta resistenza a cricche da corrosione e da sforzo. Dal serbatoio di ossidante partono 5 linee di aspirazione isolate di diametro 43,18 cm passanti attraverso il serbatoio di combustibile fino ai motori. Il serbatoio termina con un dispositivo centrale e paratie cruciformi che hanno lo scopo di evitare la formazione di vortici man mano che l'ossidante defluisce. All'interno della struttura del serbatoio di LOX, ancorate ai deflettori ad anello, vi sono quattro bombole di elio ad alta pressione dal volume di 0.88 m<sup>3</sup> ciascuna, necessarie alla pressurizzazione.

Il collegamento tra i due serbatoi è rappresentato dall'intertank, una struttura composta da cinque telai e pannelli ondulati in lega di alluminio 7075-T6 ad altissima resistenza meccanica.

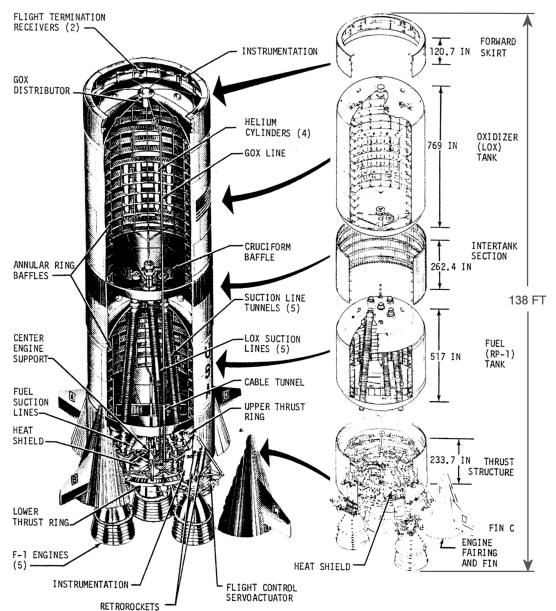


Figura 5: Raffigurazione serbatoi

Il serbatoio di combustibile ha geometria analoga al serbatoio di ossidante, con un'altezza di 13.13 m e un volume di 791151 litri. La struttura è anch'essa costituita da una skin di lega di alluminio 2219-T87.

Di fondamentale importanza per lo studio dei serbatoi è il dimensionamento dello spessore delle pareti, poiché è necessario ottimizzare il peso senza però mettere a rischio il funzionamento della struttura. I carichi strutturali ai quali è sottoposta la parete sono diversi, tra cui quelli dovuti alle pressioni interne, carichi assiali di spinta, carichi aerodinamici e termodinamici e quelli prodotti dalla disposizione di montaggio. È possibile procedere con il dimensionamento delle pareti sviluppando una serie di calcoli partendo da valori di progetto, come il volume dei propellenti necessari al funzionamento, l'ingombro esterno dei singoli serbatoi e considerando noto il materiale utilizzato. (Tabelle dati geometrici e materiale in [Appendice C](#))

Il volume totale all'interno del serbatoio non è composto unicamente dal propellente, ma ci sono anche degli altri volumi da considerare come il volume vuoto necessario alla pressurizzazione.

Come primo passo si calcolano i volumi fondamentali dei serbatoi, ovvero quelli della parte cilindrica e delle due cupole ellisoidali, conoscendone il raggio e le altezze, per poi calcolare il volume totale interno del serbatoio considerando anche il volume occupato dalle bombole di elio nel serbatoio del LOX e dalle cinque linee di aspirazione passanti attraverso il serbatoio dell'RP-1 ([Appendice J](#)):

$$V_e = \frac{2\pi a^2 b}{3} \quad V_c = \pi a^2 lc \quad V_{He} = 4V_{1He} \quad V_{tubi} = 5\pi r_t^2 l_t$$

$$V_{totRP-1} = 2V_{e_{RP-1}} + V_{c_{RP-1}} - V_{tubi} \quad V_{totLOX} = 2V_{e_{LOX}} + V_{c_{LOX}} - V_{He}$$

Noto il volume totale occupato dal propellente liquido si ricavano le dimensioni della parte del serbatoio necessaria alla pressurizzazione, ovvero il volume vuoto, e di conseguenza l'altezza sia del volume vuoto che del propellente:

$$V_u = V_{tot} - V_{prop} \quad H_{prop} = lc + 2b - H_u$$

La pressione nel serbatoio non è nota, ma va calcolata, mentre quella del volume vuoto è un dato di progetto del motore. ([Appendice C](#)) Con quanto ricavato in precedenza si calcolano le pressioni interne dei serbatoi e le pressioni totali

$$P_i = \rho g H \quad P_{tot} = P_i + P_u$$

È ora possibile procedere al calcolo degli spessori introducendo alcuni parametri come il fattore di stress K e il rateo dell'ellisse k, cioè il rapporto tra l'asse maggiore e l'asse minore

$$K = 0.8 \quad k = \frac{a}{b}$$

$$t_e = \frac{P_{tot}a(K + 0.5k)}{2\Sigma_y} \quad t_c = \frac{P_{tot}a}{\Sigma_y}$$

|             | $V_{prop} [m^3]$ | $V_c [m^3]$ | $V_e [m^3]$ | $V_{tubi/He} [m^3]$ | $V_{tot} [m^3]$ | $V_u [m^3]$ |
|-------------|------------------|-------------|-------------|---------------------|-----------------|-------------|
| <b>RP-1</b> | 791.1995         | 557.0794    | 161.4723    | 9.5970              | 870.4271        | 79.2275     |
| <b>LOX</b>  | 1266.297         | 1065.7171   | 161.4723    | 3.5115              | 1385.150        | 118.8526    |

Tabella 3: Tabella riassuntiva volumi

|             | $P_u [bar]$ | $P_i [bar]$ | $P_{tot} [bar]$ |
|-------------|-------------|-------------|-----------------|
| <b>RP-1</b> | 1.7375      | 0.9225      | 2.66            |
| <b>LOX</b>  | 1.5858      | 1.9250      | 3.5108          |

Tabella 4: Tabella riassuntiva pressioni

|             | $t_e [mm]$ | $t_c [mm]$ |
|-------------|------------|------------|
| <b>RP-1</b> | 3.4572     | 4.2550     |
| <b>LOX</b>  | 4.5630     | 5.6159     |

Tabella 5: Tabella riassuntiva spessori

I valori ottenuti risultano essere gli spessori minimi; in realtà lo spessore dovrebbe essere leggermente maggiore per consentire la saldatura, l'instabilità e la concentrazione delle sollecitazioni.

## 4.2. Pressurizzazione e scambiatore di calore

La pressurizzazione del serbatoio di LOX è affidata al GOX, ossia ossigeno in forma gassosa. Una linea di rilevamento fornisce un feedback di pressione a valvole che controllano il flusso del GOX e permettono di mantenere la pressione di riempimento del serbatoio, man mano che l'ossidante defluisce, tra 18 e 22 psia durante le fasi di volo. La pressurizzazione dei serbatoi è un requisito necessario dall'avviamento del motore fino a fine missione per stabilire e mantenere un gradiente di pressione positivo.

Durante il volo la sorgente di pressurizzazione del serbatoio di combustibile è invece l'olio ad alta pressione. Tramite l'utilizzo di valvole viene mantenuta l'alta pressione all'interno del serbatoio mentre la pressione nei contenitori di olio decresce. I condotti trasportano l'olio verso gli scambiatori di calore dei motori F-1 e dopo essere passato attraverso ad essi, i condotti di ritorno riportano l'olio gassoso riscaldato ed espanso nella parte superiore del serbatoio del carburante, ad una pressione di circa 25 psia.

L'olio è stato scelto rispetto ad altre soluzioni, come l'azoto, grazie alla sua bassa densità ( $0.1785 \text{ kg/m}^3$ ) che permette di risparmiare peso. I serbatoi di olio sono posizionati all'interno del serbatoio di LOX perché la bassa temperatura dell'ambiente interno criogenico aumenta la densità dell'olio ed è possibile utilizzare serbatoi di alluminio più piccoli e leggeri. I quattro contenitori di olio sono lunghi circa 6 m, hanno un diametro di 56 cm e un volume di  $0.88 \text{ m}^3$ .

Per permettere la pressurizzazione nei serbatoi è necessario l'utilizzo di uno scambiatore di calore. I serbatoi trasferiscono principalmente i propellenti alle turbopompe, per cui è necessaria la pressurizzazione per evitare il fenomeno di cavitazione all'ingresso della turbopompa. Per il motore F-1 si utilizza uno scambiatore di calore a fascio tubiero con 4 bobine e come fonte di calore per permettere lo scambio è utilizzato il gas di scarico della turbina. Tuttavia, è difficile trovare in letteratura metodi di prova appropriati o metodologie di progettazione per tali scambiatori di calore, poiché per la previsione accurata delle prestazioni, l'ottimizzazione del peso del veicolo di lancio e le prestazioni dello scambiatore di calore vengono valutate mediante test di prova. Per collegare lo scambiatore con i serbatoi sono presenti quattro condotti: due linee di andata verso lo scambiatore e due di ritorno verso i serbatoi. L'olio fornito dalle bombole conservate nel serbatoio LOX viene indirizzato allo scambiatore di calore, espanso e quindi indirizzato al serbatoio dell'RP-1 tramite una linea di distribuzione situata all'estremità superiore del serbatoio per garantirne la pressurizzazione. Il LOX ad alta pressione viene invece prelevato dal LOX dome, indirizzato allo scambiatore di calore, dove viene espanso in ossigeno gassoso e in seguito diretto al serbatoio tramite la linea di distribuzione del GOX.

Le dimensioni esatte dello scambiatore di calore del motore F-1 dipendono dalla versione specifica del motore, poiché il motore F-1 è stato sottoposto a una serie di miglioramenti, tuttavia, in generale, ha una lunghezza di circa 1 metro e mezzo e un diametro che varia da 1 metro all'uscita della turbina a 60 cm al collettore di scarico della turbina. (Immagine esploso scambiatore in [Appendice C](#))

## 5. Schema termodinamico

### 5.1. Analisi dello schema semplificato del sistema motore

Lo schema termodinamico semplificato del sistema propulsivo F-1 viene presentato di seguito. Per poter trattare le principali grandezze termodinamiche quali la pressione  $P$ , la temperatura  $T$  e la portata massica  $\dot{m}$ , sono stati consultati i manuali del motore per poter estrapolare uno schema semplificativo a blocchi [14]. Nello schema presentato viene introdotto il sistema a ciclo generatore di gas che permette l'alimentazione della turbopompa. Supponendo il funzionamento a regime (Main Stage), l'alimentazione è completamente auto sostenuta finché non viene soppressa dai computer di bordo (al termine del  $t_{burn}$ ) o viene esaurito il propellente.

Qualitativamente, dai due serbatoi di LOX e RP-1 viene spillata una portata, che viene trattata dalla turbopompa per portare in pressione i due liquidi. I due tank sono messi leggermente in pressione da un gas inerte: olio (e GOX nel tank LOX). Risulta vantaggioso avere un gas in pressione poiché permette un'uscita facilitata dai due tank ed evita la cavitazione man mano che essi vengono svuotati. La turbopompa sarà trattata in dettaglio nei paragrafi successivi, data la sua complessità costruttiva. Ai fini dello schema proposto è sufficiente sapere che essa ha il compito di portare ad una certa pressione i due liquidi. Per poter alimentare le pompe, viene calettata sullo stesso asse in comune una turbina, la quale viene mossa da gas caldi combusti in una piccola camera di combustione. Questo sottosistema viene chiamato Gas Generator (GG), e viene alimentato da una portata spillata dopo le turbopompe della stessa coppia RP-1/LOX, con un eccesso di combustibile per evitare temperature elevate all'ingresso della turbina. I gas caldi in uscita dal GG vengono inoltre sfruttati per scaldare e quindi pressurizzare l'olio; successivamente tali gas di scarico vengono convogliati in un tubo circonferenziale all'ugello, nella posizione in cui il rapporto tra aree del divergente è pari a 10:1, dove vengono scaricati sulla parete interna dell'estensione dell'ugello. Questo viene fatto per creare un film di gas relativamente freddi che hanno il compito di alleviare il carico termico sopportato dalla porzione finale dell'ugello (vedi —APPENDICE— per rappresentazioni grafiche dettagliate). Il raffreddamento della parte superiore dell'ugello viene effettuato facendo passare il combustibile in diversi tubi esterni posti nella sezione tra gola e divergente 10:1; il combustibile riscaldato viene poi introdotto in camera di combustione.

In [Tabella 6](#) e [Figura 6](#) si vedono alcuni dati rappresentativi dell'intero sistema. Si è ipotizzato di trattare i gas come perfetti e di assumere come dati alcuni rendimenti e alcune grandezze caratteristiche.

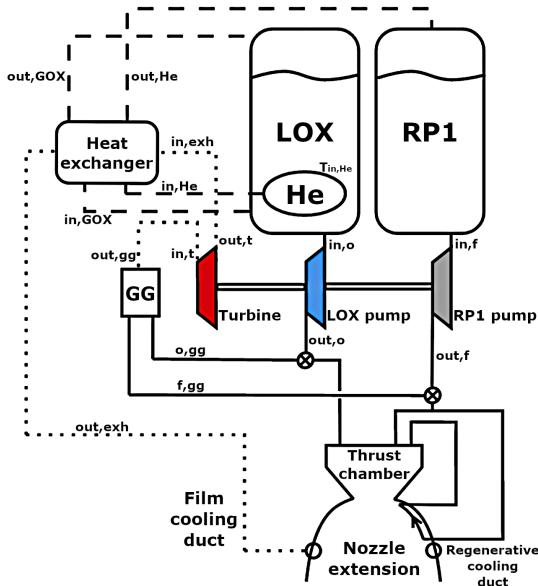


Figura 6: Schema termodinamico

|          | $p_{in}$ [bar] | $p_{out}$ [bar] | $\dot{m}$ [kg/s] | $T_{in}$ [K] | $T_{out}$ [K] |
|----------|----------------|-----------------|------------------|--------------|---------------|
| RP1 pump | 3.1026         | 128.93          | 849.13           | 90.15        | 90.15         |
| LOX pump | 4.4816         | 110.45          | 1828.43          | 298.15       | 298.15        |
| GG       | 68.94          | 66.63           | 77.25            | 1062         | 1062          |
| Turbine  | 64.05          | 3.93            | 77.25            | 1062         | 888.38        |
| HH (He)  | 207.86         | –               | 0.2268           | 90.15        | 433.15        |
| HH (OX)  | 96.52          | 93.08           | 3.1752           | 95.37        | 380.37        |
| HH (EXH) | –              | –               | 77.25            | 888.38       | 879.17        |

Tabella 6: Dati schema termodinamico

## 5.2. Analisi sulla scelta del ciclo di alimentazione

Per via della presenza di un sistema a turbopompe per l'alimentazione del propellente, è necessario scegliere il design ottimale per il ciclo di potenza che alimerterà la turbina e di conseguenza le due pompe stesse. La scelta del tipo di ciclo di potenza ha ripercussioni sulla filosofia del design dell'intero impianto e la sua introduzione può implicare una variazione in termini di prestazioni del sistema motore. Nel motore F-1 è stato scelto un ciclo di alimentazione a Gas Generator: risulta il sistema più leggero e semplice tra tutti, e data la ridotta complessità è il più economico in termini di sviluppi. Inoltre, è l'unico ciclo di alimentazione tra i principali ad avere un flusso di gas in parallelo alla camera di spinta: questa peculiarità ha ripercussioni sulle prestazioni del motore.

Altri principali tipi di cicli di alimentazione sono l'*Expander Cycle* e lo *Staged Combustion Cycle*. Oltre a questi, diversi ne sono stati sviluppati con combinazioni di diversa complessità che però in alcuni casi hanno portato a migliorare notevolmente le prestazioni globali del sistema motore. Nell'*Expander Cycle* la turbina viene alimentata grazie al riscaldamento rigenerativo del combustibile attraverso le pareti dell'ugello (permettendo quindi anche il raffreddamento delle pareti). Il fuel, che viene vaporizzato, espande in turbina e successivamente entra in camera di combustione. La temperatura in entrata alla turbina è limitata, non ci sono combustioni prima di essa: questo limita l'energia ricavabile dalla turbina e limita anche la pressione ottenibile in camera. Il necessario cambio di fase è un fattore limitante nell'utilizzo di tale ciclo: al crescere della dimensione del motore bisogna aumentare la portata in turbina in modo da aumentare la potenza, ma tale portata è limitata da fattori geometrici, poiché deve passare nelle pareti dell'ugello ed essere adeguatamente portata a vaporizzazione. Inoltre, la necessità di avere vaporizzazione immediata concentra l'utilizzo di questo ciclo per combustibili criogenici come l'idrogeno. Tale ciclo viene dunque usato per motori a spinte non troppo elevate e per stadi alti, e non poteva essere applicato al boost stage del primo stadio SI-C.

Nelle diverse tipologie di *Staged Combustion Cycle* si introducono uno o più preburner in modo da suddividere la combustione in diverse zone, oltre alla camera di spinta principale. Questo ciclo ha migliori prestazioni rispetto al ciclo a gas, poiché il flusso in uscita non viene scaricato in atmosfera ma introdotto nella camera principale. Questo aumenta l'efficienza del sistema, per contro lo sviluppo di questo ciclo aumenta notevolmente i costi e i tempi di sviluppo data la sua elevata complessità. Per poter comprendere le difficoltà ingegneristiche da affrontare si deve riconoscere che in un ciclo chiuso non si potrebbe semplicemente scaricare i gas combusti del GG, dopo aver attraversato la turbina, direttamente in camera: la pressione troppo bassa in uscita dalla turbina non sarebbe compatibile con l'alta pressione richiesta dalla camera di spinta, e i prodotti di combustione di una miscela FR (Fuel Rich) di combustibili a idrocarburi come RP-1 provocherebbero difficoltà agli iniettori del piatto principale, intasandoli. Da notare inoltre che nel ciclo chiuso FR tutto il fuel passa nel preburner, mentre nel gas generator vengono spillate delle piccole portate di fuel e oxidizer a monte. Questo implica che il sistema di preburner deve essere abbastanza grande da contenere una combustione controllata e generalmente a portate elevate di propellenti (a pressioni molto alte), soprattutto per quanto riguarda i booster stage. Un altro accorgimento è la suddivisione in stadi della turbopompa del fluido che viene spillato (l'ossidante nel caso mostrato in Figura 7). L'ossidante in questo caso deve essere pressurizzato ad alta pressione per la camera, e una sua piccola percentuale deve essere portata a quasi il doppio del valore di pressione di camera per entrare nel preburner. Oltre a queste complicazioni, il ciclo chiuso FR non viene utilizzato con combustibili a lunga catena carboniosa come RP-1, per il problema legato ai suoi prodotti di combustione. Si preferisce usare questo ciclo con combustibili come idrogeno o metano (come nei

nuovi motori sviluppati da SpaceX). I motori con cicli chiusi e OR (Oxidizer Rich), storicamente sviluppati dai russi dall'inizio degli anni '50, venivano alimentati anche con carburanti come il kerosene.

Concludendo, si può dire che la scelta del ciclo di alimentazione per il motore F-1 è ricaduta su un ciclo a gas per una combinazione di fattori, quali: esigenze prestazionali del singolo motore, elevate in termini di potenza e per quel tipo di combinazione di propellenti (con un trade-off sulla perdita di prestazione, come visto in seguito); limitazioni date dallo sviluppo degli altri cicli di alimentazione in quel periodo storico; minore complessità del sistema stesso.

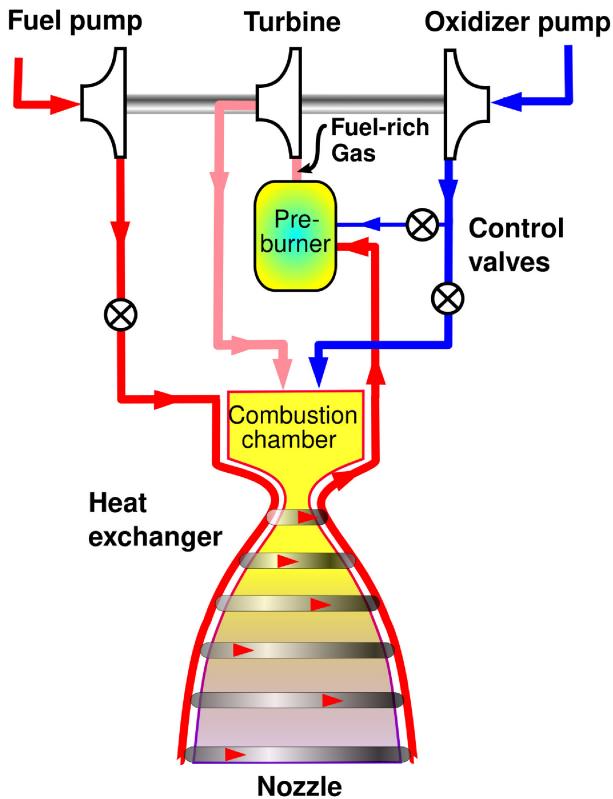


Figura 7: Staged Combustion Cycle FR

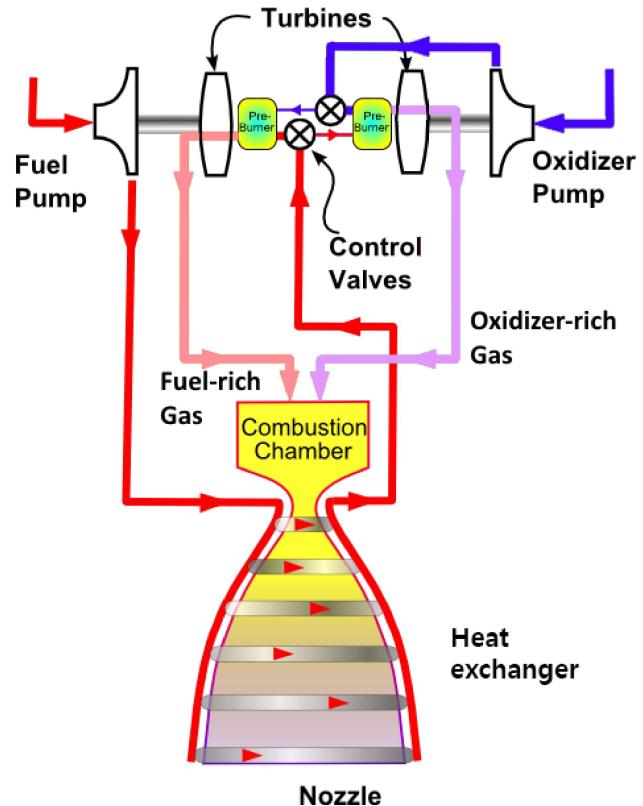


Figura 8: Staged Combustion Cycle completo

### 5.3. Analisi delle variazioni di performance introdotte dal ciclo a gas

In questa sezione verrà analizzato come l'introduzione del ciclo a gas ha delle ripercussioni sulle performance del sistema stesso, in particolare sull'impulso specifico del sistema motore, che verrà denotato come  $I_{s,oa}$  (l'abbreviativo *oa* si riferisce al termine "overall"). Importante è la distinzione tra l'impulso specifico del motore intero (appena introdotto) e quello della camera di spinta (più ugello), che sarebbe quello teorico e denotato come  $I_{s,tc}$ .

Per poter trattare teoricamente le limitazioni, si parte dal presupposto che a parità di altri fattori (come quota, mixture ratio, rapporto di espansione, ecc.) un aumento di pressione in camera di combustione aumenta le prestazioni del sistema. Infatti, analizzando la spinta si vede che:

$$T = \dot{m}_{p,tc} u_e + A_e (p_a - p_e) \quad \text{dove} \quad u_{e,tc} = u_{e,tc}(p_c) = \sqrt{\frac{2\gamma RT_c}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Si nota come aumentando la pressione in camera, a questo livello di approssimazione, la spinta aumenta indefinitamente, per cui anche l'impulso specifico  $I_{s,tc}$  aumenterà poiché esso è definito da:

$$I_{s,tc} = \frac{T(p_{c,tc})}{\dot{m}_{p,tc}} = u_{e,tc}(p_{c,tc}) + \frac{A_e(p_a - p_{e,tc})}{\dot{m}_{p,tc}}$$

Questo ci permetterebbe di concludere che un aumento di pressione illimitato in camera di combustione aumenta indefinitamente le prestazioni, sia perché l'ugello può espandere da una pressione più alta, sia per il contributo statico. Introducendo però un sistema di alimentazione di potenza in parallelo come il GG, si ha in realtà un calo di prestazioni rispetto all'andamento teorico.

Questo fatto può essere compreso a livello qualitativo considerando che, in un tale sistema, aumentare la pressione in camera significa aumentare le prestazioni richieste dalle pompe, richiedendo quindi più potenza dalla turbina. A parità di salto di pressione in turbina (limitato dalla progettazione della stessa) e prodotti di combustione del GG, l'unico modo che si ha per aumentare la potenza prodotta dalla turbina è aumentare lo spillamento di portata dal flusso che andrà poi in camera. Questo flusso, oltre a non conseguire una combustione ottimale (ovvero con rapporto O/F molto diverso da quello della camera), viene espanso a velocità molto più basse e questo implica una perdita di prestazioni che può essere quantificata nel modo seguente [6][11]:

$$\begin{aligned}
 I_{s,oa} &= \left(1 - \frac{\dot{m}_{p,gg}}{\dot{m}_p}\right) I_{s,tc} + \frac{\dot{m}_{p,gg}}{\dot{m}_p} I_{s,gg} \\
 I_{s,gg} &= I_{s,gg}(u_{e,gg}, p_{c,gg}, \dot{m}_{p,gg}) \\
 u_{e,gg} &= u_{e,gg}(p_{c,gg}) = \sqrt{\frac{2\gamma_{gg} R_{gg} T_{c,gg}}{\gamma_{gg} - 1} \left[1 - \left(\frac{p_{e,gg}}{p_{c,gg}}\right)^{\frac{\gamma_{gg}-1}{\gamma_{gg}}}\right]} \\
 p_{c,gg} &= 0.85 \cdot p_{c,tc} \\
 \dot{m}_{p,gg} &= \dot{m}_{p,gg}(\mathcal{P}, \eta_t, \epsilon, T_{in}, c_{p,gg}) = \frac{\mathcal{P}}{\eta_t c_{p,gg} T_{in} \epsilon} \\
 \mathcal{P} &= \mathcal{P}_{LOX} + \mathcal{P}_{RP1} = \frac{\Delta p_{LOX} \dot{m}_{LOX}}{\eta_{p,LOX} \rho_{LOX}} + \frac{\Delta p_{RP1} \dot{m}_{RP1}}{\eta_{p,RP1} \rho_{RP1}} \\
 I_{s,tc} &= I_{s,tc}(u_{e,tc}, p_{c,tc}, \dot{m}_{p,tc}) \\
 u_{e,tc} &= u_{e,tc}(p_{c,tc}) = \sqrt{\frac{2\gamma_{tc} R_{tc} T_{c,tc}}{\gamma_{tc} - 1} \left[1 - \left(\frac{p_{e,tc}}{p_{c,tc}}\right)^{\frac{\gamma_{tc}-1}{\gamma_{tc}}}\right]} \\
 \dot{m}_{p,tc} &= \dot{m}_p - \dot{m}_{p,gg}
 \end{aligned}$$

Si è ipotizzato, come best practice, che la pressione in camera del GG sia l'85% della pressione nella camera principale. Si ipotizza inoltre, in prima approssimazione, che il salto di pressione attraverso le pompe sia proporzionale alla pressione in camera, con costante di proporzionalità ottenuta dalla divisione delle due quantità note: prevalenza della pompa (sia LOX che RP-1) e pressione in camera nominale dell'F-1 [6]. Sono state implementate tali equazioni in MATLAB, imponendo un range esteso di pressioni, per poter notare l'effetto dell'introduzione del gas generator nel sistema.

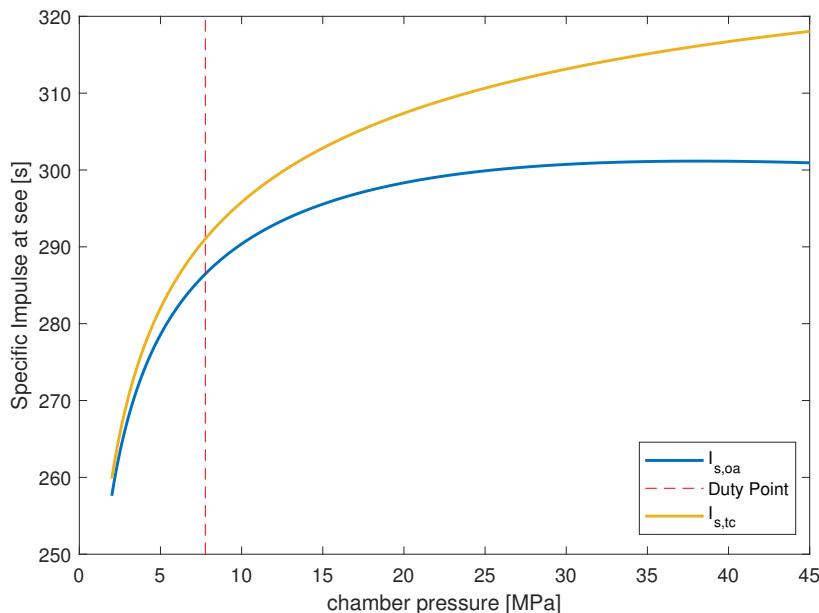


Figura 9: Confronto tra impulsi specifici a livello mare

Si nota come, al valore di pressione associato al motore F-1, ci sia un calo di prestazione rispetto al teorico. Il valore di impulso cala da 291 secondi a circa 285 secondi (a livello mare). Questo modello non considera perdite prestazionali dovute al flusso 3D (con eventuali separazioni asimmetriche e considerazioni sulle onde d'urto): in

questa situazione l'ugello considerato è in condizione sovra-espansa. Queste perdite sono successivamente considerate nella modellazione tramite il software RPA.

Dai grafici precedenti si nota anche come l'ottimo prestazionale per l'impulso specifico del sistema complessivo sia a pressioni in camera molto elevate (attorno ai 30 MPa, ovvero 300 bar). Un valore di pressione così elevato richiede una revisione di tutti i sistemi di alimentazione, a partire dalla turbopompa. Tale valore di pressione si trova tuttora nei motori LRE di nuova generazione come il Raptor, che tra l'altro non possiedono il ciclo a gas.

## 6. Gas generator

Il gas generator del motore F-1 è il sistema adibito alla produzione di gas caldi per alimentare la turbopompa. Tale sistema è composto da una camera di combustione progettata ad hoc per questo tipo di sottosistema. Vengono utilizzati gli stessi propellenti utilizzati nella camera principale ma con diverso rapporto O/F (valore in [Tabella 7](#)). La necessità di avere un O/F lontano dal valore stechiometrico è dettata dal contenere le temperature del flusso che impatterà sulla turbina: questo lo si ottiene con miscele ricche in ossidante o ricche in combustibile. In questo caso è stata scelta una miscela ricca in combustibile per molteplici motivi: evitare ossidazioni di componenti che sarebbero convenute con una miscela ad alta percentuale in LOX, diminuire la possibilità di eventuali guasti causati da flussi surriscaldati (più probabili nel caso Oxider Rich) e contenere il consumo specifico della turbina, poiché il peso molecolare dei gas risulta minore nel caso Fuel Rich ([Appendice D](#)).

La scelta di optare per una miscela FR ha anche alcuni aspetti negativi, tra cui la complessità della cinetica del processo chimico dovuta alla produzione di idrocarburi, che solitamente creano depositi solidi ([Appendice E](#)). Anche con questi valori bassi di O/F, la combustione nel GG viene completata in camera (quindi è molto rapida); al contrario, i processi di evaporazione e di mixing sono molto lenti. Tale problema si riscontra in maniera tangibile nei GG, mentre è meno evidente nelle camere di spinta dei LRE, dove tali processi sono più veloci. Per avere una buona evaporazione dei propellenti è necessaria una zona di combustione molto larga (più iniettori con portate minori), mentre per avere un buon mixaggio è necessaria una camera allungata in direzione del flusso: questi due problemi vengono ovviati tramite scelte di design specifiche trattate di seguito.

Nella creazione di un elemento GG, in particolare la sua camera di combustione, si devono considerare dei prerequisiti fondamentali per il suo corretto funzionamento:

- dato che l'atomizzazione degli iniettori spesso non è sufficiente, essa viene relegata anche ad effetti aerodinamici ottenuti tramite la geometria della camera, in modo il flusso del gas venga differenziato in zone di alta e bassa velocità che favoriscono la vaporizzazione;
- deve essere forzato il mixing tra prodotti di combustione e eccesso di combustibile per fornire una temperatura uniforme in uscita, in modo da evitare un guasto in turbina causato da zone calde, che solitamente sono localizzate al centro del flusso;
- forma e dimensione devono essere adattate all'ingombro del resto del motore, per avere un sistema il più compatto possibile;
- le perdite di pressione prodotte nella camera non devono essere troppo elevate.

Di seguito troviamo raffigurato il GG di nostro interesse (più particolari in [Appendice F](#)):

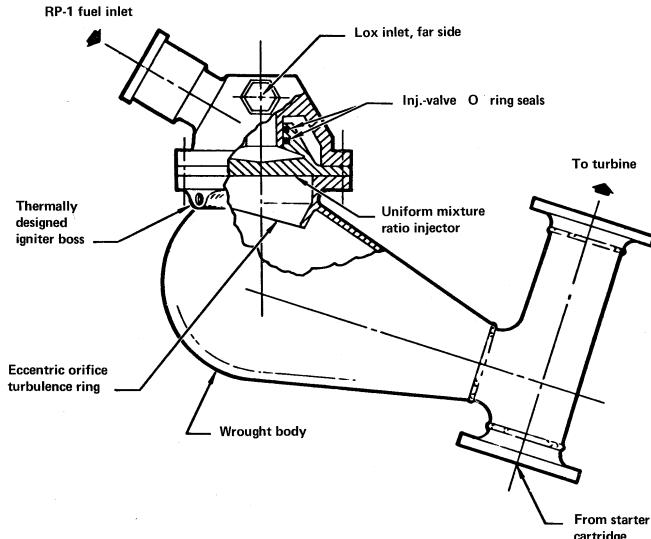


Figura 10: Schema del gas generator

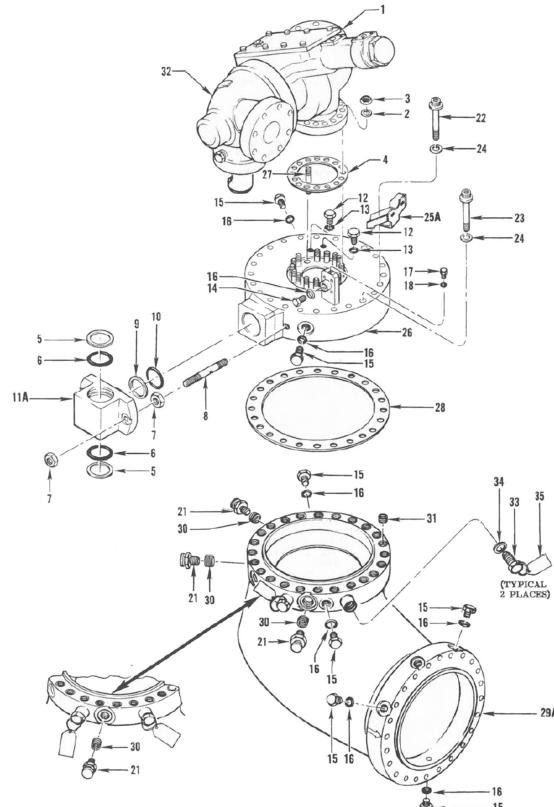


Figura 11: Esploso del gas generator

In base alle considerazioni sopra citate si spiegano alcune scelte progettuali per questo componente.

- La forma del GG, per cui lo scarico dei gas avviene in maniera inclinata rispetto alla direzione del piatto di iniezione, è dettata da requisiti di spazio e disposizione rispetto alle altre componenti.
- La scelta di camera sferica e non assiale permette di aumentare il livello di mixing di gas combusti e combustibile vaporizzato in eccesso.
- Il fondo della camera è incurvato e reso planare per non accumulare i prodotti di scarico.
- La zona di ingresso dei gas in turbina è composta da una sezione ad area costante, in modo da rendere il flusso il più uniforme possibile dell'ingresso in turbina.
- Il corpo della camera di combustione è convergente in maniera da differenziare la velocità e ottenere migliore atomizzazione.
- Il piatto di iniezione scelto per il GG è un semi-UMR (Uniform Mixture Ratio), ovvero ha le zone esterne più ricche in combustibile per ottenere film cooling, mentre la maggior parte dell'iniezione avviene a O/F predefinito. Altri iniettori, come HCl, hanno una stratificazione dei gas e delle temperature: ciò non è consigliabile per gas che devono impattare sulle palettature. Inoltre, un iniettore HCl non è compatibile con la forma arrotondata del corpo poiché provocherebbe un surriscaldamento del fondo della camera.
- L'iniettore deve avere diametri più ristretti possibile per migliorare atomizzazione, compatibilmente con quelli fabbricabili.
- Il TR (Turbulence Ring) visibile in Figura 10 viene posizionato poco dopo il piatto d'iniezione per rimediare ai problemi di basso ratio di mixing attraverso la creazione di un reverse flow. Questo permette un alto livello di mescolamento tra specie presenti per uniformare così la temperatura ed evitare stratificazioni del flusso, le quali causerebbero il fenomeno di "momentum separation", un flusso chiaramente non sostenibile dalla turbina. Questo reverse flow è reso più efficace grazie alla porzione circolare della camera che accoglie questo moto vorticoso. La posizione del TR è scelta per evitare il surriscaldamento dello stesso, dato che a monte della camera i gas vaporizzati devono ancora essere igniti e hanno dunque temperature relativamente basse. Il TR deve inoltre essere in grado di non provocare alte cadute di pressione: questo è ottenuto rendendo il TR conico (visible in Appendice F).
- L'ignitore deve essere posizionato poco dopo il piatto di iniezione (una best practice è tra 2.5 e 3.8 cm dal piatto). Viene inoltre posizionato in zone molto vicine ai punti di ristagno del flusso, in cui la combustione viene resa efficace.

| $T_c [K]$ | $p_c [bar]$ | $p_{out} [bar]$ | $t_p [ms]$ | $O/F$ | $\dot{m}_{fuel} [kg/s]$ | $\dot{m}_{ox} [kg/s]$ |
|-----------|-------------|-----------------|------------|-------|-------------------------|-----------------------|
| 1062      | 67.57       | 65.15           | 5          | 0.416 | 53.52                   | 22.23                 |

Tabella 7: Dati reali del gas generator, ricavati da [8][14]

Una stima quantitativa del volume totale necessario alla camera di combustione per adempiere alle richieste della stessa è basato su un tempo di permanenza, ricavato nel caso dei GG per ogni coppia di propellente. Nel caso del GG dell'F-1 si ha:

$$V_{cc} = t_p \frac{\dot{m}_{gg}}{\rho_{gc}} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{53.52 + 22.23}{18.3406} \right) m^3 = 0.02065 m^3$$

## 7. Turbopompa

### 7.1. Descrizione generica Mark 10

Il gruppo turbopompa Mark 10 è montato parallelamente alla mezzeria longitudinale della camera di spinta ed è sostenuto principalmente da due gruppi stabilizzatori a tre gambe saldati al corpo della camera e dai quattro condotti del propellente ad alta pressione installati tra la turbopompa e la camera di spinta. Il gruppo è composto da due pompe centrifughe montate schiena contro schiena (back-to-back) su un albero comune e azionate direttamente da una turbina a gas ad impulso. Le componenti rotanti sono collegate direttamente all'albero e sono bilanciate dinamicamente. L'albero è supportato da due gruppi di cuscinetti a sfere riscaldati elettricamente e raffreddati a carburante nell'area della pompa del LOX (per mantere l'ossigeno in fase liquida) e da un gruppo di cuscinetti a rulli raffreddati a carburante nell'area della turbina, mentre per isolare i propellenti, il fluido di raffreddamento e i gas caldi sono presenti un insieme di guarnizioni in carbonio, plastica (Kel-F, Teflon) e gomma sintetica (Buna-N, Viton-A).

#### 7.1.1 Pompe LOX e RP1

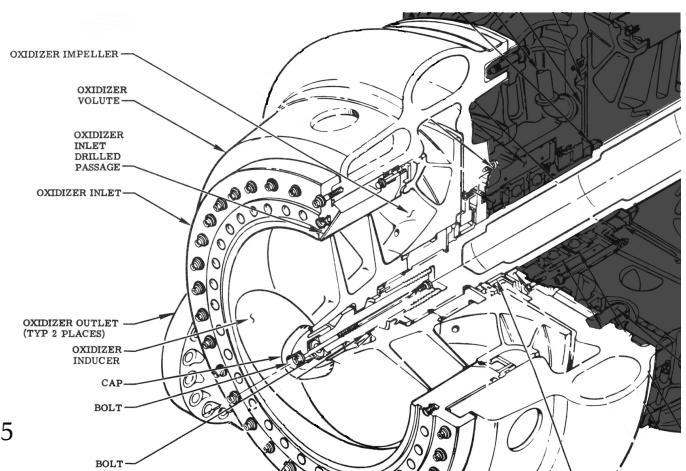
L'esigenza di avere un sistema a turbopompa in uno stadio di lanciatore nasce dalla richiesta di elevati requisiti di missione quali quelli caratterizzanti lo stadio SI-C. Un sistema a gas pressurizzante, per l'alimentazione dei 5 motori, dovrebbe essere progettato per sostenere elevate pressioni e quindi con un grande spessore delle pareti del serbatoio. In generale l'introduzione di un sistema di alimentazione a turbopompa, a patto di un corretto dimensionamento, permette di diminuire pesi e ingombri a discapito di un aumento del livello di complessità globale del progetto. Lo sviluppo moderno di tali sistemi prevede studi preliminari con tecniche assodate, come tabelle di valori specifici per le varie esigenze, basate su dati raccolti durante gli anni di sviluppo. Al giorno d'oggi si conclude e si implementa la progettazione teorica tramite uno studio a CFD che non verrà trattato in queste pagine.

L'F-1 è dotato di due pompe del sistema Mark 10 di tipo centrifugo, una per l'ossidante e il combustibile; questa tipologia permette di ottenere un salto di pressione  $\Delta P$  maggiore per singolo stadio (rotore + statore) rispetto alle pompe assiali a discapito di un leggero decremento dell'efficienza. Infatti, si è soliti usare pompe assiali solo laddove sono richiesti più stadi per ottenere un dato incremento di pressione come nel caso di LH2 dove a causa della bassa densità, il  $\Delta P$  risulta limitato dalla massima velocità raggiungibile dai rotori. Per pompe con fluido di lavoro a densità simile, come RP-1 e LOX, e simili pressione di scarico, si può mantenere la velocità angolare costante. Il progetto di una turbopompa ricerca principalmente la massimizzazione della velocità operativa poiché questo permette di ridurre le dimensioni della pompa stessa e di conseguenza il suo peso. Tuttavia, possibili effetti di cavitazione all'ingresso della pompa e sforzi dovuti alla forza centrifuga, vistosi nell'impeller (girante) e nella turbina, impongono un limite massimo alla velocità raggiungibile nelle zone periferiche dei componenti.

#### 7.1.2 Analisi pompa LOX

Nel seguente paragrafo, considerando un funzionamento in condizione di regime, si proporrà un'analisi della pompa LOX del sistema. Partendo da ragionevoli ipotesi e dati ricavati dai principali manuali di interesse [1] [6], verranno costruiti i triangoli di velocità di inducer e impeller e nel processo si cercherà di fornire un'analisi globale dei vari componenti costituenti.

Per permettere al motore di generare la spinta per cui è stato progettato, la pompa deve essere in grado di fornire un adeguato valore di 'prevalenza della pompa' ed elaborare allo stesso tempo la portata volumetrica



richiesta. Per la performance nel caso della pompa, al posto dell'incremento di pressione, è comune infatti usare il valore di prevalenza - headrise  $H$ - definito come l'altezza a cui può essere sollevato 1 kg di fluido con il lavoro compiuto idealmente per unità di massa dalla pompa. Si può usare la seguente formula per ricavarne il valore:

$$H = \frac{\Delta h_s}{g} = \int_{P_0}^{P_2} \frac{dp}{\rho g}$$

$\Delta h_s$  è direttamente legata al lavoro della pompa, rappresenta l'entalpia specifica del fluido di lavoro, e anche nel caso di fluido con elevata comprimibilità si può sempre scrivere

$$\frac{\text{Lavoro}}{\text{Massa}} = \Delta h_s = \frac{gH}{\eta_P}$$

dove con  $\eta_P$  si intende il rendimento della pompa. La prevalenza della pompa è inoltre direttamente proporzionale alla velocità periferica del disco della girante e alla velocità di efflusso dipendente da  $\beta_{blp}$  angolo di back-leaning della palettatura e  $v_{m2}$  velocità meridionale di uscita del flusso. Quest'ultimo termine è legato alla portata volumetrica  $Q$  della pompa, ulteriore requisito di progetto, che essa deve essere in grado di soddisfare e che viene principalmente dettata dalle condizioni presenti in camera di combustione e al gas generator, tenendo conto di eventuali perdite di carico, per attrito, lungo le tubazioni. Dal bilancio del momento della quantità di moto è possibile ricavare la coppia necessaria a mantenere in moto la girante e risalire di conseguenza alla potenza:

$$P = \dot{m}(\omega R_2)^2 \left(1 - \frac{v_{m2}}{\omega R_2} \tan \beta_{blp}\right) = \dot{m} \frac{gH}{\eta_P}$$

Al valore di potenza è legato il termine  $\psi$  coefficiente di prevalenza -head coefficient- della pompa

$$\psi = \eta_P \left(1 - \frac{v_{m2}}{\omega R_2} \tan \beta_{blp}\right) = \frac{gH}{(\omega R_2)^2}$$

e per un design ottimale di pompa centrifuga deve essere contenuto tra 0.2 e 0.8. Valori maggiori dell'unità sono indicativi di palette realizzate per impartire in avanti il flusso e il  $\Delta P$  tenderebbe ad aumentare all'aumentare della portata portando ad una generale instabilità del sistema di pressurizzazione.

### Parametri adimensionali

La pompa è progettata, come detto precedentemente, per fornire una specifica prevalenza e portata volumetrica. Queste due quantità vengono usate per ricavare due parametri adimensionali

$$\text{Diametro specifico } d_s = \frac{D(gH)^{\frac{1}{4}}}{Q^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Velocità specifica } n_s = \frac{\omega Q^{\frac{1}{2}}}{(gH)^{\frac{3}{4}}}$$

Si verifica facilmente che il prodotto dei due parametri  $n_s d_s = 2/\sqrt{\psi}$  e poiché le pompe centrifughe, per costruzione, hanno un coefficiente di prevalenza  $\psi$  minore dell'unità allora  $n_s d_s > 2$ . Diagrammi empirici nel piano  $n_s, d_s$  permettono di fare considerazioni sulle prestazioni delle pompe e l'individuazione di zone ottimali di funzionamento a regime tenendo anche conto, solo ad un livello semplificato, di eventuali tolleranze di costruzione e rugosità interne che potranno poi essere modificate dopo prove al banco.

Sono forniti i seguenti requisiti costruttivi della pompa [1]

| $\eta_P [-]$ | $P_{TOT0} [\text{bar}]$ | $P_{TOT2} [\text{bar}]$ | $\rho [\text{kg/m}^3]$ | $Q [\text{m}^3/\text{s}]$ | $D_2 [\text{m}]$ | $\omega [\text{rad/s}]$ |
|--------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|---------------------------|------------------|-------------------------|
| 0.746        | 4.4816                  | 110.4500                | 1141                   | 1.5898                    | 0.4953           | 575.12                  |

Tabella 8: Requisiti del sistema pompa LOX

da cui si ricavano i principali parametri prestazionali caratterizzanti la pompa in esame (il codice MATLAB con il dettaglio di tutti i conti eseguiti è riportato in appendice)

| $H [\text{m}]$ | $\Delta h_s [\text{J/kg}]$ | $\psi [-]$ | $P [\text{W}]$ | $d_s [-]$ | $n_s [-]$ | $n_s d_s [-]$ |
|----------------|----------------------------|------------|----------------|-----------|-----------|---------------|
| 944.7827       | $1.2424e + 04$             | 0.4569     | $2.2440e + 07$ | 3.8543    | 0.7677    | 2.9588        |

Tabella 9: Parametri prestazionali del sistema pompa LOX

Il punto di partenza nella progettazione della pompa è la scelta di un valore ottimale di velocità specifica  $n_s$ , definita sopra in condizioni di design e relazionale al numero di giri al minuto  $N$  prestabiliti in condizioni stazionarie. Questo valore permette di effettuare una prima selezione tra le varie tipologia di pompe (in particolare forma e tipologia di impeller) esistenti per concentrare lo studio su quella che meglio si potrebbe adattare ai requisiti di missione.

### Analisi inducer

è la prima interfaccia tra il fluido di lavoro e il sistema pompa e deve essere progettata con l'intento di evitare il più possibile eventuali fenomeni di cavitazione che portano ad un grande degrado delle prestazioni generali. Il rischio di cavitazione è alto soprattutto nella zona di ingresso -inlet- della pompa dove il fluido di lavoro alla pressione più bassa che si riscontra in questa parte del ciclo, dovendo ancora cominciare la pressurizzazione, viene compresso grazie ai contributi di aumento di velocità meridionale e velocità di rotazione della palettatura. Per caratterizzare la condizione di cavitazione bisogna introdurre una nuova grandezza, detta NPSH (Net Positive Suction Head), indice di merito della pressione in ingresso alla pompa. In particolare:

$$(NPSH) = \frac{P_{TOT0} - P_{vap}}{\rho g}$$

In fase di progettazione si utilizza il parametro  $(NPSH)_c$  come valore critico all'ingresso per non avere cavitazione, determinato dal design globale del motore, ed è necessario che sia verificata la relazione  $(NPSH) > (NPSH)_c$ . In aggiunta per comparare le caratteristiche di aspirazione tra differenti geometrie e organizzazioni del sistema pompa si utilizza un parametro derivante direttamente dalla velocità specifica  $n_s$  definita sopra, la suction specific velocity  $N_{ss}$ :

$$N_{ss} = \frac{N\sqrt{Q}}{(NPSH)_c^{0.75}}$$

Alti valori di  $N_{ss}$  sono indicativi della presenza di un inducer, a monte dell'impeller. Questo elemento contribuisce attivamente a migliorare la prestazione globale della pompa dal momento che permette di ampliare il range di velocità rotazionali ammissibili senza incorrere nella cavitazione, portando quindi ad una diretta riduzione del peso della pompa a parità di livello di potenza e prevalenza forniti al fluido.

È ora possibile andare a calcolare le velocità in ingresso, sezione 0, e in uscita, sezione 1, dall'inducer della pompa. Si effettua una ragionevole ipotesi sul valore del coefficiente di prevalenza  $\psi_{ind}$ , pari a 0.06, relativo al solo tratto iniziale [6]; da questo dato si trovano in cascata la velocità di rotazione riferita al valore medio del raggio della palettatura inducer e i relativi diametri effettivi della palettatura e dell'albero motore sezioni 0 e 1. Dalla conoscenza del valore di portata volumetrica all'ingresso dell'inducer, leggermente maggiore di quello presente nel corpo impeller per tenere conto di eventuali perdite, si sfrutta l'equazione di continuità per ricavare i vettori velocità nel sistema di riferimento assoluto e solidale con il case della pompa. Tali velocità sono indicate con  $\vec{c}_0$  e  $\vec{c}_1$ , rispettivamente per inlet e outlet inducer, e sono costituite da  $c_u$  per indicare la componente tangenziale della velocità assoluta e da  $c_m$  per riferirsi alla velocità meridionale, ovvero la componente della velocità assoluta che appartiene al piano radiale e assiale. Sono anche noti i valori di  $\vec{u}$ , vettore velocità periferica media di rotazione della palettatura nelle sezioni di ingresso e uscita, dal momento che si sono ricavati i diametri effettivi ed è noto il numero di giri al minuto effettuati. Usando le relazioni trigonometriche, e la conservazione della componente meridionale della velocità tra la velocità assoluta  $\vec{c}$  e la velocità espressa nel sistema di riferimento relativo, solidale con la palettatura in rotazione,  $\vec{v}$ , si compone il triangolo di velocità complessivo e si determinano infine gli angoli di orientazione  $\beta$  riferito all'inclinazione di  $\vec{v}$  e  $\alpha$  riferito invece all'orientazione di  $\vec{c}$ . È anche possibile andare a trovare la velocità all'estremo superiore -tip- della paletta per valutare un ulteriore parametro di progetto, la -vane solidity tip  $S_v$ -, grandezza adimensionale definita in relazione alla sezione anulare normale alla direzione della velocità assiale di effettivo passaggio del fluido di lavoro.

### Analisi impeller

Bisogna anche in questo caso fare riferimento ad una ragionevole ipotesi sulla perdita di prevalenza  $H$  nella sezione anulare di passaggio del fluido a causa di attriti e conseguente dissipazione di energia, dal manuale risulta  $H_e = 0.3H$  come termine di perdita [6], e a questo punto è possibile calcolare la prevalenza effettiva fornita dalla sezione della girante -impeller-. Sono inoltre noti il diametro nella sezione 1 -outlet inducer/inlet impeller- e nella sezione 2 -outlet impeller-. Con un ragionamento del tutto analogo a quello relativo all'inducer è possibile costruire il triangolo di velocità dato dalla composizione della velocità assoluta  $\vec{c}$ , della velocità relativa  $\vec{v}$ , con i rispettivi angoli di orientazione  $\alpha$  e  $\beta$  e della velocità periferica media di rotazione  $\vec{u}$ . Per i procedimenti di analisi della conservazione della portata e di calcolo effettivo mediante relazioni trigonometriche passo per passo si rimanda al codice matlab *POMPA<sub>LOX</sub>* allegato in appendice.

### Analisi casing pompa: vani diffusori

Il principale compito del casing è quello di convertire l'elevata energia cinetica del fluido di lavoro in uscita dalla

sezione 2 dell'impeller in pressione statica; questo elemento non contribuisce quindi in alcun modo alla generazione di un valore di prevalenza. Il casing può essere formalmente diviso in due sezioni: una frontale nominata -suction nozzle- con il compito di convogliare debitamente il flusso nella seconda sezione, definita di uscita, -volute / (voluta in italiano)- che invece si occupa della effettiva conversione energetica. La sezione frontale ha una lughezza ridotta per cercare di limitare al minimo le perdite di pressione per attrito contro le pareti rigide. Con i dati in possesso si procede al dimensionamento di un casing con geometria double-volute ( $180^\circ$ ) e singola sezione di efflusso per il flusso.

Per calcolare la velocità media del flusso all'interno della voluta si assume come riferimento un parametro  $K_v$  determinato sperimentalmente tramite prove al banco di differenti tipologie di vani diffusori. Per i calcoli  $K_v = 0.337$  da manuale [6].

$$c_3 = K_v \sqrt{2gH}$$

Si procede al calcolo dell'area del tratto divergente della voluta, imponendo per ciascuna sezione un valore di  $\alpha_{volute}$  compreso tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Nota la geometria e servendosi dell'equazione di continuità, è infine possibile ricavare i valori di velocità relativi alla sezione di ingresso alla voluta e di efflusso finale per valutare il corretto funzionamento del sistema pompa e l'incremento di pressione statica che riesce ad imporre al fluido.

| $v_{voluteIN} [m/s]$ | $v_{voluteOUT} [m/s]$ |
|----------------------|-----------------------|
| 103.7019             | 29.1447               |

Tabella 10: Velocità del sistema pompa LOX: casing

### 7.1.3 Analisi pompa RP-1

Si riportano i principali parametri di interesse calcolati con gli stessi procedimenti della pompa LOX.

| $\eta_P [-]$ | $P_{TOT0} [bar]$ | $P_{TOT2} [bar]$ | $\rho [kg/m^3]$ | $Q [m^3/s]$ | $D_2 [m]$ | $\omega [rad/s]$ |
|--------------|------------------|------------------|-----------------|-------------|-----------|------------------|
| 0.760        | 3.1026           | 128.2400         | 808.9324        | 0.9617      | 0.59436   | 574.020          |

Tabella 11: Requisiti del sistema pompa RP-1 [1]

| $H [m]$        | $\Delta h_s [J/kg]$ | $\psi [-]$ | $P [W]$        | $d_s [-]$ | $n_s [-]$ | $n_s d_s [-]$ |
|----------------|---------------------|------------|----------------|-----------|-----------|---------------|
| $1.5774e + 03$ | $2.0361e + 04$      | 0.5318     | $1.6218e + 07$ | 6.7598    | 0.4057    | 2.7427        |

Tabella 12: Parametri prestazionali del sistema pompa RP-1

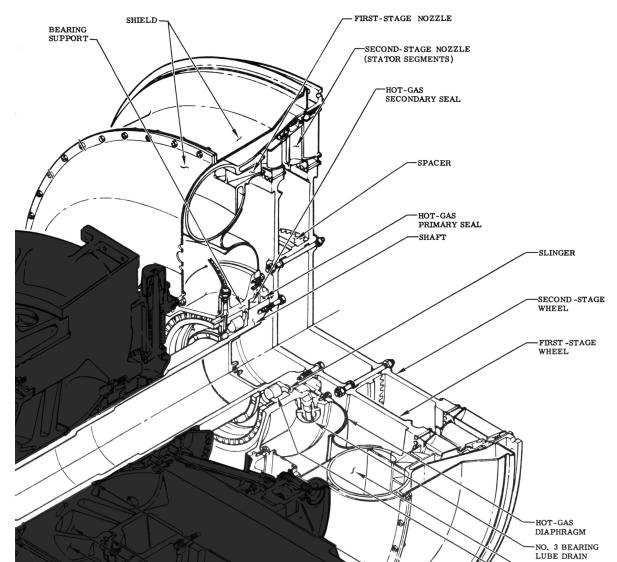
| $v_{voluteIN} [m/s]$ | $v_{voluteOUT} [m/s]$ |
|----------------------|-----------------------|
| 153.7897             | 31.7356               |

Tabella 13: Velocità del sistema pompa RP-1: casing

## 7.2. Turbina

### 7.2.1 Descrizione turbina

La turbina che fornisce la potenza necessaria alle pompe del sistema motore F-1 è definita come turbina a impulso (variazione di pressione statica solamente negli statori), e cosiddetta 2 row - velocity compounded (VC). Ovvero costituita da 2 file di rotori intramezzati da uno statore. Il gas caldo, prima di passare in questa zona, viene espanso in una schiera di ugelli che aumentano notevolmente la velocità: per le turbina VC, idealmente, tutta l'espansione avviene in questa zona. Successivamente i rotori, venendo impattati da un gas, sottraggono quantità di moto al fluido. Lo statore intermedio ha la funzione di reinidirizzare il flusso all'ingresso dell'ultimo rotore. Oltre a queste zone citate, nella turbina c'è una zona di ingresso (manifold) che convoglia il flusso ai nozzles. I nozzles, che sono generalmente convergenti-divergenti per una turbina VC, espandono il gas e



lo incurvano per affrontare il primo rotore. Entrambe i rotori della turbina sono costituiti da dischi i quali presentano dei 'fir tree' slot lungo la circonferenza, dove vengono inserite e rivettate le palette. Il rotore iniziale è calettato direttamente sull'albero, l'ultimo viene imbullonato sul primo e vengono separati da un distanziale. Le guarnizioni sono di diverso tipo, in questa sede non verranno approfondite, ma hanno il compito di contenere le perdite e quindi migliorare l'efficienza. [7] [13]

### 7.2.2 Turbina - scelte progettuali

Il sistema turbina di un endoreattore ha una vita breve ma è sottoposto a parecchi carichi critici. Il design deve essere compatto e leggero, il fluido che espande deve avere un alto contenuto energetico, il lavoro specifico in uscita deve essere alto. La progettazione dell'elemento turbina è direttamente collegato al tipo di ciclo di alimentazione del motore, nel caso di un GG si vuole massimizzare il salto di pressione per minimizzare la portata spillata prima della camera di spinta (questo infatti massimizza l'impulso specifico del sistema).

Per l'analisi del percorso aerotermodinamico del gas si tratta un flusso di gas combusti a chimica congelata (FE). I parametri fisici di interesse sono stati interpolati tramite MATLAB da una tabella fornita dal libro [7], dati ricavati da test sperimentali di NASA. Di seguito vediamo quali parametri principali vengono utilizzati per la scelta e il dimensionamento della turbina.

- **Spouting velocity:** è la velocità teorica che il flusso di gas avrebbe se espandesse dalla pressione di ristagno alla pressione di uscita (data dal rapporto  $\epsilon$  di espansione)

$$C_0 = \sqrt{2C_{p,gg}T_{in}\left(1 - e^{\frac{1-\gamma_{gc}}{\gamma_{gc}}}\right)}$$

- **Rapporto isoentropico delle velocità:** è il rapporto tra velocità tangenziale del disco rotorico e la spouting velocity.

$$\frac{U}{C_0}$$

Questo valore è utile per capire la scelta progettuale effettuata per il tipo di turbina. Infatti, come già detto, nei cicli GG il salto di pressione in turbina è molto alto: questo implica un valore di  $C_0$  elevato. Per avere una buona efficienza si possono percorrere più scelte progettuali (basandosi sul grafico di Figura 14). Si può scegliere di avere un alto rapporto di velocità con una singola ruota che 'assorba' tutta l'energia del flusso. Questo provocherebbe nel nostro caso una velocità di rotazione troppo elevata (quindi ingombro maggiore, inoltre la velocità di rotazione è fissata dalla pompa). Per usare altre turbine, cercando di avere un'alta efficienza si cerca di diminuire il rapporto di velocità aumentando gli stadi, ovvero la velocità del flusso è assorbita da più dischi che ruotano a velocità minori e sono più piccoli.

Le turbine PC (generano il salto di pressione in tutti gli statori) sono più efficienti ma più pesanti. Per cui nel caso del motore F-1 si è optato per un sistema VC, che ha buona efficienza a bassi rapporti di velocità e permette un risparmio in peso.

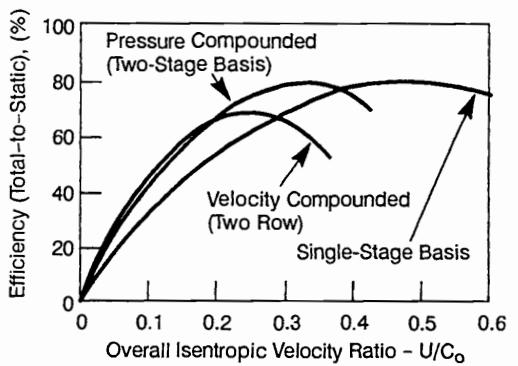


Figura 14: Rendimenti in funzione del rapporto di velocità

### 7.2.3 Analisi quantitativa - dimensionamento

L'obiettivo ora è quello di cercare di dare un'idea a livello quantitativo del funzionamento della turbina, generando un diagramma di velocità nelle varie zone della stessa. Per questa sezione si sono presi in considerazione i requisiti del sistema turbina, si sono ipotizzati diversi valori di rendimenti e sono state fatte alcune assunzioni ragionevoli per questo tipo di sistema ([7]) riassunte nella seguente tabella:

| $T_{in} [K]$ | $p_{in} [bar]$ | $\epsilon$ | $O/F$ | $\dot{m} [kg/s]$ | $\omega [rad/s]$ |
|--------------|----------------|------------|-------|------------------|------------------|
| 1062         | 67.57          | 16.4       | 0.416 | 75.75            | 574.4            |

Tabella 14: Requisiti del sistema turbina

Assumendo tali dati, aggiungendo alcune ragionevoli ipotesi tratte dal libro AIAA meglio precise nell'appendice [Appendice G](#) e risolvendo il sistema di equazioni associato al problema, troviamo il seguente diagramma velocità e i corrispondenti valori di velocità e angoli. In appendice [Appendice J](#) i codici relativi all'impostazione del problema e risoluzione del triangolo di velocità.

## 8. Camera di spinta

### 8.1. Descrizione del sistema

L'intero gruppo della camera di spinta è costituito dal LOX dome, dal piatto di iniezione e dal corpo della camera di spinta, ovvero dalla camera di combustione per bruciare propellenti seguita da un ugello di espansione a forma di campana, necessario ad espellere a velocità elevata i gas prodotti dai propellenti bruciati e poter così generare la spinta.

La camera di spinta è di circa 3.35 metri di lunghezza e 2.74 metri di diametro all'estremità inferiore dell'ugello. Il suo corpo è formato da tubi fino al piano in cui il rapporto di espansione diventa pari a 10:1; in questi scorre il 70% del carburante, fornendo un raffreddamento rigenerativo ed evitando che il materiale del tubo si sciolga durante il funzionamento del motore.

I tubi che compongono la camera di spinta sono costruiti in Inconel X-750, una lega a base di nichel resistente alle alte temperature e trattabile termicamente, scelta come materiale poiché forniva gli elevati rapporti forza-peso necessari per resistere ai requisiti di spinta del motore; inoltre, l'elevata resistenza di questa lega ha consentito la progettazione di tubi con sezioni di parete più sottili, con conseguente diminuzione del peso.

Il corpo sopra il piano corrispondente a rapporto di espansione 3:1 (circa 76.2 cm sotto il piano di gola) è costituito da 178 tubi primari con diametro esterno di 2.78 cm, mentre dal piano con rapporto di espansione 3:1 al piano a 10:1 si biforcano diventando 356 tubi secondari con diametro esterno di 2.54 cm.

Questa biforcazione è dovuta principalmente alla geometria dell'ugello e alle proprietà fisiche del materiale usato. La circonferenza di un ugello è minima in corrispondenza della gola mentre aumenta nella sezione di espansione: l'entità dell'aumento di circonferenza ottenibile con un numero fisso di tubi è quindi limitata da quanto questi ultimi possano essere lavorati per rastremazione. Quando si raggiunge il punto in cui la circonferenza non può essere ulteriormente aumentata con il numero prefissato di tubi si rende quindi necessario un giunto di biforcazione. I gas di scarico della turbina, dopo essere passati attraverso lo scambiatore di calore, vengono convogliati al collettore di scarico della turbina, la cui funzione è quella di raccogliere e distribuire uniformemente il gas di scarico tra le pareti dell'estensione dell'ugello, che altrimenti non sarebbe raffreddata.

### 8.2. Piatto d'iniezione

Gli iniettori sono collocati all'estremo superiore della camera di spinta e hanno lo scopo di distribuire il propellente in camera, regolando il rapporto di diluizione, la pressione e lo schema di spruzzo al fine di avviare e sostenere una combustione stabile. Per determinare questi valori sono stati necessari circa 3200 test su larga scala: al fine di generare un'esplosione controllata, risulta fondamentale che essa sia dinamicamente stabile, ossia che sia prevedibile e non crei punti caldi che porterebbero alla fusione di componenti del motore.

La faccia del piatto di iniezione, realizzata in CRES e strutturata in 31 anelli, conta 1428 orifizi per l'ossidante e 1404 orifizi per il carburante. I getti vengono atomizzati attraverso una disposizione a doppietti omogenei, i vapori di combustibile e di ossidante si miscelano e reagiscono a formare i gas propellenti, destinati successivamente all'espansione in ugello. La disposizione a doppietti omogenei è vantaggiosa rispetto ad altre: è di facile realizzazione, risulta stabile e affidabile e genera una buona miscelazione dei propellenti, a costo di necessitare di una camera più lunga rispetto ad altre tecniche di atomizzazione.

Gli anelli per il carburante sono alimentati attraverso un collettore radiale, mentre gli anelli per l'ossidante sono alimentati dal LOX dome tramite fori assiali. Il collettore incorpora due ingressi per il montaggio delle valvole di ossidante e una flangia per la linea di alimentazione dell'ossidante allo scambiatore di calore. Per evitare vorticità nell'ossidante, il collettore è isolato in due compartimenti da due argini toroidali. Solamente il 30% del combustibile viene indirizzato direttamente al collettore, mentre il restante 70% viene utilizzato per il raffreddamento rigenerativo della camera di spinta. Sono poi presenti due alloggiamenti per gli ignitori del combustibile in ciascuno dei 12 scomparti esterni, e un alloggiamento del combustibile nel compartimento centrale, tutti collegati al collettore da singoli tubi di alimentazione.

La stabilità della combustione è raggiunta principalmente mediante l'uso dei deflettori (baffles), oltre che variando l'angolo di impingement e il diametro degli orifizi in funzione della posizione sul piatto d'iniezione.

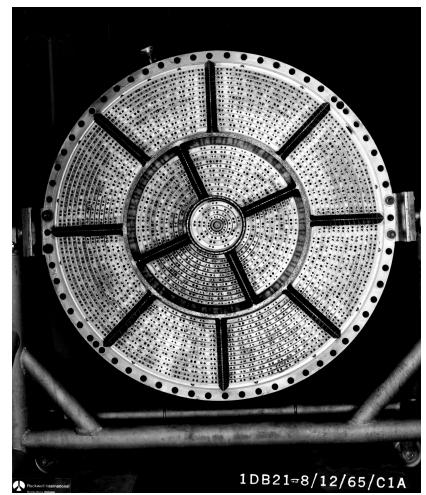


Figura 15: Piatto di iniezione

I deflettori in particolare alterano le caratteristiche acustiche di risonanza della camera di combustione, smorzando così le onde d'urto generate dalla combustione. I 12 deflettori radiali in rame sono alimentati dal deflettore circolare esterno. La configurazione dei deflettori utilizzata per il propulsore è stata ottenuta a seguito di vari test, nel quale si è ricercata la maggior stabilità di combustione possibile. Nella configurazione finale, i deflettori misurano circa 8 cm ciascuno e sono tutti dump-cooled, ovvero il raffreddamento è realizzato attraverso la circolazione di carburante all'interno del deflettore che viene successivamente scaricato nella camera di combustione. [5][9]

|                 | $\dot{m} [\text{kg/s}]$ | $A [\text{m}^2]$ | $\Delta p [\text{bar}]$ | $\rho [\text{kg/m}^3]$ | $v [\text{m/s}]$ |
|-----------------|-------------------------|------------------|-------------------------|------------------------|------------------|
| <i>fuel</i>     | 742.09                  | 0.05484          | 641                     | 810                    | 17.07            |
| <i>oxidizer</i> | 1788.97                 | 0.03968          | 2100                    | 1141                   | 40.54            |

Tabella 15: Dati reali del piatto d'iniezione [5][9]

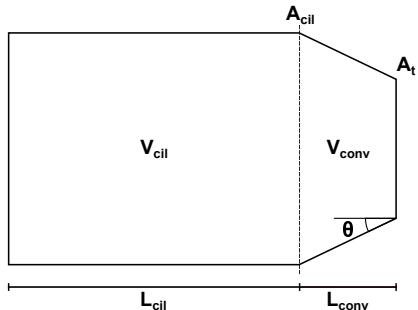
A partire dai dati in Tabella 15, è possibile inoltre stimare la velocità media teorica dei due propellenti all'uscita dai rispettivi iniettori:

$$C_{D,f} = \frac{\dot{m}_f}{A_f \sqrt{2 \Delta p_f \rho_f}} = 13.28 \quad C_{D,ox} = \frac{\dot{m}_{ox}}{A_{ox} \sqrt{2 \Delta p_{ox} \rho_{ox}}} = 20.59$$

$$v_f = C_{D,f} \sqrt{\frac{2 \Delta p_f}{\rho_f}} = 16.71 \text{ m/s} \quad v_{ox} = C_{D,ox} \sqrt{\frac{2 \Delta p_{ox}}{\rho_{ox}}} = 39.51 \text{ m/s}$$

Tali risultati sono paragonabili alle velocità reali: la  $v_f$  si discosta del 2.11% dal valore reale, mentre la  $v_{ox}$  si discosta del 2.54%.

### 8.3. Camera di combustione



Nel motore F-1 è presente una camera di combustione cilindrica con una parte finale convergente che termina con la sezione di gola. La camera di combustione funge da involucro che deve mantenere i propellenti per un periodo sufficiente a garantire la completa miscelazione e combustione. Il tempo di permanenza richiesto, o tempo di residenza, è una funzione di molti parametri, ovvero combinazione di propellenti, le condizioni di iniezione e la geometria del combustore (rapporto di contrazione, numero di Mach, livello di turbolenza). Un parametro utile relativo al volume della camera e il tempo di residenza è la "lunghezza caratteristica",  $L^*$ , ossia il volume della camera diviso l'area di gola:

$$L^* = \frac{V_{cc}}{A_t}$$

Figura 16: Camera di combustione

Il concetto di  $L^*$  è molto più facile da visualizzare rispetto al più elusivo "tempo di residenza", espresso in piccole frazioni di secondo, infatti si tratta di un sostituto per determinare il tempo di permanenza nella camera dei propellenti.

Un altro parametro fondamentale per il calcolo del tempo di residenza è la velocità caratteristica  $c^*$ . Il valore  $c^*$  aumenta con  $L^*$  fino a un massimo asintotico, ma l'aumento di  $L^*$  oltre un certo punto tende a diminuire le prestazioni complessive del motore a causa di quanto segue: un maggiore  $L^*$  si traduce in maggiore volume e peso della camera di spinta, con conseguente aumento della superficie che ha bisogno di raffreddamento e aumento delle perdite termiche e dovute all'attrito. Il metodo abituale per stabilire la  $L^*$  di un nuovo progetto della camera di spinta si basa in gran parte sull'esperienza passata con propellenti e dimensioni del motore simili. Nel caso della coppia di LOX/RP-1 la  $L^*$  è compresa tra i valori 1÷1.30 metri, e per motivi progettuali descritti in precedenza è stata fissata la misura di  $L^*$  a 1 m. Partendo da questo dato e dalla dimensione dell'area di gola del motore è possibile modellare la camera di combustione.

Invertendo la formula della  $L^*$  è possibile ottenere il volume della camera di combustione  $V_{cc}$  che comprende, oltre alla parte cilindrica, anche la parte convergente.

$$V_{cc} = L^* A_t$$

È possibile anche calcolare la velocità caratteristica  $c^*$  e il tempo di residenza attraverso le seguenti due formule:

$$c^* = \frac{p_{cc} A_t}{\Gamma \frac{p_{cc}}{\sqrt{\frac{R}{MM}} T_{cc}}} \quad \Gamma = \sqrt{\gamma \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} \quad t_r = \frac{L^*}{c^*}$$

Per calcolare le dimensioni reali di entrambe le parti della camera di combustione, ovvero la parte cilindrica e quella del convergente, è necessario fissare due parametri al fine dello sviluppo del modello. Si tratta del rateo di contrazione, ossia il rapporto tra la sezione della camera cilindrica e la sezione di gola, e l'angolo di inclinazione del convergente

$$\epsilon_{cc} = \frac{A_{cil}}{A_t} = 1.307 \quad \theta = 13^\circ$$

Sfruttando la trigonometria si ottiene la lunghezza assiale del tratto convergente e considerando quest'ultimo come una figura tronco conica si calcola il volume. Partendo da quanto calcolato è possibile ottenere le dimensioni del tratto cilindrico:

$$A_{cil} = \epsilon_{cc} A_t \quad R_{cil} = \sqrt{\frac{A_{cil}}{\pi}} \quad a = R_{cil} - R_t$$

$$L_{conv} = \frac{a}{\tan(\theta)} \quad V_{conv} = \frac{(A_{cil} + A_t + \sqrt{A_{cil}A_t})L_{conv}}{3} \quad L_{cil} = \frac{V_{cc} - V_{conv}}{A_{cil}} \quad V_{cil} = L_{cil}A_{cil}$$

| $A_t [m^2]$ | $A_{cil} [m^2]$ | $L_{conv} [m]$ | $L_{cil} [m]$ | $V_{conv} [m^3]$ | $V_{cil} [m^3]$ | $V_{cc} [m^3]$ | $A_{tot_{int}} [m^2]$ |
|-------------|-----------------|----------------|---------------|------------------|-----------------|----------------|-----------------------|
| 0.6207      | 0.8113          | 0.2758         | 0.5224        | 0.1969           | 0.4238          | 0.6207         | 2.5152                |

Tabella 16: Tabella riassuntiva camera di combustione

## 8.4. Modellazione dell'ugello

L'obiettivo principale che si persegue nella progettazione dell'ugello di un endoreattore è quello di ottenere una forma che minimizzi le perdite di spinta per un qualsiasi rapporto di espansione richiesto.

Si procede quindi ad illustrare il metodo ideato da Rao per una progettazione ottimale rispetto ad un ugello di forma tronco-conica, con lo stesso rapporto di espansione, preso da riferimento:

$$L_{conico} = \frac{(\sqrt{\epsilon} - 1) - R_t}{\tan 15^\circ}$$

dove  $R_t$  indica il raggio di gola dell'ugello e  $15^\circ$  è l'angolo standard di semi-apertura dell'ugello.

La forma a campana ottimale può essere approssimata da una parabola inclinata grazie a considerazioni geometriche, permettendo anche di abbozzare velocemente una forma dell'ugello che contempla una perdita di prestazioni trascurabile a livello di spinta. Proprio per questo motivo, questa tipologia è anche chiamata ugello TOP (Thrust Optimized Parabolic) ed ha effettivamente trovato applicazione pratica nei vettori di lancio perché ha performance migliori quando sovra-espande a livello del mare (le pareti dell'ugello TOP aiutano a ritardare la separazione del flusso grazie ad un'elevata contropressione) rispetto ad un ugello ottimizzato perfettamente a campana. Inoltre, la forma dell'ugello varia in modo minimale in base ai propellenti usati e perciò una stessa famiglia di ugelli TOP può essere adattata per qualsiasi combinazione di ossidante e combustibile.

I parametri di partenza sono: il rapporto di espansione  $\epsilon$ , il raggio di gola  $R_t$  e la percentuale di campana  $\%_{bell}$  che si vuole ottenere; quest'ultimo valore deve essere compreso tra il valore massimo di 85%, a cui si raggiunge un livello di efficienza dell'ugello del 99% e che può essere aumentato solo di un ulteriore 0.2% con una percentuale di campana 100%, e il valore minimo del 70%, a cui si comincia ad ottenere un notevole degrado di prestazioni. Si ricavano quindi a cascata:

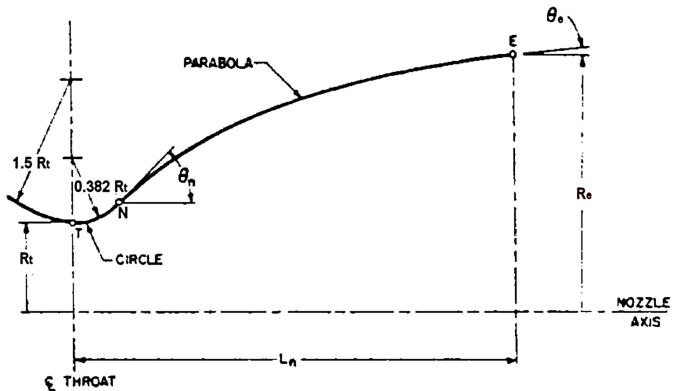


Figura 17: Definizioni geometriche

$$R_e = \sqrt{\epsilon} R_t$$

raggio della sezione d'efflusso

$$L_{ugello} = \%_{bell} \frac{(\sqrt{\epsilon} - 1) - R_t}{\tan 15^\circ}$$

lunghezza dell'ugello

Si ricavano poi gli angoli  $\theta_n$ , riferito al punto di inflessione N, e  $\theta_e$ , riferito alla sezione d'uscita, per interpolazione grafica da curve analitiche ottenute sperimentalmente per determinati valori di  $\%_{bell}$  (grafico in Figura 22).

La prima parte di modellazione vera e propria consiste nella costruzione della gola dell'ugello secondo una geometria ottimale usata da Rao (ai tempi ingegnere alla Rocketdyne) e basata sull'intersezione di due archi di circonferenza definiti come segue:

$$x = 1.5 R_t \cos \theta \quad y = R_t (1.5 \sin \theta + 1.5 + 1)$$

per la sezione di entrata, con  $-103^\circ < \theta < -90^\circ$  (l'angolo iniziale di  $-103^\circ$  è scelto dal progettatore della camera di combustione [2] ma può anche essere fissato ad un valore differente);

$$x = 0.382 R_t \cos \theta \quad y = R_t (0.382 \sin \theta + 0.382 + 1)$$

per la sezione di uscita, con  $-90^\circ < \theta < \theta_n - 90^\circ$ .

Per la costruzione della campana è invece necessario definire prima tre punti geometrici:

- punto di inflessione N:  $N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.382 R_t \cos(\theta_n - 90^\circ) \\ R_t [0.382 \sin(\theta_n - 90^\circ) + 0.382 + 1] \end{bmatrix}$
- punto tangente alla sezione d'efflusso E:  $E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e \\ L_{ugello} \end{bmatrix}$
- punto Q di intersezione delle rette passanti da N con倾inazione  $\theta_n$  e da E con倾inazione  $\theta_e$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NQ} &= m_1 x + C_1 \text{ con } m_1 = \tan \theta_n \text{ e } C_1 = N_y - m_1 N_x & Q_x &= \frac{C_2 - C_1}{m_1 - m_2} \\ \overrightarrow{QE} &= m_2 x + C_2 \text{ con } m_2 = \tan \theta_e \text{ e } C_2 = E_y - m_2 E_x & Q_y &= \frac{m_1 C_2 - m_2 C_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

La campana infine risulta essere una curva di Bézier quadratica di equazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2 N_x + 2(1-t)t Q_x + t^2 E_x & 0 \leq t \leq 1 \\ y(t) &= (1-t)^2 N_y + 2(1-t)t Q_y + t^2 E_y & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

## 8.5. Confronto tra ugello 10:1 e 16:1

I motori F-1 prodotti dalla Rocketdyne avevano in origine un ugello il cui rapporto di espansione era 10:1; essi infatti non furono inizialmente progettati nello specifico per lo stadio di lancio del Saturn V. Gli ingegneri decisero quindi a posteriori di aggiungere un'espansione dell'ugello iniziale allo scopo di migliorare vari parametri del lanciatore: i più rilevanti sono l'impulso specifico nel vuoto e la quota a cui è raggiungibile l'espansione ottima (adattata alla traiettoria che il lanciatore avrebbe percorso).

Tale espansione non poteva essere raffreddata dal già presente regenerative cooling: si optò dunque per una soluzione che prevedesse l'utilizzo dei gas di scarico della turbina, ricchi di carbonio e quindi con bassa conducibilità termica, per il raffreddamento attraverso film cooling. Tale tipo di raffreddamento è realizzato immettendo i gas di scarico sulle pareti dell'ugello attraverso un collettore che ne abbraccia l'intera circonferenza.

L'estensione dell'ugello è realizzata da due pareti in lega di nickel intervallate da bande circolari in CRES: tale costruzione saldata conferisce ottima resistenza termica alle pareti e una buona resistenza agli sforzi radiali a cui l'ugello è sottoposto.

Di seguito sono confrontati i principali parametri del motore con e senza l'espansione dell'ugello, ricavati tramite il software RPA:

|             | $p_e$ [bar] | $T_e$ [K] | $H$ [kJ/kg] | $\gamma$ | $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | $v_e$ [m/s] |
|-------------|-------------|-----------|-------------|----------|-----------------------------|-------------|
| <b>10:1</b> | 0.803       | 1673.7    | -5058.1     | 1.2439   | 0.1304                      | 2910.6      |
| <b>16:1</b> | 0.423       | 1473.0    | -5429.9     | 1.2521   | 0.0781                      | 3035.6      |

|             | $I_{vac}$ [s] | $I_{opt}$ [s] | $I_{sl}$ [s] | $T_{vac}$ [kN] | $T_{opt}$ [kN] | $T_{sl}$ [kN] |
|-------------|---------------|---------------|--------------|----------------|----------------|---------------|
| <b>10:1</b> | 297.36        | 276.44        | 270.95       | 7816.3         | 7266.3         | 7122.2        |
| <b>16:1</b> | 306.25        | 288.59        | 263.99       | 8050.0         | 7585.9         | 6939.3        |

Tabella 17: Confronto tra ugello 10:1 e 16:1

Si può notare un miglioramento nella spinta e nell'impulso specifico in corrispondenza dell'espansione ottima e dell'espansione nel vuoto, mentre si ha un calo di prestazione a livello del mare: ciò è dovuto al fatto che l'ugello sovraespande in maniera più marcata a pressione standard, poiché il punto di espansione ottima viene spostato a pressioni inferiori. Ciò non risulta essere un problema in quanto la spinta rimane sufficiente al lancio, mentre i benefici ottenuti alle quote di missione sono rilevanti.

## 9. Sistemi di raffreddamento

### 9.1. Cooling della camera di spinta

I motori a propellente liquido sfruttano varie tecnologie per il raffreddamento delle pareti della camera di spinta. Nel caso analizzato, il motore F-1 sfrutta due tipi di raffreddamento: il film cooling, che protegge le pareti dell'estensione dell'ugello attraverso un sistema di iniezione, e il raffreddamento rigenerativo, che utilizza il combustibile come fluido refrigerante passante attraverso una serie di tubi che costituiscono la parete stessa dell'ugello.

#### 9.1.1 Scambio termico convettivo e film cooling

Per poter analizzare la protezione termica delle pareti della camera di spinta, è in primo luogo necessario stimare il valore di scambio termico convettivo dai gas combusi alle pareti stesse. La trattazione dello scambio termico convettivo nel caso preso in analisi viene affrontata tenendo conto dalle alte velocità dei gas combusi: ciò porta alla formazione di uno strato limite, che si assottiglia lungo il convergente in concomitanza con l'accelerazione del fluido subsonico, raggiungendo il minimo in gola, per poi ispessirsi nel divergente. Lo scambio termico è quindi un problema riguardante lo strato limite e il suo spessore, la sua temperatura e la velocità del fluido. Poiché si raggiunge il minimo spessore dello strato limite in gola, ci si aspetta di avere il massimo scambio convettivo nel punto dell'ugello in cui il rapporto  $A_t/A$  è minimo. Questa osservazione è di particolare rilevanza, poiché, come si vedrà più avanti, per determinare la portata massica necessaria per il film cooling, si utilizzerà l'area della sezione minima dell'estensione dell'ugello, che corrisponde all'area della sezione con rapporto di espansione 10:1. Risulta complicato determinare il valore preciso del calore scambiato in modo convettivo tra i gas combusi e le pareti, in quanto lo strato limite è fortemente influenzato da vari fattori, quali la curvatura delle pareti, il gradiente di pressione in direzione assiale, il gradiente di temperatura associato all'alta intensità del flusso di calore; è tuttavia possibile utilizzare un metodo semi-empirico per fare una stima accurata.

Lo scambio convettivo per unità di area lato gas, all'interfaccia tra fluido e superficie solida, è descritto dal coefficiente di film  $h_g$ :

$$q = h_g (T_{aw} - T_{wg})$$

Per determinare la temperatura  $T_{wg}$  è sufficiente moltiplicare la temperatura in camera di combustione per un fattore pari a 0.8, fattore che tiene conto della presenza di depositi solidi di carbonio sulle pareti (tale valore verrà giustificato in questa trattazione). Per comprendere il significato della temperatura adiabatica  $T_{aw}$  è necessaria una piccola digressione trattata in [Appendice H](#).

Nel caso preso in esame, il valore della temperatura  $T_{aw}$  è determinabile scalando la temperatura in camera di combustione di un fattore detto "recovery factor"  $f_{aw}$ , definito come legame tra  $T_{aw}$  e le temperature statica e totale del flusso libero e con valore compreso tra 0.9 e 0.98. In particolare il recovery factor rappresenta il rapporto tra l'aumento della temperatura causato dall'attrito e l'aumento causato dalla compressione adiabatica. Esso è determinabile sperimentalmente o può essere stimato tramite la seguente relazione

$$f_{aw} = \frac{1 + r \left( \frac{\gamma-1}{2} M_x^2 \right)}{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} M_x^2 \right)} \quad r = Pr^{0.33};$$

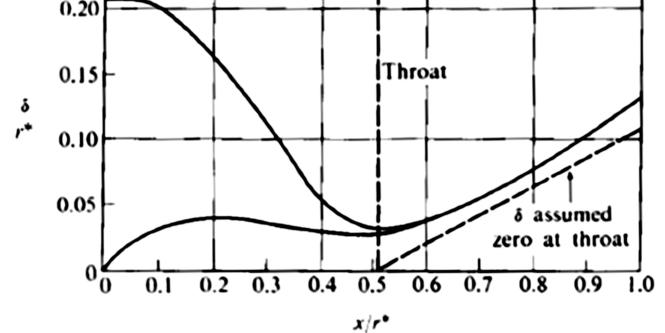


Figura 18: Strato limite sulla parete dell'ugello

È necessario precisare che la temperatura in camera di combustione  $T_c$  utilizzata è quella teorica moltiplicata per il fattore correttivo della velocità caratteristica elevato al quadrato. Quest'ultima velocità infatti dipende unicamente dalla variabile  $\sqrt{T_c}$ . Il suddetto fattore varia in un intervallo compreso tra 0.87 e 1.03, mentre il valore utilizzato nella trattazione, ossia 0.975, è il valore sperimentale adottato dalla fonte [6]

Per stabilire il valore di calore scambiato per unità di area rimane da calcolare solo il coefficiente di film  $h_g$ , che può essere ricavato mediante la formula empirica di Bartz:

$$h_g = \left[ \frac{0.026}{D_t^{0.2}} \left( \frac{\mu^{0.2} C_p}{Pr^{0.6}} \right)_{ns} \left( \frac{p_c g}{c_*} \right)^{0.8} \left( \frac{D_t}{R} \right)^{0.1} \right] \left( \frac{A_t}{A} \right)^{0.9} \sigma \quad (*)$$

[6] [7]

Esso dipende, tra gli altri parametri, dal numero di Prandtl, dalla viscosità  $\mu$ , dal raggio di curvatura in gola dell'ugello e dal fattore correttivo  $\sigma$ , che tiene conto delle variazioni di proprietà fisiche attraverso lo strato limite. La viscosità del gas al valore di interesse di ristagno (ns) è definita in questo modo:

$$\mu = (46.6 \times 10^{-10}) Mm^{0.5} T^{0.6} \quad (*)$$

Dove  $Mm$  è stato presa dalla simulazione RPA (appendice da fare), ed è riferita al valore alla fine della camera di combustione. Il raggio di curvatura in gola dell'ugello è stato ricavato tramite approssimazione di Rao. Il valore nelle parentesi quadre è costante, una volta fissata la geometria della camera e i parametri di combustione ( $c_*$ ,  $p_c$ ). Il valore nelle parentesi con pedice 'ns' si riferisce ai valori di  $\mu$ ,  $C_p$  e  $Pr$  all'inizio del convergente. I fattori moltiplicativi al di fuori delle parentesi quadre dipendono dalla posizione in cui si vuole calcolare tale coefficiente. Supponendo conosciuto il punto in cui si vuole calcolare  $h_g$ , l'unica incognita è quindi  $\sigma$ . Questo fattore può essere determinato in termini di temperatura di combustione, temperatura locale a parete e numero di mach locale mediante un ulteriore relazione di Bartz; in alternativa è possibile determinarlo per interpolazione, in funzione del rapporto  $T_{wg}/T_c$  e del valore di  $\gamma$  dai grafici forniti dalla fonte bibliografica [6]

Assumendo il rapporto  $T_{wg}/T_c$  pari a 0.8, ricavato sperimentalmente e adottato nella trattazione dello stesso tipo di dimensionamento nel riferimento [7], si tiene conto della presenza del deposito di carbonio sulle pareti. Noto il valore di  $\gamma$ , pari a 1.1754, e ricordando che il fine ultimo del calcolo è progettare il film cooling dell'ugello aggiuntivo (intervallo di rapporto di espansione  $\epsilon = 10/16$ ), è possibile determinare dal grafico che il valore del fattore correttivo si attesta intorno a 0.7 in tutto l'intervallo in esame. Il coefficiente di film dipende infine anche dal rapporto  $A_f/A$ , dove  $A$  è l'area della sezione locale. Il valore di questo rapporto è stato fatto variare per via numerica tra 10 e 16, calcolando poi per ciascun valore il corrispondente coefficiente di film e, in seguito, la corrispondente portata minima in massa per effettuare un adeguato film cooling. Il valore di  $h_g$  così ottenuto tiene unicamente in conto del calore scambiato tra fluido e parete, senza considerare la presenza di eventuali prodotti di combustione allo stato solido. I prodotti di combustione della coppia LOX – RP-1 provenienti dalla combustione del Gas Generator, introdotti sulla parete dell'ugello aggiuntivo dal rapporto di espansione 10 fino all'efflusso, contengono circa il 37% di particolato solido  $C_{graf}$ . Tale dato è stato ottenuto tramite analisi CEA, presentata in Appendice E). Queste particelle tendono a depositarsi sulle pareti della camera di combustione, formando un efficace strato isolante: la valutazione quantitativa dell'efficacia dell'isolamento di questo strato, necessaria per il corretto calcolo dello scambio di calore, può essere effettuata solo sperimentalmente. Lo strato isolante è formato a sua volta da uno strato superficiale di fuliggine, che ne sovrasta uno più tenace: quest'ultimo aumenta la resistenza termica lato gas, tale che la temperatura del deposito di carbonio all'interfaccia lato gas si avvicini alla temperatura del gas all'aumentare dello spessore del layer di carbonio (questo giustifica qualitativamente il valore di 0.8 considerato per il rapporto di  $T_{wg}/T_c$ ). Per il calcolo dello scambio termico nel caso di presenza di deposito solido sulle pareti della camera, l'equazione (\*) viene corretta dalla seguente equazione, che vede una sostituzione del coefficiente di film con il coefficiente di conduttanza termica complessiva lato gas  $h_{gc}$

$$h_{gc} = \frac{1}{\frac{1}{h_g} + R_d}$$

Questo coefficiente considera sia  $h_g$  sia il coefficiente di resistenza causata dal deposito solido  $R_d$ , il cui valore è dipendente dal rapporto di espansione e dalle condizioni di pressione e rapporto di miscela (grafico specifico in sezione 9). Dopo aver calcolato tutti i parametri necessari, è quindi possibile progettare il sistema di film cooling dell'estensione dell'ugello. Il film cooling delle pareti interne è ottenuto iniettando i gas di scarico della turbina, forniti alla cavità tra le pareti dal collettore di scarico della turbina, nel flusso di scarico della camera di spinta

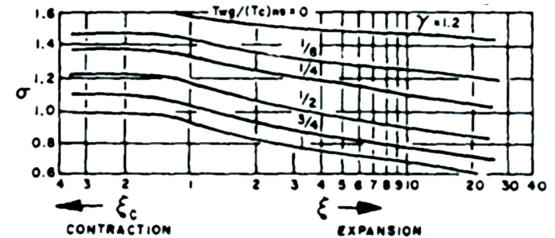


Figura 19: Valore di  $\sigma$

attraverso fessure formate da 23 file di scandole sovrapposte che formano la parete interna.(mettere una immagine per far capire). Per lo sviluppo dei calcoli si consideri che il fluido di lavoro è gas con presenza di particolato, ed è quindi possibile utilizzare la relazione di Hatch e Papell, sostituendo al coefficiente  $h_g$  il coefficiente  $h_{gc}$  appena calcolato.

$$\frac{T_{aw} - T_{wg}}{T_{aw} - T_{co}} = \exp \left[ - \left( \frac{h_{gc}}{G_c C_{pvc} \eta_c} \right) \right]$$

Dove  $T_{co}$  è la temperatura iniziale del fluido refrigerante, ossia la temperatura all'uscita dello scambiatore;  $C_{pvc}$  è il calore specifico medio a pressione costante del fluido refrigerante, che è stato numericamente ottenuto interpolando i valori dopo la combustione nel Gas Generator in frozen equilibrium; infine  $\eta_c$  è l'efficienza del film cooling ed è un fattore che ha scopo correttivo, ossia tiene conto della quantità di refrigerante gassoso perso nel flusso di gas di combustione che quindi non produce effetti di raffreddamento. I valori dell'efficienza variano dal 25 al 65 in percentuale in funzione della geometria dell'iniezione del refrigerante e dalle condizioni di flusso. Il valore  $G_c$  rappresenta la portata di gas che costituisce il film cooling necessaria a ottenere il raffreddamento voluto. Dalla precedente equazione si evince che l'apporto termico dipende dal coefficiente di scambio  $h_{gc}$  e dalla differenza tra temperatura adiabatica a parete e la temperatura del refrigerante; il calore assorbito è proporzionale alla capacità termica del film refrigerante dal valore di temperatura iniziale a quello finale. Esiste quindi un equilibrio tra apporto di calore e aumento di temperatura del refrigerante: raggiunto questo equilibrio si raggiunge la condizione adiabatica e la superficie della parete avrà localmente la medesima temperatura del film; infatti la temperatura della parete varierà assialmente dalla temperatura iniziale del refrigerante fino alla temperatura massima ammissibile. L'obiettivo del calcolo è perciò quello di determinare la portata massica di fluido refrigerante per unità di area  $G_c$ , che poi verrà moltiplicato per l'area dell'estensione dell'ugello ad ottenere il valore di portata massica necessaria per il film cooling. Si noti che la portata dipende dal valore  $h_{gc}$ , a sua volta dipendente dal rapporto  $A_t/A$ , che è stato fatto variare tra 1:10 e 1:16: la portata massica che sarà sufficiente a raggiungere un efficiente film cooling in ogni sezione dell'ugello sarà la portata massima tra le portate calcolate, ossia quella ottenuta per rapporto  $A_t$  su  $A$  maggiore e perciò  $A$  minore, quindi l'area della sezione 1:10. Il valore di  $G_c$  ottenuto è minore della portata elaborata dal Gas Generator, e questo è un risultato prevedibile in quanto il valore di portata passante per il Gas Generator è dettato dai requisiti di potenza della turbina e non dalle esigenze del film cooling. È stato perciò dimostrato che la portata massica elaborata è sufficiente a raggiungere l'obiettivo desiderato di raffreddamento delle pareti.

### 9.1.2 Regenerative cooling

Il motore preso in esame sfrutta lo scambio termico rigenerativo come tecnica di raffreddamento delle pareti della camera di spinta, in particolare dalla gola e per la lunghezza dell'ugello fino al piano caratterizzato da rapporto di espansione 10:1. Il regenerative cooling utilizza una quota parte di combustibile stivato, circa il 70%, come refrigerante: esso viene indirizzato in una serie di tubi opportunamente sagomati saldobrastrati insieme che costituiscono la parete stessa dell'ugello di efflusso. Lo scambio di calore avviene quindi tra due flussi in movimento separati da una parete. Questa tecnica vanta di alcuni importanti vantaggi, tra i quali il fatto che non comporti nessuna perdita di prestazioni, infatti l'energia termica assorbita dal refrigerante viene restituita all'iniettore, e abbia una struttura relativamente leggera. Tuttavia si possono riscontrare alcuni svantaggi, come alte perdite di pressione per elevati livelli di flusso di calore.

La figura descrive la variazione di temperatura durante lo scambio di calore per regenerative cooling: a sinistra scorrono i gas combusti a contatto con il boundary layer e la cui temperatura è  $T_{aw}$  che diminuisce sensibilmente all'interno del boundary layer fino a raggiungere la temperatura della parete lato gas  $T_{wg}$ . All'interno dello spessore della parete la temperatura continua a diminuire raggiungendo la temperatura  $T_{wc}$ , ossia la temperatura della parete a contatto con il refrigerante; quest'ultimo quindi sarà caratterizzato dalla temperatura  $T_{co}$  (bulk temperature del refrigerante) (scrivere definizione).

Proprio a causa dello scambio di calore tra gas e refrigerante, la temperatura  $T_{co}$  aumenterà dal punto di ingresso fino al momento in cui l'RP-1 lascerà il condotto di raffreddamento: essa è quindi una funzione del calore assorbito e della portata. A livello strutturale è necessario svolgere il dimensionamento nel punto più critico, ossia la sezione all'altezza della gola del tubo di ritorno, poiché

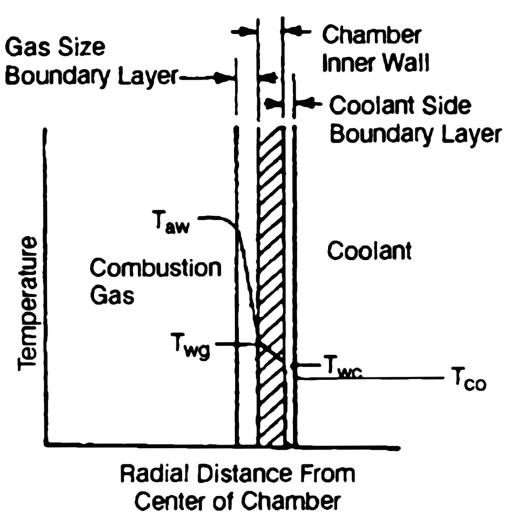


Figura 20: Variazione di temperatura attraverso la parete

corrisponde all'ultima sezione attraversata dal refrigerante prima di essere immesso nella camera di spinta.

L'obiettivo ultimo del regenerative cooling è quello di mantenere la temperatura della parete al di sotto della temperatura critica alla quale possono realizzarsi fusioni localizzate o un decremento delle prestazioni del materiale. La temperatura limite nel caso della parete della camera di spinta dell'F-1, realizzata in Inconel X750, è tra 550 K e 670 K. Identificate le temperature caratteristiche del processo di raffreddamento è quindi possibile calcolare il flusso di calore come:

$$q = h_{gc} (T_{aw} - T_{wg}) = \frac{k}{t} (T_{wg} - T_{wc})$$

Avendo che il flusso di calore attraverso i tre strati (strato limite gassoso, parete solida, strato limite liquido) è lo stesso, posso calcolare il parametro H (serie delle conduttività dei tre strati)

$$q = H (T_{aw} - T_{co})$$

$$H = \frac{1}{\frac{1}{h_{gc}} + \frac{1}{h_c} + \frac{t}{k}}$$

Dove  $h_{gc}$  è la conduttività termica complessiva lato gas,  $h_c$  è il coefficiente di scambio termico lato refrigerante, mentre  $t$  è lo spessore della parete e  $k$  la conduttività termica della parete della camera. Osservando la precedente equazione è possibile introdurre un ulteriore requisito che il regenerative cooling deve soddisfare: per mantenere la temperatura della parete entro valori contenuti, è necessario che la conduttività termica complessiva lato gas  $h_{gc}$  sia minimizzata, mentre il coefficiente di scambio termico del refrigerante sia molto alto, così come il rapporto  $t/k$ . Dal momento che la differenza di temperatura è inversamente proporzionale al coefficiente di scambio termico del flusso di calore, la diminuzione della temperatura sarà più rapida tra gas caldo e parete interna della camera.

Se per determinare il valore di  $h_{gc}$  è sufficiente ripercorrere la trattazione riguardante lo scambio termico convettivo, per comprendere il significato del coefficiente  $h_c$  e determinarne il valore numerico è necessario approfondire il suo legame con pressione e temperatura critica del refrigerante (vedi [sezione 9](#))

Per i motivi illustrati in appendice si predilige avere una pressione che sia tra il 30 e il 70 % della pressione critica. Il dimensionamento del sistema di regenerative cooling è finalizzato a stabilire il numero di tubi che compongono la parete dell'ugello d'efflusso e le dimensioni dei singoli tubi, in particolare il diametro interno e lo spessore. Prima di procedere alla trattazione matematica è necessario chiarire alcune assunzioni considerate durante lo svolgimento dei calcoli. Il dimensionamento viene effettuato nella condizione più critica, ossia vengono dimensionati i tubi di ritorno nella sezione di gola, perché la gola rappresenta il punto caratterizzato dal maggior valore di flusso termico e attraverso la sezione finale dei tubi di ritorno scorre il refrigerante alla sua temperatura massima raggiunta dopo aver percorso tutto il sistema di raffreddamento. La forma dell'ugello d'efflusso fa fede alla modellazione illustrata precedentemente e viene perciò considerata nota: dalla modellazione e dalla simulazione RPA verranno ricavati il diametro di gola e i raggi di curvatura utili a determinare il raggio di curvatura medio  $R$ ; il numero di tubi rimane costante fino al piano caratterizzato dal rapporto di espansione 3:1, per poi raddoppiare fino al piano con rapporto di espansione 10:1 (sdoppiamento spiegato in [sottosezione 8.1](#)). Infine, avendo come variabili sia il numero di tubi sia il loro spessore, è necessario ipotizzare o fissare uno dei due dati: è stato quindi fissato il numero reale di tubi che compongono l'ugello nel primo tratto, ossia 178, mantenendo come incognita lo spessore. I calcoli preliminari al dimensionamento permettono di determinare, tramite una trattazione analoga a quella illustrata per lo scambio convettivo, il valore di flusso di calore specifico  $q$ , funzione della conduttività termica, della temperatura adiabatica a parete e della temperatura della parete lato gas. La temperatura a parete lato gas  $T_{wg}$  è determinata sperimentalmente, mentre la temperatura adiabatica a parete  $T_{aw}$  è ottenuta moltiplicando la temperatura in camera di combustione  $T_c$  per il fattore di recupero dello strato limite turbolento in gola (valore intermedio tra 0.9 e 0.98). Noto quindi il rapporto  $T_{wg}/T_c$  e  $\gamma$  dei gas combusti è possibile determinare il valore del fattore di correzione in gola ( $\sigma$ ) dai grafici riportati nella sezione precedente. Infine è possibile calcolare il coefficiente di scambio termico lato gas tramite la formula (\*) e quindi il valore di  $h_{gc}$

Dalle precedenti formule è possibile definire  $R_d$  la resistenza termica causata dal deposito solido in gola,  $R$  il raggio di curvatura dell'ugello calcolato come media dei due raggi di curvatura  $R_1$  ed  $R_n$ ,  $D_t$  il diametro di gola calcolato come due volte  $R_t$ . Terminati i calcoli preliminari è possibile passare al dimensionamento vero e proprio del sistema di refrigerazione. Sono noti i valori relativi alla lega X750 (conducibilità termica  $k_{lega}$ , modulo di elasticità  $E$ , coefficiente di espansione

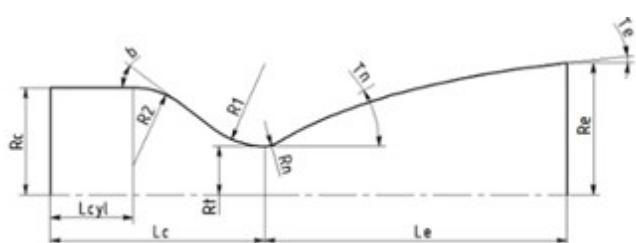


Figura 21: Definizioni grandezze geometriche ugello  
27

termica  $\alpha$ , coefficiente di Poisson  $\nu$ ) e vengono assunti i valori di bulk temperature del combustibile in gola, la sua conducibilità termica  $k_{fuel}$ , la sua densità (di stivaggio) e una costante  $C_1$  propria dell'RP1 utile per il calcolo del numero di Nusselt. [6][7] A questo punto per determinare lo spessore  $t$  dei tubi è possibile implementare un ciclo in *Matlab* che permetta di calcolare il numero dei tubi al variare dello spessore, per poi interrompere il ciclo quando il numero egualia il numero di tubi imposto: in questo modo si ottiene il valore dello spessore necessario. I calcoli svolti si basano su considerazioni fisiche e su formule empiriche. Il ciclo inizia con il calcolo della temperatura della parete lato combustibile.

$$T_{wc} = T_{wg} - \frac{qt}{k}$$

Necessario per determinare il valore del coefficiente di scambio termico del combustibile  $h_c$

$$h_c = \frac{q}{T_{wc} - T_{co}}$$

Per regioni caratterizzate da temperatura subcritica e dall'assenza di nucleate boiling, la relazione tra temperatura a parete e flusso di calore, che dipende per l'appunto dal coefficiente di scambio termico  $h_c$ , può essere descritta tramite l'equazione di Sieder-Tate per il trasferimento turbolento di calore a liquidi che fluiscono nei canali:

$$Nu = C_1 Re^{0.8} Pr^{0.4} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

Dove  $\mu$  è la viscosità del combustibile alla temperatura  $T_{co}$ , mentre  $\mu_w$  è la viscosità del combustibile alla temperatura della parete in gola. Questa relazione può essere riscritta esplicitando i singoli termini:

$$Nu = \frac{h_c d}{k} = C_1 \left( \frac{\rho V_{co} d}{\mu} \right)^{0.8} \left( \frac{\mu C_p}{k} \right)^{0.4} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (E1)$$

Dove le incognite sono il diametro dei tubi  $d$  e la velocità media del combustibile  $V_{co}$ . Quest'ultima può essere calcolata in funzione del diametro dei tubi e del loro numero

$$V_{co} = \frac{\frac{\dot{W}_f}{\rho}}{\frac{N}{2} \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)}$$

Con  $\dot{W}_f$  la portata massica di combustibile, corrispondente al 70 % della portata totale del combustibile. Il numero di tubi è ottenuto, qualitativamente, dividendo il perimetro dell'ugello della sezione di gola e il diametro del tubo considerato. Raffinando la formula con fattori correttivi si trova la seguente formula empirica

$$N = \frac{\pi [D_t + 0.8(d + 0.04)]}{d + 0.04} \quad (E2)$$

Il fattore 0.8 ha il ruolo di fattore di correzione: il centro dei tubi è collocato su una circonferenza, piuttosto che su una retta. Sostituendo quindi  $V_{co}$  all'interno dell'equazione (E1) esplicitandone  $N$  ed eguagliando l'espressione trovata all'equazione (E2) è possibile determinare il valore del diametro dei tubi. Sostituendo infine il valore trovato all'interno dell'equazione (E2) si ottiene il numero dei tubi. Analizzando in un 'ciclo for' i passaggi appena visti, è possibile determinare il valore di  $t$  tale per cui si ha il numero di tubi  $N$  desiderato.

## Appendice

### A. Immagini e schemi

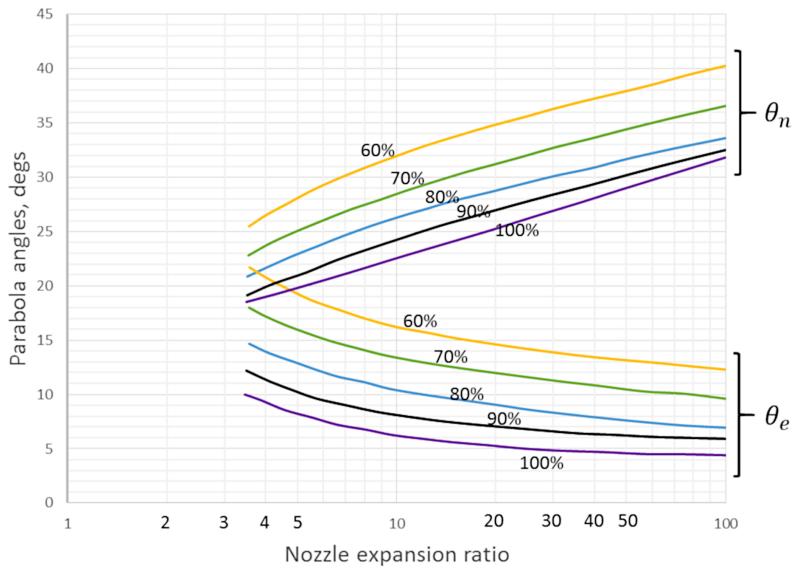


Figura 22: Grafico di interpolazione degli angoli per la costruzione dell'ugello

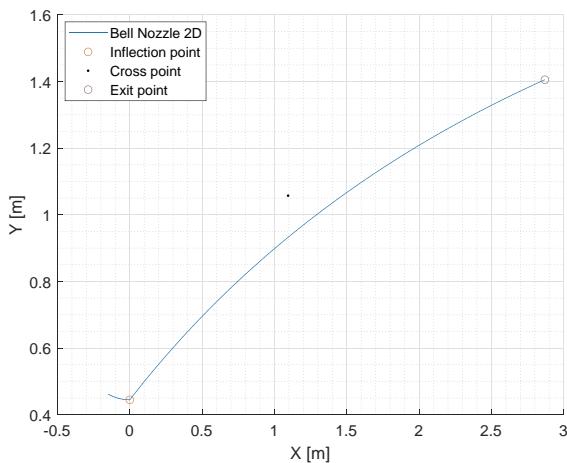


Figura 23: Costruzione ugello 2D 1:10

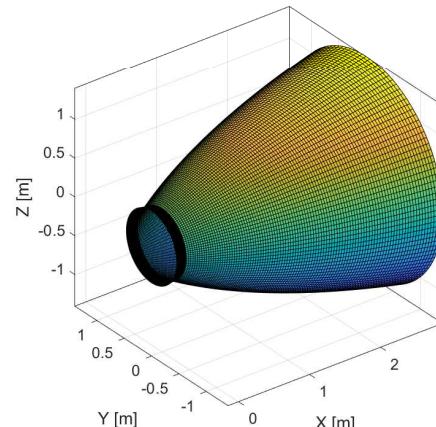


Figura 24: Costruzione ugello 3D 1:10

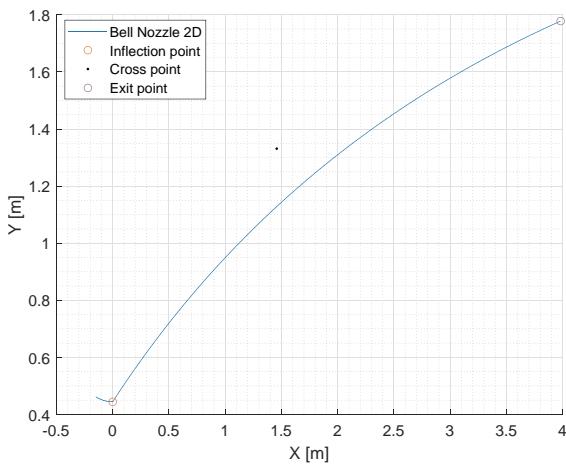


Figura 25: Costruzione ugello 2D 1:16

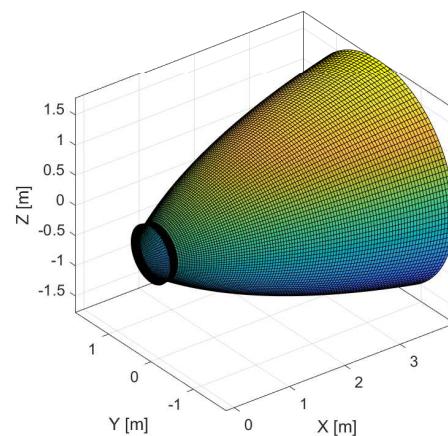


Figura 26: Costruzione ugello 3D 1:16

## B. Grafici di varie grandezze in funzione del tempo di volo

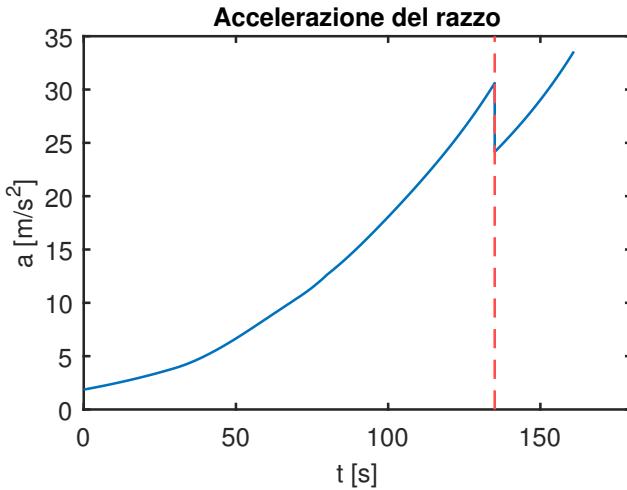


Figura 27: Accelerazione in funzione del tempo

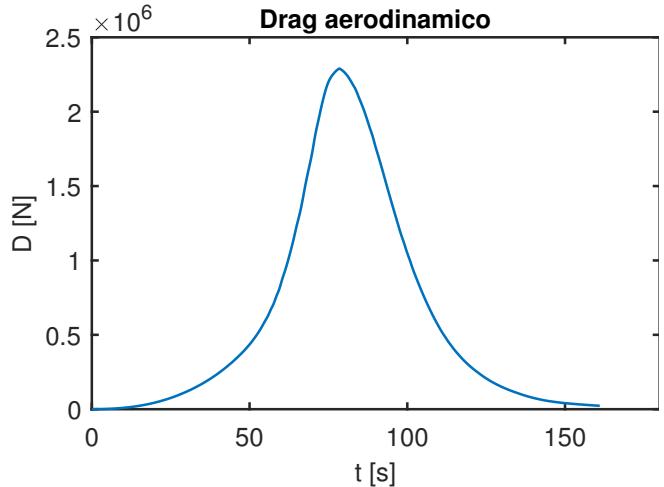


Figura 28: Drag in funzione del tempo

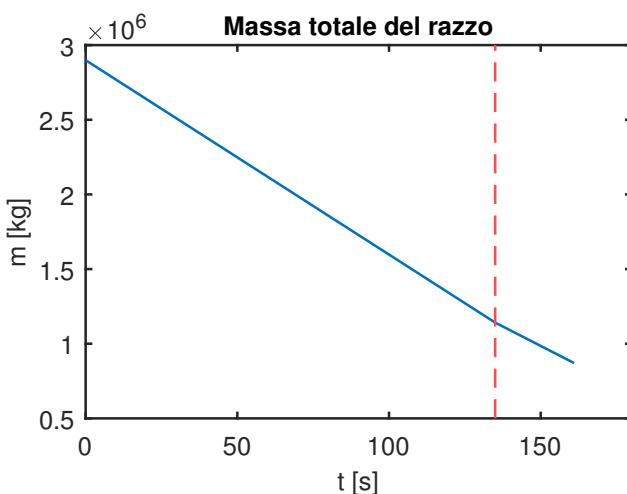


Figura 29: Massa totale in funzione del tempo

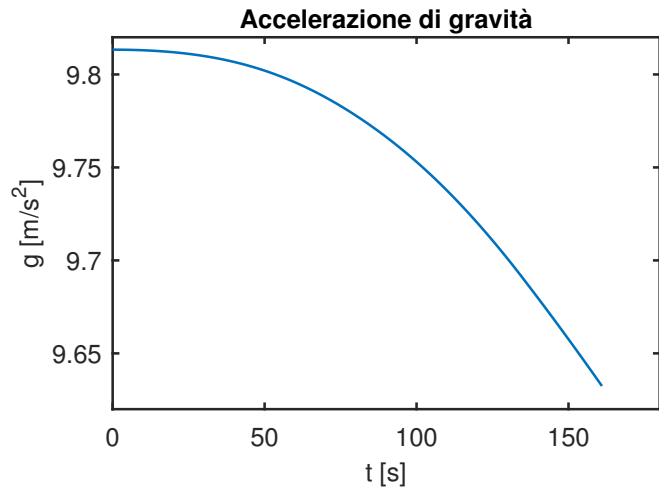


Figura 30: Accelerazione di gravità in funzione del tempo

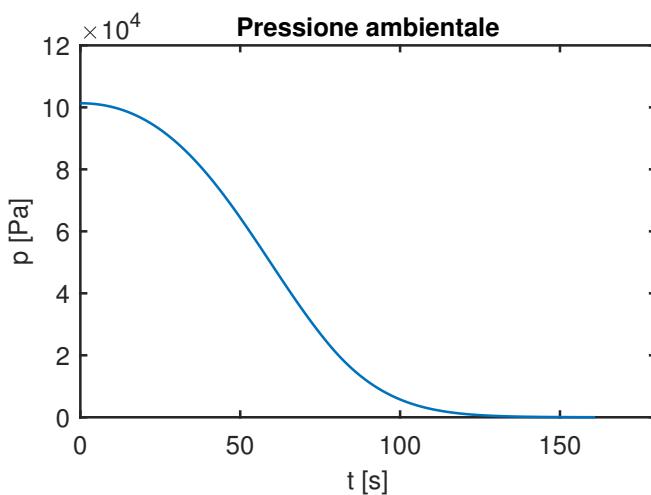


Figura 31: Pressione ambientale in funzione del tempo

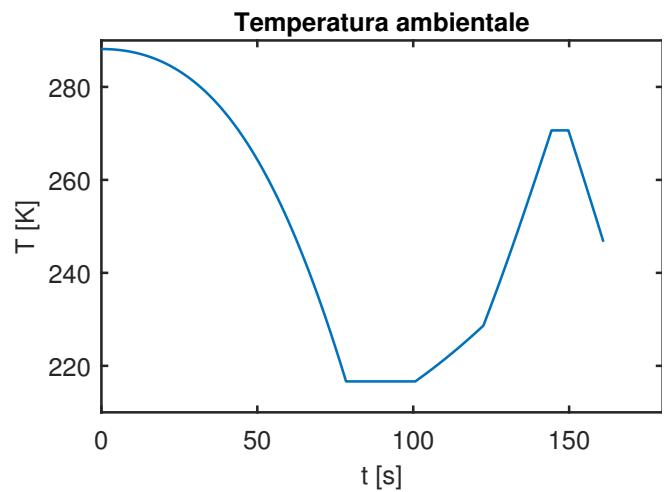


Figura 32: Temperatura ambientale in funzione del tempo

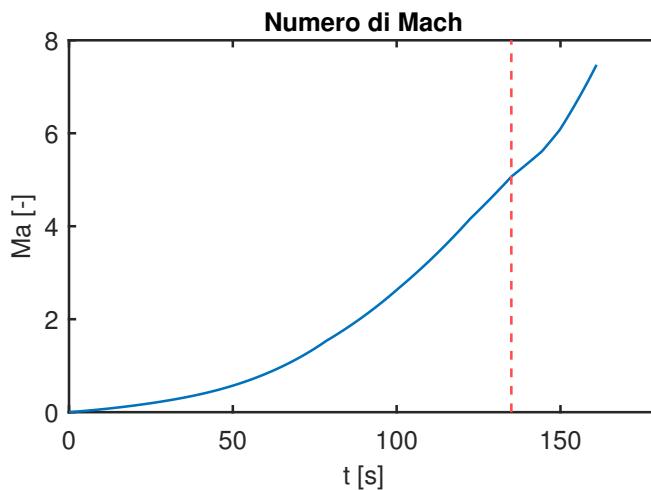


Figura 33: Numero di Mach in funzione del tempo

## C. Tabelle e immagini serbatoi

|            | $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | $\sigma_r$ [bar] | $\sigma_y$ [bar] | E [bar]   | $\nu$ [-] | $\Sigma_r$ [-]         | $\Sigma_y$ [-]          |
|------------|-----------------------------|------------------|------------------|-----------|-----------|------------------------|-------------------------|
| Al2219-T87 | 2851                        | 4757.38          | 3930             | 730832.87 | 0.33      | $\frac{\sigma_r}{1.3}$ | $\frac{\sigma_y}{1.25}$ |

Tabella 18: Lega Alluminio 2219-T9

|      | a [m] | b [m] | lc [m] |
|------|-------|-------|--------|
| RP-1 | 5.03  | 3.05  | 7.01   |
| LOX  | 5.03  | 3.05  | 13.4   |

Tabella 19: Dati geometrici

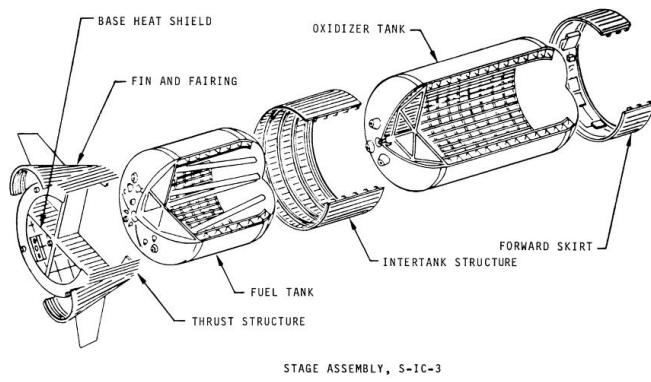


Figura 34: Raffigurazione serbatoi

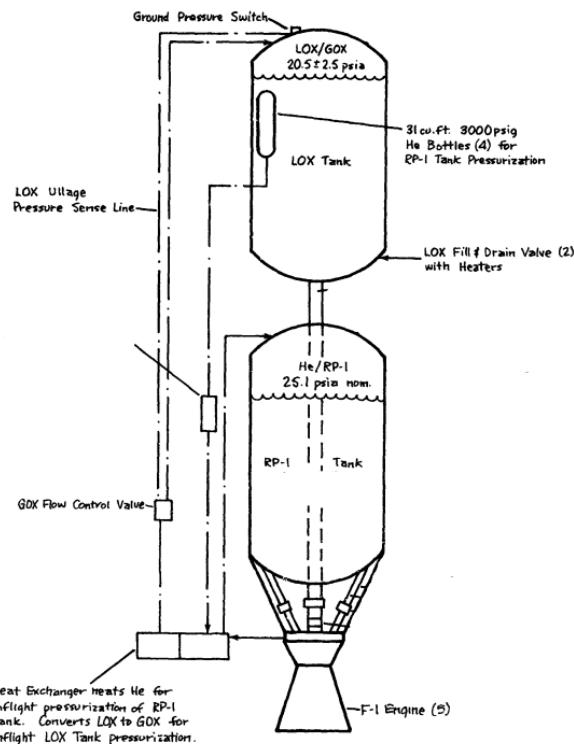


Figura 35: Immagine con dati riguardo  $P_u$

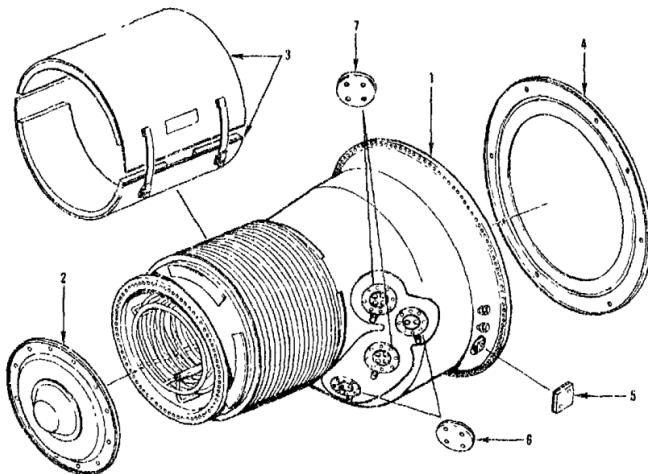


Figura 36: Esploso dello scambiatore di calore

## D. Confronto peso molecolare gas generator tra caso Fuel Rich e Oxidizer Rich

Per poter apprendere come l'O/F influisca sulla massa molare dei prodotti si è utilizzato il software NASA CEA (CEAM [10]). Si è utilizzato un problema HP, in modo da far raggiungere l'equilibrio chimico senza bloccarlo imponendo una temperatura (il problema HP di NASA CEA, con il GG, tende a sovrastimare la temperatura raggiunta come si vedrà in Appendice E). La temperatura di equilibrio in questo caso è un parametro importante poichè in uscita dal GG abbiamo il vincolo della palettatura di turbina. Si è imposto che la temperatura in uscita dal GG debba essere minore di 1500K sia in FR che OR. Si è fatto variare l'O/F da nel range 0.2/18, si sono plottati i grafici di MM, T,  $c_p$  in funzione dell'O/F.

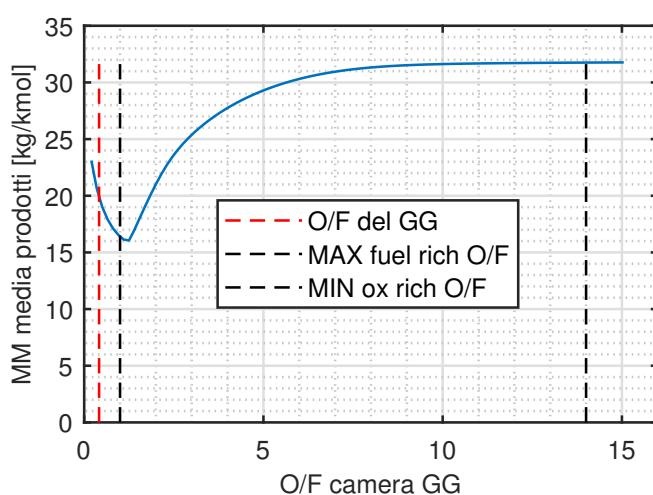


Figura 37: Massa Molare prodotti in funzione di O/F

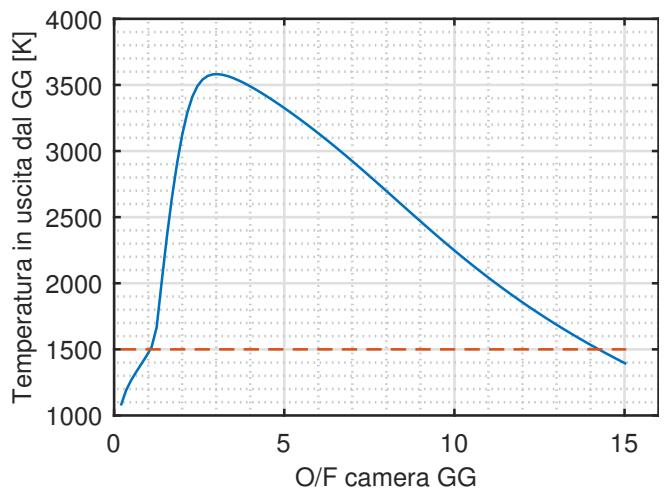


Figura 38: Temperatura in uscita dal GG in funzione di O/F

Dal primo grafico si nota come ad O/F bassi (fuel rich mixture) si ottenga una massa molare media più bassa rispetto a miscele oxidizer rich. La zona compresa tra le due linee tratteggiate nere, nel primo grafico, non deve essere considerata poichè ad essa sono associate temperature troppo elevate per la turbina, come si nota nel grafico immediatamente a destra. Un altro vantaggio dato dalle miscele FR è che il valore di  $c_p$  è più alto che nel caso OR. Questo permette di ottenere un lavoro specifico della turbina maggiore con le miscele FR. Infatti:

$$\Delta h_{id} = c_p \left( 1 - \epsilon^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) \quad ()$$

Tale valore è influenzato principalmente dal valore di  $c_p$  (oltre che dal valore di  $\gamma$ ). Il calore specifico a pressione costante diminuisce, aumentando il rapporto O/F (per O/F > 3) Figura 39, per cui si ha una variazione di lavoro

specifico rispetto all’O/F, come mostra il grafico Figura 41. I valori interessanti sono sempre quelli che rispettano il vincolo di temperatura, quindi relativi ad O/F minori di 1 e maggiori di 14. Notiamo inoltre che i grafici di  $c_p$  e di  $\Delta h_{id}$  hanno andamenti simili, per cui la variazione di  $\gamma$  rispetto a O/F influenza poco l’andamento di  $\Delta h_{id}$  rispetto a  $c_p$  nella formula C1. Questo perché  $\gamma$  varia nell’intorno dell’unità su tutto l’intervallo considerato Figura 40

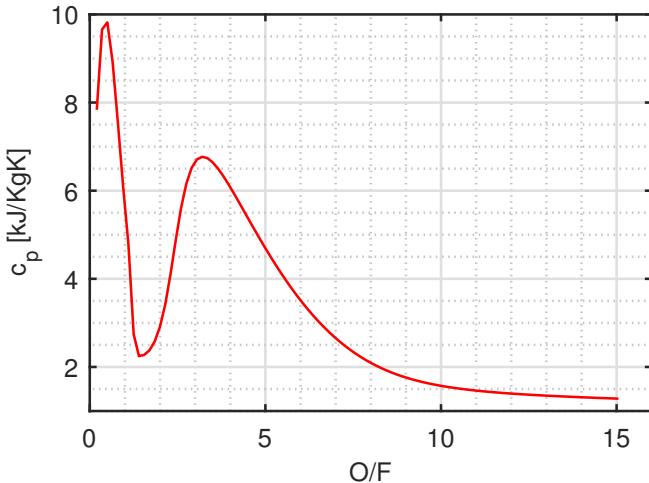


Figura 39:  $c_p$  in funzione dell’ O/F

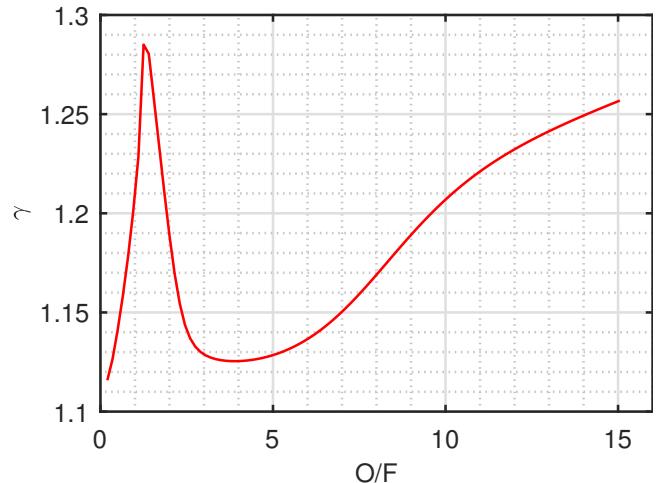


Figura 40:  $\gamma$  in funzione dell’ O/F

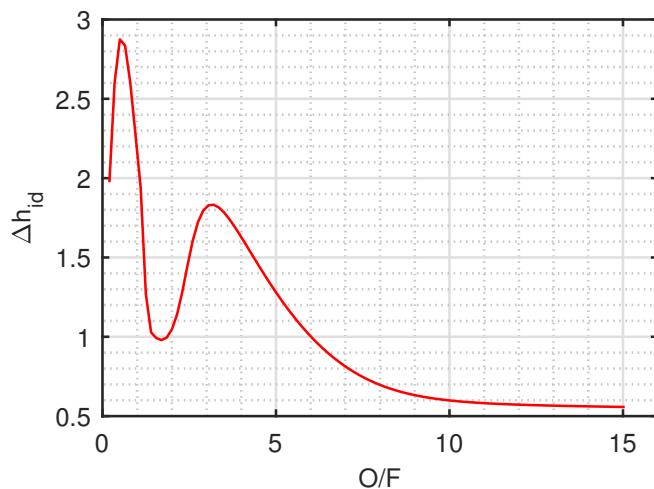


Figura 41: Lavoro specifico ideale della turbina

## E. Prodotti gas generator analizzati con software NASA CEA

In questa appendice sono presentati i dati ottenuti tramite simulazione in NASA CEA (CEAM) per quanto riguarda la combustione che avviene nel Gas Generator. Il problema risolto dal CEAM è di tipo *hp*, per cui la combustione raggiunge l’equilibrio senza l’imposizione di una particolare temperatura (l’assegnazione di una temperatura fissata nei problemi di tipo *tp* può bloccare l’equilibrio e imporre quindi una temperatura, processo che non è di nostro interesse). I dati in input sono i seguenti:

| <i>Prob</i> | $p_c$ [bar] | $T_{RP1}$ [K] | $T_{LOX}$ [K] | O/F   |
|-------------|-------------|---------------|---------------|-------|
| <i>hp</i>   | 67.57       | 293.15        | 90.15         | 0.416 |

Tabella 20: Dati in input CEAM

In output sono stati ottenuti i seguenti dati (sono stati selezionati alcuni valori rilevanti)

| $T_{comb}$ [K] | $MW$ [g/mol] | $c_p$ [Kj/KgK] |
|----------------|--------------|----------------|
| 1243           | 19.48        | 9.8082         |

Tabella 21: Dati in output CEAM

La temperatura di combustione ottenuta  $T_{comb}$  con l'esecuzione del programma è più alta rispetto a quella tabulata nei manuali del motore [5], che è di 1062 K. Alcune ipotesi che possono in parte giustificare questa differenza sono:

- Idealità dell'ambiente di combustione nel caso dell'analisi CEAM, in quanto la combustione avviene in ambiente adiabatico. Nella realtà, verosimilmente, ci saranno perdite di calore dovute a pareti diabatiche.
- Temperature non uniformi nel caso reale poiché l'O/F di iniezione non è omogeneo, in quanto si hanno zone più ricche di fuel sulle zone esterne del piatto di iniezione (ovvero zone raffreddate).
- Aumento di temperatura dovuto a reazioni fortemente esotermiche dei prodotti di combustione carboniosi
  - La fonte [8] discute di un problema rinvenuto durante la registrazione della temperatura nella camera di combustione GG. Venne registrato un anomalo aumento di temperatura dei gas nel tratto di connessione tra GG e turbina. Venne sospettata una incompleta combustione nella camera. Si fecero esperimenti in cui lo scarico del GG venne allungato con tubi che di lunghezze diverse (tra i 12 e 24m). L'innalzamento di temperatura venne notato anche con questi alti tempi di permanenza. Poiché l'esistenza di ossigeno a queste temperature, lungo tutto lo scarico, è da escludere (e quindi la combustione effettivamente è conclusa molto prima), vennero avanzate diverse ipotesi. Tra cui:
    - Le termocoppie per la misurazione della temperatura venivano raffreddate da masse di combustibile non vaporizzate
    - Reazioni secondarie fortemente esotermiche delle molecole carboniose (prodotti di combustione)
    - Gas di scarico veniva riscaldato dall'attrito viscoso a parete sul tubo di scarico

L'ipotesi più plausibile, dopo diversi altri test, fu quella che reazioni secondarie fortemente esotermiche erano favorite dopo la combustione. Questa ipotesi potrebbe essere avanzata anche nel nostro caso di analisi CEAM. Per cui la simulazione del programma potrebbe considerare alcune reazioni secondarie esotermiche che aumentano la temperatura.

In seguito viene presentata la percentuale in massa dei prodotti di combustione, ottenuti tramite la stessa esecuzione del problema *hp* del GG eseguita da CEAM:

| $CH_4$ | $CO$   | $CO_2$ | $C_2H_4$ | $C_2H_6$ | $H_2$  | $H_2O$ | $C(gr)$ |
|--------|--------|--------|----------|----------|--------|--------|---------|
| 15.22% | 28.36% | 6.27%  | 0.003%   | 0.011%   | 5.018% | 9.705% | 35.41%  |

Tabella 22: Percentuali in massa dei prodotti di combustione (CEAM)

## F. Schemi del gas generator

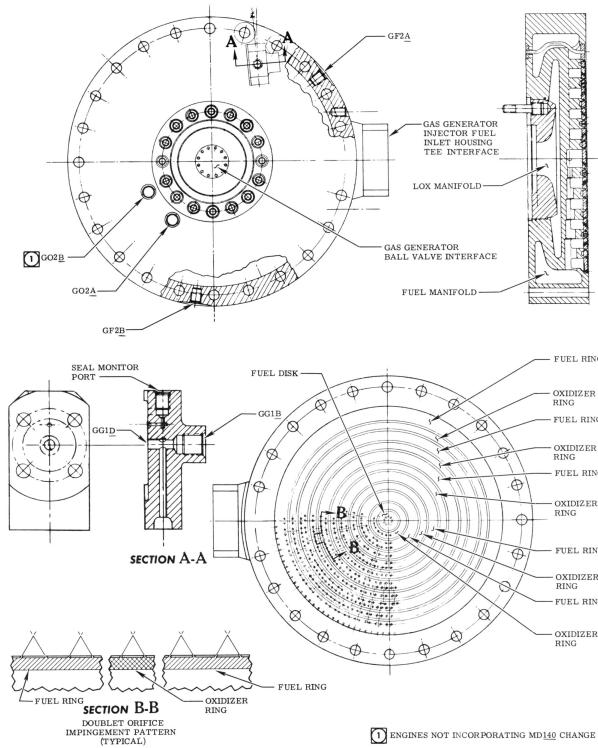


Figura 42: Piatto di Iniezione UMR - Gas Generator

## G. Diagrammi di velocità

### G.1. Triangoli velocità Pompa LOX

$$\overrightarrow{u_{0ind}} = 89.2475 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{v_{0ind}} = -89.2475 \vec{i}_u + 11.8311 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{c_{0ind}} = 0 \vec{i}_u + 11.8311 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{u_{1ind}} = 86.1918 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{v_{1ind}} = -76.4706 \vec{i}_u + 16.8556 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{c_{1ind}} = 9.7212 \vec{i}_u + 16.8556 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{u_{1imp}} = 115.3671 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{v_{1imp}} = -70.9707 \vec{i}_u + 12.5769 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{c_{1imp}} = 44.3964 \vec{i}_u + 12.5769 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{u_{2imp}} = 142.4285 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{v_{2imp}} = -44.6393 \vec{i}_u + 18.8654 \vec{i}_m [m/s]$$

$$\overrightarrow{c_{2imp}} = 97.7891 \vec{i}_u + 18.8654 \vec{i}_m [m/s]$$

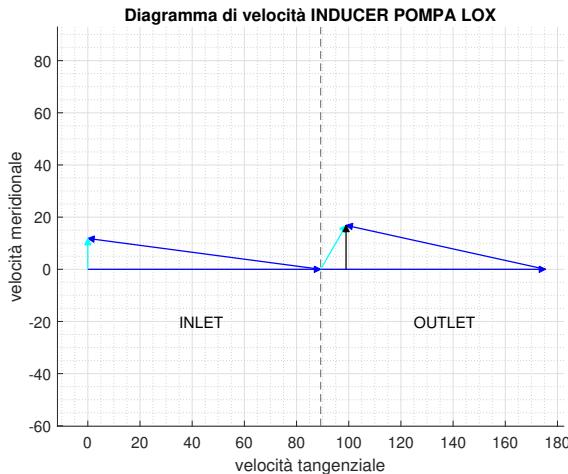


Figura 43: Inducer LOX

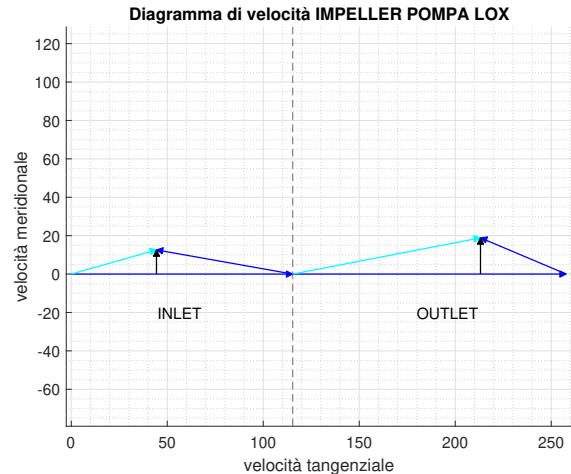


Figura 44: Impeller LOX

## G.2. Triangoli velocità Pompa RP-1

$$\overrightarrow{u_{0ind}} = 73.1802 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{v_{0ind}} = -73.1802 \vec{i}_u + 10.6488 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{c_{0ind}} = 0 \vec{i}_u + 10.6488 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{u_{1ind}} = 70.6747 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{v_{1ind}} = -62.7036 \vec{i}_u + 15.1711 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{c_{1ind}} = 7.9711 \vec{i}_u + 15.1711 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{u_{1imp}} = 138.1757 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{v_{1imp}} = -60.8308 \vec{i}_u + 5.2854 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{c_{1imp}} = 77.3449 \vec{i}_u + 5.2854 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{u_{2imp}} = 170.5873 \vec{i}_u + 0 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{v_{2imp}} = -18.7596 \vec{i}_u + 7.9282 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

$$\overrightarrow{c_{2imp}} = 151.8276 \vec{i}_u + 7.9282 \vec{i}_m \text{ [m/s]}$$

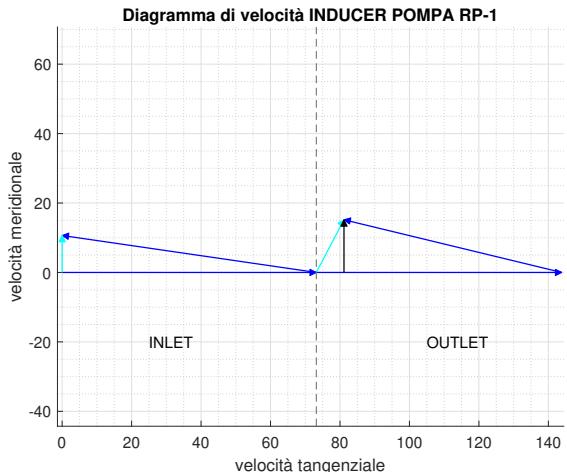


Figura 45: Inducer RP-1

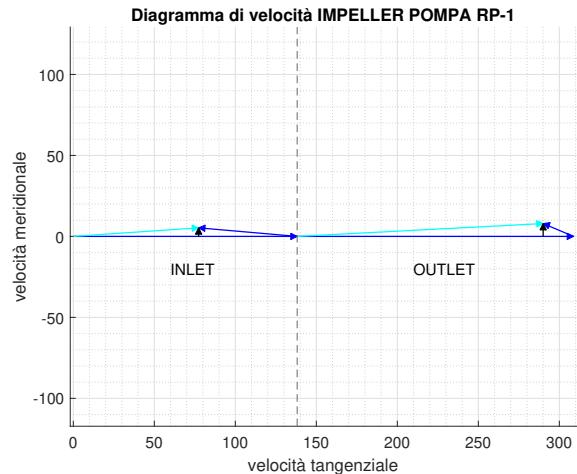


Figura 46: Impeller RP-1

### G.3. Triangoli velocità Turbina

Per poter risolvere il problema si sono assunti i seguenti requisiti forniti dal manuale del motore F-1 [14]

| $T_{in} [K]$ | $p_i n [bar]$ | $\epsilon$ | $O/F$ | $\dot{m} [kg/s]$ | $\omega [rad/s]$ | $U/C_0 [-]$ |
|--------------|---------------|------------|-------|------------------|------------------|-------------|
| 1062         | 67.57         | 16.4       | 0.416 | 75.75            | 574.4            | 0.225       |

Tabella 23: Requisiti del sistema turbina tratti da [14], dato su rapporto U/C ricavato da Figura 14 da fonte [7]: il valore 0.225 massimizza il rendimento

Inoltre abbiamo ipotizzato alcuni rendimenti:

| $\eta_{tot}$ | $k_n$ | $\eta_n = k_n^2$ | $k_{blade}$ |
|--------------|-------|------------------|-------------|
| 0.6          | 0.96  | 0.9216           | 0.89        |

**Tabella 24:** Ipotesi rendimenti: ugelli e palette. Ipotesi tratte da [7] dove viene trattata una turbina VC per un motore booster-stage nominato 'A-1' a coppia (RP-1/LOX) con una spinta che è circa la metà di quella dell'F-1.

In particolare abbiamo ipotizzato un rendimento  $\eta_{tot}$  di turbina VC generico. Il parametro  $k_n$  indica quanto la velocità  $C_1$  si discosti in modulo dalla velocità isoentropica  $C_0$ . Il parametro  $k_{blade}$  indica la perdita in modulo di velocità, provocata dall'attrito che il fluido incontra nell'attraversare la palettatura. In particolare, nei rotori la velocità scalata con questo parametro è la velocità relativa. Nello statore è la velocità assoluta ad essere scalata con questo parametro. Definiamo infine le velocità e gli angoli da trovare in questo problema. Supponiamo la turbina VC costituita dai seguenti elementi: sezione nozzle, un rotore, uno statore e un rotore. La nomenclatura è definita dalla seguente immagine, con  $\vec{v}_i$  si indica la velocità relativa mentre con  $\vec{c}_i$  si indica la velocità assoluta. Con  $\vec{U}$  si indica la velocità tangenziale, supponendo di essere ad un raggio medio della palettatura dall'albero. Supponiamo di voler definire tutte le velocità assolute in modulo  $C_i$  e tutti gli angoli assoluti  $\alpha_i$ . Da cui si possono definire i valori vettoriali delle velocità  $\vec{C}_i$ . In questo modo possiamo chiudere il problema perché le velocità relative sono  $\vec{V}_i = \vec{C}_i - \vec{U}$ . Per cui possiamo definire il sistema di equazioni per trovare i valori di velocità e angoli assoluti. Si hanno in totale 8 valori incogniti, ovvero una coppia di valori  $(C_i, \alpha_i)$  per ciascuno statore, 2nd rotor). Le equazioni da risolvere sono le seguenti:

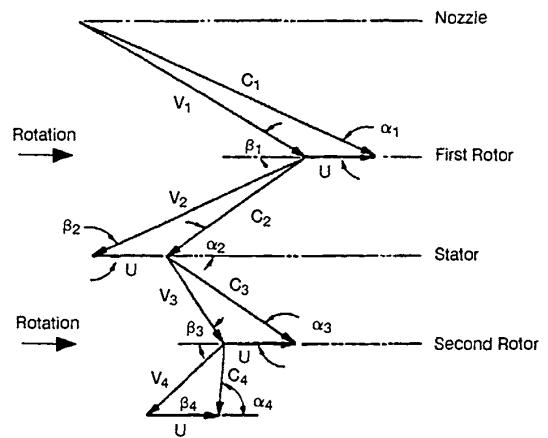


Figura 47: Definizione grandezze

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1 = k_{blade} C_0 & C_1 \\ \frac{U}{C_1} = \frac{1}{4} \cos \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_3 & \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_4 = \frac{\pi}{2} & \alpha_4 \\ C_4 = 0.5 \sqrt{\gamma_{gc} R_{gc} T_{out,t}} & C_4 \\ C_3 = k_n C_2 & C_3 C_2 \\ V_2(C_2, \alpha_2) = k_n V_1(C_1, \alpha_1) & C_1 C_2 \alpha_1 \alpha_2 \\ V_4(C_4, \alpha_4) = k_n V_3(C_3, \alpha_3) & C_3 C_4 \alpha_3 \alpha_4 \end{array} \right.$$

La quantità  $C_0$  è calcolata in questo modo, supponendo una espansione isoentropica:

$$C_0 = \sqrt{2c_{p,gg} T_{in} \left( 1 - e^{\frac{1-\gamma_{gc}}{\gamma_{gc}}} \right)} = 1172.085 \text{ m/s}$$

La seconda equazione è stata ricavata dalla massimizzazione del rendimento della paletta, ricavata dalla fonte [7]. La terza equazione ipotizza che la paletta dello statore sia simmetrica per cui gli angoli della velocità assoluta sono uguali. La quarta equazione assume che il flusso in uscita sia allineato con l'efflusso della turbina, ovvero un flusso totalmente assiale. La quinta equazione assume che il mach all'efflusso sia di 0.5. Le ultime tre equazioni rappresentano la perdita del valore assoluto della velocità per via del passaggio nella palettatura rotorica e statorica. Elaborando il sistema, si possono scrivere le ultime due equazioni in due incognite ovvero si ricava un sottosistema autonomo non lineare, risolto tramite Matlab. Da qui si ricavano tutti i valori di interesse, e si può tracciare il diagramma di velocità.

## H. Appendice ausiliaria capitolo 9

### H.1. Definizione temperature usate nel cooling

La velocità del fluido all'esterno dello strato limite è la velocità del flusso libero  $e$ , attraversando lo strato limite perpendicolaramente alla parete, la velocità diminuisce fino ad annullarsi per soddisfare la condizione di aderenza. La temperatura a parete dovrebbe perciò essere pari alla temperatura di ristagno, ossia la temperatura raggiunta quando tutta l'energia cinetica viene trasformata in energia termica senza alcuna perdita. Nel caso di flussi molto veloci, l'aumento di temperatura è abbastanza elevato da provocare un processo di rallentamento viscoso non adiabatico. Per questo motivo, nell'ipotesi di parete adiabatica verso l'esterno, avviene un significativo scambio termico dal fluido in prossimità della parete, caratterizzato da bassa velocità e alta temperatura statica, verso il fluido più lontano dalla parete. A parete si avrà quindi una temperatura  $T_{aw}$  più bassa della temperatura totale che caratterizza il flusso libero, mentre all'interno dello strato limite, affinché venga soddisfatta l'equazione dell'energia per flussi stazionari, deve essere necessariamente presente una regione in cui la temperatura è più alta di quella del flusso libero. Si delinea un andamento della temperatura come schematizzato in figura.

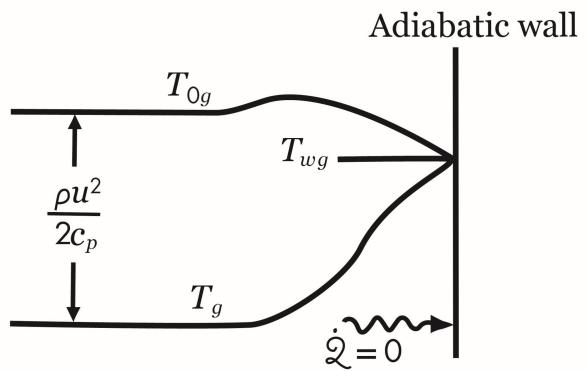
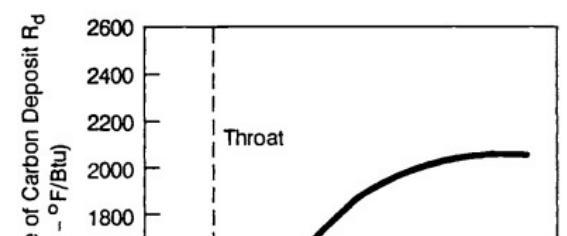


Figura 48: Definizione della temperatura muro - lato gas

A parete si avrà quindi una temperatura  $T_{aw}$  più bassa della temperatura totale che caratterizza il flusso libero, mentre all'interno dello strato limite, affinché venga soddisfatta l'equazione dell'energia per flussi stazionari, deve essere necessariamente presente una regione in cui la temperatura è più alta di quella del flusso libero. Si delinea un andamento della temperatura come schematizzato in figura.

### H.2. Grafico della resistenza termica prodotta dal deposito carbonioso

Il grafico di Figura 49 rappresenta l'andamento della resistenza termica causata dal deposito carbonioso  $R_d$  in funzione del rapporto di espansione  $\epsilon$ . Tale grafico è ricavato sperimentalmente da un endoreattore a propellente liquido LOX/RP-1 e rapporto di miscela O/F pari a 2.35 e pressione camera



di combustione  $p_c$  di 1000 psia [7]. Tali valori ci permettono di concludere che, in prima approssimazione, il grafico possa essere sfruttato per ricavare il valore di  $R_d$  del motore preso in esame.

### H.3. Dettagli sul sistema di introduzione dei gas combusti sulla parete interna dell'ugello aggiunto

Le seguenti immagini mostrano come venga effettuato lo scarico dei gas combusti per il processo di film cooling. Fonti ([12] [5])

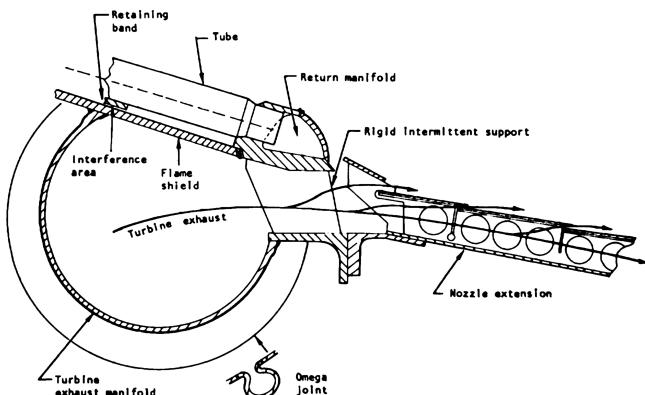


Figura 50: Dettaglio 1

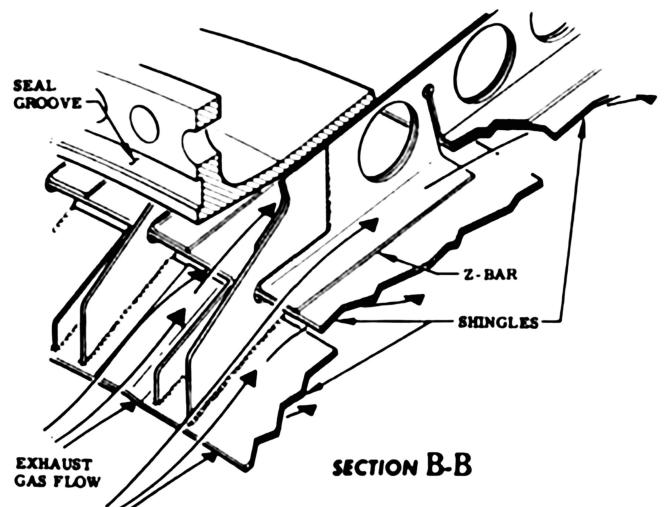


Figura 51: Dettaglio 2

### H.4. Comportamento del fluido RP1 in relazione alla pressione critica

Verranno analizzati due possibili scenari, rappresentati in figura: la curva  $A_i$  descrive l'andamento del legame temperatura della parete – flusso di calore nel caso di pressione minore della pressione critica mentre la curva  $B_i$  rappresenta l'andamento del legame nella condizione di pressione maggiore della pressione critica.

Studiando la curva A, il tratto A1-A2 rappresenta lo scambio di calore nelle condizioni in cui la temperatura della parete lato coolant non ha ancora raggiunto la temperatura di saturazione, in corrispondenza della pressione del refrigerante. Alla temperatura del punto A2, superata la temperatura di saturazione, il combustibile inizia a bollire, creando quindi delle "bolle" nella fascia a ridosso della parete. Queste crescono di dimensione nel flusso liquido più freddo fino a che la velocità di condensazione del vapore supera la velocità di vaporizzazione: le bolle iniziano a collassare. Questo processo, che avviene ad alta frequenza, è detto "Nucleate boiling" (ebollizione nucleata). In corrispondenza di questo fenomeno il coefficiente di scambio termico aumenta, causando un aumento contenuto della temperatura a parete per

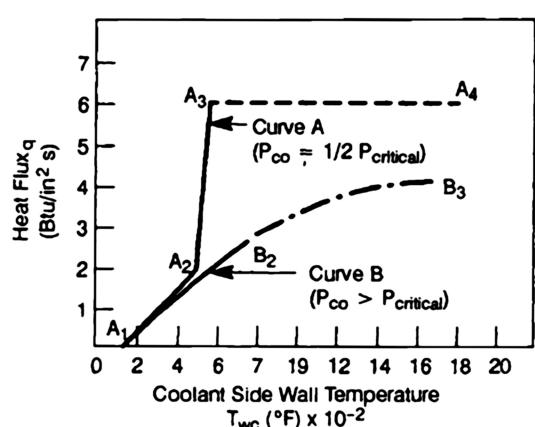


Figura 52: Andamenti di T e flusso di calore, parametrizzati sul valore di pressione

un'ampia gamma di flussi di calore. Lo scambio di calore caratterizzato da ebollizione nucleata è rappresentato dal tratto A2-A3. Alla temperatura corrispondente al punto A3, un ulteriore aumento del flusso di calore porta ad un incremento di concentrazione di bolle tale per cui esse si combinano in un film di vapore a cui consegue una forte diminuzione del coefficiente del trasferimento del calore (tratto A3-A4). Lo scambio di calore raggiunto al punto A3 definisce il limite superiore del nucleate boiling, valore che viene quindi utilizzato come limite di progetto per il sistema di raffreddamento rigenerativo. La curva B descrive le varie fasi del legame flusso di calore- temperatura della parete nel caso in cui la pressione sia al di sopra di quella critica: in queste condizioni il fenomeno di nucleate boiling non si manifesta. Queste condizioni portano ad un aumento di temperatura proporzionale all'incremento del flusso di calore: in questo modo si raggiunge la temperatura limite per un valore di scambio di calore minore.

## I. RPA: definizione problema e funzionamento

### J. Codici MATLAB usati

#### J.1. Simulazione di volo

```

1 clear, clc, close all;
2
3 %% Initial data and parameters
4 dt = 0.01; % time increment
5 tb = 161; % combustion time
6 t = 0:dt:tb; % time vector
7 k = length(t); % number of iterations
8
9 mu = 3.986005e14; % gravitational parameter for Earth
10 R_E = 6373249; % Earth radius
11 T_sl = 33850967; % thrust sea level
12 diam_e = 3.53; % diameter exit nozzle
13 A_e = diam_e^2 * pi / 4 * 5; % area of nozzle exit
14 I_sp = 304; % specific impulse vacuum
15 S = 113; % drag surface
16 g0 = 9.80665; % acceleration of gravity
17 m_d = 242186; % mass dry
18 m_i = 2898941; % total mass at t=0
19 mp_i = m_i - m_d; % propellant mass at t=0
20
21 % propellant mass
22 mp = nan(1,k);
23 mp(1) = mp_i;
24
25 % total mass
26 m = nan(1,k);
27 m(1) = m_i;
28
29 % height
30 h = nan(1,k);
31 h(1) = 0;
32
33 % horizontal shift
34 s = nan(1,k);
35 s(1) = 0;
36
37 % velocity
38 v = nan(1,k);
39 v(1) = 0;
40 v_v = nan(1,k);
41 v_v(1) = 0;
42 v_h = nan(1,k);
43 v_h(1) = 0;
44
```

```

45 % standard atmosphere
46 rho = nan(1,k);
47 c = nan(1,k);
48 Temp = nan(1,k);
49 p = nan(1,k);
50 nu = nan(1,k);
51 [rho(1),c(1),Temp(1),p(1),nu(1)] = atmos(0);
52
53 T_vac = T_s1 + p(1) * A_e;      % thrust vacuum
54 m_dot_5 = T_vac / (g0 * I_sp);  % propellant mass rate 5 motors
55
56 % Mach number
57 Ma = nan(1,k);
58 Ma(1) = 0;
59
60 % acceleration of gravity
61 g = nan(1,k);
62 g(1) = mu / (R_E + h(1))^2;
63
64 % thrust
65 T = nan(1,k);
66 T(1) = T_vac - A_e * p(1);
67
68 % drag
69 D = nan(1,k);
70 D(1) = 1/2 * rho(1) * v(1)^2 * S * drag_coeff(Ma(1));
71
72 % acceleration
73 a = nan(1,k);
74 a(1) = -g(1) + (T(1) - D(1)) / m(1);
75 a_v = nan(1,k);
76 a_v(1) = a(1);
77 a_h = nan(1,k);
78 a_h(1) = 0;
79
80 theta = pitch(t);
81
82 % flight angle
83 phi = nan(1,k);
84 phi(1) = 0;
85
86
87 %% Solution
88 for i = 2:k
89     h(i) = h(i-1) + v_v(i-1)*dt;
90     s(i) = s(i-1) + v_h(i-1)*dt;
91
92     v_v(i) = v_v(i-1) + a_v(i-1)*dt;
93     v_h(i) = v_h(i-1) + a_h(i-1)*dt;
94     v(i) = v(i-1) + a(i-1)*dt;
95
96     phi(i) = atan(v_h(i) / v_v(i));
97
98     [rho(i),c(i),Temp(i),p(i),nu(i)] = atmos(h(i));
99
100    Ma(i) = v(i) / c(i);
101    g(i) = mu / (R_E + h(i))^2;
102    D(i) = 1/2 * rho(i) * v(i)^2 * S * drag_coeff(Ma(i));
103
104    if t(i) <= 135
105        mp(i) = mp(i-1) - m_dot_5 * dt;

```

```

106     m(i) = m(i-1) - m_dot_5 * dt;
107     T(i) = T_vac - A_e .* p(i);
108 else
109     mp(i) = mp(i-1) - 4/5 * m_dot_5 * dt;
110     m(i) = m(i-1) - 4/5 * m_dot_5 * dt;
111     T(i) = 4/5 * T_vac - A_e .* p(i);
112 end
113
114 a_v(i) = -g(i) + (T(i) * cos(theta(i)) - D(i) * cos(phi(i))) / m(i);
115 a_h(i) = (T(i) * sin(theta(i)) - D(i) * sin(phi(i))) / m(i);
116 a(i) = sqrt(a_v(i)^2 + a_h(i)^2);
117
118 end
119
120 %% Plots
121
122 % height
123 figure
124 plot(t, h)
125 xlabel("t [s]")
126 ylabel("h [m]")
127 title("Quota di volo")
128 xline(135, '--r')
129
130 % velocity
131 figure
132 plot(t, v)
133 xlabel("t [s]")
134 ylabel("v [m/s]")
135 title("Velocità di volo")
136 xline(135, '--r')
137
138 % temperature
139 figure
140 plot(t, Temp)
141 xlabel("t [s]")
142 ylabel("T [K]")
143 title("Temperatura ambientale")
144
145 % pressure
146 figure
147 plot(t, p)
148 xlabel("t [s]")
149 ylabel("p [Pa]")
150 title("Pressione ambientale")
151
152 % Mach number
153 figure
154 plot(t, Ma)
155 xlabel("t [s]")
156 ylabel("Ma [-]")
157 title("Numero di Mach")
158 xline(135, '--r')
159
160 % acceleration of gravity
161 figure
162 plot(t, g)
163 xlabel("t [s]")
164 ylabel("g [m/s^2]")
165 title("Accelerazione di gravità ")
166

```

```

167 % thrust
168 figure
169 plot(t, T)
170 xlabel("t [s]")
171 ylabel("T [N]")
172 title("Spinta dei motori")
173 xline(135, '--r')
174
175 % drag
176 figure
177 plot(t, D)
178 xlabel("t [s]")
179 ylabel("D [N]")
180 title("Drag aerodinamico")
181
182 % acceleration
183 figure
184 plot(t, a)
185 xlabel("t [s]")
186 ylabel("a [m/s^2]")
187 title("Accelerazione del razzo")
188 xline(135, '--r')
189
190 % total mass
191 figure
192 plot(t, m)
193 xlabel("t [s]")
194 ylabel("m [kg]")
195 title("Massa totale del razzo")
196 xline(135, '--r')
197
198 % trajectory
199 figure
200 plot(s, h, 'r')
201 xlabel("x [m]")
202 ylabel("y [m]")
203 title("Traiettoria di volo")

```

### J.1.1 Parametri adimensionali lanciatore

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 % Dati:
6 % M_0: massa iniziale del sistema lanciatore [kg]
7 % M_u: massa carico utile del lanciatore [kg]
8 % coincide con la massa degli stadi superiori escluso il primo S-IC
9 % M_s: massa della struttura del lanciatore [kg]
10 % M_p: massa del propellente per il primo stadio S-IC [kg]
11 % M_m: massa motore [kg]
12
13 % Dati iniziali ricavati da simulazione lancio e manuale F1 Rocketdyne
14 M_0 = 2898941;
15 M_u = 824511;
16 M_s = 242186;
17 M_p = 2074430; % 2656755 - 582325 kg
18 M_m = 8445.4363; % 18619 lb - manuale F1 schema pagina 10-
19 M_tank = 124799.5412;
20

```

```

21 % eps_u: indice di massa del carico utile
22 eps_u = M_u / (M_0 - M_u);
23
24 % zeta_u: rapporto di massa del carico utile
25 zeta_u = M_u / M_0;
26
27 % eps_s: indice strutturale delle masse inerti
28 eps_s = M_s / (M_0 - M_u);
29
30 % MR: mass ratio
31 MR = (M_0 - M_p) / M_0 ;
32
33 % zeta_p: frazione di propellente
34 zeta_p = M_p / M_0;
35
36 % zeta_motore: rapporto di massa motore
37 zeta_motore = 5*M_m / M_0;

```

## J.2. Codici serbatoi

### J.2.1 Serbatoio RP-1

```

1 clear; clc;
2 %% RP-1
3
4 rhoRP1 = 810; %kg/m^3;
5 g = 9.81;
6
7 Vtp = 27939; %ft^3 volume propellente
8 Vt_p = 48278996.2;%in^3
9 a = 198; %inch
10 b = 120; %inch
11 lc = 276; %inch
12 NPSH = 660; %inch
13
14 %% volumi
15
16 V_e = (2*pi*a^2*b)/3; %inch^3
17 V_c = pi*a^2*lc; %inch^3
18 l_tubi = lc + 2*b; %inch
19 d_tubi = 17; %inch
20 V_tubi = 5*pi*(d_tubi/2)^2*l_tubi; %volume approssimato occupato dai tubi di lox %
    inch^3
21
22 V_tot = 2*V_e + V_c - V_tubi; %inch^3
23
24 V_u = V_tot - Vt_p; %inch^3
25 Vu_1 = V_e - V_u; %prova che l'ullage <= minore del volume dell'ellissoide, quindi bu
    meno di b
26 syms b_2
27 H_u = solve( V_u == (2*pi*a^2*b_2)/3, b_2); % altezza ullage inch 90.9363
28
29 %% pressioni
30 H_in = lc + 2*b - H_u; %inch
31 H = H_in/39.37; %m
32
33 p_u = 25.2 ; %pressione ullage psia
34
35 pi_n = rhoRP1*g*H;
36 %p_i = pi_n /6895 % psia
37

```

```

38 p_i = 13.38; %psia
39 p_t = p_i + p_u; %psia
40
41 %pt = 40.13; %psi
42
43 %% materiale
44
45 rho = 0.103; %lb/in^3
46 s_r = 69000; %psi
47 s_y = 57000; %psi
48 E = 10.6e6; %psi
49 v = 0.33; %poisson
50 % sicurezza
51 S_r = s_r/1.3;
52 S_y = s_y/1.25;
53
54
55
56 %% spessori
57
58 k = a/b; %ellipse ratio
59 K = 0.8; % stress factor
60 R = a*k;
61
62 t_e = (p_t*a*(K+0.5*k))/(2*S_y); %spessore elissoide %inch
63 t_c = (p_t*a)/(S_y); %spessore cilindro %inch
64
65 %%
66 t_e_m = t_e*25.4; %mm
67 t_c_m = t_c*25.4; %mm
68
69 %% aree
70
71 e = (sqrt(a^2-b^2))/a; % eccentricitÃ
72
73 A_e = a^2 + (pi*b^2*log((1+e)/(1-e)))/(2*e); %area ellissoidale
74
75 A_c = 2*pi*a*lc;
76
77 A_tot = 2*A_e + A_c; %inch^2
78
79 %% peso
80
81
82 E1 = 2*k+(1/sqrt(k^2-1))*log((k+sqrt(k^2-1))/(k-sqrt(k^2-1))); %design factor
83 W_e = (pi*a^2*t_e*E1*rho)/(2*k);
84
85 W_c = 2*pi*a*lc*t_c*rho;
86
87 PesoRP1 = 2*W_e + W_c; %lb

```

### J.2.2 Serbatoio LOX

```

1 clear;clc;
2 %% LOX
3
4 rhoLOX = 1141; % kg/m^3
5 g = 9.81;
6
7 Vtp = 44716; %ft^3 volume propellente

```

```

8 Vt_p = 77269485;%inch^3
9 a = 198; %inch %raggio della sezione cilindrica del serbatoio
10 b = 120; %inch altezza cupola elissoidale
11 lc = 528; %inch %altezza parte cilindrica
12 NPSH = 720; %inch %vedi pompe
13
14 %% volumi
15
16 V_e = (2*pi*a^2*b)/3; %inch^3
17 V_c = pi*a^2*lc; %inch^3
18 V_he = 4*53568; % volume occupato da elio %inch^3
19 V_tot = 2*V_e + V_c - V_he; %inch^3
20
21 V_u = V_tot - Vt_p; %inch^3
22 Vu_1 = V_e - V_u; %prova che l'ullage Ã“ minore del volume dell'ellissoide, quindi bu
    meno di
23 syms b_2
24 H_u = solve( V_u == (2*pi*a^2*b_2)/3, b_2); % altezza ullage inch
25
26 %% pressioni
27
28 H_in = lc + 2*b - H_u; %inch
29 H_prop = H_in /39.37; %m
30
31 p_u = 23 ; %pressione ullage +-2.5 psia
32
33 pi_n = rho*g*H_prop; %Pascal
34 %p_i = pi_n /6895 % psia
35
36 p_i = 27.92; %psia
37 p_t = p_i + p_u; %psia
38 %pt = 54.00755736; %psi
39
40
41 %% materiale
42
43 rho = 0.103; %lb/in^3
44 s_r = 69000; %psi
45 s_y = 57000; %psi
46 E = 10.6e6; %psi
47 v = 0.33; %poisson
48 % sicurezza
49 S_r = s_r/1.3;
50 S_y = s_y/1.25;
51
52
53
54 %% spessori
55
56 k = a/b; %ellipse ratio
57 K = 0.8; % stress factor
58 R = a*k;
59
60 t_e = (p_t*a*(K+0.5*k))/(2*S_y); %spessore ellissoide %inch
61 t_c = (p_t*a)/(S_y); %spessore cilindro %inch
62
63 %%
64
65 t_e_m = t_e*25.4; %mm
66 t_c_m = t_c*25.4; %mm
67

```

```

68 %% aree
69
70 e = (sqrt(a^2-b^2))/a; % eccentricitÀ
71
72 A_e = a^2 + (pi*b^2*log((1+e)/(1-e)))/(2*e); %area ellissoidale
73
74 A_c = 2*pi*a*lc;
75
76 A_tot = 2*A_e + A_c; %inch^2
77
78 %% peso
79
80
81 E1 = 2*k+(1/sqrt(k^2-1))*log((k+sqrt(k^2-1))/(k-sqrt(k^2-1))); %design factor
82 W_e = (pi*a^2*t_e*E1*rho)/(2*k);
83
84 W_c = 2*pi*a*lc*t_c*rho;
85
86 PesoLOX = 2*W_e + W_c; %lb

```

### J.3. Camera di Combustione

```

1 clear; clc;
2 %% Combustion chamber
3
4 L_star = 1; % lunghezza caratteristica, m
5 R_t = 0.4445; % raggio di gola, m
6 A_t = pi*R_t^2; % area di gola, m^2
7 V_cc = L_star * A_t; % volume camera di combustione, m^3
8 % volume compreso il convergente (cilindro + convergente)
9
10 % calcolo c_star
11 R = 8314; % [kJ / mol * K]
12 g0 = 9.81; % [m/s^2]
13 gamma = 1.1777;
14 GAMMA = sqrt(gamma.*((2/(gamma+1)).^(((gamma+1)/(gamma-1))));% Vandencherkove function
15 T_c = 3572 ; % temperatura in camera; K
16 p_c = 77.6e5; % pressione in camera, Pa
17 MM = 22.2095; % massa molare, Kg/kmol
18
19 c_star = (p_c .* A_t) ./ (GAMMA .* (p_c ./ (sqrt((R / MM).*T_c))) .* A_t); % velocità caratteristica, m/s
20
21 t_r = L_star/c_star; % tempo residenza, s
22
23 %% misure della parte cilindrica
24
25 eps = 1.307; % A_cil/A_t rateo di contrazione
26
27 % V_c È il volume con il convergente, assumiamo
28 % il convergente come una % del volume della porzione
29 % della camera cilindrica
30
31 A_cil = eps*A_t;
32 R_cil = sqrt(A_cil/pi);
33
34 % studio parte convergente
35 a = (R_cil-R_t);
36 theta_deg = 13; % deg
37 theta = deg2rad(theta_deg);

```

```

38
39 L_conv = a/tan(theta);
40 V_conv = ((A_cil + A_t + sqrt(A_cil*A_t))*L_conv)/3; %volume parte convergente
41
42 % ritorniamo al cilindro
43 L_cil = (V_cc - V_conv)/(A_cil);
44
45 V_cil = L_cil*A_cil; % volume corretto della parte cilindrica
46
47
48 %% area interna delle pareti
49
50 A_tot = 2*L_cil*sqrt(pi*eps*A_t) + csc(theta)*(eps-1)*A_t; % area totale della camera
      di combustione (cilindro + conv)
51
52 % apo = sqrt(L_conv^2 + a^2)
53 % A_conv = pi*(R_c + R_t)*apo;
54 % A_cil = 2*pi*R_c*L_c;
55 % A_tot2 = A_conv + A_cil;

```

### J.3.1 Modellazione ugello

```

1 function [x, y, Ln_cone, Ln, Nx, Ny, Qx, Qy, Ex, Ey] = bell_nozzle(eps, Rt,
2   bell_percentage, theta_n_deg, theta_e_deg)
3
4 theta_n = deg2rad(theta_n_deg);
5 theta_e = deg2rad(theta_e_deg);
6
7 % Length of a standard 15-degree half angle conical nozzle
8 Ln_cone = ((sqrt(eps) - 1) * Rt) / (tan(deg2rad(15)));
9
10 % Radius of the nozzle exit
11 Re = sqrt(eps)*Rt;
12
13 % Nozzle length for a __% bell
14 Ln = bell_percentage * ((sqrt(eps) - 1) * Rt) / (tan(deg2rad(15)));
15
16 x = [];
17 y = [];
18
19 % Equation for the throat:
20
21 % Entrant section
22 theta_i = [deg2rad(-103):0.01:deg2rad(-90)];
23 for i = 1:length(theta_i)
24   x_i = 1.5*Rt*cos(theta_i(i));
25   y_i = 1.5*Rt*sin(theta_i(i)) + 1.5*Rt + Rt;
26   x = [x; x_i];
27   y = [y; y_i];
28 end
29
30 % Exit section
31 theta_exit = [deg2rad(-90):0.01:deg2rad(theta_n-90)];
32 for i = 1:length(theta_exit)
33   x_i = 0.382*Rt*cos(theta_exit(i));
34   y_i = 0.382*Rt*sin(theta_exit(i)) + 0.382*Rt + Rt;
35   x = [x; x_i];
36   y = [y; y_i];
37 end

```

```

38 % Points for the mathematical construction of the bell:
39
40 % N: inflection point
41 Nx = x(end,1);
42 Ny = y(end,1);
43
44 % E: exit point of the nozzle
45 Ex = Ln;
46 Ey = Re;
47
48 % Q: cross point
49 m1 = tan(theta_n);
50 m2 = tan(theta_e);
51 C1 = Ny - m1*Nx;
52 C2 = Ey - m2*Ex;
53 Qx = (C2-C1) / (m1-m2);
54 Qy = (m1*C2 - m2*C1) / (m1 - m2);
55
56 % Equation for the bell: quadratic Bezier curve:
57
58 t = [0:0.01:1];
59 for i = 1:length(t)
60     x_b = (1-t(i)).^2 * Nx + 2*(1-t(i))*t(i) * Qx + t(i).^2 * Ex;
61     y_b = (1-t(i)).^2 * Ny + 2*(1-t(i))*t(i) * Qy + t(i).^2 * Ey;
62     x = [x; x_b];
63     y = [y; y_b];
64 end

```

```

1 function [alpha_i, alpha_f] = bell_angles(k, eps)
2 if k < 0.6 || k > 1
3     error("Lunghezza percentuale non corretta")
4 elseif eps < 4 || eps > 98
5     error("Rapporto delle aree errato")
6 end
7
8 theta_60_i = [3.6265456110319585, 28.571787967282315;
9 3.850965152280278, 29.155851379881398;
10 4.089265845912848, 29.717664757714804;
11 4.3422869685990175, 30.196040505176903;
12 4.610969116643579, 30.69110377871327;
13 4.896268408784252, 31.163917017483953;
14 5.199230618838567, 31.664542799711736;
15 5.520928027280657, 32.13735603848242;
16 5.8625092535404875, 32.56010669903033;
17 6.225216799488704, 32.966169833503976;
18 6.610354221963852, 33.34998293321195;
19 7.019316280498156, 33.72823352422849;
20 7.453576597207831, 34.10092160655362;
21 7.914690525604948, 34.45135965411307;
22 8.404331168954116, 34.80179770167252;
23 8.92425625608514, 35.141110731849125;
24 9.476338452872218, 35.4692987446429;
25 10.062570182181283, 35.79192424874525;
26 10.685080477594088, 36.13123727892186;
27 11.346097221606197, 36.464987800407044;
28 12.04798292874117, 36.770925778435135;
29 12.793273080366916, 37.06017623038897;
30 13.58466161873954, 37.343864173651376;
31 14.424993817514663, 37.61642709953095;
32 15.317308040142638, 37.88899002541052;
33 16.26482628030584, 38.16711545998152;

```

```

34 | 17.270936828729116, 38.42855336847824;
35 | 18.339297950081715, 38.70111629435782;
36 | 19.473723570846506, 38.95699169416312;
37 | 20.678313887678197, 39.207304585277015;
38 | 21.957382015570218, 39.43536744162523;
39 | 23.315595292232082, 39.6801178240477;
40 | 24.757813481740836, 39.91930569777875;
41 | 26.289273301208876, 40.175181097584066;
42 | 27.91545454692539, 40.42549398869796;
43 | 29.642262062956707, 40.69249440588611;
44 | 31.475799983374074, 40.920557262234325;
45 | 33.42273912949364, 41.143057609891116;
46 | 35.49014859134087, 41.38224548362217;
47 | 37.68539572185319, 41.60474583127896;
48 | 40.01641425872787, 41.82168367024433;
49 | 42.49156673228925, 42.02193398313545;
50 | 45.11988736892896, 42.24443433079224;
51 | 47.91076409515321, 42.46137216975761;
52 | 50.87424948830328, 42.67274750003156;
53 | 54.02101771120954, 42.8785603216141;
54 | 57.3624938341588, 43.10106066927089;
55 | 60.91072972375538, 43.34024854300194;
56 | 64.67849786267627, 43.590561434115834;
57 | 68.67927523586783, 43.82974930784689;
58 | 72.92767063539554, 44.09674972503504;
59 | 77.43871192731193, 44.335937598766094;
60 | 82.22865958519432, 44.552875437731466;
61 | 87.31492256703807, 44.775375785388256;
62 | 92.71579691736312, 44.99787613304505;
63 | 98.12289743780838, 45.189782682899036];
64 |
65 theta_60_f = [3.6495648425632, 23.804718018735525;
66 3.875094175050214, 23.248467149593537;
67 4.11457014844373, 22.72559133260008;
68 4.37978216487587, 22.204801456365892;
69 4.627296840556893, 21.81681647513936;
70 4.9255673335389565, 21.323839142362278;
71 5.229996453963314, 20.895525973122947;
72 5.5532608882877765, 20.517275382106398;
73 5.896517874421634, 20.166837334546948;
74 6.261016990344841, 19.872024373901702;
75 6.648047981577903, 19.57721141325645;
76 7.058989697037094, 19.254585909154102;
77 7.495342226395706, 18.94864793112601;
78 7.958683717499586, 18.670522496555016;
79 8.450664360738356, 18.3868345532926;
80 8.973086126478432, 18.147646679561554;
81 9.527807884798262, 17.91402131452191;
82 10.11683090193872, 17.69152096686512;
83 10.742306481371566, 17.519083197431108;
84 11.406461280471046, 17.357770445379927;
85 12.111697364601618, 17.218707728094437;
86 12.860495868973583, 17.03514494127758;
87 13.655588396657954, 16.85158215446073;
88 14.499837048182362, 16.668019367643872;
89 15.396311366328263, 16.512269124284117;
90 16.348230990746245, 16.37320640699862;
91 17.359005684394248, 16.23414368971312;
92 18.432296229737712, 16.11176849850189;
93 19.57188526824028, 15.944893237759295;
94 20.78199601967774, 15.822518046548055;

```

```

95 | 22.066926749399094 , 15.700142855336821;
96 | 23.43128494072993 , 15.56664264674275;
97 | 24.880018644109203 , 15.444267455531502;
98 | 26.418326152280493 , 15.321892264320269;
99 | 28.051745727028 , 15.199517073109028;
100 | 29.786181653833133 , 15.088266899280633;
101 | 31.627807422087546 , 14.954766690686554;
102 | 33.58336409918674 , 14.849079025549578;
103 | 35.65983342338511 , 14.743391360412602;
104 | 37.86472145798197 , 14.648828712658464;
105 | 40.20594022602302 , 14.554266064904326;
106 | 42.69193612322729 , 14.465265925841614;
107 | 45.331645018216776 , 14.376265786778895;
108 | 48.134533090051896 , 14.276140630333337;
109 | 51.11084721716324 , 14.209390526036294;
110 | 54.27115349265167 , 14.13151540435642;
111 | 57.62689191298502 , 14.059202791367959;
112 | 61.190076621931105 , 13.975765160996666;
113 | 64.97355435125618 , 13.886765021933947;
114 | 68.9909704006253 , 13.797764882871228;
115 | 73.25681855981547 , 13.714327252499928;
116 | 77.78640173479283 , 13.625327113437208;
117 | 82.59602337275913 , 13.53076446568307;
118 | 87.7030988670607 , 13.447326835311777;
119 | 93.12595494061338 , 13.363889204940477;
120 | 98.2270252320168 , 13.274889065877758;];
121 |
122 theta_70_i = [3.6257512696302276 , 25.495720660927148;
123 | 3.850101828258263 , 26.007471460537776;
124 | 4.088332903635668 , 26.51365975145698;
125 | 4.341280823633258 , 26.941972920696305;
126 | 4.6098751501945445 , 27.35916107255279;
127 | 4.895075728819209 , 27.74297417226076;
128 | 5.197920900279414 , 28.126787271968727;
129 | 5.5194957287852375 , 28.493912845602434;
130 | 5.860967443048823 , 28.866600927927564;
131 | 6.223559876049011 , 29.228163992869852;
132 | 6.608586935565943 , 29.595289566503563;
133 | 7.017425758548484 , 29.94572761406301;
134 | 7.451548452896858 , 30.2794781355482;
135 | 7.912508701170025 , 30.579853604884867;
136 | 8.40198441194488 , 30.88022907422154;
137 | 8.921728977813856 , 31.16391701748395;
138 | 9.47364357096355 , 31.47541750420346;
139 | 10.059704602705047 , 31.792480499614392;
140 | 10.610988341089916 , 32.03834338377515;
141 | 11.34284964911824 , 32.44514818607432;
142 | 12.044546861895997 , 32.7655486867001;
143 | 12.875125150506722 , 32.99954488565249;
144 | 13.67157703660464 , 33.283232828914905;
145 | 14.51728572735667 , 33.555795754794474;
146 | 15.41530902583087 , 33.82835868067404;
147 | 16.368883056015385 , 34.10092160655361;
148 | 17.381409698537723 , 34.34567198897609;
149 | 18.456567993953474 , 34.59042237139856;
150 | 19.598224372148252 , 34.829610245129615;
151 | 20.81051596188444 , 35.0799231362435;
152 | 22.09778778024474 , 35.324673518665975;
153 | 23.46469540254121 , 35.57498640977987;
154 | 24.916156124291476 , 35.82529930089376;
155 | 26.45743160643389 , 36.09229971808191;

```

```

156 | 28.094036914395392, 36.35373762657864;
157 | 29.831855811981896, 36.604050517692535;
158 | 31.67712115480628, 36.832113374040745;
159 | 33.63651304461498, 37.05461372169754;
160 | 35.71711748859861, 37.28267657804575;
161 | 37.92638878202368, 37.49961441701113;
162 | 40.27232982338481, 37.72211476466792;
163 | 42.76344707085262, 37.96686514709039;
164 | 45.40863885938164, 38.20605302082144;
165 | 48.21739532034639, 38.428553368478234;
166 | 51.199908009689764, 38.65661622482645;
167 | 54.36690561123119, 38.88467908117466;
168 | 57.72979953755258, 39.11274193752287;
169 | 61.30065849430382, 39.32967977648825;
170 | 65.09241761618499, 39.55218012414504;
171 | 69.11868904486282, 39.76911796311041;
172 | 73.3940042517726, 39.98605580207578;
173 | 77.933736891247, 40.197431132349735;
174 | 82.7541730403247, 40.39211893654943;
175 | 87.87280248008301, 40.592369249440544;
176 | 93.30807366900964, 40.79818207102308;
177 | 98.4209242433995, 40.96664661996322;];
178 |
179 theta_70_f = [3.6242320199200666, 19.610586465404964;
180 | 3.848217220982779, 19.13221071794286;
181 | 4.086058129837358, 18.698335040012118;
182 | 4.338607503232664, 18.292271905538463;
183 | 4.606779116892341, 17.925146331904763;
184 | 4.8915284968357025, 17.563583266962468;
185 | 5.19389085030362, 17.2353952541687;
186 | 5.514947639509715, 16.918332258757772;
187 | 5.855850333234441, 16.601269263346843;
188 | 6.2178355446592315, 16.30645630270159;
189 | 6.602220769817567, 16.061705920279117;
190 | 7.010360273989444, 15.800268011782386;
191 | 7.443750998251964, 15.577767664125588;
192 | 7.903925177965388, 15.338579790394533;
193 | 8.39254076870839, 15.088266899280647;
194 | 8.911386972601864, 14.876891569006695;
195 | 9.462316940656782, 14.676641256115573;
196 | 10.047323052081898, 14.498640977990135;
197 | 10.668501291459762, 14.326203208556123;
198 | 11.32808402953609, 14.153765439122104;
199 | 12.02847422288816, 14.014702721836613;
200 | 12.772157862381743, 13.864514987168278;
201 | 13.539267654208519, 13.746792075953493;
202 | 14.429197571206027, 13.62291500739557;
203 | 15.280560522636618, 13.521864451776821;
204 | 16.236116015801958, 13.358326696249073;
205 | 17.23992474418019, 13.19145143550648;
206 | 18.30585263007265, 13.069076244295239;
207 | 19.437693506843786, 12.952263561775425;
208 | 20.639507311359964, 12.829888370564184;
209 | 21.915645464782926, 12.718638196735796;
210 | 23.270677862296935, 12.601825514215975;
211 | 24.709481385230887, 12.479450323004741;
212 | 26.23725513282872, 12.36263764048492;
213 | 27.859479261434537, 12.24026244927368;
214 | 29.582027376739784, 12.129012275445284;
215 | 31.411067983553878, 12.01219959292547;
216 | 33.35322359713454, 11.906511927788486;

```

```

217 | 35.41547729518787, 11.806386771342929;
218 | 37.605226719578695, 11.700699106205953;
219 | 39.93038481539908, 11.600573949760395;
220 | 42.39925871450524, 11.483761267240581;
221 | 45.02078173928019, 11.366948584720767;
222 | 47.80439210184797, 11.250135902200952;
223 | 50.76011157383699, 11.133323219681131;
224 | 53.89862426913042, 11.027635554544155;
225 | 57.23126014444533, 10.938635415481443;
226 | 60.770054376885895, 10.8718853111844;
227 | 64.52776596685803, 10.82738524165304;
228 | 68.51778107722211, 10.771760154738836;
229 | 72.75471684671079, 10.755072628664578;
230 | 77.25319308637604, 10.654947472219021;
231 | 82.02987832191631, 10.565947333156302;
232 | 87.10184443720269, 10.465822176710745;
233 | 92.4871940279045, 10.332321968116666;
234 | 98.43815677659674, 10.23358743884397];
235
236 theta_80_i = [3.5771450386694776, 23.2095295887536;
237 | 3.804801647497661, 23.637842757992928;
238 | 4.033471053941866, 24.038343383775157;
239 | 4.283017847705118, 24.4444065182488;
240 | 4.548000247199306, 24.839344635339607;
241 | 4.829376618079656, 25.234282752430417;
242 | 5.128149036599154, 25.5958458173727;
243 | 5.4453987272505575, 25.940721356240733;
244 | 5.782284031097197, 26.307846929874444;
245 | 6.140003800916955, 26.65828497743389;
246 | 6.519858993500449, 27.01984804237618;
247 | 6.92320868124827, 27.37028608993563;
248 | 7.351508599360185, 27.715161628803656;
249 | 7.806289559011526, 28.032224624214585;
250 | 8.289210865261156, 28.360412637008356;
251 | 8.801982775643818, 28.649663088962185;
252 | 9.346485945677298, 28.95560106699028;
253 | 9.924641404492256, 29.21703897548701;
254 | 10.538577135062019, 29.50072691874942;
255 | 11.190495202788785, 29.789977370703255;
256 | 11.88270876859323, 30.04029026181714;
257 | 12.635354845427575, 30.306633291614492;
258 | 13.398324188611147, 30.631736640497564;
259 | 14.227133181737988, 30.907677526200647;
260 | 15.114344923315155, 31.125557379624933;
261 | 16.054948200858696, 31.32244851518941;
262 | 17.03381754443192, 31.536605099809076;
263 | 18.087424748522942, 31.74241792139161;
264 | 19.206209223249612, 31.953793251665562;
265 | 20.39423568991716, 32.192981125396614;
266 | 21.655723431002748, 32.415481473053404;
267 | 22.995213310895593, 32.62129429463594;
268 | 24.41762350517023, 32.86604467705841;
269 | 25.927998893480833, 33.09967004209804;
270 | 27.531789085699188, 33.32773289844626;
271 | 29.234736252213246, 33.53354572002879;
272 | 31.04302955523726, 33.74492105030275;
273 | 32.96313434956748, 33.93960885450244;
274 | 35.00197567291187, 34.12317164131929;
275 | 37.16690902940904, 34.30117191944473;
276 | 39.465809831064675, 34.50142223233584;
277 | 41.907005135594005, 34.73504759737547;

```

```

278 | 44.49925578607183, 34.98536048848936;
279 | 47.25178097260532, 35.21342334483758;
280 | 50.17456507175801, 35.44148620118579;
281 | 53.278139539324826, 35.669549057534;
282 | 56.57353038683587, 35.858674353042275;
283 | 60.07277348534407, 36.05336215724196;
284 | 63.78848056805734, 36.25361247013308;
285 | 67.7340168782807, 36.45386278302419;
286 | 71.92356965101544, 36.64855058722389;
287 | 76.37219836368071, 36.832113374040745;
288 | 81.09588803349354, 36.99898863478334;
289 | 86.1118445236312, 37.18255142160019;
290 | 91.43808501849719, 37.371676717108464;
291 | 97.09376727559774, 37.56080201261673;
292 | 100.38553897820455, 37.65536466037087;];
293
294 theta_80_f = [3.6232559006072207, 15.828080555239481;
295 3.8471929672869076, 15.394204877308738;
296 4.084981898890169, 14.999266760217928;
297 4.337483653238953, 14.654391221349897;
298 4.6056022208175165, 14.337328225938968;
299 4.890298227544499, 14.031390247910878;
300 5.192590704599158, 13.719889761191368;
301 5.513562758028649, 13.391701748397601;
302 5.854382165346815, 13.080201261678084;
303 6.216279082960779, 12.790950809724258;
304 6.60055501463459, 12.518387883844689;
305 7.008619307398747, 12.312575062262155;
306 7.441923038255733, 12.129012275445298;
307 7.902024905872942, 11.962137014702705;
308 8.39052634674166, 11.717386632280231;
309 8.90921978079082, 11.461511232474919;
310 9.460008271464714, 11.25013590220096;
311 10.044879607945955, 11.08326064145836;
312 10.66591100585855, 10.916385380715766;
313 11.325338085177641, 10.749510119973174;
314 12.025568030254263, 10.621572420070514;
315 12.769097279793016, 10.49919722885928;
316 13.558603595221035, 10.382384546339459;
317 14.449388311541178, 10.279629840330692;
318 15.287060591954322, 10.13217279174723;
319 16.23224572937189, 10.010623548796232;
320 17.235882312939857, 9.898446290185937;
321 18.423912290084605, 9.723227266406212;
322 19.56304110696586, 9.598070820849266;
323 20.89122643170759, 9.435038747929838;
324 22.41664531241179, 9.262600978495819;
325 23.802634456338154, 9.13410702772402;
326 25.202459328512404, 9.025132425633018;
327 26.760713633275653, 8.908319743113204;
328 28.415336463467337, 8.80263207797622;
329 30.172289016315112, 8.70806943022209;
330 32.037863251483635, 8.607944273776532;
331 34.018773801662235, 8.502256608639556;
332 36.12215032737382, 8.39100643481116;
333 38.35563913542621, 8.302006295748441;
334 40.72719576826178, 8.201881139302884;
335 43.24542170739802, 8.112881000240165;
336 45.91933528802645, 8.018318352486027;
337 48.75861861412226, 7.934880722114734;
338 51.77343993521651, 7.845880583052015;

```

```

339 | 54.97471590772564, 7.768005461372134;
340 | 58.37386508128336, 7.673442813617996;
341 | 61.98323661868607, 7.590005183246703;
342 | 65.81578273733113, 7.50656755287541;
343 | 69.88538581380702, 7.43981744857836;
344 | 74.20659623781175, 7.367504835589905;
345 | 78.79499928458151, 7.295192222601443;
346 | 83.66738137134362, 7.267379679144348;
347 | 88.84091220421683, 7.217317100921569;
348 | 94.33434573799939, 7.167254522698791;
349 | 98.84100705600383, 7.157242007054229];
350 |
351 theta_90_i = [3.576642035342928, 21.234839003299562;
352 3.797923773130578, 21.635339629081788;
353 4.032894298653696, 22.030277746172597;
354 4.282391838094174, 22.391840811114886;
355 4.547308487647952, 22.703341297834395;
356 4.828607631004849, 22.99815425847964;
357 5.127312164852078, 23.304092236507735;
358 5.444510082963138, 23.648967775375763;
359 5.781340409898853, 24.016093349009473;
360 6.139011530145192, 24.3887814313346;
361 6.518802752987543, 24.74478198758547;
362 6.922081612566183, 25.08409501776208;
363 7.35029433528493, 25.395595504481587;
364 7.804987810678805, 25.690408465126836;
365 8.287815454553217, 25.996346443154927;
366 8.800514989147274, 26.30784692987444;
367 9.344912552650845, 26.59153487313685;
368 9.922998199894584, 26.891910342473523;
369 10.536844804093931, 27.19228581181019;
370 11.188664573852352, 27.492661281146862;
371 11.880801860883057, 27.78747424179211;
372 12.615745167440634, 28.071162185054522;
373 13.396157181993182, 28.360412637008352;
374 14.224823069160369, 28.627413054196506;
375 15.145144348087753, 28.951151060037137;
376 16.016209861899814, 29.162638362888643;
377 17.048713004832575, 29.407992508117633;
378 18.047643220143154, 29.629258101097868;
379 19.295059379994658, 29.89540497049881;
380 20.391246773141255, 30.134852909571276;
381 21.65260109770448, 30.390728309376588;
382 22.991970711411092, 30.64104120049048;
383 24.414170657714713, 30.880229074221532;
384 25.92437354439132, 31.136104474026844;
385 27.527928584099985, 31.358604821683638;
386 29.23070643840224, 31.59779269541469;
387 31.03879966164924, 31.831418060454325;
388 32.958721159644206, 32.05948091680253;
389 34.99740042529273, 32.287543773150745;
390 37.16221272565437, 32.5267316468818;
391 39.460901202747856, 32.75479450323001;
392 41.90184267495013, 33.0051073943439;
393 44.49373873946453, 33.24429526807496;
394 47.24603495911545, 33.50573317657169;
395 50.16852325510614, 33.75048355899416;
396 53.271766207835384, 33.98967143272521;
397 56.566986926015815, 34.234421815147684;
398 60.06603943642853, 34.47917219757015;
399 63.78148158905513, 34.712797562609786;

```

```

400 | 67.72671913083097, 34.940860418957996;
401 | 71.91601993172875, 35.17448578399764;
402 | 76.36439342857891, 35.39698613165443;
403 | 81.0878894468517, 35.6139239706198;
404 | 86.10358996355598, 35.8364243182766;
405 | 91.42950098165684, 36.05336215724196;
406 | 97.08484458421461, 36.270299996207335;
407 | 100.37659211473176, 36.40380020480141;];
408 |
409 theta_90_f = [3.5745372735098364, 12.968951087849696;
410 | 3.795464765595673, 12.540637918610365;
411 | 4.030051669347803, 12.129012275445298;
412 | 4.279147894298938, 11.750761684428745;
413 | 4.543653277582503, 11.41144865425214;
414 | 4.824508434118635, 11.072135624075528;
415 | 5.122726015642737, 10.738385102590343;
416 | 5.43937733547293, 10.40463458110515;
417 | 5.775631581749067, 10.143196672608418;
418 | 6.1326920018953155, 9.926258833643047;
419 | 6.511836887673205, 9.731571029443352;
420 | 6.914419123136059, 9.531320716552237;
421 | 7.341896075147181, 9.34219542104396;
422 | 7.795795180031681, 9.141945108152846;
423 | 8.277762313165407, 8.95281981264457;
424 | 8.789530057442166, 8.76925702582772;
425 | 9.332959721207722, 8.619069291159377;
426 | 9.909995824280442, 8.48000657387388;
427 | 10.522721288859069, 8.357631382662646;
428 | 11.173322124606948, 8.224131174068567;
429 | 11.864153133694149, 8.096193474165915;
430 | 12.59770225617347, 7.973818282954674;
431 | 13.376606011977783, 7.851443091743441;
432 | 14.203691140204302, 7.751317935297884;
433 | 15.08192748292387, 7.662317796235165;
434 | 16.01445385881829, 7.562192639789615;
435 | 17.004672688458022, 7.489880026801153;
436 | 18.056090929756635, 7.395317379047015;
437 | 19.1725318457995, 7.309755881720811;
438 | 20.370389434580503, 7.253726248719957;
439 | 21.616803257155823, 7.1558598079248625;
440 | 22.98132965345004, 7.119315811430923;
441 | 24.372697314856225, 7.005941770647631;
442 | 25.879719649028296, 6.928066648967743;
443 | 27.479913903205134, 6.844629018596443;
444 | 29.17908600920434, 6.777878914299407;
445 | 30.983298884723663, 6.700003792619526;
446 | 32.89905753756672, 6.616566162248233;
447 | 34.93329901331715, 6.544253549259771;
448 | 37.09344092447137, 6.516441005802676;
449 | 39.387048552078966, 6.449690901505633;
450 | 41.822576772787826, 6.416315849357119;
451 | 44.40881329019319, 6.416315849357119;
452 | 47.15475409150052, 6.349565745060076;
453 | 50.07060431517444, 6.316190692911562;
454 | 53.166653059456166, 6.255003097305945;
455 | 56.45423128296927, 6.2160655364660045;
456 | 59.94500304942978, 6.154877940860388;
457 | 63.65172286896298, 6.115940380020447;
458 | 67.58783639381375, 6.115940380020447;
459 | 71.76735243759406, 6.11594038002044;
460 | 76.2050810985534, 6.071440310489081;

```

```

461 | 80.9171522591436, 6.015815223574883;
462 | 85.92093036669462, 6.015815223574883;
463 | 91.23413354236257, 6.015815223574883;
464 | 96.87555072496781, 5.965752645352104;
465 | 100.1592497342522, 5.965752645352104; ];
466
467 theta_100_i = [ 3.552683770724678, 20.47343269996584;
468 | 3.7829435027889393, 20.74877688019113;
469 | 4.001975355815062, 20.949417291094363;
470 | 4.225298880872613, 21.15616923752091;
471 | 4.516683359262733, 21.429526807499254;
472 | 4.796074715331889, 21.685402207304563;
473 | 5.0927525950333, 21.952402624492716;
474 | 5.407780374492415, 22.213840532989447;
475 | 5.742297434926554, 22.4808409501776;
476 | 6.097504796007255, 22.742278858674332;
477 | 6.474684594217127, 23.003716767171067;
478 | 6.875204172216506, 23.281842201742055;
479 | 7.300490942638789, 23.543280110238783;
480 | 7.752094338755649, 23.821405544809775;
481 | 8.231636874081449, 24.10509348807219;
482 | 8.740833398161342, 24.372093905260336;
483 | 9.281542750687938, 24.66134435721417;
484 | 9.855684853776824, 24.928344774402323;
485 | 10.465350804463473, 25.206470208973315;
486 | 11.112725873441, 25.479033134852887;
487 | 11.800142176463986, 25.74603355204103;
488 | 12.530081005376976, 26.013033969229184;
489 | 13.305172738889492, 26.280034386417338;
490 | 14.128210466933234, 26.547034803605488;
491 | 15.00214817015786, 26.8029102034108;
492 | 15.930164525073042, 27.075473129290373;
493 | 16.915573547621353, 27.336911037787104;
494 | 17.96194517273359, 27.603911454975258;
495 | 19.073043753438437, 27.870911872163408;
496 | 20.284094306576883, 28.164223344448597;
497 | 21.51768500327696, 28.436663253309035;
498 | 22.849908245645835, 28.71470832046549;
499 | 24.3432108188794, 29.014298175749964;
500 | 25.877758013216777, 29.267910645883084;
501 | 27.341548385697013, 29.578602040429292;
502 | 29.03285494038667, 29.845602457617442;
503 | 30.828795355650254, 30.118165383497015;
504 | 32.73583066605244, 30.390728309376584;
505 | 34.76086061894061, 30.674416252638995;
506 | 36.91112915378103, 30.946979178518568;
507 | 39.194441982889806, 31.23066712178098;
508 | 41.618999948495286, 31.51435506504339;
509 | 44.19359295697009, 31.814730534380057;
510 | 46.927359920298315, 32.08729346025963;
511 | 49.830293913254245, 32.376543912213464;
512 | 52.912740986648515, 32.64910683809303;
513 | 56.18588709629704, 32.92723227266402;
514 | 59.66155506170658, 33.21648272461785;
515 | 63.35217821228348, 33.49460815918884;
516 | 67.27104750062102, 33.761608576377;
517 | 71.43241696579811, 34.04529651963941;
518 | 75.24654598807925, 34.28114688815561;
519 | 80.36450028718795, 34.60359540334505;
520 | 85.58271393214295, 34.88690408465123;
521 | 90.88358181608177, 35.17236191704272;

```

```

522 | 96.15967489259694, 35.430841582280834;
523 | 100.4501817903663, 35.6310160427807;];
524 |
525 theta_100_f = [3.526574302459194, 10.510322246242133;
526 3.744565583142297, 10.187696742139778;
527 3.9760223030449535, 9.831696185888902;
528 4.2217773175061115, 9.447883086180937;
529 4.4827311473625, 9.091882529930068;
530 4.759833745370682, 8.791507060593403;
531 5.054085620125085, 8.54675667817093;
532 5.366532332702786, 8.313131313131294;
533 5.698287923367422, 8.0628184220174;
534 6.050542844916842, 7.790255496137831;
535 6.424586072189264, 7.5455051137153575;
536 6.821766080943727, 7.328567274749979;
537 7.243537807517818, 7.183942048773069;
538 7.69138351593309, 7.033754314104733;
539 8.166921384978556, 6.889129088127817;
540 8.671829584299132, 6.694441283928121;
541 9.207956656297446, 6.505315988419845;
542 9.777240860097521, 6.332878218985833;
543 10.381762326052938, 6.216065536466012;
544 11.023661024300182, 6.09925285394619;
545 11.705261879079396, 5.999127697500633;
546 12.429006602779452, 5.899002541055076;
547 13.197485297269434, 5.7821898585352685;
548 14.01350081459472, 5.68762721078113;
549 14.879959710141742, 5.581939545644154;
550 15.80002956823118, 5.509626932655692;
551 16.776983293635617, 5.431751810975818;
552 17.814358524714333, 5.365001706678775;
553 18.915863040971896, 5.2871265849989015;
554 20.085452354189528, 5.192563937244763;
555 21.327367152483138, 5.103563798182051;
556 22.646089418331357, 5.025688676502163;
557 24.046351444901568, 4.9478135548222895;
558 25.53323043172576, 4.889407213562372;
559 26.83898503830261, 4.813403117533255;
560 28.29893597762675, 4.779218973211435;
561 29.963300657133715, 4.7235938862972375;
562 31.816091628098345, 4.684656325457297;
563 33.78349484836913, 4.664125611559875;
564 35.87252304728537, 4.630750559411354;
565 38.09077316647051, 4.614063033337096;
566 40.44617725273931, 4.591812998571413;
567 42.94714646749441, 4.5417504203486345;
568 45.602834125666845, 4.513937876891539;
569 48.422643466816076, 4.458312789977342;
570 51.4168538626776, 4.413812720445982;
571 54.59621102568808, 4.3693126509146225;
572 57.972324243161054, 4.3637501422232035;
573 61.55723348419282, 4.3637501422232035;
574 65.36382737275625, 4.3637501422232035;
575 69.40581450777167, 4.363750142223196;
576 73.69772201063691, 4.358187633531777;
577 78.2548149241369, 4.313687564000418;
578 83.09395865072068, 4.313687564000418;
579 88.2320671266815, 4.269187494469058;
580 93.68814992867652, 4.263624985777639;
581 98.49166159985528, 4.246937459703375;];
582

```

```

583 switch(k)
584 case 0.6
585     i = 1;
586     while eps > theta_60_i(i, 1)
587         i = i + 1;
588     end
589     alpha_i = interp1([theta_60_i(i-1, 1) theta_60_i(i, 1)], [theta_60_i(i-1, 2)
590                     theta_60_i(i, 2)], eps);
591     i = 1;
592     while eps > theta_60_f(i, 1)
593         i = i + 1;
594     end
595     alpha_f = interp1([theta_60_f(i-1, 1) theta_60_f(i, 1)], [theta_60_f(i-1, 2)
596                     theta_60_f(i, 2)], eps);
597 case 0.7
598     i = 1;
599     while eps > theta_70_i(i, 1)
600         i = i + 1;
601     end
602     alpha_i = interp1([theta_70_i(i-1, 1) theta_70_i(i, 1)], [theta_70_i(i-1, 2)
603                     theta_70_i(i, 2)], eps);
604     i = 1;
605     while eps > theta_70_f(i, 1)
606         i = i + 1;
607     end
608     alpha_f = interp1([theta_70_f(i-1, 1) theta_70_f(i, 1)], [theta_70_f(i-1, 2)
609                     theta_70_f(i, 2)], eps);
610 case 0.8
611     i = 1;
612     while eps > theta_80_i(i, 1)
613         i = i + 1;
614     end
615     alpha_i = interp1([theta_80_i(i-1, 1) theta_80_i(i, 1)], [theta_80_i(i-1, 2)
616                     theta_80_i(i, 2)], eps);
617     i = 1;
618     while eps > theta_80_f(i, 1)
619         i = i + 1;
620     end
621     alpha_f = interp1([theta_80_f(i-1, 1) theta_80_f(i, 1)], [theta_80_f(i-1, 2)
622                     theta_80_f(i, 2)], eps);
623 case 0.9
624     i = 1;
625     while eps > theta_90_i(i, 1)
626         i = i + 1;
627     end
628     alpha_i = interp1([theta_90_i(i-1, 1) theta_90_i(i, 1)], [theta_90_i(i-1, 2)
629                     theta_90_i(i, 2)], eps);
630     i = 1;
631     while eps > theta_90_f(i, 1)
632         i = i + 1;
633     end
634     alpha_f = interp1([theta_90_f(i-1, 1) theta_90_f(i, 1)], [theta_90_f(i-1, 2)
635                     theta_90_f(i, 2)], eps);
636 case 1
637     i = 1;
638     while eps > theta_100_i(i, 1)
639         i = i + 1;
640     end
641     alpha_i = interp1([theta_100_i(i-1, 1) theta_100_i(i, 1)], [theta_100_i(i-1,
642                     2) theta_100_i(i, 2)], eps);
643     i = 1;

```

```

635     while eps > theta_100_f(i, 1)
636         i = i + 1;
637     end
638     alpha_f = interp1([theta_100_f(i-1, 1) theta_100_f(i, 1)], [theta_100_f(i-1,
639                         2) theta_100_f(i, 2)], eps);
640     otherwise
641         if 0.6 < k && k < 0.7
642             [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.6, eps);
643             [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(0.7, eps);
644             alpha_i = interp1([0.6 0.7],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
645             alpha_f = interp1([0.6 0.7],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
646         elseif 0.7 < k && k < 0.8
647             [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.7, eps);
648             [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(0.8, eps);
649             alpha_i = interp1([0.7 0.8],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
650             alpha_f = interp1([0.7 0.8],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
651         elseif 0.8 < k && k < 0.9
652             [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.8, eps);
653             [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(0.9, eps);
654             alpha_i = interp1([0.8 0.9],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
655             alpha_f = interp1([0.8 0.9],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
656         else
657             [alpha_i_1, alpha_f_1] = bellvalues(0.9, eps);
658             [alpha_i_2, alpha_f_2] = bellvalues(1, eps);
659             alpha_i = interp1([0.9 1],[alpha_i_1 alpha_i_2], k);
660             alpha_f = interp1([0.9 1],[alpha_f_1 alpha_f_2], k);
661         end
662     end

```

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 % Nozzle 1:10 data:
6 eps_10 = 10;
7 % throat diameter 35 inches = 0.889 m
8 Rt_10 = 0.4445;
9
10 bell_percentage_eps_10 = 0.8;
11 [theta_n_deg_eps_10, theta_e_deg_eps_10] = bellvalues(bell_percentage_eps_10, eps_10)
12 ;
13 [x_eps_10, y_eps_10, Ln_cone_eps_10, Ln_eps_10, Nx_eps_10, Ny_eps_10, Qx_eps_10,
14 Qy_eps_10, Ex_eps_10, Ey_eps_10] = bell_nozzle(eps_10, Rt_10,
15 bell_percentage_eps_10, theta_n_deg_eps_10, theta_e_deg_eps_10);
16
17 % parabolic arc length
18 si = 0;
19 for i=2:125
20     si = si + sqrt((x_eps_10(i)-x_eps_10(i-1)).^2 + (y_eps_10(i)-y_eps_10(i-1)).^2);
21 end
22
23 % 2D Plot
24 figure
25 grid on;
26 grid minor;
27 hold on;
28 plot(x_eps_10, y_eps_10);
29 plot(Nx_eps_10, Ny_eps_10, 'o');
30 plot(Qx_eps_10, Qy_eps_10, '.k');
31 plot(Ex_eps_10, Ey_eps_10, 'o');

```

```

30 legend('Bell Nozzle 2D', 'Inflection point', 'Cross point', 'Exit point');
31 xlabel('X [m]');
32 ylabel('Y [m]');
33
34 %% 3D Plot
35 n = length(x_eps_10);
36 theta_3d = linspace(0, 2*pi, n);
37 X_eps_10 = repmat(x_eps_10, [1,n]);
38 Y_eps_10 = y_eps_10.*cos(theta_3d);
39 Z_eps_10 = y_eps_10.*sin(theta_3d);
40
41 figure
42 surf(X_eps_10, Y_eps_10, Z_eps_10);
43 axis equal
44 box on
45 xlabel('X [m]');
46 ylabel('Y [m]');
47 zlabel('Z [m]');
48
49 %% Nozzle 1:16 data:
50 eps = 16;
51 % throat diameter 35 inches = 0.889 m
52 Rt = 0.4445;
53
54 bell_percentage = 0.8;
55 [theta_n_deg, theta_e_deg] = bellvalues(bell_percentage, eps);
56
57 [x, y, Ln_cone, Ln, Nx, Ny, Qx, Qy, Ex, Ey] = bell_nozzle(eps, Rt, bell_percentage,
      theta_n_deg, theta_e_deg);
58
59 %% 2D Plot
60 figure
61 grid on;
62 grid minor;
63 hold on;
64 plot(x, y);
65 plot(Nx, Ny, 'o');
66 plot(Qx, Qy, '.k');
67 plot(Ex, Ey, 'o');
68 legend('Bell Nozzle 2D', 'Inflection point', 'Cross point', 'Exit point');
69 xlabel('X [m]');
70 ylabel('Y [m]');
71
72 %% 3D Plot
73 n = length(x);
74 theta_3d = linspace(0, 2*pi, n);
75 X = repmat(x, [1,n]);
76 Y = y.*cos(theta_3d);
77 Z = y.*sin(theta_3d);
78
79 figure
80 surf(X, Y, Z);
81 axis equal
82 box on
83 xlabel('X [m]');
84 ylabel('Y [m]');
85 zlabel('Z [m]');

```

## Bibliografia

- [1] National Aeronautics and Space Administration. *Turbopump Systems for Liquid Rocket Engines*, 8 1974.
- [2] National Aeronautics and Space Administration. *Liquid Rocket Engine Nozzles*, 7 1976.
- [3] George C. Marshall Space Flight Center. *Saturn V Flight Manual SA-507*. National Aeronautics and Space Administration, 10 1969.
- [4] George C. Marshall Space Flight Center. *Saturn V Launch Vehicle Flight Evaluation Report - AS-506 Apollo 11 Mission*. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, 9 1969.
- [5] Configuration accounting, logistics engineering and training. *R-3896-1 - F-1 Engine Familiarization Training Manual*. Rocketdyne, 7 1971.
- [6] D.H. Huang D.K. Huzel. *Design of Liquid Propellant Rocket Engines*, vol. 2. Scientifical and Technichal Division NASA, 1967.
- [7] D.H. Huang D.K. Huzel. *Modern Engineering for Design of Liquid Propellant Rocket Engines*. AIAA, 1992.
- [8] Howard W. Douglass. *Liquid Propellant Gas Generators*. National Aeronautics and Space Administration, 3 1972.
- [9] Joseph C. Oefelein, Vigor Yang. Comprehensive Review of Liquid-Propellant Combustion Instabilities in F-1 Engines. *Journal of Propulsion and Power*, 9(5):657–677, 10 1993.
- [10] Sam Kobilksa & Chip Kopicz. Chemical equilibrium with applications for matlab: Quick start guide. PowerPoint, 7 2017. An optional note.
- [11] Manuel Martin-Sanchez. Lecture 25: Basic turbomachine performance. PDF, 2005. Additional PDFs at <https://ocw.mit.edu/courses/16-512-rocket-propulsion-fall-2005/>.
- [12] Kimble D. McCutcheon. Rocketdyne f-1 engine descripton, 2021.
- [13] NASA Design Criteria Office. *Liquid Rocket Engine Turbines*, 1 1974.
- [14] Rocketdyne. *R-3896-1 - Technical Manual - Engine Data F-1 Rocket Engine*. National Aeronautics and Space Administration & Rocketdyne, 3 1967.
- [15] Rocketdyne. *R-3896-1A - Technical Manual Supplement - Engine Data F-1 Rocket Engine*. National Aeronautics and Space Administration & Rocketdyne, 3 1967.